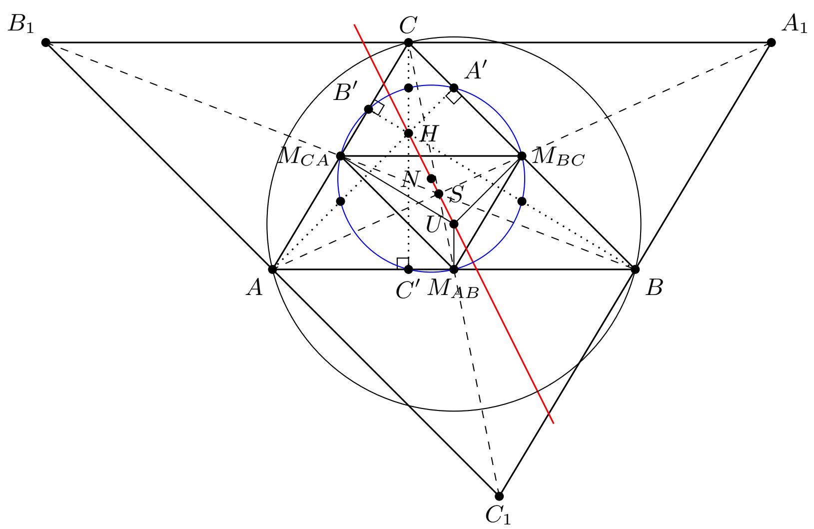
Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Vorlesungsskriptum

Armin Rainer



18. Juni 2020

Vorwort

Eine Einführungsvorlesung über Geometrie und Lineare Algebra erlaubt unterschiedliche Zugänge. Der eleganteste Zugang aus der Sicht des Mathematikers ist es, die Ebene als 2-dimensionalen reellen Vektorraum mit innerem Produkt zu definieren. Dieser Zugang hat auch den Vorteil, dass er sich leicht auf höhere Dimensionen ausdehnen läßt.

Euklid hat vor ca. 2300 Jahren seine Geometrie der Ebene auf der Kongruenz von Dreiecken aufgebaut. Seine Axiomatisierung genügt heute nicht länger dem rigorosem logischen Standard. Hilbert [**Hil99**] hat Euklid's Axiomatisierung vervollständigt. Im System von Eukild und Hilbert kommt der Begriff des Vektors nicht vor und der zugrundeliegende Vektorraum ist verborgen.

In dieser Vorlesung wählen wir den moderneren Zugang von Gustave Choquet [**Cho69**], der für zukünftige Lehrer konzipiert ist. Er basiert auf den folgenden mathematische Konzepten: Menge, Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation, Vektorraum, Symmetrie, Abbildung. Die Axiome von Choquet führen rasch zum zugrundeliegenden Vektorraum und den Eigenschaften des inneren Produktes. Damit stehen auch bald einfache aber effektive algebraische Werkzeuge zur Verfügung, die den Aufbau erleichtern.

Das Skriptum hat zwei Teile. Der erste Teil ist der Geometrie der euklidischen Ebene gewidmet. Hier folgen wir eng dem Aufbau von [**Cho69**]. Ergänzungen, wie z.B. Sätze über das Dreieck, basieren auf [**AF15**] und [**Hal19**].

Der zweite Teil ist eine Einführung in die lineare Algebra. Ein wichtiges Ziel dieses Abschnittes ist die Lösung linearer Gleichungssysteme. Dafür werden die Konzepte der linearen Unabhängigkeit, der Basis, der Dimension etc. entwickelt. Desweiteren wird die Determinante eingeführt und ihre geometrischen Eigenschaften werden studiert. Das letzte Kapitel befasst sich mit Eigenwerten und Eigenvektoren. Im Mittelpunkt steht die Diagonalisierung symmetrischer Matrizen und als Anwendung die Hauptachsentransformation von Kegelschnitten. Der hier verwendete Aufbau der Theorie ist Standard und basiert auf [**Hal19**], [**Hal74**] und [**Jän04**].

Weitere Literatur mit anderen interessanten Zugängen zur Elementargeometrie:

- Eine empfehlenswerte Darstellung des Zugangs von Euklid und Hilbert ist [**Har00**]. Es ist natürlich auch lehrreich, Euklid's *Elemente* zu lesen; es gibt verschiedene (kommentierte) Ausgaben.
- Der metrische Zugang, der von Birkhoff [**Bir32**] vorgeschlagen wurde, liegt dem Buch [**Moi90**] zugrunde. Ein ähnlicher Standpunkt wird in [**MP91**] vertreten.
- Das Buch [**Bac59**] legt den Spiegelungsbegriff zugrunde und entwickelt alles weitere daraus.
- Für einen historischen Überblick zur Entwicklung der euklidischen und nicht-euklidischen Geometrie ist [**Gre08**] zu empfehlen.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Die reellen und die komplexen Zahlen

1. Die reellen Zahlen

1.1. Die axiomatische Definition. Sei $(K, +, \cdot, \leq)$ eine Menge mit zwei binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und einer binären Relation $\leq$, die die folgenden Axiome erfüllen:

(1) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.
(2) $\leq$ ist eine Totalordnung auf K, welche mit $+$ und $\cdot$ kompatibel ist.
(3) Jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge M von K besitzt ein Supremum in K.

Man nennt $(K, +, \cdot, \leq)$ einen **geordneten Körper**, falls die Axiome (1) und (2) erfüllt sind. Gilt zusätzlich (3), dann heißt $(K, +, \cdot, \leq)$ **ordnungsvollständig**.

Ein geordneter Körper, der ordnungsvollständig ist, heißt *die* Menge der **reellen Zahlen**. Diese Bezeichnung ist gerechtfertigt, weil es für zwei geordnete Körper K_1 und K_2, die die Axiome (1), (2) und (3) erfüllen, einen eindeutigen Isomorphismus $K_1 \to K_2$ gibt. Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$. Der kleinste Teilkörper von $\mathbb{R}$ kann in natürlicher Weise mit dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen identifiziert werden.

Proposition 1.1. *Es gilt:*

(1) *$\mathbb{R}$ besitzt die **Archimedische Eigenschaft**: Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$, sodass $nx > y$.*
(2) *Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ liegen **dicht** in $\mathbb{R}$: Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ existiert $r \in \mathbb{Q}$, sodass $x < r < y$.*

1.2. Absolutbetrag und Abstand. Der **Absolutbetrag** einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0, \\ -x & \text{wenn } x < 0. \end{cases}$$

Es gelten folgende Eigenschaften für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

(1) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.
(2) $|x + y| \leq |x| + |y|$.
(3) $|xy| = |x||y|$.

Der **Abstand** zweier reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ ist nach Definition

$$d(x, y) := |x - y|.$$

Es gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$:

(1) $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$.
(2) $d(x, y) = d(y, x)$.
(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
(4) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$.
(5) $d(xz, yz) = |z| d(x, y)$.

2. Die komplexen Zahlen

2.1. Definition als reelle Zahlenpaare. Die Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist mit der Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und der Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

ein Körper. Das Nullelement ist $(0, 0)$, das Einselement $(1, 0)$ und das multiplikative inverse Element zu $z = (x, y) \neq (0, 0)$ ist

$$z^{-1} := \Big(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\Big).$$

Man nennt $\mathbb{C} := (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ den Körper der **komplexen Zahlen**.

Die Abbildung $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $x \mapsto (x, 0)$, ist ein Körperhomomorphismus, der die reellen Zahlen in die komplexen Zahlen einbettet.

Man verwendet die Notation

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}$$

und nennt i die **imaginäre Einheit**. Dann gilt

$$i^2 = -1.$$

Für jede komplexe Zahl $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ gilt

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0)$$

d.h.

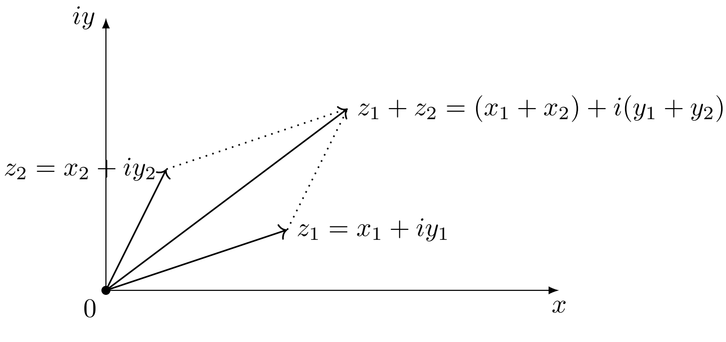
$$z = x + iy \quad \text{mit } x, y \in \mathbb{R}.$$

Dann heißt $\operatorname{Re} z = x$ der **Realteil** von z und $\operatorname{Im} z = y$ der **Imaginärteil** von z. Zwei komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn ihre Realteile und ihre Imaginärteile gleich sind. Weiters heißt $z \in \mathbb{C}$ **reell**, wenn $\operatorname{Im} z = 0$, und **rein imaginär**, wenn $\operatorname{Re} z = 0$.

Mit der Darstellung $z = x + iy$ kann man nun unter Beachtung der Regel $i^2 = -1$ rechnen wie gewohnt.

Es gibt keine Ordungsrelation auf $\mathbb{C}$, die $\mathbb{C}$ zu einem geordneten Körper machen würde: gäbe es eine solche Ordnung $\leq$, dann müsste wegen $i \neq 0$ auch $-1 = i^2 > 0$ gelten, was aber $1 = 1^2 > 0$ widerspricht.

2.2. Geometrische Veranschaulichung. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ kann man geometrisch durch die Zahlenebene $\mathbb{R}^2$ mit einem rechtwinkeligen Koordinatensystem veranschaulichen:



Die Addition komplexer Zahlen entspricht dann der Vektoraddition. Zur geometrischen Interpretation der Multiplikation kommen wir später.

2.3. Konjugation und Absolutbetrag. Die **Konjugation** einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$\overline{z} := x - iy.$$

Geometrisch ist das eine Spiegelung an der reellen Achse. Es gilt

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \quad \overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \quad \overline{\overline{z}} = z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

und

$$z \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad z = \overline{z}.$$

Die Konjugation $z \mapsto \overline{z}$ ist ein Körperautomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Der **Absolutbetrag** $|z|$ einer komplexen Zahl $z = x + iy$ ist definiert durch

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Man zeigt leicht

$$|\overline{z}| = |z|, \quad |z|^2 = z\overline{z}, \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

und weiters

- $|z| \geq 0$ und $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$,
- $|zw| = |z||w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$.

Insbesondere gilt $1 = |zz^{-1}| = |z||z^{-1}|$ für $z \neq 0$ und somit

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = |z|^{-1}.$$

Beispiel 2.1. Der Quotient zweier komplexer Zahlen w/z kann durch Konjugation des Nennern auf die Form

$$\frac{w}{z} = \frac{w\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{w\overline{z}}{|z|^2}$$

gebracht werden, in der der Nenner dann reell ist. Z.B.

$$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1+3i}{5}.$$

Da $\mathbb{C}$ ein Körper ist, ist $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bzgl. der Multiplikation eine abelsche Gruppe. Die Menge

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

bildet eine Untergruppe. Mit $z, w \in \mathbb{T}$ gilt nämlich $|zw^{-1}| = |z||w|^{-1} = 1$. Geometrisch ist $\mathbb{T}$ der Kreis in $\mathbb{R}^2$ mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1.

2.4. Algebraische Abgeschlossenheit. In den komplexen Zahlen besitzt die Gleichung

$$z^2 = -1$$

die beiden Lösungen $z = \pm i$. Weiter Lösungen kann es nicht geben, weil

$$0 = z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z - i)(z + i)$$

impliziert $z = i$ oder $z = -i$ (weil $\mathbb{C}$ ein Körper und daher nullteilerfrei ist).

In den komplexen Zahlen kann jede polynomiale Gleichung gelöst werden. Das folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, den wir hier ohne Beweis anführen. Man sagt, $\mathbb{C}$ ist **algebraisch abgeschlossen**.

Theorem 2.2 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$. Genauer: Ist*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \tag{2.1}$$

ein Polynom mit $n \geq 1$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$, dann existiert $c \in \mathbb{C}$ mit $p(c) = 0$.

Daraus folgt, dass ein Polynom vom Grad n genau n komplexe Nullstellen besitzt:

Korollar 2.3. *Jedes komplexe Polynom zerfällt in Linearfaktoren: Ist p ein Polynom wie in (2.1), dann existieren paarweise verschiedene Zahlen $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$, sodass*

$$p(z) = a_n (z - c_1)^{n_1} (z - c_2)^{n_2} \cdots (z - c_k)^{n_k}, \quad z \in \mathbb{C},$$

wobei $n_i \in \mathbb{N}_{>0}$ die Vielfachheit der Nullstelle c_i ist und

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

gilt.

Beweis. Wir können O.B.d.A. annehmen, dass $a_n = 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gibt es ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $p(c_1) = 0$. Polynomdivision liefert ein Polynom q vom Grad $n-1$ mit $p(z) = q(z)(z - c_1)$. Das Korollar folgt nun leicht mit Induktion nach n. $\square$

Beispiel 2.4. Wir berechnen die komplexen Lösungen von

$$z^2 + (2 - 3i)z - 5 - 5i = 0 \tag{2.2}$$

Wir verwenden die quadratische Lösungsformel für eine Gleichung $z^2 + pz + q = 0$:

$$z = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Hier werden die beiden komplexen Wurzeln von $p^2 - 4q \in \mathbb{C}$ mit $\pm\sqrt{p^2 - 4q}$ bezeichnet.

In unserem Beispiel gilt also

$$z = \frac{-(2 - 3i) \pm \sqrt{(2 - 3i)^2 - 4(-5 - 5i)}}{2} = \frac{-2 + 3i \pm \sqrt{15 + 8i}}{2}.$$

Um $\pm\sqrt{15 + 8i}$ zu finden, machen wir den Ansatz $(x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi = 15 + 8i$ für $x, y \in \mathbb{R}$, was zum Gleichungssystem

$$x^2 - y^2 = 15, \quad 2xy = 8$$

führt. Die zweite Gleichung liefert $y = 4/x$ und durch Einsetzen in die erste Gleichung finden wir

$$x^2 - \frac{16}{x^2} = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 15x^2 - 16 = (x^2 + 1)(x^2 - 16) = 0.$$

Somit gilt $x^2 = -1$ oder $x^2 = 16$. Die erste Gleichung hat keine reellen Lösungen, die zweite liefert $x = \pm 4$. Folglich gilt

$$\sqrt{15 + 8i} = \pm(4 + i).$$

Damit gelangen wir zu den beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{-2 + 3i + 4 + i}{2} = 1 + 2i \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{-2 + 3i - 4 - i}{2} = -3 + i$$

der Gleichung (2.2) und wir haben die Faktorisierung

$$z^2 + (2 - 3i)z - 5 - 5i = (z - 1 - 2i)(z + 3 - i).$$

Beispiel 2.5. Um alle komplexen Lösungen von $z^3 = 1$ zu bestimmen, erraten wir die Lösung $z_1 = 1$ und verwenden Polynomdivision:

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1).$$

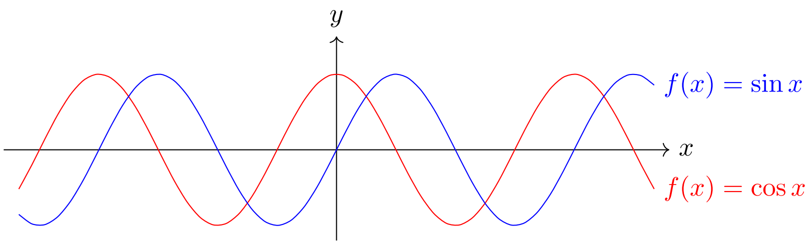
Die Nullstellen des quadratischen Polynoms $z^2 + z + 1$ sind

$$z_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{und} \quad z_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Die Gleichung $z^3 = 1$ hat also die drei Lösungen:

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad z_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

2.5. Polardarstellung komplexer Zahlen. Hier setzen wir voraus, dass die Funktionen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (bzgl. des Bogenmaßes) schon bekannt sind. (Später werden diese Begriffe in formalerer Weise eingeführt werden, vgl. Abschnitt 18.1.)



Insbesondere erinnern wir uns an einige spezielle Werte des Kosinus und des Sinus (vgl. Abschnitt 19.3):

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Jede komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ kann in der Form

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad r > 0, \ \varphi \in \mathbb{R},$$

geschieben werden. Dabei gilt

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \cos\varphi + i\sin\varphi \in \mathbb{T},$$

weil $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$. Diese Darstellung nennt man **Polardarstellung**. Der Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ ist dabei bis auf Summanden der Form $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig bestimmt, weil die Funktionen cos und sin 2π-periodisch sind. Man bezeichnet φ auch als **Argument** von z,

$$\varphi = \arg(z).$$

Beispiel 2.6. Die komplexe Zahl $1 + \sqrt{3}i$ hat die Polardarstellung

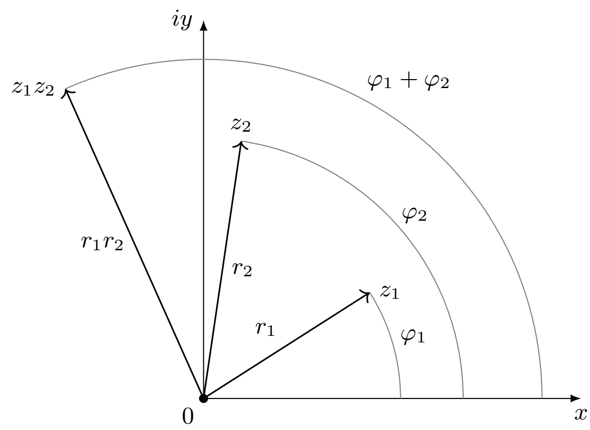
$$1 + \sqrt{3}i = 2 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = 2(\cos\tfrac{\pi}{3} + i\sin\tfrac{\pi}{3}).$$

Dank der Additionsformeln für Kosinus und Sinus (vgl. Abschnitt 18.3) gilt

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) \\ &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big). \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt, dass bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen die Absolutbeträge multipliziert und die Argumente addiert werden,

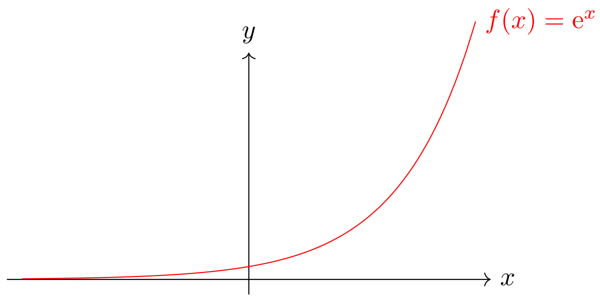
$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$



Unter der **komplexen Exponentialfunktion** verstehen wir die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die durch

$$\exp(z) = e^z := e^x(\cos y + i\sin y), \quad z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},$$

definiert ist. Für reelle z stimmte diese Funktion mit der üblichen Exponentialfunktion überein.



Es gilt $e^0 = 1$ und

$$|e^z| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Insbesondere gilt $|e^{iy}| = e^0 = 1$, d.h., $e^{iy} \in \mathbb{T}$ und

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Die Additionsformeln für cos und sin implizieren

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Insbesondere gilt $e^z e^{-z} = e^0 = 1$ und somit $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = 1/e^z$. Weiters folgt durch Induktion

$$(e^z)^n = e^{nz}, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Im Spezialfall $z = i\varphi$ erhalten wir die **Formeln von Moivre**

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).$$

Damit lassen sich die Wurzeln komplexer Zahlen leicht bestimmen: Die n-ten Wurzeln von $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ sind

$$\sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{2\pi k}{n})} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\varphi}{n} + \tfrac{2\pi k}{n}\right)\Big), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ heißen die n-ten **Einheitswurzeln**; diese sind

$$e^{\frac{2\pi i k}{n}} = \cos\left(\tfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Teil 1

Geometrie

KAPITEL 2

Inzidenz und Ordnung

3. Inzidenz

3.1. Ebene, Geraden und Punkte. Eine **Ebene** ist ein Paar $(\mathcal{E}, \mathscr{G})$ bestehend aus einer Menge $\mathcal{E}$ und einer Familie $\mathscr{G}$ von Teilmengen von $\mathcal{E}$. Die Elemente von $\mathcal{E}$ nennen wir **Punkte**, die Elemente von $\mathscr{G}$ nennen wir **Geraden**. Wir werden Axiome einführen, die jeder Geraden eine Struktur verleihen und die verschiedenen Geraden miteinander in Verbindung setzen.

Axiom 0. *Die Ebene $\mathcal{E}$ enthält mindestens zwei verschiedenen Geraden. Jede Gerade enthält mindestens zwei verschienen Punkte.*

Dieses Axiom folgt aus anderen Axiomen, die wir später einführen werden, es vereinfacht aber den Aufbau der Theorie.

Definition 3.1. Zwei Geraden $g, h \in \mathscr{G}$ heißen **parallel**, wenn entweder $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$ gilt. Wir schreiben $g \| h$.

Gilt $A \in g$, dann sagen wir, dass die Gerade g **durch** den Punkt A geht oder dass A **auf** g liegt. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathcal{E}$ heißt **kollinear**, wenn es eine Gerade $g \in \mathscr{G}$ gibt mit $X \subseteq g$.

3.2. Inzidenzaxiome.

Axiom 1. *Für je zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{E}$ gibt es eine eindeutige Gerade, die A und B enthält.*

Die eindeutige Gerade durch A und B wird mit $g(A, B)$ bezeichnet.

Korollar 3.2. *Zwei nicht-parallele Geraden g und h haben genau einen Punkt gemeinsam, d.h. $g \cap h = \{A\}$. Wir sagen: g und h **schneiden sich** in A bzw. A ist der **Schnittpunkt** von g und h.*

Beweis. Sind die Geraden g und h nicht parallel, so gilt $g \cap h \neq \emptyset$. Angenommen $g \cap h$ enthält zwei verschiedene Punkte A und B. Dann folgt aus Axiom 1, dass $g = h$ gilt, ein Widerspruch. □

Axiom 2. *Für jede Gerade g und jeden Punkt A gibt es eine eindeutige Gerade parallel zu g durch A.*

Proposition 3.3. *Parallelität ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{G}$.*

Beweis. Reflexivität und Symmetrie folgen direkt aus der Definition. Es gelte $g \| h$ und $h \| k$. Falls $g \cap k = \emptyset$, dann gilt $g \| k$. Andernfalls haben g und k mindestens einen Punkt A gemeinsam und beide Geraden sind parallel zu h. Nach Axiom 2 muss $g = k$ gelten, d.h. $g \| k$. □

Die Parallelität liefert also eine Partition von $\mathscr{G}$ in Äquivalenzklassen. Diese Äquivalenzklassen nennen wir **Richtungen**. Jede Gerade $g \in \mathscr{G}$ definiert also eine

Richtung und je zwei Geraden definieren genau dann die gleiche Richtung, wenn sie parallel sind.

Proposition 3.4. *Für jede Gerade $g \in \mathscr{G}$, ist $g^c = \mathcal{E} \setminus g$ nicht leer.*

Beweis. Nach Axiom 0 gibt es eine Gerade h mit $h \neq g$. Falls $h \| g$, dann gilt $h \subseteq g^c$ (und $h \neq \emptyset$ nach Axiom 0). Andernfalls gilt $h \cap g = \{A\}$. Nach Axiom 0 gibt es einen Punkt $B \in h$ mit $B \neq A$ und somit $B \notin g$. $\square$

Proposition 3.5. *Sei h eine Gerade und $A \in h^c$. Die Abbildung $h \to \mathscr{G}$ definiert durch $X \mapsto g(A, X)$ ist eine Bijektion von h auf die Menge der Geraden durch A, welche nicht parallel zu h sind.*

Beweis. Die Abbildung ist injektiv, weil jede Gerade durch A die Gerade h in höchstens einem Punkt schneidet. Für die Surjektivität sei g eine Gerade durch A, welche nicht parallel zu h ist. Dann haben g und h nach Korollar 3.2 einen eindeutigen Schnittpunkt X und $g = g(A, X)$ für dieses X. $\square$

Korollar 3.6. *Es gibt mindestens drei verschiedene Richtungen.*

Beweis. Sei h eine Gerade und $A \in h^c$. Nach Axiom 0 gibt es zwei verschiedene Punkte B und C auf h. Die Proposition 3.5 liefert zwei Geraden $g(A, B)$ und $g(A, C)$. Zusammen mit der Parallelen zu h durch A haben wir also drei verschiedene Geraden durch A. $\square$

Proposition 3.7. *Sei δ eine Richtung. Wir definieren eine Relation auf $\mathcal{E}$ durch*

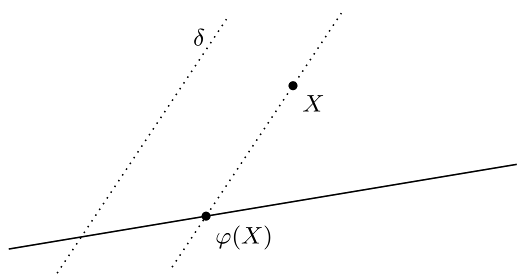
$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine Gerade durch } A \text{ und } B \text{ mit der Richtung } \delta.$$

Die Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E}$. Die Äquivalenzklassen sind die Geraden mit der Richtung δ.

Beweis. Die Geraden mit der Richtung δ bilden eine Partition von $\mathcal{E}$: nach Axiom 2 ist jeder Punkt von $\mathcal{E}$ in einer Geraden der Richtung δ enthalten, und je zwei Geraden der Richtung δ sind gleich oder disjunkt.

Die Relation $\sim$ ist die eindeutige Äquivalenzrelation, die dieser Partition entspricht. $\square$

3.3. Schiefprojektion. Sei g eine Gerade und δ eine Richtung, die nicht die Richtung von g ist (so eine Richtung existiert nach Korollar 3.6). Für jeden Punkt $X \in \mathcal{E}$ schneidet dann die Gerade durch X mit der Richtung δ die Gerade g in einem eindeutigen Punkt $\varphi(X)$.

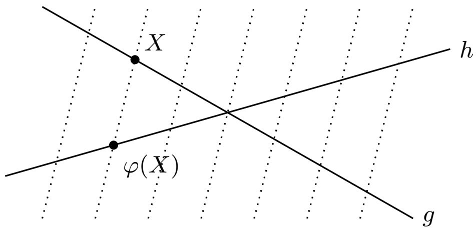


Die Abbildung $\varphi : \mathcal{E} \to g$ wird die **Schiefprojektion** auf g parallel zu δ genannt. Ist δ die Richtung einer Geraden h, dann sprechen wir auch von der Projektion parallel zu h. Die Abbildung φ ist surjektiv und die Fixpunktmenge $\{X : \varphi(X) = X\}$ von φ ist genau die Gerade g.

Proposition 3.8. *Seien g und h zwei Geraden und δ eine Richtung, die nicht mit der Richtung von g und der Richtung von h übereinstimmt. Dann ist die Einschränkung auf g der Schiefprojektion auf h parallel zu δ eine Bijektion $g \to h$.*

Beweis. Sei $\varphi : \mathcal{E} \to h$ die Schiefprojektion auf h parallel zu δ. Die Einschränkung $\varphi|_g$ ist injektiv, weil für verschiedene Punkte auf g die Geraden durch diese Punkte mit Richtung δ ebenso verschieden sind und daher h in unterschiedlichen Punkten schneiden. Weiters ist $\varphi|_g$ surjektiv, weil für jeden Punkt $Y \in h$ schneidet die Gerade durch Y mit Richtung δ die Gerade g in einem Punkt X und $\varphi(X) = Y$. □

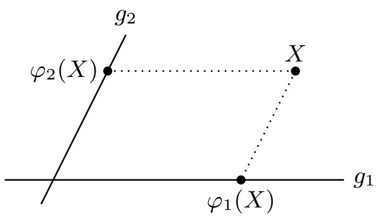
Wir nennen $\varphi|_g$ die **Schiefprojektion von g auf h parallel zu δ**. Aus dem Beweis folgt auch, dass die Umkehrabbildung $\varphi|_g^{-1}$ die Schiefprojektion von h auf g parallel zu δ ist.



Korollar 3.9. *Alle Geraden in $\mathcal{E}$ sind gleichmächtig.* □

Wir bezeichnen mit α die Kardinalzahl der Geraden in $\mathcal{E}$, d.h. es gilt $\alpha = |g|$ für alle $g \in \mathscr{G}$.

3.4. Achsensysteme. Seinen g_1 und g_2 zwei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden. Sei φ_1 die Schiefprojektion auf g_1 parallel zu g_2 und φ_2 die Schiefprojektion auf g_2 parallel zu g_1. Für $X \in \mathcal{E}$ nennen wir die Punkte $\varphi_1(X)$ und $\varphi_2(X)$ die **Komponenten** von X bezüglich des **Achsensystems** (g_1, g_2). Der Schnittpunkt von g_1 und g_2 heißt **Ursprung** des Systems.



Umgekehrt entspricht jedem Paar (X_1, X_2) von Punkten in $\mathcal{E}$ mit $X_1 \in g_1$ und $X_2 \in g_2$ in eindeutiger Weise ein Punkt $X \in \mathcal{E}$, welcher die Komponenten X_1 und X_2 hat, nämlich der Schnittpunkt der Geraden durch X_1 parallel zu g_2 und der Geraden durch X_2 parallel zu g_1.

Es folgt, dass die Abbildung $\varphi : \mathcal{E} \to g_1 \times g_2$ definiert durch $\varphi(X) = (\varphi_1(X), \varphi_2(X))$ eine Bijektion ist.

4. Ordnungsaxiome

4.1. Ordnung auf einer Geraden.

Axiom 3. *Auf jeder Geraden gibt es zwei Totalordnungen, die eine ist die Umkehrung der anderen.*

Unter der Umkehrung einer Totalordnung $\leq$ auf einer Menge M, verstehen wir die Totalordnung $x \leq_R y :\Leftrightarrow y \leq x$. Hier werden die zwei Totalordnungen postuliert, weil es keine kanonische Möglichkeit gibt, eine der beiden auszuzeichnen.

Unter einer **orientierten Geraden** verstehen wir ein Paar $(g, \leq)$, wobei g eine Gerade und $\leq$ eine der beiden Totalordnungen auf g ist. Für verschiedene Punkte X und Y, verstehen wir unter der **orientierten Geraden** $g(X,Y)$ die Gerade $g(X,Y)$, die so orientiert ist, dass $X \leq Y$ gilt.

Sei g eine orientierte Gerade und A ein Punkt auf g. Wir nennen die Menge

$$\{X \in g : A < X\}$$

die **positive offene Halbgerade** von g mit Ursprung A und die Menge

$$\{X \in g : A \leq X\}$$

die **positive abgeschlossene Halbgerade** von g mit Ursprung A. Entsprechend sind **negative Halbgeraden** definiert. Die Gerade g heißt auch **Trägergerade** ihrer Halbgeraden.

Seien A und B Punkte in $\mathcal{E}$. Die Gerade $g(A,B)$ ist eindeutig bestimmt. Wählen wir eine Totalordnung $\leq$ auf $g(A,B)$. Dann definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned}
[A,B] &:= \{X \in g(A,B) : A \leq X \leq B\},\\
(A,B) &:= \{X \in g(A,B) : A < X < B\},\\
[A,B) &:= \{X \in g(A,B) : A \leq X < B\},\\
(A,B] &:= \{X \in g(A,B) : A < X \leq B\}.
\end{aligned}$$

Es stellt sich heraus, dass diese Mengen eigentlich nicht von der Wahl der Totalordnung $\leq$ abhängen und somit auf allen Geraden (orientiert oder nicht orientiert) wohldefiniert sind. Wir bezeichnen diese Mengen jeweils als **Strecke zwischen** A **und** B.

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathcal{E}$ heißt **konvex**, wenn $X, Y \in M$ auch $[X,Y] \subseteq M$ impliziert. Insbesondere ist die Ebene $\mathcal{E}$ konvex, alle Geraden, alle Halbgeraden und alle Strecken sind konvex.

Lemma 4.1. *Sei $(M_i)_{i \in I}$ eine Familie konvexer Teilmengen von $\mathcal{E}$. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} M_i$ konvex.*

Beweis. Seien X, Y Punkte in $\bigcap_{i \in I} M_i$. Dann gilt $X, Y \in M_i$ für alle $i \in I$. Weil M_i konvex ist, gilt $[X,Y] \subseteq M_i$ für alle $i \in I$. Daher gilt $[X,Y] \subseteq \bigcap_{i \in I} M_i$. $\square$

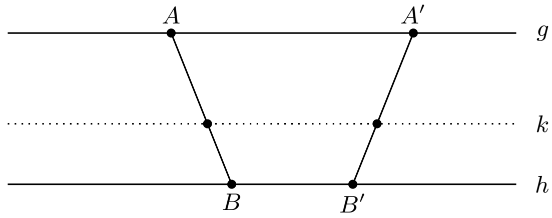
Ist M eine nicht-leere Teilmenge von $\mathcal{E}$, dann definieren wir die **konvexe Hülle** von M als die Menge

$$\bigcap \{U : M \subseteq U \subseteq \mathcal{E},\ U \text{ ist konvex}\}.$$

Weil $\mathcal{E}$ konvex ist, macht diese Definition Sinn. Wegen Lemma 4.1 ist die konvexe Hülle von M die kleineste konvexe Teilmenge von $\mathcal{E}$, die M enthält.

4.2. Ordnungen auf verschiedenen Geraden. Das nächste Axiom stellt eine Verbindung zwischen den Ordnungen auf verschiedenen Geraden her.

Axiom 4. *Wenn g und h parallele Geraden sind, A, A' Punkte auf g und B, B' Punkte auf h sind und eine Gerade k, die parallel zu g und h ist, die Strecke $[A,B]$ schneidet, so schneidet k auch die Strecke $[A', B']$.*



Proposition 4.2. *Sei g eine Gerade und δ eine Richtung verschieden von der Richtung von g. Ist $\varphi : \mathcal{E} \to g$ die Schiefprojektion auf g parallel zu δ, dann gilt*

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \quad \textit{für alle } X, Y \in \mathcal{E}.$$

Beweis. Liegen X und Y auf einer Geraden mit der Richtung δ, so gilt $\varphi([X, Y]) = \{\varphi(X)\} = \{\varphi(Y)\}$ und die Behauptung ist richtig.

Andernfalls sei h die Gerade durch X mit Richtung δ und k die Gerade durch Y mit Richtung δ. Nach Axiom 4 wird jedes $Z \in [X, Y]$ in bijektiver Weise auf einen Punkt $\varphi(Z) \in [\varphi(X), \varphi(Y)]$ abgebildet. □

Korollar 4.3. *Ist $M \subseteq \mathcal{E}$ konvex, dann ist auch das Bild $\varphi(M) \subseteq g$ konvex. Ist $N \subseteq g$ konvex, dann ist auch das Urbild $\varphi^{-1}(N) \subseteq \mathcal{E}$ konvex.*

Beweis. Übung. □

Korollar 4.4. *Seien g und h orientierte Geraden und δ eine Richtung, die weder mit der Richtung von g noch mit der Richtung von h übereinstimmt. Dann ist die Schiefprojektion von g auf h parallel zu δ entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend (bezüglich der Totalordnungen auf g und h).* □

Korollar 4.5. *Gilt $\alpha > 2$, dann ist jede offene Halbgerade in $\mathcal{E}$ nicht-leer.*

Beweis. Sei g eine Gerade und A ein Punkt auf g. Es gibt eine Gerade $g' \neq g$ parallel zu g. Weil $\alpha > 2$, gibt es drei verschiedene Punkte A', X', Y' auf g'. Wir können annehmen, dass $A' \in [X', Y']$. Die Richtung von $g(A, A')$ unterscheidet sich von der Richtung von g und g'. Nach Proposition 4.2 sind die Projektionen A, X, Y von A', X', Y' auf die Gerade g parallel zu $g(A, A')$ paarweise verschieden und es gilt $A \in [X, Y]$. Folglich sind die beiden offenen Halbgeraden von g mit Ursprung A nicht-leer. □

Bemerkung 4.6. Aus $\alpha > 2$ folgt schon $\alpha = \infty$ (Übung).

4.3. Halbebenen.

Proposition 4.7. *Sei $\alpha > 2$. Jede Gerade g liefert eine eindeutige Partition der Menge $\mathcal{E} \setminus g$ in zwei konvexe nicht-leere Teilmengen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$. Ist $X_1 \in \mathcal{E}_1$ und $X_2 \in \mathcal{E}_2$, so gilt $[X_1, X_2] \cap g \neq \emptyset$.*

Beweis. Sei h eine Gerade, welche nicht parallel zu g ist, und sei A der Schnittpunkt von g und h. Betrachte die Schiefprojektion φ auf h parallel zu g. Wir bezeichnen mit h_1 und h_2 die beiden offenen Halbgeraden von h mit Ursprung A. Sie sind beide konvex und bilden eine Partition von $h \setminus \{A\}$. Nach Korollar 4.3 sind $\mathcal{E}_i := \varphi^{-1}(h_i)$, $i = 1, 2$, konvex und bilden eine Partition von $\mathcal{E} \setminus g$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit. Sei $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_2$ eine weitere Partition von $\mathcal{E} \setminus g$ in konvexe nicht-leere Mengen. Nach Korollar 4.3 sind die Mengen $\varphi(\mathcal{F}_i)$ konvex und in $h_1 \cup h_2$ enthalten. Es folgt aus der Konvexität, dass jede der Mengen $\varphi(\mathcal{F}_i)$ entweder in h_1 oder in h_2 enthalten sein muss. Folglich ist jede der Mengen $\mathcal{F}_i$

entweder in $\mathcal{E}_1$ oder in $\mathcal{E}_2$ enthalten. Weil $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$, gilt also entweder $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E}_1$ und $\mathcal{F}_2 = \mathcal{E}_2$ oder $\mathcal{F}_1 = \mathcal{E}_2$ und $\mathcal{F}_2 = \mathcal{E}_1$. In jedem Fall ist die Partition die gleiche.

Sei nun $X_1 \in \mathcal{E}_1$ und $X_2 \in \mathcal{E}_2$. Die Strecke $\varphi([X_1, X_2])$ hat einen Endpunkt in h_1, den anderen in h_2. Daher gilt $A \in \varphi([X_1, X_2])$. Es folgt, dass $[X_1, X_2]$ und $\varphi^{-1}(A) = g$ nicht-leeren Durchschnitt haben. □

Die Mengen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ heißen die **offenen Halbebenen** bezüglich der Geraden g. Die **abgeschlossenen Halbebenen** bezüglich g sind die Mengen $\overline{\mathcal{E}}_1 := \mathcal{E}_1 \cup g$ und $\overline{\mathcal{E}}_2 := \mathcal{E}_2 \cup g$. Diese sind ebenfalls konvex, weil $\overline{\mathcal{E}}_i = \mathcal{E}_i \cup g = \varphi^{-1}(h_i \cup \{A\})$.

KAPITEL 3

Affine Struktur

5. Die affine Struktur von Geraden

Wir werden für die folgenden Axiome die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ verwenden. In diesem Kapitel brauchen wir jedoch nur die Tatsache, dass $\mathbb{R}$ ein archimedisch geordneter Körper ist. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist für die Entwicklung dieses Kapitels nicht nötig.

5.1. Abstand.

Axiom 5. *Es existiert eine Abbildung $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *$d(X, Y) = d(Y, X)$ für alle $X, Y \in \mathcal{E}$.*
(2) *Ist g eine orientierte Gerade, $X \in g$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, dann existiert ein eindeutiger Punkt Y auf g, sodass $X \leq Y$ und $d(X, Y) = r$.*
(3) *Wenn $X \in [A, B]$, dann gilt $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$.*

Die Abbildung d heißt **Abstand** oder **Distanz**.

Lemma 5.1. *Es gilt:*

(1) *$d(X, Y) = 0$ genau dann, wenn $X = Y$.*
(2) *Wenn $X \in [A, B]$, dann gilt $d(A, X) \leq d(A, B)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $X = B$.*

Beweis. (1) Weil stets $X \in [X, Y]$ gilt, folgt $d(X, X) + d(X, Y) = d(X, Y)$ und daher $d(X, X) = 0$ für alle $X \in \mathcal{E}$.

Umgekehrt gelte $X \neq Y$. Betrachte die orientierte Gerade $g(X, Y)$ mit $X < Y$. Wegen der Eigenschaft (2) in Axiom 5 gibt es einen eindeutigen Punkt Z auf $g(X, Y)$ mit $Y \leq Z$ und $d(Y, Z) = 1$. Insbesondere gilt $Y \in [X, Z]$. Wäre $d(X, Y) = 0$, dann würde wegen (3) in Axiom 5 auch $d(X, Z) = d(X, Y) + d(Y, Z) = 1$ gelten. Wegen der Eindeutigkeit in (2) in Axiom 5 (bzgl. der inversen Orientierung der Geraden) würde $X = Y$ folgen.

(2) folgt nun direkt aus der Eigenschaft (3) in Axiom 5. □

5.2. Orientierte Geraden mit Ursprung.

Proposition 5.2. *Sei g eine orientierte Gerade und O ein Punkt auf g. Es existiert eine eindeutig bestimmte streng monoton wachsende Bijektion $f : g \to \mathbb{R}$, sodass*

$$f(O) = 0 \quad \text{und} \quad d(X, Y) = |f(Y) - f(X)| \quad \text{für alle } X, Y \in g.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit. Wenn f existiert, dann gilt $d(X, O) = |f(O) - f(X)| = |0 - f(X)| = |f(X)|$ für alle $X \in g$. Weil f monoton wachsend ist, muss gelten

$$f(X) = \begin{cases} d(O, X) & \text{wenn } O \leq X, \\ -d(O, X) & \text{wenn } X \leq O. \end{cases} \tag{5.1}$$

Daher ist f eindeutig bestimmt.

Für die Existenz zeigen wir, dass die in (5.1) definierte Abbildung die geforderten Bedingungen erfüllt. Dass $f(O) = 0$ gilt, ist klar. Nach Axiom 5 gilt

$$\begin{aligned} X \leq O \leq Y &\Rightarrow d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y) = -f(X) + f(Y) \\ O \leq X \leq Y &\Rightarrow f(Y) = d(O,Y) = d(O,X) + d(X,Y) = f(X) + d(X,Y) \\ X \leq Y \leq O &\Rightarrow -f(X) = d(X,O) = d(X,Y) + d(Y,O) = d(X,Y) - f(Y) \end{aligned}$$

In jedem Fall impliziert $X \leq Y$ also $d(X,Y) = f(Y) - f(X)$. Weil $d(X,Y) > 0$ wenn $X \neq Y$, sehen wir dass f streng monoton wachsend ist.

Wir müssen noch zeigen, dass $f : g \to \mathbb{R}$ eine Bijektion ist. Die Injektivität folgt direkt aus der Monotonie. Die Surjektivität folgt aus der Eigenschaft (2) in Axiom 5: Ist $r > 0$ so existiert $X \in g$ mit $O \leq X$ und $r = d(O,X) = f(X)$. Weiters existiert $Y \in g$ mit $Y \leq O$ und $r = d(O,Y)$, d.h. $f(Y) = -r$. □

Unter einer **orientierten Geraden mit Ursprung** verstehen wir ein Paar (g,O), wobei g eine orientierte Gerade ist und O ein Punkt auf g, der als Ursprung ausgezeichnet wird.

Korollar 5.3. *Jede orientierte Geraden mit Ursprung ist isomorph zu $\mathbb{R}$ vermöge eines eindeutigen Isomorphismus, der Abstand und Ordnung erhält.* □

Dieses Korollar macht es uns möglich, eine orientierte Gerade mit Ursprung stets mit $\mathbb{R}$ zu identifizieren. Ist insbesondere (g,O) eine orientierte Geraden mit Ursprung und f der eindeutigen Isomorphismus mit $\mathbb{R}$, dann führen wir folgende Bezeichnungen ein:

- Die **Abszisse** von X in (g,O) ist nach Definition $f(X) \in \mathbb{R}$.
- Der **signierte Abstand** zweier Punkte X,Y auf (g,O) ist nach Definition

  $$\overline{XY} = f(Y) - f(X) = \overline{OY} - \overline{OX} \in \mathbb{R}.$$

  Es gilt

  $$\overline{XY} = \begin{cases} d(X,Y) & \text{wenn } X \leq Y, \\ -d(X,Y) & \text{wenn } Y \leq X. \end{cases}$$

  Der signierte Abstand ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs O und wechselt das Vorzeichen, wenn die Ordnung von g umgekehrt wird.

Bemerkung 5.4. Fixieren wir den Ursprung O, dann ist es oft nützlich den Punkt X und auch die Abszisse von X mit dem gleichen Symbol zu bezeichnen. In diesem Fall gilt die einfache Formel $\overline{XY} = Y - X$.

Der Isomorphismus f mit $\mathbb{R}$ liefert ein Addition $+$ auf g: für $X,Y \in g$ ist $X+Y$ der eindeutige Punkt auf g mit der Abszisse $f(X) + f(Y)$. Die Gerade (g,O) ist mit dieser Vernüpfung eine abelsche Gruppe mit neutralem Element O; das folgt, weil $(\mathbb{R},+)$ eine abelsche Gruppe ist.

Korollar 5.5. *Es gilt die **Dreiecksungleichung**: Für alle $X,Y,Z \in g$ gilt*

$$d(X,Z) \leq d(X,Y) + d(Y,Z).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $Y \in [X,Z]$.

Beweis. Die Dreiecksungleichung für den Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ überträgt sich auf g vermöge des Isomorphismus aus Korollar 5.3. □

5.3. Der Mittelpunkt zweier Punkte. Seien X und Y verschiedene Punkte in $\mathcal{E}$. Der **Mittelpunkt** von X und Y ist der Punkt $M \in g(X, Y)$, der durch die Gleichung

$$d(X, M) = d(M, Y)$$

bestimmt ist. Der Mittelpunkt existiert und ist eindeutig bestimmt nach Korollar 5.3. Wählen wir eine Orientierung und einen Ursprung O auf $g(X, Y)$ und bezeichnen wir Punkte auf $g(X, Y)$ und ihre Abszisse mit dem gleichen Symbol, so genügt der Mittelpunkt M von X und Y der Gleichung

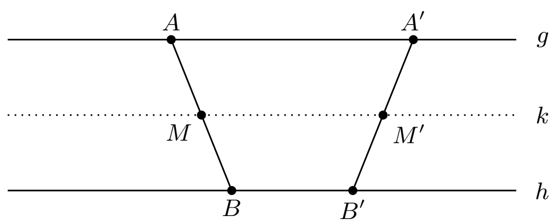
$$M - X = Y - M$$

und ist daher der Punkt mit der Absizze $\frac{1}{2}(X + Y)$. Nach Konvention ist X der Mittelpunkt von X und X.

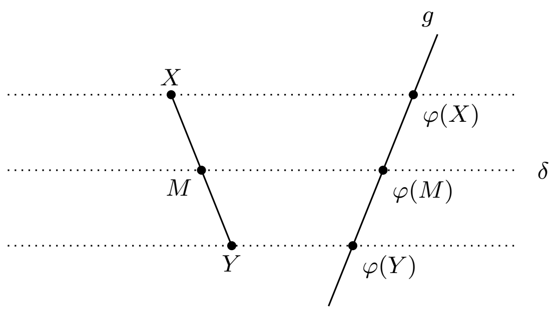
6. Additive Gruppenstruktur auf $(\mathcal{E}, O)$

6.1. Affine Strukturen auf verschiedenen Geraden. Das folgende Axiom verbindet die affinen Strukturen auf verschiedenen Geraden.

Axiom 6. *Seien g und h parallele Geraden, A, A' Punkte auf g und B, B' Punkte auf h. Dann führt die Gerade k, welche parallel zu g und h ist und durch den Mittelpunkt von A und B verläuft, auch durch den Mittelpunkt von A' und B'.*

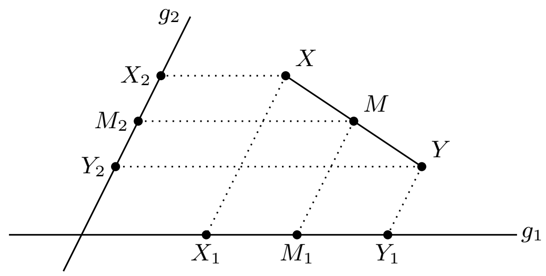


Lemma 6.1. *Sei g eine Gerade, δ eine Richtung verschieden von der Richtung von g und sei φ die Schiefprojektion auf g parallel zu δ. Ist M der Mittelpunkt von X und Y, dann ist $\varphi(M)$ der Mittelpunkt von $\varphi(X)$ und $\varphi(Y)$.*



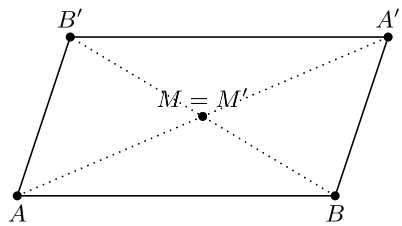
Beweis. Das Lemma ist eine Umformulierung von Axiom 6. □

Korollar 6.2. *Sei (g_1, g_2) ein Achsensystem und seien X, Y und M drei Punkte in $\mathcal{E}$ mit Komponenten (X_1, X_2), (Y_1, Y_2) und (M_1, M_2) bzgl. (g_1, g_2). Dann ist M genau dann der Mittelpunkt von X und Y, wenn M_1 der Mittelpunkt von X_1 und Y_1 und M_2 der Mittelpunkt von X_2 und Y_2 ist.* □

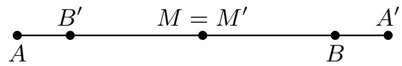


6.2. Parallelogramm und Punktsymmetrie. Unter einem **Parallelogramm** verstehen wir ein Quadrupel (A, B, A', B') von Punkten in $\mathcal{E}$, sodass die Punktepaare (A, A') und (B, B') den gleichen Mittelpunkt haben. Die Strecken $[A, A']$ und $[B, B']$ nennen wir die **Diagonalen** des Parallelogramms, die Strecken $[A, B]$, $[B, A']$, $[A', B']$ und $[B', A]$ heißen die **Seiten** des Parallelogramms (A, B, A', B').

Ist (A, B, A', B') ein Parallelogramm, dann ist auch (A, B', A', B) ein Parallelogramm.

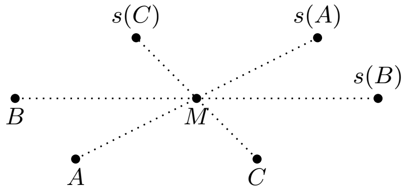


Unsere Definition des Parallelogramms lässt auch degenerierte Fälle zu: es kann sein, dass alle Punkte A, B, A', B' zusammenfallen oder dass sie kollinear sind.



Sind drei Punkte X, Y und M in $\mathcal{E}$ gegeben, so sagen wir, dass X und Y **punktsymmetrisch** (oder **zentralsymmetrisch**) bezüglich M sind, wenn M der Mittelpunkt von X und Y ist. Sind X und M gegeben, dann gibt es einen eindeutigen Punkt Y, sodass X und Y punktsymmetrisch bezüglich M sind: ist $X \neq M$, dann ist Y der Punkt auf der orientierten Geraden $g(X, M)$ mit $\overline{XM} = \overline{MY}$; falls $X = M$, dann ist $Y = M$.

Damit wird die folgende Abbildung definiert: Sei $M \in \mathcal{E}$ gegeben. Die **Punktsymmetrie** (oder **Zentralsymmetrie**) bezüglich M ist die Abbildung $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die jeden Punkt X auf jenen Punkt Y abbildet, sodass X und Y punktsymmetrisch bezüglich M sind.



Die Punktsymmetrie s ist offensichtlich eine **Involution**, d.h. $s^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Lemma 6.3. *Ein Quadrupel (A, B, A', B') von Punkten in $\mathcal{E}$ ist genau dann ein Parallelogramm, wenn A', B' die Bilder von A, B unter einer Zentralsymmetrie sind.* □

Korollar 6.4. *Sind drei Punkte A, B, B' in $\mathcal{E}$ gegeben, dann existiert ein eindeutiger Punkt A', sodass (A, B, A', B') ein Parallelogramm ist.*

Beweis. Der gesuchte Punkt A' ist das Bild von A unter der Punktsymmetrie bezüglich des Mittelpunktes von B und B'. □

Korollar 6.5. *Das Bild eines Parallelogramms unter einer Schiefprojektion ist wieder ein Parallelogramm.*

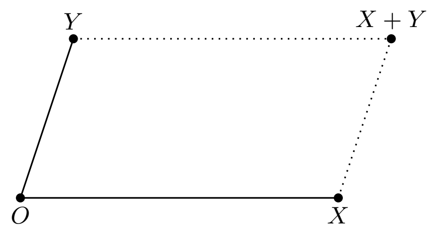
Beweis. Jede Schiefprojektion φ erhält Mittelpunkte nach Lemma 6.1. Haben A, A' und B, B' den gleichen Mittelpunkt, dann haben auch $\varphi(A), \varphi(A')$ und $\varphi(B), \varphi(B')$ den gleichen Mittelpunkt. □

6.3. Addition in $(\mathcal{E}, O)$. Sei O ein Punkt in $\mathcal{E}$. Wir bezeichen $(\mathcal{E}, O)$ als **Ebene mit Ursprung** O.

Die **Addition** in $(\mathcal{E}, O)$ ist nach Definition die Abbildung

$$\begin{aligned} + : \mathcal{E} \times \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ (X, Y) &\mapsto X + Y, \end{aligned}$$

wobei $X + Y$ der eindeutige Punkt Z ist, sodass (O, X, Z, Y) ein Parallelogramm ist.



Die **Translation** um $A \in \mathcal{E}$ ist die Abbildung $\mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $X \mapsto X + A$.

Lemma 6.6. *Sei g eine Gerade durch O. Die Einschränkung der Addition $+ : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ auf (g, O) stimmt mit der Addition auf g (vgl. Bemerkung 5.4) überein.*

Beweis. Seien $X, Y \in g$. Nach Definition der Addition $+_{\mathcal{E}}$ in $(\mathcal{E}, O)$ ist $X +_{\mathcal{E}} Y$ der eindeutige Punkt Z, sodass (O, X, Z, Y) ein Parallelogramm ist. Dann liegt Z auf g und stimmt mit $X +_g Y$ überein. □

Lemma 6.7. *Sei g eine Gerade durch O. Für jede Schiefprojektion φ auf g gilt:*

$$\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y) \quad \textit{für alle } X, Y \in \mathcal{E}.$$

Beweis. Betrachte das Parallelogramm $(O, X, X+Y, Y)$. Sein Bild $(O, \varphi(X), \varphi(X+Y), \varphi(Y))$ unter der Schiefprojektion φ ist nach Korollar 6.5 wieder ein Parallelogramm. Daher gilt $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$. □

Theorem 6.8. *Es gilt:*

1. *Die Ebene $(\mathcal{E}, O)$ mit Ursprung O ist mit der Verknüpfung $+$ eine abelsche Gruppe. Das neutrale Element ist O.*
2. *Jede Gerade durch O ist eine Untergruppe.*

(3) *Sind* g_1 *und* g_2 *verschiedene Geraden durch* O*, dann ist die Gruppe* $(\mathcal{E}, O)$ *das direkte Produkt der Untergruppen* g_1 *und* g_2*, d.h. jeder Punkt* X *in* $\mathcal{E}$ *kann in eindeutiger Weise in der Form* $X = X_1 + X_2$ *geschrieben werden, wobei* X_1 *und* X_2 *die Komponenten von* X *bezüglich des Achsensystems* (g_1, g_2) *sind.*

(4) *Jede Translation bildet eine Gerade durch* O *auf eine parallele Gerade ab. Jede Gerade ist das Bild unter einer Translation einer Geraden durch* O*.*

Beweis. (1) Seien g_1 und g_2 verschiedene Geraden durch O. Sei φ_1 die Schiefprojektion auf g_1 parallel zu g_2 und φ_2 die Schiefprojektion auf g_2 parallel zu g_1. Nach Lemma 6.6 und Lemma 6.7 gilt für alle $X, Y, Z \in \mathcal{E}$ und $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \varphi_i(X+Y) &= \varphi_i(X) + \varphi_i(Y) = \varphi_i(Y) + \varphi_i(X) = \varphi_i(Y+X), \\ \varphi_i((X+Y)+Z) &= \varphi_i(X+Y) + \varphi_i(Z) = (\varphi_i(X) + \varphi_i(Y)) + \varphi_i(Z) \\ &= \varphi_i(X) + (\varphi_i(Y) + \varphi_i(Z)) = \varphi_i(X) + \varphi_i(Y+Z) \\ &= \varphi_i(X + (Y+Z)). \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, dass die Addition auf (g, O) kommutativ und assoziativ ist. Es zeigt, dass $X + Y$ und $Y + X$ die gleichen Komponenten bezüglich des Achsensystems (g_1, g_2) haben und daher $X + Y = Y + X$ gilt. Analog gilt $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$. Wir haben also gezeigt, dass die Verknüpfung $+$ auf $(\mathcal{E}, O)$ kommutativ und assoziativ ist. Der Ursprung O ist offensichtlich ein neutrales Element. Das Inverse eines Punktes X ist der Punkt, der zentralsymmetrisch zu X bezüglich O ist.

(2) folgt aus Lemma 6.6.

(3) Sei $X \in \mathcal{E}$ und seien X_1, X_2 die Komponenten von X bezüglich des Achsensystems (g_1, g_2). Es gilt

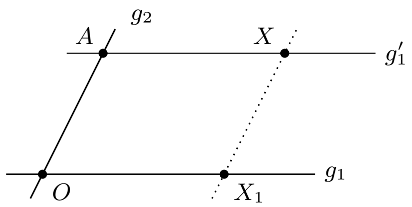
$$\varphi_1(X_1 + X_2) = \varphi_1(X_1) + \varphi_1(X_2) = X_1 + O = X_1$$

und analog $\varphi_2(X_1 + X_2) = X_2$. Das heißt, die Komponenten des Punktes $X_1 + X_2$ sind X_1, X_2 und folglich muss $X = X_1 + X_2$ gelten. Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, es gilt $X = Y_1 + Y_2$ mit $Y_1 \in g_1$ und $Y_2 \in g_2$. Dann haben wir

$$X_1 = \varphi_1(X) = \varphi_1(Y_1 + Y_2) = Y_1 + O = Y_1$$

und analog $X_2 = Y_2$.

(4) Sei g_1 eine Gerade durch O und $A \in \mathcal{E}$. Wenn $A \in g_1$, dann ist $g_1 + A = g_1$ wegen (2). Sei $A \notin g_1$. Setzen wir $g_2 = g(O, A)$, dann ist (g_1, g_2) ein Achsensystem mit Ursprung O. Sei g_1' die Gerade durch A parallel zu g_1. Dann gilt (nach (3)) $X \in g_1'$ genau dann, wenn es $X_1 \in g_1$ gibt, sodass $X = X_1 + A$. D.h. $g_1' = g_1 + A$.



Ist g_1' eine beliebige Gerade, die nicht durch O geht, dann gilt $g_1' = g_1 + A$, wobei g_1 die Gerade parallel zu g_1' durch O ist und $A \in g_1'$ beliebig. □

Korollar 6.9. *Seien* X, Y, Y' *drei nicht-kollineare Punkte. Sei* g *die Gerade parallel zu* $g(X, Y')$ *durch* Y *und* g' *die Gerade parallel zu* $g(X, Y)$ *durch* Y'*. Dann ist* (X, Y, X', Y') *genau dann ein Parallelogramm, wenn* $\{X'\} = g \cap g'$*.*

Beweis. Die Aussage folgt direkt aus Theorem 6.8(3), wenn man X als Ursprung wählt. □

Für natürliche Zahlen $n \geq 1$ und $X \in \mathcal{E}$ definieren wir rekursiv

$$1X := X \quad \text{und} \quad nX := (n-1)X + X \text{ für } n \geq 2.$$

Korollar 6.10. *M ist genau dann der Mittelpunkt von X und Y, wenn*

$$X + Y = 2M.$$

Bemerkung 6.11. Es folgt, dass die Punktsymmetrie mit Zentrum A die Abbildung

$$X \mapsto 2A - X$$

ist. Die Komposition zweier Punktsymmetrien ist eine Translation. Die Komposition einer Punktsymmetrie mit einer Translation ist wieder eine Punktsymmetrie. Es folgt, dass jede n-fache Komposition von Punktsymmetrien entweder eine Punktsymmetrie ist, falls n ungerade ist, oder eine Translation, wenn n gerade ist (Übung).

Korollar 6.12. *(X, Y, X', Y') ist genau dann ein Parallelogramm, wenn*

$$X + X' = Y + Y'.$$

Beweis. Übung. □

7. Translationen

7.1. Charakterisierung von Translationen.

Lemma 7.1. *Translationen erhalten Mittelpunkte und Parallelogramme.*

Beweis. Wenn $2M = X + Y$ dann folgt $2(M + A) = (X + A) + (Y + A)$. □

Theorem 7.2. *Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist genau dann eine Translation in der Gruppe $(\mathcal{E}, O)$, wenn $(X, f(X), f(Y), Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{E}$ ein Parallelogramm ist.*

Beweis. Ist f die Translation $X \mapsto X + A$, dann gilt

$$X + f(Y) = f(X) + Y, \tag{7.1}$$

weil diese Aussage äquivalent zu

$$X + (Y + A) = (X + A) + Y$$

ist. Nach Korollar 6.12 ist $(X, f(X), f(Y), Y)$ ein Parallelogramm.

Umgekehrt sei $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Abbildung, die (7.1) für alle X, Y erfüllt. Insbesondere folgt für $X = O$

$$f(Y) = f(O) + Y,$$

d.h. f ist eine Translation. □

Korollar 7.3. *Der Begriff der Translation ist unabhängig von der Wahl des Ursprungs: Jede Translation der Gruppe $(\mathcal{E}, O_1)$ ist auch eine Translation der Gruppe $(\mathcal{E}, O_2)$.*

Beweis. Die Bedingung, dass $(X, f(X), f(Y), Y)$ für alle $X, Y \in \mathcal{E}$ ein Parallelogramm ist, ist offensichtlich unabhängig von der Wahl des Ursprungs. □

7.2. Die Gruppe der Translationen.

Theorem 7.4. *Die Translationen von $(\mathcal{E}, O)$ bilden eine Gruppe mit der Komposition als Verknüpfung, die wir mit $\mathscr{T}$ bezeichnen. Die Abbildung*

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &\to \mathscr{T}\\ A &\mapsto (f_A : X \mapsto X + A)\end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus zwischen $(\mathcal{E}, O)$ und $\mathscr{T}$.

Beweis. Es ist klar, dass $\mathscr{T}$ eine Gruppe ist. Es gilt

$$f_{A+B}(X) = X + (A + B) = (X + A) + B = f_B(f_A(X)) = f_B \circ f_A(X),$$

d.h. $A \mapsto f_A$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Es ist leicht einzusehen, dass $A \mapsto f_A$ bijektiv ist. $\square$

Die Gruppe $\mathscr{T}$ **wirkt auf** $\mathcal{E}$, d.h. wir haben eine Abbildung

$$\begin{aligned}\mathscr{T} \times \mathcal{E} &\to \mathcal{E}\\ (t, X) &\mapsto t \cdot X = t(X)\end{aligned}$$

mit den Eigenschaften:

- Für alle $X \in \mathcal{E}$ gilt $e \cdot X = X$, wobei e das neutrale Element in $\mathscr{T}$ (d.h. die Identität auf $\mathcal{E}$) bezeichnet.
- Für alle $t, s \in \mathscr{T}$ und alle $X \in \mathcal{E}$ gilt $(ts) \cdot X = t \cdot (s \cdot X)$.

Die Wirkung von $\mathscr{T}$ auf $\mathcal{E}$ ist **transitiv**, d.h. für je zwei $X, Y \in \mathcal{E}$ gibt es ein $t \in \mathscr{T}$ mit $t \cdot X = Y$ (nämlich $Z \mapsto Z + (Y - X)$).

Korollar 7.5. *Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{E}$. Die Translation $f : X \mapsto X + (O_2 - O_1)$ ist ein Gruppenisomorphismus von $(\mathcal{E}, O_1)$ auf $(\mathcal{E}, O_2)$.*

Beweis. Zunächst ist f klarerweise eine Bijektion. Wir bezeichnen die Addition in $(\mathcal{E}, O_1)$ mit $+_1$ und jene in $(\mathcal{E}, O_2)$ mit $+_2$. Für beliebige $X, Y \in \mathcal{E}$ ist $(O_1, X, X +_1 Y, Y)$ ein Parallelogramm (nach der Definition der Addition, vgl. Abschnitt 6.3). Wegen Lemma 7.1 ist auch

$$(f(O_1), f(X), f(X +_1 Y), f(Y)) = (O_2, f(X), f(X +_1 Y), f(Y))$$

ein Parallelogramm. Es folgt, dass $f(X +_1 Y) = f(X) +_2 f(Y)$ gilt. $\square$

7.3. Freie Vektoren. Seien $X, Y \in \mathcal{E}$. Die Translation von $\mathcal{E}$, welche X in Y überführt nennt man auch den **freien Vektor**, der dem Paar (X, Y) entspricht. Wir bezeichnen ihn mit $\overrightarrow{XY}$.

Für $X, Y, Z \in \mathcal{E}$ gilt

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{XZ}.$$

Und allgemein für $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{E}$ gilt

$$\overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \cdots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} = \overrightarrow{X_1X_n}.$$

Insbesondere ist $\overrightarrow{XX}$ die Identität, die wir in diesem Zusammenhang mit 0 bezeichnen. Es folgt

$$\overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YX} = 0 \quad \text{oder} \quad \overrightarrow{XY} = -\overrightarrow{YX}.$$

In $(\mathcal{E}, O)$ gilt für X, Y, Z

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{(X + Z)(Y + Z)},$$

weil die Translation, die X in Y überführt, auch $X+Z$ in $Y+Z$ überführt. Insbesondere gilt
$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{O(Y-X)}.$$

Bemerkung 7.6. Oft werden in Rechnungen die freien Vektoren in $\mathcal{E}$ mit den Elementen der Gruppe $(\mathcal{E}, O)$ identifiziert. Man sollte sich jedoch im Klaren sein, dass die beiden Mengen zwar isomorph aber nicht gleich sind.

7.4. Translation von orientierten Geraden. Die Aussage von Theorem 6.8(4) kann auch so formuliert werden: Die Menge $\mathscr{G}_\delta$ aller Geraden der Richtung δ ist abgeschlossen unter der Wirkung der Translationen und diese Wirkung ist transitiv.

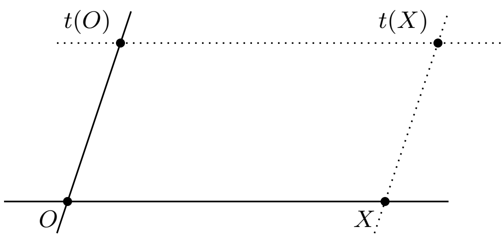
Nun betrachten wir die Wirkung der Translationen auf orientierten Geraden.

Proposition 7.7. *Sei g eine orientierte Gerade und t eine Translation.*

(1) *Gilt $t(g) = g$, so ist t ein ordnungserhaltender Automorphismus.*
(2) *Gilt $t(g) \neq g$, so ist t entweder ein ordnungserhaltender oder ein ordnungsumkehrender Isomorphismus $g \to t(g)$, je nachdem welche Ordnung auf $t(g)$ gewählt wird.*

Beweis. (1) In diesem Fall ist die Einschränkung $t|_g$ eine Translation auf g und daher monoton wachsend.

(2) Im Fall $t(g) \neq g$ sei $O \in g$. Dann gilt $t(O) \notin g$ (sonst wäre $t(g) = g$ wegen Theorem 6.8(4)). Für jedes $X \in g$ ist $(O, X, t(X), t(O))$ nach Theorem 7.2 ein Parallelogramm.



Aus Korollar 6.9 folgt, dass die Geraden $g(O, t(O))$ und $g(X, t(X))$ parallel sind. Somit ist die Einschränkung $t|_g$ die Schiefprojektion von g auf $t(g)$ parallel zu $g(O, t(O))$. Die Aussage folgt nun aus Korollar 4.4. □

Wir sagen, dass zwei orientierte Geraden g und g' **gleichsinnig parallel** sind, falls es eine Translation t gibt die g ordnungserhaltend auf g' abbildet. In diesem Fall schreiben wir $g \upuparrows g'$.

Sind zwei orientierte Geraden parallel, ohne gleichsinnig parallel zu sein, dann nennen wir sie **gegensinnig parallel**.

Proposition 7.8. *Die Relation $\upuparrows$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der orientierten Geraden. Für jede Richtung δ ist die Menge der orientierten Geraden mit Richtung δ die Vereinigung zweier Äquivalenzklassen bzgl. $\upuparrows$. Die beiden orientierten Geraden, die von der gleichen Geraden herrühren, liegen in unterschiedlichen Äquivalenzklassen.*

Beweis. Die Relation $\upuparrows$ ist reflexiv, weil die Identität ordnungserhaltend ist. Sie ist symmetrisch, weil das Inverse eines ordnungserhaltenden Isomorphismus wieder ordnungserhaltend ist. Sie ist transitiv, weil die Komposition zweier ordnungserhaltender Isomorphismen wieder ordnungserhaltend ist.

Sei δ eine Richtung. Weil die Translationen transitiv auf $\mathscr{G}_\delta$ wirken, zeigt Proposition 7.7, dass die Menge der orientierten Geraden mit Richtung δ die Vereinigung von höchstens zwei Äquivalenzklassen ist. Weiters zeigt Proposition 7.7: wenn g_1 und g_2 die beiden orientierten Geraden sind, die von einer Geraden $g \in \mathcal{G}_\delta$ herrühren, dann gibt es keine Translation die g_1 in g_2 überführt. Daher liegen g_1 und g_2 in verschiedenen Äquivalenzklassen und somit ist die Menge der orientierten Geraden mit Richtung δ die Vereinigung zweier Äquivalenzklassen. □

Wir nennen die Äquivalenzklassen der Relation $\uparrow\uparrow$ die **orientierten Richtungen** von $\mathcal{E}$.

Auf der Menge der orientierten Halbgeraden in $\mathcal{E}$ definieren wir eine Relation

$$g \uparrow\uparrow h \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine Translation } t \text{ mit } t(g) = h.$$

Dann sagen wir, dass g und h **gleichsinnig parallel** sind. Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation. Zwei orientierten Halbgeraden g und h sind genau dann gleichsinnig parallel, wenn die orientierten Trägergeraden von g und h gleichsinnig parallel sind (Übung).

Seien $A, B \in \mathcal{E}$ und sei $g = g(A, B)$ die orientierte Gerade durch A und B mit $A < B$. Bezeichnen wir mit $g_+(A, B) = \{X \in g : A \leq X\}$ die positive Halbgerade mit Ursprung A und $g_-(B, A) = \{X \in g : X \leq B\}$ die negative Halbgerade mit Ursprung B, dann gilt

$$[A, B] = g_+(A, B) \cap g_-(B, A).$$

Ist t eine Translation, so folgt

$$t([A, B]) = t(g_+(A, B)) \cap t(g_-(B, A)) = [t(A), t(B)].$$

Es folgt

Korollar 7.9. *Konvexe Mengen werden unter Translationen auf konvexe Mengen abgebildet.* □

8. Der Vektorraum $(\mathcal{E}, O)$

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass $(\mathcal{E}, O)$ ein Vektorraum ist. Zunächst führen wir den Begriffs des Vektorraums und der linearen Abbildung zwischen Vektorräumen ein.

8.1. Vektorräume.

Definition 8.1. Ein **Vektorraum** V **über** $\mathbb{R}$ (auch **reeller Vektorraum** genannt) ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$ mit einer Abbildung

$$\mathbb{R} \times V \to V,$$
$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x,$$

welche **Skalarmultiplikation** genannt wird, sodass folgende Eigenschaften gelten:

(1) $\forall x, y \in V \ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$
(2) $\forall x \in V \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$
(3) $\forall x \in V \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x).$
(4) $\forall x \in V : 1x = x.$

Das neutrale Element 0 der Gruppe $(V, +)$ wird **Nullvektor** genannt.

Wir erinnern uns, dass das neutrale Element in der Gruppe $(V, +)$, d.h. der Nullvektor, eindeutig bestimmt ist. Weiters ist für jeden Vektor $x \in V$ das additive Inverse $-x \in V$ eindeutig bestimmt.

Wir stellen auch fest, dass $0x = 0$ ist für alle $x \in V$ sowie $\lambda 0 = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (Übung).

Beispiel 8.2. $\mathbb{R}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Bemerkung 8.3. Allgemeiner definiert man Vektorräume über $\mathbb{K}$, wobei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper ist, indem man in der obigen Definition $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{K}$ ersetzt.

Definition 8.4. Seien V und W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt **linear**, falls

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{und} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

für alle $x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt. Eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ wird **(linearer) Isomorphismus** genannt.

Beispiel 8.5. Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann linear, wenn $f(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$ gilt (nämlich $a = f(1)$).

Proposition 8.6. *Seien U, V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$. Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist die Komposition $g \circ f : U \to W$ eine lineare Abbildung.*

Beweis. Für beliebige $x, y \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+y) &= g(f(x+y)) = g(f(x) + f(y)) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) = (g \circ f)(x) + (g \circ f)(y), \\ (g \circ f)(\lambda x) &= g(f(\lambda x)) = g(\lambda f(x)) = \lambda g(f(x)) = \lambda (g \circ f)(x).\end{aligned}$$ □

Proposition 8.7. *Seien V, W Vektorräume über $\mathbb{R}$ und sei $f : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ linear. Mit anderen Worten: Die Umkehrabbildung eines linearen Isomorphismus ist ebenfalls ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Die Umkehrabbildung $f^{-1} : W \to V$ existiert und ist bijektiv, weil f bijektiv ist. Wir müssen zeigen, dass f^{-1} linear ist. Seien also $y_1, y_2 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$, und $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2) \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}f^{-1}(y_1 + \lambda y_2) &= f^{-1}(f(x_1) + \lambda f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(x_1 + \lambda x_2)) = x_1 + \lambda x_2 = f^{-1}(y_1) + \lambda f^{-1}(y_2).\end{aligned}$$ □

8.2. Skalarmultiplikation in $(\mathcal{E}, O)$.

Lemma 8.8. *Jede orientierte Gerade (g, O) mit Ursprung O ist ein Vektorraum mit Nullvektor O.*

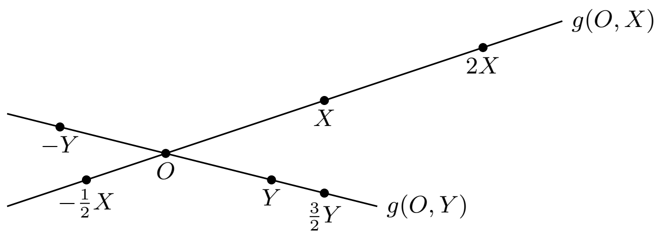
Beweis. Das ist eine direkte Konsequenz von Korollar 5.3; wir können (g, O) mit dem Vektorraum $\mathbb{R}$ identifizieren. □

Wir definieren nun eine **Skalarmultiplikation**

$$\begin{aligned}\mathbb{R} \times \mathcal{E} &\to \mathcal{E} \\ (\lambda, X) &\mapsto \lambda X,\end{aligned}$$

in $(\mathcal{E}, O)$ wie folgt:

- $\lambda O := O$.
- Ist $X \neq O$, dann ist λX nach Definition das Produkt der Skalarmultiplikation im Vektorraum $(g(O, X), O)$ der orientierten Geraden $g(O, X)$ mit Ursprung O.



Wir werden zeigen, dass $(\mathcal{E}, O)$ mit dieser Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist. Die Eigenschaften (2)–(4) in Definition 8.1 sind erfüllt, weil sie nur den Vektorraum $(g(O,X), O)$ betreffen. Für die Eigenschaft (1) brauchen wir das folgende Lemma.

Lemma 8.9. *Sei g eine Gerade durch O, δ eine Richtung verschieden von der Richtung von g und φ die Schiefprojektion auf g parallel zu δ. Für alle $X \in \mathcal{E}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\varphi(\lambda X) = \lambda\, \varphi(X).$$

Beweis. Aus Lemma 6.7 folgt leicht, dass $\varphi(nX) = n\,\varphi(X)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen $(-n)X = -(nX)$ und $\varphi(-X) = -\varphi(X)$ gilt die Identität auch für alle $n \in \mathbb{Z}$, denn für $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$\varphi((-n)X) = \varphi(-(nX)) = -\varphi(nX) = -(n\varphi(X)) = (-n)\varphi(X).$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $X = \frac{1}{n}Y$. Dann folgt

$$\varphi(Y) = \varphi(nX) = n\,\varphi(X) = n\,\varphi(\tfrac{1}{n}Y),$$

d.h. $\varphi(\frac{1}{n}Y) = \frac{1}{n}\,\varphi(Y)$. Schießlich erhalten wir für alle $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$,

$$\varphi(\tfrac{p}{q}X) = p\,\varphi(\tfrac{1}{q}X) = p(\tfrac{1}{q}\,\varphi(X)) = \tfrac{p}{q}\,\varphi(X).$$

Die Aussage des Lemmas gilt als für alle rationalen λ.

Wir wollen uns nun überlege, dass die Aussage auch für alle reellen λ stimmt. Wir können annehmen, dass $X \neq O$ (sonst ist die Aussage trivial). Hat die Gerade $g(O,X)$ die Richtung δ, dann gilt $\varphi(\lambda X) = O$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Weil $\lambda\varphi(X) = \lambda O = O$ gilt, stimmt die Aussage des Lemma in diesem Fall.

Nehmen wir nun also an, dass $\varphi(X) \neq O$. Und wir orientieren die Geraden $g(O,X)$ und g so, dass $O < X$ auf $g(O,X)$ und $O < \varphi(X)$ auf g gilt. Dann ist die Abbildung $\mathbb{R} \mapsto g(O,X)$, $\lambda \mapsto \lambda X$, streng monoton wachsend. Nach Korollar 4.4 ist auch die Abbildung $\varphi : g(O,X) \to g$, $Y \mapsto \varphi(Y)$ streng monoton wachsend. Folglich ist die Komposition $\psi_1 : \mathbb{R} \to g$, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda X)$, streng monoton wachsend. Ebenso ist $\psi_2 : \mathbb{R} \to g$, $\lambda \mapsto \lambda\varphi(X)$, streng monoton wachsend. Außerdem wissen wir, dass ψ_1 und ψ_2 auf den rationalen Zahlen übereinstimmen. Wir können daraus schließen, dass sie auf ganz $\mathbb{R}$ übereinstimmen. (Die beiden Funktionen ψ_1, ψ_2 sind auch surjektiv (vgl. Korollar 5.3). Man kann zeigen, dass streng monotone, surjektive Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind. Und stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf allen rationalen Zahlen übereinstimmen, sind gleich.) □

Theorem 8.10. *Die Ebene $(\mathcal{E}, O)$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.*

Beweis. Wir müssen nur noch die Eigenschaft (1) in Definition 8.1 zeigen: für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und alle $X, Y \in \mathcal{E}$ gilt

$$\lambda(X + Y) = \lambda X + \lambda Y.$$

Sind X, Y und O kollinear, dann folgt die Eigenschaft, weil jede orientierte Gerade mit Ursprung O ein Vektorraum ist.

Andernfalls bilden die Geraden $g(O,X)$ und $g(O,Y)$ ein Achsensystem mit Ursprung O. Es genügt zu zeigen, dass die beiden Punkte $\lambda(X+Y)$ und $\lambda X + \lambda Y$ die gleichen Komponenten bezüglich dieses Achsensystems haben. Sei φ die Schiefprojektion auf $g(O,X)$ parallel zu $g(O,Y)$. Nun impliziert Lemma 8.9

$$\varphi(\lambda(X+Y)) = \lambda\,\varphi(X+Y) = \lambda\,X.$$

Andererseits folgt aus $\lambda X \in g(O,X)$ und $\lambda Y \in g(O,Y)$ auch

$$\varphi(\lambda X + \lambda Y) = \lambda\,X.$$

Somit haben $\lambda(X+Y)$ und $\lambda X + \lambda Y$ die gleiche Komponente auf $g(O,X)$. Analog sieht man, dass sie auch die gleiche Komponente auf $g(O,Y)$ haben. □

Korollar 8.11. *Jede Schiefprojektion $\varphi : \mathcal{E} \to g$ auf eine Gerade g durch O ist eine lineare Abbildung zwischen den Vektorräumen $(\mathcal{E}, O)$ und (g, O).*

Beweis. Das Korollar folgt nun aus Lemma 6.7 und Lemma 8.9. □

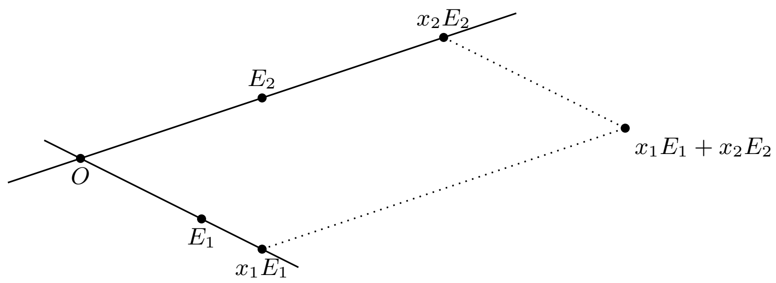
8.3. Basen und Koordinaten in $(\mathcal{E}, O)$. Wir nennen ein Paar (E_1, E_2) von Punkten in $\mathcal{E}$ eine **Basis** des Vektorraums $(\mathcal{E}, O)$, wenn $E_1 \neq O$, $E_2 \neq O$ und E_1, E_2, O nicht kollinear sind.

Jeder Punkt $X \in \mathcal{E}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$X = x_1 E_1 + x_2 E_2, \qquad \text{mit } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Das ist klar, weil $x_1 E_1$ und $x_2 E_2$ die Komponenten von X bezüglich des Achsensystems $(g(O,E_1), g(O,E_2))$ sind. Wir bezeichnen x_1 und x_2 als **Koordinaten** von X bezüglich der Basis (E_1, E_2).

Umgekehrt definiert ein Paar (x_1, x_2) von Skalaren $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ den eindeutigen Punkt $X \in \mathcal{E}$ mit den Koordinaten x_1, x_2.



Sei g eine Gerade parallel zu $g(O,E_2)$. Dann schneidet g die Gerade $g(O,E_1)$ in einem Punkt $a_1 E_1$. Für alle $X \in \mathcal{E}$ mit den Koordinaten (x_1, x_2) gilt:

$$X \in g \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = a_1$$

Eine analoge Beschreibung gilt für die Punkte auf einer Geraden parallel zu $g(O,E_1)$.

Sei g eine Gerade durch O mit $g \neq g(O,E_1)$ und $g \neq g(O,E_2)$. Sei $A \neq O$ ein Punkt auf g mit den Koordinaten (a_1, a_2). Dann gilt:

$$X \in g \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : X = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} (= \lambda)$$

Die Zahl a_2/a_1 heißt **Steigung** der Geraden g bezüglich der Basis (E_1, E_2).

Sei g eine Gerade, die weder zu $g(O,E_1)$ noch zu $g(O,E_2)$ parallel ist. Es gibt ein $B \in \mathcal{E}$, sodass das Translat $g - B = \{X - B : X \in g\}$ durch O verläuft. Seien

(b_1, b_2) die Koordinaten von B. Sei $A \neq O$ ein Punkt auf $g - B$ mit den Koordinaten (a_1, a_2). Dann gilt:

$$X \in g \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1 - b_1}{a_1} = \frac{x_2 - b_2}{a_2}$$

Diese Überlegungen implizieren, dass jede Gerade in $\mathcal{E}$ in Koordinaten bzgl. einer Basis (E_1, E_2) durch eine Gleichung der Form

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},\ (\alpha, \beta) \neq (0,0), \tag{8.1}$$

dargestellt werden kann. Umgekehrt repräsentiert jede Gleichung dieser Form eine Gerade in $\mathcal{E}$. Wir nennen (8.1) eine **Geradengleichung** in Koordinaten bzgl. einer Basis (E_1, E_2).

8.4. Zentrische Streckungen. Unter einer **zentrischen Streckung** mit **Zentrum** $O \in \mathcal{E}$ und **Streckfaktor** $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ verstehen wir eine Abbildung $h_{O,k} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die in $(\mathcal{E}, O)$ die Form

$$h_{O,k}(X) := kX$$

hat. Für das Bild einer Teilmenge $M \subseteq \mathcal{E}$ unter $h_{O,k}$ schreiben wir auch $h_{O,k}(M) = kM$.

Lemma 8.12. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) $h_{O,k}$ *ist invertierbar mit der Inversen* $h_{O,k}^{-1} = h_{O,1/k}$.
(2) *Für* $M \subseteq \mathcal{E}$ *und* $B \in \mathcal{E}$ *gilt* $k(M + B) = kM + kB$.
(3) *Falls* $k \neq 1$ *ist* O *der einzige Fixpunkt von* $h_{O,k}$.

Beweis. (1) und (2) folgen unmittelbar aus der Definition.

(3) Sei X ein Fixpunkt von $h_{O,k}$, d.h. $kX = X$. Das ist äquivalent zu $(k-1)X = O$, und weil $k \neq 1$ äquivalent zu $X = O$. □

Theorem 8.13. *Eine Abbildung* $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ *ist genau dann eine zentrische Streckung mit Zentrum* O*, wenn* $f(O) = O$ *und* f *jede Gerade* g *auf eine zu* g *parallele Gerade abbildet.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass f die zentrische Streckung $f(X) = kX$ ist. Dann gilt $f(O) = O$. Ist g eine Gerade durch O, dann gilt $f(g) = g$. Ist g eine allgemeine Gerade, dann gilt $g = g' + A$ für eine zu g parallele Gerade g' durch O und einen beliebigen Punkt A auf g. Es folgt mit Lemma 8.12(2)

$$f(g) = kg = k(g' + A) = kg' + kA = f(g') + kA = g' + kA.$$

Insbesondere ist $f(g)$ parallel zu g' und somit zu g.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ die Bedingung $f(O) = O$ erfüllt und jede Gerade auf eine parallele Gerade abbildet. Falls g eine Gerade durch O ist, muss daher $f(g) = g$ gelten. Daraus können wir schließen, dass für alle $X \in \mathcal{E} \setminus \{O\}$ ein Skalar $k_X \in \mathbb{R}$ existieren muss, sodass $f(X) = k_X X$ gilt. Es genügt nun zu zeigen, dass k_X unabhängig von X und $\neq 0$ ist.

Seien g und g' zwei verschiedene Geraden durch O. Weil $f(g) = g$, gibt es ein $A \in g$ mit $f(A) = k_A A \neq O$, d.h. $k_A \neq 0$. Sei $B \in g'$ beliebig. Dann gilt $g' \cap g(A, B) = \{B\}$ und daher

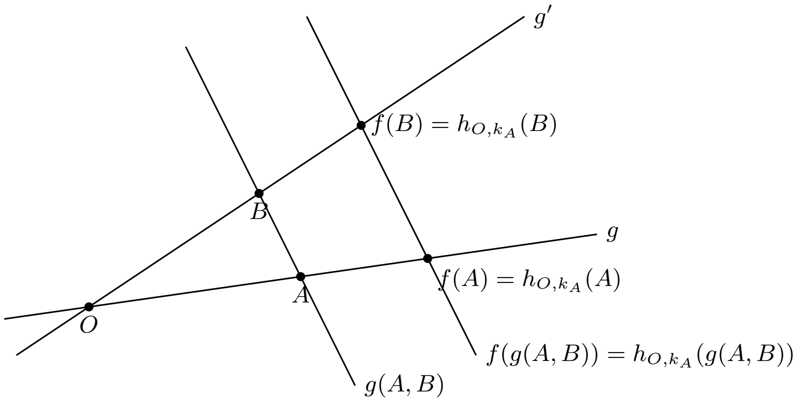
$$f(g') \cap f(g(A, B)) = \{f(B)\}.$$

Nun gilt $f(g') = g'$ und $f(g(A, B))$ ist nach Voraussetzung die Gerade parallel zu $g(A, B)$ durch $f(A) = k_A A$. Andererseits gilt auch $h_{O,k_A}(g') = g'$ und

$h_{O,k_A}(g(A,B))$ stimmt mit $f(g(A,B))$ überein, weil es die Gerade parallel zu $g(A,B)$ durch $h_{O,k_A}(A) = k_A A$ ist. Es folgt

$$f(B) = h_{O,k_A}(B) = k_A B.$$

Wir haben also gezeigt, dass $k_A = k_B$ für alle $B \in g'$ gilt.



Vertauschen wir die Rollen von g und g', dann folgt, dass $k_A = k_B$ für alle $A \in g$ und $B \in g'$ gilt. Somit muss k_X konstant auf $g \cup g'$ sein. Weil aber g und g' beliebige Geraden durch O waren, folgt dass $k_X = k \neq 0$ für alle $X \in \mathcal{E}$. $\square$

Korollar 8.14. *In $(\mathcal{E}, O)$ ist die Abbildung*

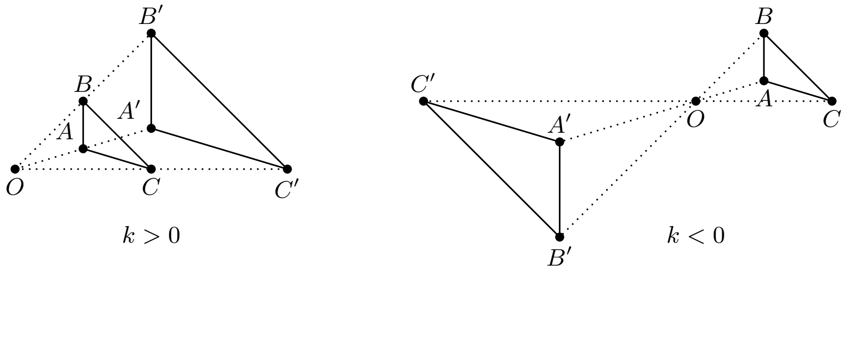
$$f(X) = k(X - A) + A,$$

wobei $A \in \mathcal{E}$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die zentrische Streckung $h_{A,k}$ mit Zentrum A und Streckfaktor k.

Beweis. Die Abbildung f ist eine Komposition von zwei Translationen und einer zentrischen Streckung und bildet daher Geraden auf parallele Geraden ab. Weiters gilt $f(A) = A$. Folglich ist f nach dem vorigen Theorem eine zentrische Streckung mit Zentrum A.

Für $A = O$ ist $f = h_{O,k}$ offensichtlich. Für $A \neq O$ bildet f die Gerade $g(O,A)$ auf sich selbst ab. Auf dieser Geraden kann die Relation $Y = k(X - A) + A$ auch in der Form $\overline{AY} = k\overline{AX}$ geschrieben werden. Somit ist der Streckfaktor k. $\square$

Bemerkung 8.15. Theorem 8.13 kann wie folgt ergänzt werden: Eine zentrische Streckung mit positivem (bzw. negativem) Streckfaktor bildet jede Gerade auf eine gleichsinnig (bzw. gegensinnig) parallele Gerade ab (Übung).



8.5. Die Vektorräume $(\mathcal{E}, O_1)$ und $(\mathcal{E}, O_2)$ sind isomorph.

Theorem 8.16. *Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{E}$ beliebig und sei f die Translation mit $f(O_1) = O_2$. Dann ist f ein Isomorphismus der Vektorräume $(\mathcal{E}, O_1)$ und $(\mathcal{E}, O_2)$.*

Beweis. In Korollar 7.5 haben wir gesehen, dass f ein Isomorphismus für die additive Struktur der beiden Räume ist. Daher genügt es zu zeigen, dass für alle $X \in \mathcal{E}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda \cdot_1 X) = \lambda \cdot_2 f(X)$$

gilt (hier bezeichnet $\cdot_i$ das Skalarprodukt in $(\mathcal{E}, O_i)$, $i = 1, 2$).

In $(\mathcal{E}, O_1)$ ist die Abbildung f durch $f(X) = X +_1 O_2$ gegeben, insbesondere gilt

$$f(\lambda \cdot_1 X) = \lambda \cdot_1 X +_1 O_2.$$

Das Korollar 8.14 impliziert (weil $\lambda \cdot_2 f(X) = h_{O_2,\lambda}(f(X))$)

$$\lambda \cdot_2 f(X) = \lambda \cdot_1 (f(X) -_1 O_2) +_1 O_2 = \lambda \cdot_1 X +_1 O_2.$$

Somit gilt $f(\lambda \cdot_1 X) = \lambda \cdot_2 f(X)$. □

8.6. Der Vektorraum der Translationen. Sei $O \in \mathcal{E}$ fix. Für $A \in \mathcal{E}$ bezeichne $t_A \in \mathscr{T}$ die Translation $X \mapsto X + A$ in $(\mathcal{E}, O)$. In Theorem 7.4 haben wir gesehen, dass die Abbildung $A \mapsto t_A$ ein Isomorphismus der additiven Strukturen von $(\mathcal{E}, O)$ und der Gruppe $\mathscr{T}$ der Translationen ist. Man kann nun die Abbildung $A \mapsto t_A$ verwenden, um $\mathscr{T}$ zu einem Vektorraum isomorph zu $(\mathcal{E}, O)$ zu machen. Dann zeigt Theorem 8.16, dass diese Vektorraumstruktur auf $\mathscr{T}$ unabhängig von der Wahl des Ursprunges O ist.

In der Sprache der freien Vektoren bedeutet das: Wir haben die Menge der freien Vektoren *so* zu einem Vektorraum gemacht, dass für jeden Punkt $O \in \mathcal{E}$ die Abbildung $\overrightarrow{OX} \mapsto X$ ein Isomorphismus dieses Vektorraums mit dem Vektorraum $(\mathcal{E}, O)$ ist.

9. Dilatationen

9.1. Charakterisierung von Dilatationen. Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt **Dilatation**, wenn es einen Punkt $O \in \mathcal{E}$ gibt, sodass f in $(\mathcal{E}, O)$ die Gestalt

$$f(X) = kX + A$$

für ein $A \in \mathcal{E}$ und $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ hat. Man zeigt leicht, dass f in der Ebene $(\mathcal{E}, O')$ mit einem anderen Ursprung O' dann die Gestalt $X \mapsto kX + A'$ für ein geeignetes $A' \in \mathcal{E}$ hat: um die Gestalt von f in $(\mathcal{E}, O')$ zu finden, müssen wir $t^{-1} \circ f \circ t$ für $t : X \mapsto X + (O - O')$ berechnen,

$$\begin{aligned} X \mapsto (t^{-1} \circ f \circ t)(X) &= (k(X + (O - O')) + A) - (O - O') \\ &= kX + (k-1)(O - O') + A = kX + A' \end{aligned}$$

für $A' := (k-1)(O - O') + A$.

Theorem 9.1. *Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist genau dann eine Dilatation, wenn f jede Gerade g auf eine Gerade parallel zu g abbildet.*

Beweis. Sei f eine Dilatation und $O \in \mathcal{E}$ so gewählt, dass f in $(\mathcal{E}, O)$ die Gestalt $f(X) = kX + A$ hat. Dann ist f die Komposition einer zentrischen Streckung und einer Translation und bildet deshalb Geraden auf parallele Geraden ab.

Umgekehrt sei f eine Abbildung, die Geraden auf parallele Geraden abbildet. Dann hat auch $g : X \mapsto f(X) - f(O)$ diese Eigenschaft und weiters gilt $g(O) = O$.

Nach Theorem 8.13 muss g eine zentrische Streckung $h_{O,k}$ sein. Daher gilt $f(X) = kX + f(O)$. $\square$

Proposition 9.2. *Sei f die Dilatation, die in $(\mathcal{E}, O)$ die Gestalt $f(X) = kX + A$ hat. Ist $k = 1$, dann ist f eine Translation. Ist $k \notin \{0, 1\}$, dann ist f eine zentrische Streckung mit Streckfaktor k.*

Beweis. Falls $k \notin \{0, 1\}$, dann hat die Gleichung $X = f(X)$ die Lösung

$$X_0 = \frac{1}{1-k} A.$$

Weil f Geraden auf parallele Geraden abbildet, gilt $f = h_{X_0,k}$. $\square$

Die Zahl k wird **Streckfaktor** der Dilatation genannt.

9.2. Die Dilatationsgruppe.

Theorem 9.3. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Die Dilatationen der Ebene $\mathcal{E}$ bilden eine nicht-abelsche Gruppe $\mathscr{D}$ bezüglich der Komposition.*
(2) *Für zwei Elemente $d_1, d_2 \in \mathscr{D}$ gilt $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$ genau dann, wenn d_1 und d_2 beide Translation oder beide zentrische Streckungen mit dem gleichen Zentrum sind.*
(3) *Die Abbildung $\varphi : \mathscr{D} \to \mathbb{R}^*$, die $d \in \mathscr{D}$ den Streckfaktor k von d zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}^*$.*

Beweis. Übung. $\square$

9.3. Dilatation von Teilmengen von $\mathcal{E}$.

Lemma 9.4. *Seien $X, Y, X', Y' \in \mathcal{E}$ vier Punkte, sodass $X \neq Y$, $X' \neq Y'$ und $g(X, Y) \| g(X', Y')$. Dann gibt es eine eindeutige Dilatation f mit $f(X) = X'$ und $f(Y) = Y'$.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz. Sei t die Translation, die X auf X' abbildet. Dann gilt $t(Y) \in g(X', Y')$. Somit gibt es eine zentrische Streckung mit Zentrum X', die $t(Y)$ auf Y' abbildet. Die gesuchte Dilatation ist die Komposition dieser beiden Abbildungen.

Nun zur Eindeutigkeit: Nehmen wir an, dass f und g beide die Proposition erfüllen. Dann ist $f^{-1} \circ g$ eine Dilatation mit den Fixpunkten X und Y. Schreiben wir $f^{-1} \circ g$ in der Form $X \mapsto kX + A$ bzgl. $(\mathcal{E}, O)$, dann gilt also

$$kX + A = X \quad \text{und} \quad kY + A = Y$$

oder äquivalent dazu

$$(1-k)(X - Y) = O.$$

Weil $X \neq Y$ folgt $k = 1$ und $A = O$ (sonst gäbe es keine Fixpunkte). Somit gilt $f^{-1} \circ g = \mathrm{id}$, d.h. $f = g$. $\square$

Proposition 9.5. *Sei S eine nicht-leere, nicht-kollineare Teilmenge von $\mathcal{E}$ und sei $f : S \to \mathcal{E}$ eine Abbildung mit der Eigenschaft*

$$g(f(X), f(Y)) \| g(X, Y) \quad \textit{für alle } X \neq Y \in S.$$

Dann ist f konstant oder die Einschränkung einer eindeutigen Dilatation.

Beweis. Betrachten wir zunächst den Fall, dass f mindestens zwei Fixpunkte A, B hat. Sei $X \in S \setminus g(A,B)$ beliebig. Die Geraden $g(X,A)$ und $g(X,B)$ schneiden sich in X und sie sind parallel zu $g(f(X),A)$ bzw. $g(f(X),B)$. Es folgt $f(X) = X$, d.h. ist die Identität auf $S \setminus g(A,B)$.

Weil S nicht-kollinear ist, gibt es einen Punkt $C \in S$ mit $C \notin g(A,B)$. Nach dem ersten Absatz ist C ein Fixpunkt von f und weiters ist f die Identität auf $S \setminus g(A,C)$. Es folgt, dass f die Identität auf ganz S ist.

Nehmen wir nun an, dass f nicht konstant ist und höchstens einen Fixpunkt hat. Es gibt also insbesondere $A, B \in S$ mit $f(A) \neq f(B)$. Weil $g(f(A), f(B)) \| g(A,B)$ existiert nach Lemma 9.4 eine eindeutige Dilatation g mit $g(A) = f(A)$ und $g(B) = f(B)$. Somit ist $g^{-1} \circ f$ eine Abbildung $S \to \mathcal{E}$, die die Voraussetzungen der Proposition erfüllt und zwei verschiedene Fixpunkte hat. Der erste Teil des Beweises zeigt, dass $g^{-1} \circ f$ die Einschränkung der Identität ist. Also ist f die Einschränkung der eindeutigen Dilatation g. □

9.4. Der Strahlensatz. Das **Teilverhältnis** $\frac{AC}{BC}$ dreier paarweise verschiedener kollinearer Punkte $A, B, C \in \mathcal{E}$ ist der Proportionalitätsfaktor der freien Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$, d.h.

$$\overrightarrow{AC} =: \frac{AC}{BC} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Wenn wir die Gerade, auf der die Punkte A, B und C liegen, orientieren, dann gilt (in Termen des signierten Abstandes)

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}};$$

der Wert des Teilverhältnisses ist unabhängig von der Wahl der Orientierung. Insbesondere haben wir

$$\left|\frac{AC}{BC}\right| = \frac{d(A,C)}{d(B,C)}$$

und das Vorzeichen gibt an, ob die Vektoren gleichsinnig oder gegensinnig orientiert sind.

Bemerkung 9.6. Seien A, B, C drei paarweise verschiedene kollineare Punkte. Dann gilt

$$\frac{AB}{BC} = \begin{cases} \frac{d(A,B)}{d(B,C)} & \text{falls } B \in (A,C), \\ -\frac{d(A,B)}{d(B,C)} & \text{falls } B \notin (A,C). \end{cases}$$

Z.B. ist M der Mittelpunkt von A und B, dann gilt $\frac{AM}{MB} = 1$.

Sind $A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{E}$ vier Punkte mit $g(A_1, A_2) \| g(B_1, B_2)$, dann macht es Sinn $\frac{A_1A_2}{B_1B_2}$ durch

$$\overrightarrow{A_1A_2} =: \frac{A_1A_2}{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_2}$$

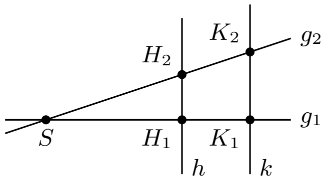
zu definieren, weil die freien Vektoren $\overrightarrow{A_1A_2}$ und $\overrightarrow{B_1B_2}$ sich dann nur um ein skalares Vielfaches unterscheiden.

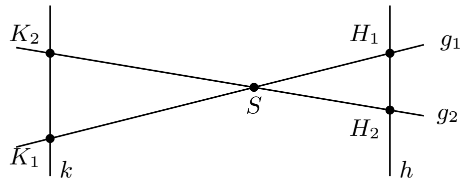
Theorem 9.7 (Orientierter Strahlensatz)**.** *Seien g_1, g_2 zwei Geraden mit Schnittpunkt S und h, k zwei weitere Geraden. Seien $g_1 \cap h = \{H_1\}$, $g_2 \cap h = \{H_2\}$ und $g_1 \cap k = \{K_1\}$, $g_2 \cap k = \{K_2\}$, sodass S, H_1, H_2 und S, K_1, K_2 jeweils paarweise verschieden sind. Dann gilt*

$$\frac{SH_1}{SK_1} = \frac{SH_2}{SK_2} = \frac{H_1H_2}{K_1K_2}$$

genau dann, wenn h und k parallel sind. Weiters gilt in dieser Situation falls $h \neq k$

$$\frac{SH_1}{H_1K_1} = \frac{SH_2}{H_2K_2}.$$





Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass h und k parallel sind. Wir wenden Proposition 9.5 auf die Abbildung $f : \{S, H_1, H_2\} \to \mathcal{E}$ an, die durch $f(S) = S$, $f(H_1) = K_1$ und $f(H_2) = K_2$ definiert ist. Die Proposition liefert, dass f entweder konstant ist oder die Einschränkung einer eindeutigen Dilatation ist, die wir auch mit f bezeichnen. Weil S, K_1 und K_2 paarweise disjunkt sind, kann f nicht konstant sein. Somit ist f eine zentrische Steckung mit Zentrum S ist. In $(\mathcal{E}, O)$ hat f also die Gestalt $X \mapsto \lambda(X - S) + S$ für ein $\lambda \neq 0$ (vgl. Korollar 8.14). Weil $f(H_1) = K_1$ und $f(H_2) = K_2$, folgt

$$\lambda(H_1 - S) + S = K_1 \quad \text{und} \quad \lambda(H_2 - S) + S = K_2 \tag{9.1}$$

und daher

$$\frac{SH_1}{SK_1} = \lambda^{-1} = \frac{SH_2}{SK_2}.$$

Subtrahieren wir die zweite von der ersten Gleichung in (9.1), dann erhalten wir

$$\lambda(H_1 - H_2) = K_1 - K_2,$$

das bedeutet

$$\lambda^{-1} = \frac{H_1H_2}{K_1K_2}.$$

Wenn umgekehrt

$$\frac{SH_1}{SK_1} = \frac{SH_2}{SK_2} =: \lambda^{-1}$$

gilt, dann ist die Abbildung $f : \{S, H_1, H_2\} \to \mathcal{E}$ mit $f(S) = S$, $f(H_1) = K_1$ und $f(H_2) = K_2$ die Einschränkung einer zentrischen Streckung mit Zentrum S und Streckfaktor λ. Nach Theorem 8.13 sind folglich die Geraden h und k parallel.

Die Bedingung $h \neq k$ impliziert $\lambda \neq 1$. Die Gleichungen (9.1) liefern dann

$$(\lambda - 1)(H_1 - S) = K_1 - H_1 \quad \text{und} \quad (\lambda - 1)(H_2 - S) = K_2 - H_2$$

und das Supplement folgt. □

Korollar 9.8 (Strahlensatz)**.** *Seien g_1, g_2 zwei Geraden mit Schnittpunkt S und h, k zwei parallele Geraden. Seien $g_1 \cap h = \{H_1\}$, $g_2 \cap h = \{H_2\}$ und $g_1 \cap k = \{K_1\}$, $g_2 \cap k = \{K_2\}$, sodass S, H_1, H_2 und S, K_1, K_2 jeweils paarweise verschieden sind. Dann gilt*

$$\frac{d(S, H_1)}{d(S, K_1)} = \frac{d(S, H_2)}{d(S, K_2)} = \frac{d(H_1, H_2)}{d(K_1, K_2)}.$$

9.5. Affine Abbildungen. Unter einer **affinen Abbildung** der Ebene verstehen wir eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die in $(\mathcal{E}, O)$ die Gestalt

$$X \mapsto \ell(X) + A$$

hat, wobei $A \in \mathcal{E}$ und ℓ eine lineare Abbildung $\ell : (\mathcal{E}, O) \to (\mathcal{E}, O)$ ist.

KAPITEL 4

Metrische Struktur

10. Orthogonalität

10.1. Das Orthogonalitätsaxiom. Eine Ebene, die den Axiomen 0–6 genügt, hat keine echte metrische Struktur. Es trägt zwar jede Gerade eine metrische Struktur, aber es gibt keine Verbindung zwischen den metrischen Strukturen auf verschiedenen Geraden.

Beispiel 10.1. Sei $(\mathcal{E}, \mathscr{G})$ eine Ebene, die den Axiomen 0–6 genügt, mit der Distanzfunktion d (vgl. Axiom 5). Sei $f : \mathscr{G} \to (0, \infty)$ eine beliebige Abbildung. Für $X, Y \in \mathcal{E}$ mit $X \neq Y$ definieren wir

$$d'(X, Y) := f(g(X, Y)) \cdot d(X, Y).$$

Dann definiert d' eine Abstandsfunktion, mit welcher $(\mathcal{E}, \mathscr{G})$ die Axiome 0–6 erfüllt und somit die gleiche affine Struktur wie mit der Abstandsfunktion d hat. Denn: Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, dass d' eine Abstandsfunktion ist (d.h. Axiom 5 erfüllt) und der Mittelpunkt zweier Punkte bzgl. d mit dem Mittelpunkt bzgl. d' übereinstimmt (d.h. Axiom 6 ist erfüllt). In den übrigen Axiomen kommt die Distanzfunktion nicht vor.

Axiom 7. ***Orthogonalität*** *ist eine Relation $\perp$ auf der Menge der Geraden $\mathscr{G}$ in $\mathcal{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $g \perp h \;\Leftrightarrow\; h \perp g$.
(2) *$g \perp h$ impliziert, dass g und h nicht parallel sind.*
(3) *Für jede Gerade g gibt es mindestens eine Gerade h mit $g \perp h$.*
(4) *Für je zwei Geraden g, h mit $g \perp h$ und jede Gerade h' gilt $h \| h' \;\Leftrightarrow\; g \perp h'$.*

Gilt $g \perp h$ dann nennen wir die Geraden g und h ***orthogonal****.*

Wir nennen zwei Halbgeraden **orthogonal**, wenn die entsprechenden Trägergeraden orthogonal sind. Zwei Richtungen δ und δ' heißen **orthogonal** (wir schreiben $\delta \perp \delta'$), wenn es zwei Geraden g, g' mit den Richtungen δ, δ' gibt und $g \perp g'$ gilt.

Lemma 10.2. *Orthogonalität von Richtungen definiert eine Relation auf der Menge aller Richtungen mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *Die Relation ist symmetrisch.*
(2) *Die Relation ist anti-reflexiv, d.h. $\delta \perp \delta$ ist unmöglich.*
(3) *Für jede Richtung δ gibt es eine eindeutige Richtung δ', sodass $\delta \perp \delta'$. Weiters gilt $g \perp g'$ genau dann, wenn (Richtung von g)$\perp$(Richtung von g').*

Beweis. Das Lemma ist eine direkte Konsequenz von Axiom 7. □

Proposition 10.3. *Jede Dilatation erhält Orthogonalität.*

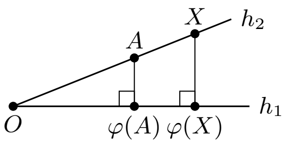
Beweis. Sei f eine Dilatation und $g \perp g'$. Dann gilt $g \| f(g)$ und $g' \| f(g')$ (vgl. Theorem 9.1). Nach Axiom 7 folgt $f(g) \perp f(g')$. □

10.2. Orthogonalprojektion. Die Schiefprojektion auf eine Gerade g, deren Richtung orthogonal zur Richtung von g ist, wird die **Orthogonalprojektion** auf g genannt.

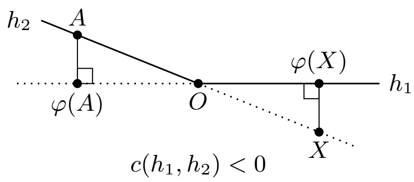
Seien h_1, h_2 Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung O und seinen g_1, g_2 die entsprechenden Trägergeraden. Wir können annehmen, dass g_1 und g_2 so orientiert sind, dass für die Punkte $X \in h_1$ bzw. $X \in h_2$ jeweils $X \geq O$ gilt. Wir schreiben $\overline{OX}$ für dem signierten Abstand von O und X auf g_1, genauso für g_2. Sei φ die Orthogonalprojektion auf g_1 und A der eindeutige Punkt auf g_2 mit $\overline{OA} = 1$. Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\varphi(\lambda A) = \lambda \varphi(A)$ (vgl. Lemma 8.9). Es folgt, dass für alle $X \in g_2 \setminus \{O\}$ gilt, dass

$$\frac{\overline{O\varphi(X)}}{\overline{OX}} = \frac{\overline{O\varphi(A)}}{\overline{OA}} = \overline{O\varphi(A)}$$

unabhängig von X ist. Somit ist die folgende Definition sinnvoll.



$c(h_1, h_2) > 0$

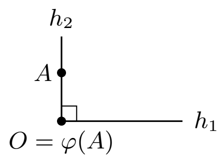


$c(h_1, h_2) < 0$

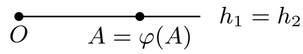
Definition 10.4. Der Skalar k, für den $\overline{O\varphi(X)} = k\overline{OX}$ für alle $X \in g_2$ gilt, heißt das **Projektionsverhältnis** von h_2 auf h_1. Wir bezeichenen es mit $c(h_1, h_2)$.

Es gelten die folgenden Aussagen:

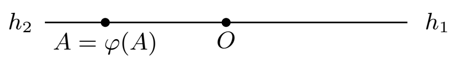
- $c(h_1, h_2) = 0$ genau dann, wenn $h_1 \perp h_2$.
- Wenn $h_1 = h_2$, dann gilt $c(h_1, h_2) = 1$.
- Sind h_1 und h_2 kollinear, aber entgegengesetzt, dann gilt $c(h_1, h_2) = -1$.



$c(h_1, h_2) = 0$



$c(h_1, h_2) = 1$



$c(h_1, h_2) = -1$

11. Inneres Produkt

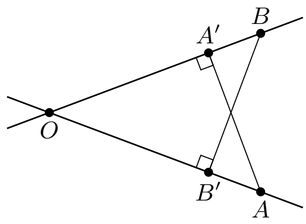
11.1. Das Symmetrieaxiom. Das folgende Axiom verbindet die Metriken auf den verschiedenen Geraden.

Axiom 8. *Für je zwei Halbgeraden h_1 und h_2 mit dem gleichen Ursprung gilt*

$$c(h_1, h_2) = c(h_2, h_1).$$

Äquivalente Formulierung: Für jedes Tripel (O, A, B) von nicht-kollinearen Punkten mit $d(O, A) = d(O, B)$ gilt: Bezeichnen A' und B' die Orthogonalprojektionen von

A und B auf $g(O,B)$ bzw. $g(O,A)$, dann gilt $\overline{OA'} = \overline{OB'}$ auf den Geraden $g(O,B)$ bzw. $g(O,A)$, wenn diese so orientiert sind, dass $O \leq B$ und $O \leq A$.



11.2. Norm und inneres Produkt. Im Vektorraum $(\mathcal{E},O)$ ist die **Norm** von $X \in \mathcal{E}$ definiert durch

$$\|X\| := d(O,X).$$

Es folgt:

- $\|X\| \geq 0$ und $\|X\| = 0 \;\Leftrightarrow\; X = O$.
- Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$. Insbesondere gilt $\|-X\| = \|X\|$.

In $(\mathcal{E},O)$ ist das **innere Produkt** (oder **Skalarprodukt**) von $X \in \mathcal{E} \setminus \{O\}$ und $Y \in \mathcal{E} \setminus \{O\}$ definiert durch

$$\langle X \mid Y \rangle := \|X\| \cdot \|Y\| \cdot c(h_X, h_Y),$$

wobei h_X (bzw. h_Y) die positive Halbgerade in der orientierten Gerade $g(O,X)$ (bzw. $g(O,Y)$) mit Ursprung O ist. Weiters setzen wir

$$\langle X \mid O \rangle := 0 \quad \text{und} \quad \langle O \mid X \rangle := 0.$$

Lemma 11.1. *Es gilt $\langle X \mid Y \rangle = 0$ genau dann, wenn entweder $h_X \perp h_Y$, $X = O$ oder $Y = O$.*

Beweis. Folgt aus der Definition. □

Wir werden in Hinkunft die äquivalenten Aussagen des Lemmas als Definition für die Orthogonalität von zwei Vektoren X und Y in $(\mathcal{E},O)$ verwenden. Dann gilt:

$$\langle X \mid Y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X \perp Y.$$

Wir schreiben manchmal $c(X,Y)$ für $c(h_X,h_Y)$ in $(\mathcal{E},O)$; das macht nur Sinn, wenn $X \neq O$ und $Y \neq O$.

Lemma 11.2. *Sei g eine orientierte Gerade durch O und X. Ist φ die Orthogonalprojektion auf g, dann gilt*

$$\langle X \mid Y \rangle = \overline{OX} \cdot \overline{O\varphi(Y)}.$$

Beweis. Wenn X oder Y gleich O ist, ist nichts zu zeigen. Seien also X und Y beide verschiedenen von O. Eine Änderung der Orientierung von g lässt das Produkt $\overline{OX} \cdot \overline{O\varphi(Y)}$ invariant (weil beide Faktoren das Vorzeichen wechseln). Daher können wir annehmen, dass g so orientiert ist, dass $O < X$. Dann gilt $\overline{OX} = \|X\|$ und $\overline{O\varphi(Y)} = \|Y\| c(h_X,h_Y)$ (nach der Definition des Projektionsverhältnisses $c(\cdot,\cdot)$). Das Lemma folgt. □

Theorem 11.3. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned}(\mathcal{E},O) \times (\mathcal{E},O) &\to \mathbb{R}\\ (X,Y) &\mapsto \langle X \mid Y \rangle\end{aligned}$$

ist

(1) ***symmetrisch***, *d.h.*

$$\langle X \mid Y\rangle = \langle Y \mid X\rangle \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{E},$$

(2) ***bilinear***, *d.h.*

$$\langle \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \mid Y\rangle = \lambda_1\langle X_1 \mid Y\rangle + \lambda_2\langle X_2 \mid Y\rangle$$
$$\langle X \mid \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2\rangle = \lambda_1\langle X \mid Y_1\rangle + \lambda_2\langle X \mid Y_2\rangle$$

für alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *und alle* $X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{E}$,

(3) ***positiv definit***, *d.h.*

$$\langle X \mid X\rangle > 0 \quad \text{für alle } X \in \mathcal{E} \setminus \{O\}.$$

Beweis. (1) Die Symmetrie ist klar, wenn $X = O$ oder $Y = O$. Falls $X \neq O$ und $Y \neq O$, dann folgt die Symmetrie aus der Symmetrie von $c(X, Y)$ (nach Axiom 8).

(2) Wegen (1) genügt es zu zeigen, dass die Abbildung $Y \mapsto \langle X \mid Y\rangle$ linear ist für jedes X. Das ist klar, falls $X = O$. Nehmen wir an, dass $X \neq O$. Sei φ die Orthogonalprojektion auf die orientierte Gerade $g(O, X)$. Dann ist nach Korollar 8.11 φ linear. Ebenso ist die Abbildung $g(O, X) \to \mathbb{R}$, $U \mapsto \overline{OU}$, linear. Somit ist nach Proposition 8.6 auch die Komposition $\mathcal{E} \to \mathbb{R}$, $Y \mapsto \overline{O\varphi(Y)}$ linear. Weil $\langle X \mid Y\rangle = \overline{OX} \cdot \overline{O\varphi(Y)}$ wegen Lemma 11.2, folgt dass $Y \mapsto \langle X \mid Y\rangle$ linear ist.

(3) folgt, weil

$$\langle X \mid X\rangle = \|X\|^2,$$

nach der Definition des inneren Produktes. □

11.3. Wichtige Identitäten und die Cauchy–Schwarz Ungleichung.

Proposition 11.4. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Für alle Vektoren* X, Y *in* $(\mathcal{E}, O)$ *gilt:*

$$\begin{aligned} \|X+Y\|^2 &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\langle X|Y\rangle \\ \|X-Y\|^2 &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\langle X|Y\rangle \\ \|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2 &= 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2 \\ 4\langle X|Y\rangle &= \|X+Y\|^2 - \|X-Y\|^2 \end{aligned}$$

(2) *Es gilt die* ***Cauchy–Schwarz Ungleichung***:

$$|\langle X|Y\rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

für alle $X, Y \in \mathcal{E}$. *Gleichheit gilt genau dann, wenn* O, X *und* Y *kollinear sind.*

Beweis. (1) Die ersten beiden Identitäten folgen aus der Bilinearität, die dritte durch Addition und die vierte durch Subtraktion der ersten beiden.

(2) Ist $X = O$ oder $Y = O$ so ist nichts zu zeigen. Nehmen wir also an, dass $X \neq O$ und $Y \neq O$. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\|tX - Y\|^2 = t^2\|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2t\langle X|Y\rangle \geq 0.$$

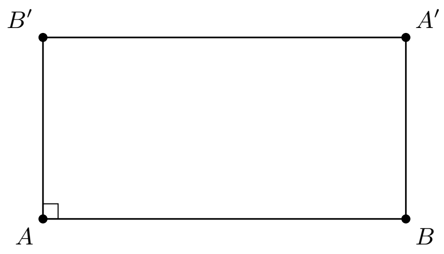
Es folgt, dass die Diskriminante der quadratischen Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto t^2\|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2t\langle X|Y\rangle$ negativ oder Null sein muss:

$$4\langle X|Y\rangle^2 - 4\|X\|^2\|Y\|^2 \leq 0.$$

Die Cauchy–Schwarz Ungleichung folgt. Und Gleichheit gilt genau dann, wenn die quadratische Funktion eine reelle Nullstelle hat, also genau dann, wenn $tX = Y$ für $t = \langle X \mid Y\rangle / \|X\|^2$. □

11.4. Translationsinvarianz des Abstands. Die Definition des inneren Produktes hängt von der Wahl des Ursprungs O ab. Wir wollen nun verstehen, wie es sich verhält, wenn wir den Ursprung wechseln.

Ein Parallelogramm (A, B, A', B'), für welches $g(A, B) \perp g(A, B')$ gilt, heißt **Rechteck**.



Aus Axiom 7 folgt, dass im Rechteck (A, B, A', B') auch $g(A, B) \perp g(B, A')$, $g(B, A') \perp g(A', B')$ und $g(A', B') \perp g(A, B')$ gilt, und daher auch (B, A', B', A), (A', B', A, B) und (B', A, B, A') Rechtecke sind.

Lemma 11.5. *In jedem Rechteck (A, B, A', B') haben gegenüberliegende Seiten die gleiche Länge, d.h. $d(A, B) = d(A', B')$ und $d(A, B') = d(A', B)$.*

Beweis. Im Vektorraum $(\mathcal{E}, A)$ gilt

$$A' = B + B' \quad \text{und} \quad \langle B \mid B' \rangle = 0.$$

Es folgt, mit Proposition 11.4,

$$\|A'\|^2 = \|B + B'\|^2 = \|B\|^2 + \|B'\|^2,$$

das bedeutet

$$d(A, A')^2 = d(A, B)^2 + d(A, B')^2.$$

Eine analoge Rechnung in $(\mathcal{E}, B)$ ergibt

$$d(B, B')^2 = d(A, B)^2 + d(A', B)^2.$$

Und in $(\mathcal{E}, A')$ bzw. $(\mathcal{E}, B')$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d(A, A')^2 &= d(A', B')^2 + d(A', B)^2, \\ d(B, B')^2 &= d(A', B')^2 + d(A, B')^2. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} d(A, B)^2 + d(A, B')^2 &= d(A', B')^2 + d(A', B)^2, \\ d(A, B)^2 + d(A', B)^2 &= d(A', B')^2 + d(A, B')^2. \end{aligned}$$

Addition und Subtraktion liefern

$$d(A, B)^2 = d(A', B')^2 \quad \text{und} \quad d(A', B)^2 = d(A, B')^2.$$

Das Lemma folgt. $\square$

Eine Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ heißt **Isometrie**, wenn sie Distanzen erhält, d.h.

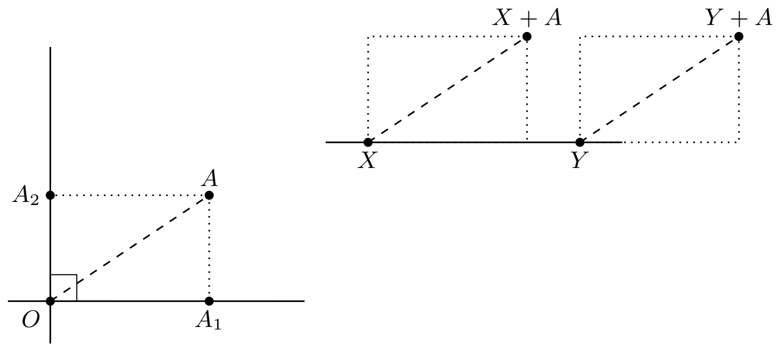
$$d(X, Y) = d(f(X), f(Y)) \quad \text{für alle } X, Y \in \mathcal{E}.$$

Proposition 11.6. *Jede Translation ist eine Isometrie.*

Beweis. Sei f die Translation $U \mapsto U+A$ in $(\mathcal{E}, O)$. Falls $X = Y$, dann gilt natürlich $d(X,Y) = 0 = d(f(X), f(Y))$. Sei also $X \neq Y$. Die Gleichung

$$d(X,Y) = d(f(X), f(Y))$$

gilt, falls die Translation f parallel zu $g(X,Y)$ ist (dann bildet f die Gerade $g(X,Y)$ auf sich selbst ab) und falls die Translation f orthogonal zu $g(X,Y)$ ist wegen Lemma 11.5. Seien nun A_1, A_2 die Komponenten von A bezüglich eines Achsensystems bestehend aus einer Geraden parallel zu $g(X,Y)$ durch O und einer dazu orthogonalen Geraden durch O. Dann ist f die Komposition der beiden Translationen $U \mapsto U + A_1$ und $U \mapsto U + A_2$. Die Behauptung folgt. $\square$



Korollar 11.7. *In $(\mathcal{E}, O)$ gilt*

$$d(X,Y) = \|Y - X\| \quad \textit{für alle } X, Y \in \mathcal{E}.$$

Beweis. In $(\mathcal{E}, O)$ gilt wegen Proposition 11.6

$$d(X,Y) = d(X + A, Y + A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{E}.$$

Für $A = -X$ erhalten wir

$$d(X,Y) = d(O, Y - X) = \|Y - X\|. \qquad \square$$

Theorem 11.8. *Seien $O_1, O_2 \in \mathcal{E}$ und sei f die Translation, die O_1 auf O_2 abbildet. Sei $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_i$ das innere Produkt in $(\mathcal{E}, O_i)$, $i = 1, 2$. Dann gilt*

$$\langle X \mid Y \rangle_1 = \langle f(X) \mid f(Y) \rangle_2 \quad \textit{für alle } X, Y \in \mathcal{E}.$$

Die Translation f ist also ein Isomorphismus der beiden Vektorräume mit innerem Produkt $(\mathcal{E}, O_1)$ und $(\mathcal{E}, O_2)$.

Beweis. Es gilt mit Proposition 11.4, Proposition 11.6 und Korollar 11.7

$$\begin{aligned} 4\langle X \mid Y \rangle_1 &= \|X + Y\|_1^2 - \|X - Y\|_1^2 \\ &= d(O_1, X + Y)^2 - d(X, Y)^2 \\ &= d(f(O_1), f(X + Y))^2 - d(f(X), f(Y))^2 \\ &= d(O_2, f(X) + f(Y))^2 - d(f(X), f(Y))^2 \\ &= \|f(X) + f(Y)\|_2^2 - \|f(X) - f(Y)\|_2^2 \\ &= 4\langle f(X) \mid f(Y) \rangle_2. \end{aligned}$$

Dass f ein Isomorphismus der Vektorräume $(\mathcal{E}, O_1)$ und $(\mathcal{E}, O_2)$ ist, haben wir in Theorem 8.16 gesehen. $\square$

11.5. Ein inneres Produkt auf dem Vektorraum der Translationen. In Abschnitt 8.6 haben wir eine Vektorraumstruktur auf dem Raum $\mathscr{T}$ der Translationen bzw. freien Vektoren eingeführt, sodass für alle $O \in \mathcal{E}$ die Abbildung $X \mapsto \overrightarrow{OX}$ ein Isomorphismus von $(\mathcal{E}, O)$ auf $\mathscr{T}$ ist.

Sei $O \in \mathcal{E}$ fix. Dann können wir diese Abbildung verwenden um ein inneres Produkt auf $\mathscr{T}$ einzuführen:

$$\langle \overrightarrow{OX} \mid \overrightarrow{OY} \rangle := \langle X \mid Y \rangle.$$

Theorem 11.8 impliziert, dass dieses innere Produkt nicht von der Wahl des Punktes O abhängt, d.h. es gilt

$$\langle X \mid Y \rangle = \langle \overrightarrow{OX} \mid \overrightarrow{OY} \rangle \quad \text{für alle } O \in \mathcal{E}.$$

Man beachte, dass die linke Seite in $(\mathcal{E}, O)$ ausgewertet wird, die rechte Seite in $\mathscr{T}$.

12. Metrische Eigenschaften

Die **Länge** einer Strecke $[A, B]$, (A, B), $[A, B)$ oder $(A, B]$ ist nach Definition der Abstand $d(A, B)$ der Endpunkte A und B.

12.1. Parallelogramme und Dreiecke.

Proposition 12.1. *In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der Diagonallängen gleich der Summe der Quadrate der Seitenlängen.*

Beweis. Im Parallelogramm $(O, X, X + Y, Y)$ in $(\mathcal{E}, O)$ gilt die Behauptung, weil nach Proposition 11.4 die Identität

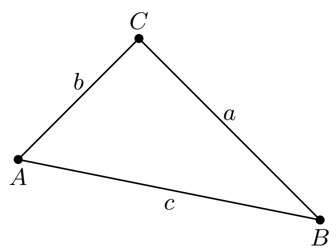
$$\|X + Y\|^2 + \|X - Y\|^2 = 2\|X\|^2 + 2\|Y\|^2$$

gilt. Ein allgemeines Parallelogramm kann durch eine Translation in ein Parallelogramm der obigen Form übergeführt werden. Weil nach Proposition 11.6 Translationen Isometrien sind, folgt die Proposition. □

Proposition 12.2. *Ein Parallelogramm ist genau dann ein Rechteck, wenn die Diagonalen die gleiche Länge haben.*

Beweis. Übung. □

Ein **Dreieck** ist ein Tripel (A, B, C) mit $A, B, C \in \mathcal{E}$. Wenn die Punkte A, B, C nicht-kollinear sind, dann nennen wir das Dreieck (A, B, C) **nicht degeneriert**, und andernfalls **degeneriert**. Wir bezeichen mit a (b bzw. c) die Länge der Seite, die der Ecke A (B bzw. C) gegenüber liegt:



Proposition 12.3. *Sei (A, B, C) ein Dreieck mit $A \neq C$ und $B \neq C$. Wenn h_{CA} (bzw. h_{CB}) die positive Halbgerade in $g(C, A)$ (bzw. $g(C, B)$) mit Ursprung C bezeichnet, dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot c(h_{CA}, h_{CB}).$$

Insbesondere gilt der ***Satz von Pythagoras:***

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad h_{CA} \perp h_{CB}. \tag{12.1}$$

Beweis. Im Vektorraum $(\mathcal{E}, C)$ gilt (vgl. Proposition 11.4 und Korollar 11.7)

$$c^2 = d(A,B)^2 = \|B - A\|^2 = \|B\|^2 + \|A\|^2 - 2\langle B \mid A\rangle = b^2 + a^2 - 2ba \cdot c(h_{CA}, h_{CB}).$$

Weil $ab \neq 0$, gilt $c^2 = a^2 + b^2$ genau dann, wenn $c(h_{CA}, h_{CB}) = 0$, und das ist genau dann der Fall, wenn $h_{CA} \perp h_{CB}$. □

Das Dreieck (A, B, C) heißt **rechtwinkelig** (in C) falls (12.1) gilt. In diesem Fall bezeichnen wir die Strecke (A, B) als **Hypothenuse** und die Strecken (B, C) und (C, A) als **Katheten** des Dreiecks.

Proposition 12.4. *Für alle $X, Y \in (\mathcal{E}, O)$ gilt*

$$\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $X \in [O, Y]$ oder $Y \in [O, X]$.

Beweis. Wenn $X = O$ oder $Y = O$, dann ist nichts zu zeigen. Seinen also $X \neq O$ und $Y \neq O$. Nach Proposition 11.4 gilt

$$\begin{aligned} \|X + Y\|^2 &= \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\langle X \mid Y\rangle \\ &\leq \|X\|^2 + \|Y\|^2 + 2\|X\|\|Y\| \\ &= (\|X\| + \|Y\|)^2. \end{aligned}$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\langle X \mid Y\rangle = \|X\|\|Y\|$, d.h. $c(X, Y) = 1$. Das ist genau dann der Fall, wenn $X \in [O, Y]$ oder $Y \in [O, X]$. □

Korollar 12.5. *Für je drei Punkte $X, Y, Z \in \mathcal{E}$ gilt die* ***Dreiecksungleichung:***

$$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y).$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $Z \in [X, Y]$.

Beweis. Wählen wir Z als den Ursprung in $\mathcal{E}$, dann wird die behauptete Ungleichung zu

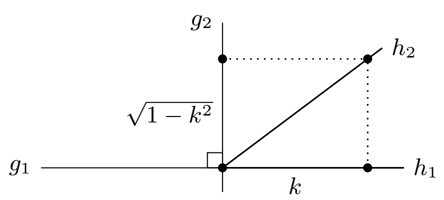
$$\|X - Y\| \leq \|X\| + \|Y\|,$$

und diese folgt aus der vorigen Proposition (mit $-Y$ anstelle von Y). □

Für das nächste Theorem benötigen wir zunächst ein Lemma.

Lemma 12.6. *Für jede reelle Zahl $k \in [-1, 1]$ existieren zwei Halbgeraden h_1 und h_2 mit Ursprung O und $c(h_1, h_2) = k$.*

Beweis. Das Axiom 7 garantiert die Existenz zweier orthogonaler Geraden g_1, g_2 durch O. Sei X derjenige Punkt, der bezüglich des Achsensystems (g_1, g_2) die Koordinaten $(k, \sqrt{1 - k^2})$ hat. Bezeichnen wir mit h_1 die positive Halbgerade von g_1 und mit h_2 die positive Halbgerade von $g(O, X)$ jeweils mit Ursprung O, dann haben wir die gesuchten Halbgeraden gefunden (vgl. die Definition von $c(h_1, h_2) = c(h_2, h_1)$). □



Bemerkung 12.7. Der Beweis des Lemmas beruht in entscheidender Weise auf der Existenz der Quadratwurzel positiver reeller Zahlen. Ersetzt man den Körper $\mathbb{R}$ durch einen geeigneten Unterkörper $K \leq \mathbb{R}$, dem diese Eigenschaft fehlt, dann ist das Lemma falsch, auch wenn die entsprechende Ebene $\mathcal{E}$ die Axiome 0–8 erfüllt.

Theorem 12.8. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Es existiert ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c.*
(2) *Jede dieser drei Zahlen ist höchstens so groß wie die Summe der beiden anderen.*
(3) $|a - b| \leq c \leq a + b$.

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Korollar 12.5.

(2) $\Rightarrow$ (3) Aus $a \leq b + c$ und $b \leq a + c$ folgt $a - b \leq c$ und $b - a \leq c$, d.h. $|a - b| \leq c$. Weiters gilt $c \leq a + b$ nach Voraussetzung.

(3) $\Rightarrow$ (1) Falls a oder b Null sind, ist die Existenz des Dreiecks klar. Sei nun $a \neq 0$ und $b \neq 0$. Quadrieren wir $|a - b| \leq c \leq a + b$, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&a^2 + b^2 - 2ab \leq c^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab \\
&\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot k, \quad \text{wobei } -1 \leq k \leq 1.
\end{aligned}
$$

Es existieren nach Lemma 12.6 zwei Halbgeraden h_1, h_2 mit Ursprung O und $c(h_1, h_2) = k$. Sei A der Punkt auf h_1 mit $d(O, A) = a$ und B der Punkt auf h_2 mit $d(O, B) = b$. Dann gilt $k = c(h_1, h_2) = c(A, B)$ und die Gleichung

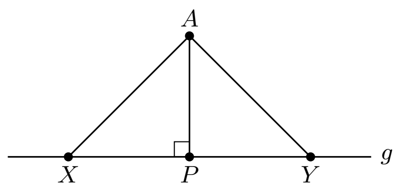
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot c(A, B)$$

zeigt mit Proposition 12.3, dass das Dreieck (O, A, B) die Seitenlängen a, b, c hat. □

12.2. Eigenschaften der Orthogonalprojektion.

Proposition 12.9. *Sei g eine Gerade, $A \in \mathcal{E}$ ein Punkt und P die Orthogonalprojektion von A auf g. Dann gilt:*

(1) *Für alle $X, Y \in g$*
$$d(P, X) = d(P, Y) \quad \Leftrightarrow \quad d(A, X) = d(A, Y).$$
(2) *Sei h eine der beiden Halbgeraden von g mit Ursprung P so orientiert, dass $X \geq P$ für alle $X \in h$. Dann ist die Abbildung $h \to \mathbb{R}$, $X \mapsto d(A, X)$ streng monoton wachsend.*



Beweis. (1) Nach Proposition 12.3 gilt

$$
\begin{aligned}
d(A, X)^2 &= d(A, P)^2 + d(P, X)^2, \\
d(A, Y)^2 &= d(A, P)^2 + d(P, Y)^2.
\end{aligned}
$$

Damit folgt (1) sofort.

(2) Gilt für $X, Y \in h$ die Beziehung $P \leq X < Y$, dann gilt $d(P, X) < d(P, Y)$ und daher

$$d(A, X)^2 = d(A, P)^2 + d(P, X)^2 < d(A, P)^2 + d(P, Y)^2 = d(A, Y)^2.$$

Das zeigt (2). □

Korollar 12.10. *Der Abstand $d(A, X)$ ist minimal genau dann, wenn $X = P$.* □

Der **Abstand** eines Punktes A von einer Geraden g ist definiert durch

$$d(A, g) := \inf\{d(A, X) : X \in g\}.$$

Das Korollar besagt, dass

$$d(A, g) = d(A, P)$$

gilt, wobei P die Orthogonalprojektion von A auf g ist.

Korollar 12.11. *Sei g eine Gerade, $A \notin g$ und $B \in g$. Dann gilt:*

$$g \perp g(A, B) \quad \Leftrightarrow \quad d(A, B) \leq d(A, X) \text{ für alle } X \in g.$$

Insbesondere kann Orthogonalität in Termen der Distanz charakterisiert werden. □

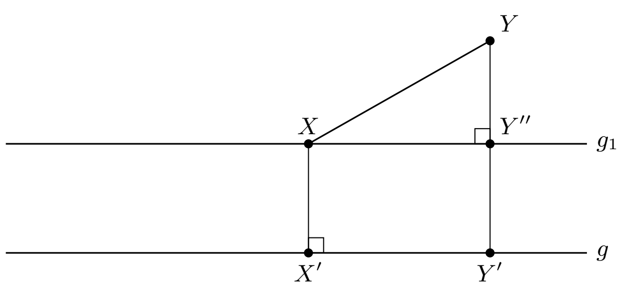
Korollar 12.12. *Sind $A, B, C \in \mathcal{E}$ und $X \in [B, C]$, dann gilt*

$$d(A, X) \leq \max\{d(A, B), d(A, C)\}.$$

Beweis. Das Korollar folgt leicht aus Proposition 12.9. □

Proposition 12.13. *Die Orthogonalprojektion auf eine Gerade vermindert Distanzen.*

Beweis. Sei g eine Gerade und seinen $X, Y \in \mathcal{E}$. Sei g_1 die Gerade parallel zu g durch X. Wir bezeichnen mit X' und Y' die Projektion von X bzw. Y auf g und mit Y'' die Projektion von Y auf g_1. Es folgt aus Axiom 7, dass Y,Y' und Y'' kollinear sind.



Im Rechteck (X', Y', Y'', X) gilt $d(X', Y') = d(X, Y'')$. Im rechtwinkeligen Dreieck (X, Y'', Y) gilt $d(X, Y'') \leq d(X, Y)$ (vgl. Proposition 12.3). Es folgt $d(X', Y') \leq d(X, Y)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn X und Y auf einer Parallelen zu g liegen. □

12.3. Die Streckensymmetrale. Seien $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$. Die Gerade durch den Mittelpunkt von A und B, die orthogonal zu $g(A, B)$ ist, wird die **Streckensymmetrale** der Strecke (A, B) genannt.

Proposition 12.14. *Seien $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$. Sei O der Mittelpunkt von A und B und g die Streckensymmetrale von (A, B).*

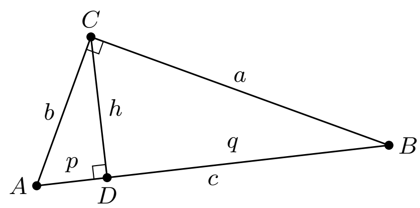
(1) *Für jedes $X \in \mathcal{E}$ gilt:*
$$d(X,B)^2 - d(X,A)^2 = 4d(O,A) \cdot \xi,$$
wobei ξ die Abszisse auf $g(A, B)$ von X im Achsensystem $(g(A, B), g)$ ist und $g(A, B)$ so orientiert ist, dass $O < A$ gilt.

(2) *Sei $\mathcal{E}_A$ (bzw. $\mathcal{E}_B$) die offene Halbebene bzgl. g, die A (bzw. B) enthält. Dann gilt*
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_A &= \{X \in \mathcal{E} : d(X,A) < d(X,B)\}, \\ \mathcal{E}_B &= \{X \in \mathcal{E} : d(X,B) < d(X,A)\}, \\ g &= \{X \in \mathcal{E} : d(X,B) = d(X,A)\}. \end{aligned}$$

Beweis. Übung. □

12.4. Das innere Produkt und die Distanz in einer allgemeinen Basis. Sei (E_1, E_2) eine beliebige Basis des Vektorraums $(\mathcal{E}, O)$. Dann haben $X, Y \in \mathcal{E}$ eindeutige Darstellungen
$$X = x_1E_1 + x_2E_2 \quad \text{und} \quad Y = y_1E_1 + y_2E_2$$
mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Die Bilinearität des inneren Produkts ergibt:
$$\langle X \mid Y\rangle = x_1y_1\langle E_1 \mid E_1\rangle + x_2y_2\langle E_2 \mid E_2\rangle + (x_1y_2 + x_2y_1)\langle E_1 \mid E_2\rangle.$$
Für $X = Y$ erhalten wir:
$$\|X\|^2 = x_1^2\|E_1\|^2 + x_2^2\|E_2\|^2 + 2x_1x_2\langle E_1 \mid E_2\rangle.$$
Wenn die Basis (E_1, E_2) die Eigenschaften
$$\|E_1\| = \|E_2\| = 1 \quad \text{und} \quad \langle E_1 \mid E_2\rangle = 0 \tag{12.2}$$
hat, dann vereinfachen sich die Formeln zu
$$\langle X \mid Y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 \tag{12.3}$$
und
$$\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2. \tag{12.4}$$
Eine Basis (E_1, E_2) mit den Eigenschaften (12.2) heißt **Orthonormalbasis**.

12.5. Kathetensatz und Höhensatz. Sei das Dreieck (A, B, C) rechtwinkelig in C. Sei D die Orthogonalprojektion von C auf $g(A, B)$. Dann gilt $D \in (A, B)$ (weil (A, B) die Hypothenuse ist). Wir führen die Bezeichnungen $h := d(C, D)$, $p := d(A, D)$ und $q := d(D, B)$ ein. Es gilt also $c = p + q$.



Theorem 12.15. *Es gilt der* ***Kathetensatz:***

$$a^2 = cq \quad \textit{und} \quad b^2 = cp,$$

und der ***Höhensatz:***

$$h^2 = pq.$$

Beweis. Der Satz von Pythagoras 12.3 in den rechtwinkeligen Dreiecken (A, B, C), (A, D, C) und (B, C, D) liefert

$$c^2 = a^2 + b^2, \quad b^2 = p^2 + h^2 \quad \text{und} \quad a^2 = q^2 + h^2.$$

Zusammen mit $c = p + q$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 2a^2 = c^2 - b^2 + q^2 + h^2 &= c^2 - p^2 - h^2 + q^2 + h^2 \\ &= p^2 + q^2 + 2pq - p^2 + q^2 = 2(p+q)q = 2cq. \end{aligned}$$

Die zweite Identität folgt analog. Weiters gilt

$$h^2 = b^2 - p^2 = c^2 - a^2 - p^2 = (p+q)^2 - a^2 - p^2 = q^2 + 2pq - a^2 = 2pq - h^2$$

und die dritte Identität ist bewiesen. $\square$

KAPITEL 5

Isometrien und Ähnlichkeitsabbildungen

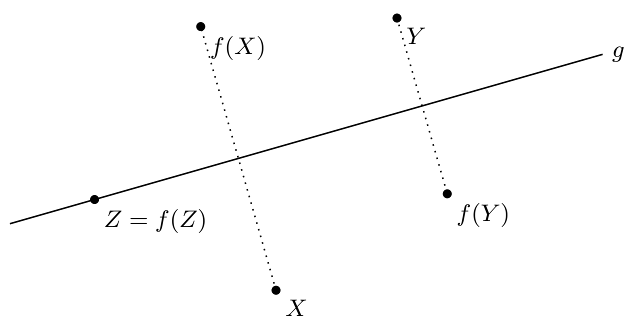
13. Isometrien

Wir erinneren uns: eine Isometrie ist eine distanzerhaltende Abbildung.

13.1. Spiegelungen. Sei g eine Gerade in $\mathcal{E}$. Die **Spiegelung** (oder **Reflexion**) an g ist die Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die wie folgt definiert ist:

(1) $f(X) = X$, wenn $X \in g$.
(2) Wenn $X \notin g$, dann ist $f(X)$ der eindeutige Punkt in $\mathcal{E}$, sodass g die Streckensymmetrale von $(X, f(X))$ ist. Wir nennen g die **Spiegelungsachse**.

Es gilt $f^2 = \mathrm{id}$, d.h. jede Spiegelung ist eine Involution.



Proposition 13.1. *Jede Spiegelung ist eine Isometrie.*

Beweis. Sei g_1 die Spiegelungsachse der Spiegelung f. Sei g_2 eine Gerade, die orthogonal zu g_1 ist. Wenn X bzgl. des Achsensystems (g_1, g_2) die Komponenten (X_1, X_2) hat, so hat der Bildpunkt die Komponenten $(X_1, -X_2)$. Für beliebige Punkte $X, Y \in \mathcal{E}$ gilt also

$$\|f(X) - f(Y)\|^2 = \|X_1 - Y_1\|^2 + \|X_2 - Y_2\|^2 = \|X - Y\|^2.$$

Das zeigt, dass f eine Isometrie ist. □

Korollar 13.2. *Sei $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Spiegelung und O ein Punkt auf der Spiegelungsachse. Dann ist $f : (\mathcal{E}, O) \to (\mathcal{E}, O)$ eine lineare Abbildung bzgl. des Vektorraums $(\mathcal{E}, O)$.*

Beweis. Verwenden wir das Achsensystem aus dem vorigen Beweis, dann hat f die Gestalt

$$f(X_1 + X_2) = X_1 - X_2, \qquad \text{für beliebige } X = X_1 + X_2,$$

und ist daher offensichtlich linear. □

Korollar 13.3. *Jede Spiegelung bildet Geraden auf Geraden, Halbgeraden auf Halbgeraden, Strecken auf Strecken und konvexe Mengen auf konvexe Mengen ab.*

Beweis. Wir zeigen, dass Geraden auf Geraden abgebildet werden; der Rest folgt dann leicht. Sei f eine Spiegelung mit Spiegelungsachse g_1. Sei g_2 eine orthogonale Gerade zu g_1 und sei O der Schnittpunkt von g_1 und g_2. Wir wählen eine Basis (E_1, E_2) des Vektorraums $(\mathcal{E}, O)$ mit $E_1 \in g_1$ und $E_2 \in g_2$. Jede Gerade h kann bzgl. dieser Basis durch

$$h = \{X = x_1E_1 + x_2E_2 \in \mathcal{E} : \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma = 0\}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, wobei $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, dargestellt werden (vgl. Abschnitt 8.3). Weiters gilt für beliebige $X \in \mathcal{E}$

$$f(X) = f(x_1E_1 + x_2E_2) = x_1E_1 - x_2E_2.$$

Es folgt, dass

$$f(h) = \{Y = y_1E_1 + y_2E_2 \in \mathcal{E} : \alpha y_1 - \beta y_2 + \gamma = 0\}$$

and somit $f(h)$ wieder eine Gerade ist. □

Korollar 13.4. *Jede Spiegelung bildet orthogonale Geraden auf orthogonale Geraden ab.*

Beweis. Orthogonalität kann in Termen der Distanz beschrieben werden (vgl. Korollar 12.11) und die Distanz bleibt unter Spiegelungen erhalten. □

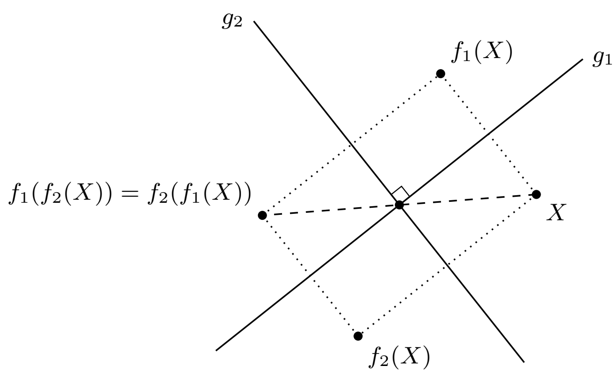
Jede Spiegelung führt parallele Geraden in parallele Geraden über (Übung).

Proposition 13.5. *Seien g_1, g_2 zwei orthogonale Geraden durch O. Die Komposition der beiden Spiegelungen mit Spiegelungsachsen g_1 und g_2 ist die Punktsymmetrie mit Zentrum O. Die Komposition der Spiegelung mit Spiegelungsachse g_1 und der Punktsymmetrie mit Zentrum O ist die Spiegelung mit Spiegelungsachse g_2.*

Beweis. Verwenden wir die Basis aus dem Beweis von Korollar 13.3 und bezeichnen wir mit f_1 und f_2 die Spiegelungen mit den Achsen g_1 und g_2, dann hat $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ in entsprechenden Koordinaten die Darstellung

$$(x_1, x_2) \mapsto (-x_1, -x_2)$$

und ist daher die Punktsymmetrie mit Zentrum O. Die zweite Aussage folgt auf ähnliche Weise. □



Korollar 13.6. *Jede Punktsymmetrie ist eine Isometrie.* □

Proposition 13.7. *Die Komposition zweier Spiegelungen mit parallelen Spiegelungsachsen ist eine Translation mit orthogonaler Translationsrichtung. Die Komposition einer Spiegelung mit Spiegelungsachse g mit einer Translation in orthogonaler Richtung zu g ist eine Spiegelung mit Spiegelungsachse parallel zu g.*

Beweis. Seien g und h parallele Geraden und f_g bzw. f_h die zugehörigen Spiegelungen. Sei (g_1, g_2) ein Achsensystem mit $g_1 \| g$ und $g_1 \perp g_2$. Hat X bzgl. (g_1, g_2) die Komponenten (X_1, X_2), dann hat der Bildpunkt $f_g(X)$ die Komponenten

$$(X_1, 2A_2 - X_2)$$

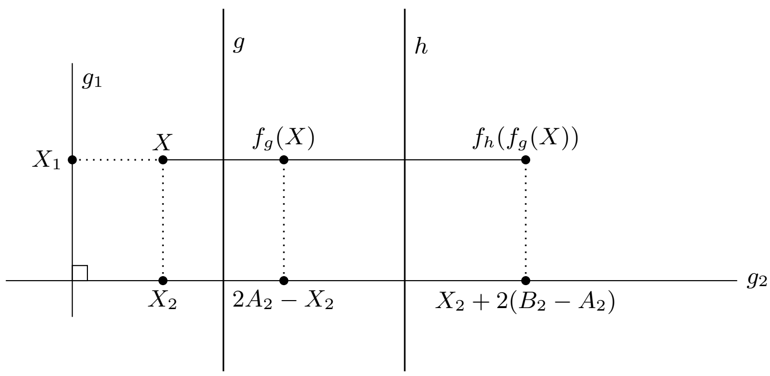
und $f_h(X)$ hat die Komponenten

$$(X_1, 2B_2 - X_2),$$

für geeignete $A_2, B_2 \in g_2$. (Die Punkte auf g haben die g_2-Komponente A_2, denn (X_1, A_2) ist der Mittelpunkt der Punkte (X_1, X_2) und $(X_1, 2A_2 - X_2)$.) Die Komposition hat also die Gestalt

$$(X_1, X_2) \mapsto (X_1, 2B_2 - (2A_2 - X_2)) = (X_1, X_2 + 2(B_2 - A_2))$$

und ist daher eine Translation mit orthogonaler Translationsrichtung. Die zweite Aussage folgt auf ähnliche Weise. $\square$



Korollar 13.8. *Jede Translation ist die Komposition zweier Spiegelungen, deren Spiegelungsachsen orthogonal zur Translationsrichtung sind. Eine dieser Spiegelungsachsen orthogonal zur Translationsrichtung kann frei gewählt werden.*

Beweis. Sei t eine Translation und sei f_1 eine Spiegelung mit Spiegelungsachse orthogonal zur Translationsrichtung. Nach Proposition 13.7 ist dann $t \circ f_1 =: f_2$ eine Spiegelung mit Spiegelungsachse orthogonal zur Translationsrichtung. Weil $f_1^{-1} = f_1$, folgt $t = f_2 \circ f_1$. $\square$

13.2. Isometrien der Ebene. Wir erweitern den Begriff der Isometrie auf Teilmengen von $\mathcal{E}$: Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und sei $f : A \to \mathcal{E}$ eine Abbildung. Dann heißt f **Isometrie** von A nach $\mathcal{E}$, wenn

$$d(f(X), f(Y)) = d(X, Y) \quad \text{für alle } X, Y \in A.$$

Es ist klar, dass jede Isometrie injektiv ist. Die Komposition zweier Isometrien ist wieder eine Isometrie. Die Einschränkung einer Isometrie von A nach $\mathcal{E}$ auf eine Teilmenge $B \subseteq A$ ist eine Isometrie von B nach $\mathcal{E}$. Wir haben schon Beispiele von Isometrien von $\mathcal{E}$ nach $\mathcal{E}$ kennengelernt: Translationen, Spiegelungen und Punktsymmetrien.

Unser Ziel ist es jetzt, alle Isometrien der Ebene zu beschreiben. Dies wird in Theorem 13.13 geschehen, auf welches wir nun hinarbeiten. Im Folgenden ist A eine nicht-leere Teilmenge von $\mathcal{E}$.

Proposition 13.9. *Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und sei $f : A \to \mathcal{E}$ eine Isometrie mit mindestens drei nicht-kollinearen Fixpunkten. Dann ist $f = \mathrm{id}$.*

Beweis. Seien A_1, A_2, A_3 drei nicht-kollineare Fixpunkte von f. Für alle $X \in A$ gilt

$$d(X, A_i) = d(f(X), f(A_i)) = d(f(X), A_i) \quad \text{für } i = 1, 2, 3.$$

Wenn nun $f(X) \neq X$ gelten würde, dann müsste nach Proposition 12.14 die Streckensymmetrale von $(X, f(X))$ die drei Punkte A_1, A_2, A_3 enthalten, ein Widerspruch. □

Proposition 13.10. *Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und sei $f : A \to \mathcal{E}$ eine Isometrie mit mindestens zwei Fixpunkten A_1 und A_2. Dann ist f entweder die Identität oder die Einschränkung der Spiegelung mit Spiegelungsachse $g(A_1, A_2)$.*

Beweis. Ist f nicht die Identität, dann gibt es ein $A_3 \in A$ sodass $f(A_3) \neq A_3$. Die Streckensymmetrale von $(A_3, f(A_3))$ muss (wie im vorigen Beweis) A_1 und A_2 enthalten und daher die Gerade $g(A_1, A_2)$ sein. Also sind A_1, A_2, A_3 drei nicht-kollineare Punkte. Bezeichnen wir mit s_3 die Spiegelung an der Achse $g(A_1, A_2)$, dann sind A_1, A_2, A_3 drei nicht-kollineare Fixpunkte der Isometrie $s_3 \circ f$. Nach Proposition 13.9 gilt $s_3 \circ f = \mathrm{id}$ und daher $f = s_3|_A$. □

Proposition 13.11. *Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und sei $f : A \to \mathcal{E}$ eine Isometrie mit mindestens einem Fixpunkten A_1. Dann ist f entweder die Identität, die Einschränkung einer Spiegelung an einer Geraden durch A_1 oder die Einschränkung der Komposition zweier solcher Spiegelungen.*

Beweis. Ist f nicht die Identität, dann gibt es ein $A_2 \in A$ sodass $f(A_2) \neq A_2$. Die Streckensymmetrale g_2 von $(A_2, f(A_2))$ muss A_1 enthalten. Bezeichnen wir mit s_2 die Spiegelung mit Spiegelungsachse g_2, dann sind A_1 und A_2 Fixpunkte der Isometrie $s_2 \circ f$. Nach Proposition 13.10 gilt $s_2 \circ f = \mathrm{id}$ oder $s_2 \circ f = s_3|_A$, wobei s_3 die Spiegelung an der Achse $g(A_1, A_2)$ ist. Somit gilt $f = s_2|_A$ oder $f = s_2 \circ s_3|_A$. □

Proposition 13.12. *Sei $A \subseteq \mathcal{E}$. Jede Isometrie $f : A \to \mathcal{E}$ ist die Einschränkung der Komposition von 0, 1, 2 oder 3 Spiegelungen.*

Beweis. Ist f nicht die Identität, dann gibt es ein $A_1 \in A$ sodass $f(A_1) \neq A_1$. Bezeichnen wir mit g_1 die Streckensymmetrale von $(A_1, f(A_1))$ und mit s_1 die Spiegelung an der Achse g_1, dann ist A_1 ein Fixpunkt von $s_1 \circ f$. Nach Proposition 13.11 gilt (mit der Notation vom vorigen Beweis) $s_1 \circ f = \mathrm{id}$ oder $s_1 \circ f = s_2|_A$ oder $s_1 \circ f = s_2 \circ s_3|_A$. Es folgt $f = s_1|_A$ oder $f = s_1 \circ s_2|_A$ oder $f = s_1 \circ s_2 \circ s_3|_A$. □

Theorem 13.13. *Jede Isometrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist entweder die Identität oder hat die Gestalt*

$$s_1 \quad \textit{oder} \quad s_1 \circ s_2 \quad \textit{oder} \quad s_1 \circ s_2 \circ s_3,$$

wobei s_i Spiegelungen sind. Jede Isometrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ erhält Orthogonalität.

Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und $f : A \to \mathcal{E}$ eine Isometrie. Dann kann f zu einer Isometrie $\tilde{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ erweitert werden. Wenn A nicht-kollinear ist, dann ist $\tilde{f}$ eindeutig. Wenn A kollinear ist, aber mindestens zwei Punkte enthält, dann gibt es genau zwei mögliche isometrische Erweiterungen.

Beweis. Der erste Teil des Theorems folgt aus Proposition 13.12 und Korollar 13.4.

Zum zweiten Teil des Theorems: Die Existenz der Erweiterung $\tilde{f}$ folgt aus Proposition 13.12. Sind $\tilde{f}_1$ und $\tilde{f}_2$ zwei Erweiterungen von f, dann ist $\tilde{f}_2^{-1} \circ \tilde{f}_1$ die Identität auf A. Ist A nicht-kollinear, dann ist nach Proposition 13.9 (mit $A = \mathcal{E}$) die Isometrie $\tilde{f}_2^{-1} \circ \tilde{f}_1$ die Identität auf $\mathcal{E}$, d.h. $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$. Wenn A kollinear ist, aber mindestens zwei Punkte enthält, dann ist nach Proposition 13.10 (mit $A = \mathcal{E}$) die Isometrie $\tilde{f}_2^{-1} \circ \tilde{f}_1$ entweder die Identität auf $\mathcal{E}$ oder die Spiegelung s, deren Spiegelungsachse A enthält. Dann gilt $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ oder $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2 \circ s$. □

Insbesondere ist jede Isometrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ein invertierbare Abbildung. Es folgt

Korollar 13.14. *Die Menge $\mathscr{I}$ aller Isometrien $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ ist eine Gruppe bzgl. der Komposition von Abbildungen.* □

13.3. Isometrien, die einen Punkt fixieren. Wir betrachten die Menge

$$\mathscr{I}_O := \{f \in \mathscr{I} : f(O) = O\}$$

der Isometrien der Ebene, die den Punkt O fixieren. Klarerweise ist $\mathscr{I}_O$ eine Untergruppe von $\mathscr{I}$.

Weiters betrachten wir die folgenden Teilmengen von $\mathscr{I}_O$:

$$\mathscr{S}_O := \{f \in \mathscr{I}_O : f \text{ ist eine Spiegelung an einer Achse, die } O \text{ enthält}\}.$$

und

$$\mathscr{R}_O := \{f \in \mathscr{I}_O : f = s_1 \circ s_2 \text{ mit } s_1, s_2 \in \mathscr{S}_O\} = \mathscr{S}_O \circ \mathscr{S}_O.$$

Wir nennen die Elemente von $\mathscr{R}_O$ **Rotationen** (oder **Drehungen**) um O.

Eine nützliche Teilmenge von $\mathcal{E}$ in diesem Zusammenhang ist der **Kreis** C_O mit Mittelpunkt O und Radius 1, d.h.

$$C_O := \{X \in \mathcal{E} : d(O, X) = 1\}.$$

Lemma 13.15. *Es gelten folgende Eigenschaften:*

(1) *Für alle $X, Y \in C_O$ existiert eine eindeutige Spiegelung $s \in \mathscr{S}_O$ mit $s(X) = Y$; wir bezeichnen diese Spiegelung mit s_{YX}.*
(2) *Für jedes $s \in \mathscr{S}_O$ gibt es einen Punkt $X \in C_O$ mit $s(X) = X$.*
(3) *Für jedes $f \in \mathscr{I}_O$ und jedes $X \in C_O$ gilt:*

$$f(X) = X \quad \Leftrightarrow \quad (f = \mathrm{id} \quad \textit{oder} \quad f = s_{XX}).$$

Beweis. (1) Wenn $X = Y$, dann ist s_{XX} die Spiegelung an der Achse $g(O, X)$. Wenn $X \neq Y$, dann ist s_{YX} die Spiegelung mit der Streckensymmetralen von (X, Y) als Spiegelungsachse. Eine Spiegelung ist durch ihre Spiegelungsachse eindeutig bestimmt.

(2) Der gesuchte Punkt X ist einer der beiden Punkt auf der Spiegelungsachse von s mit $d(O, X) = 1$.

(3) Es gelte $f(X) = X$. Dann f hat die beiden Fixpunkte O und X und die Aussage folgt aus Proposition 13.10. □

Proposition 13.16. $\mathscr{R}_O \cap \mathscr{S}_O = \emptyset$.

Beweis. Seien $s_1, s_2, s_3 \in \mathscr{S}_O$. Nach Lemma 13.15(2) existiert $A \in C_O$ mit $s_3(A) = A$. Angenommen es gilt $s_1 = s_2 \circ s_3$ (das bedeutet, $s_1 \in \mathscr{R}_O \cap \mathscr{S}_O$). Dann folgt

$$s_1(A) = s_2(s_3(A)) = s_2(A)$$

und mit Lemma 13.15(1) folgt $s_1 = s_2$. Dann folgt $s_3 = \mathrm{id}$, aber $\mathrm{id} \notin \mathscr{S}_O$, ein Widerspruch. □

Proposition 13.17. *Für alle $X, Y \in C_O$ gibt es genau zwei Isometrien $f \in \mathscr{I}_O$ mit $f(X) = Y$, nämlich die Spiegelung s_{YX} und die Rotation $s_{YX} \circ s_{XX}$ (beachte, dass $s_{XX} \circ s_{XX} = \mathrm{id}$ eine Rotation ist).*

Beweis. Es gilt $(s_{XY} \circ f)(X) = X$. Nach Lemma 13.15(3) ist gilt $s_{XY} \circ f = \mathrm{id}$ oder $s_{XY} \circ f = s_{XX}$. Weil $s_{XY}^{-1} = s_{YX}$ folgt die Aussage. □

Korollar 13.18. *Für alle $X, Y \in C_O$ gibt es eine eindeutige Rotation $f \in \mathscr{R}_O$ mit $f(X) = Y$.* □

Korollar 13.19. *$\mathscr{R}_O \cup \mathscr{S}_O = \mathscr{I}_O$ ist eine Partition. Insbesondere ist jede Isometrie $f \in \mathscr{I}_O$ eine lineare Abbildung des Vektorraums $(\mathcal{E}, O)$ in sich selbst.*

Beweis. Sei $f \in \mathscr{I}_O$ und $A \in C_O$. Dann gilt $f(A) \in C_O$ (denn $1 = d(O, A) = d(O, f(A))$). Nach Proposition 13.17 muss f eine Spiegelung oder eine Rotation sein. Die erste Aussage folgt nun dank Proposition 13.16. Die Linearität folgt aus Korollar 13.2. □

Proposition 13.20. *Sei $f \in \mathscr{R}_O$ und $s_2 \in \mathscr{S}_O$. Dann existieren $s_1, s_3 \in \mathscr{S}_O$ mit $f = s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_3$.*

Beweis. Nach Lemma 13.15(2) existiert $A \in C_O$ mit $s_2(A) = A$. Setze $B = f(A)$. Dann gilt $(s_{BA} \circ s_2)(A) = B$. Wegen Korollar 13.18 muss $f = s_{BA} \circ s_2$ gelten. Mit $s_1 = s_{BA}$ gilt also der erste Teil der Behauptung.

Das Inverse einer Rotation ist wieder eine Rotation. Also existiert nach dem ersten Teil des Beweises $s_3 \in \mathscr{S}_O$ mit $f^{-1} = s_3 \circ s_2$ und folglich $f = s_2 \circ s_3$. □

Proposition 13.21. *Eine Komposition von geradzahlig vielen Spiegelungen in $\mathscr{S}_O$ ist eine Rotation. Eine Komposition von ungeradzahlig vielen Spiegelungen in $\mathscr{S}_O$ ist eine Spiegelung.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Komposition von drei Spiegelungen eine Spiegelung ist; dann folgen die Behauptungen mittels Induktion. Seien also $s_1, s_2, s_3 \in \mathscr{S}_O$. Nach Proposition 13.20 existiert $s_4 \in \mathscr{S}_O$, sodass $s_1 \circ s_2 = s_4 \circ s_3$. Es folgt $s_1 \circ s_2 \circ s_3 = s_4$. □

Theorem 13.22. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *$\mathscr{R}_O$ ist eine abelsche Untergruppe von $\mathscr{I}_O$.*
(2) *Für alle $s \in \mathscr{S}_O$ gilt $s \circ \mathscr{R}_O = \mathscr{R}_O \circ s = \mathscr{S}_O$.*
(3) *Die Gruppe $\mathscr{R}_O$ wirkt **einfach transitiv** auf C_O, d.h. für alle $X, Y \in C_O$ existiert eine eindeutige Rotation $f \in \mathscr{R}_O$ mit $f(X) = Y$.*

Beweis. (1) Dass $\mathscr{R}_O$ eine Gruppe ist, folgt aus Proposition 13.21 (das Inverse von $s_1 \circ s_2$ ist $s_2 \circ s_1$). Wir zeigen nun, dass $\mathscr{R}_O$ abelsch ist. Seien $f, g \in \mathscr{R}_O$ und $s \in \mathscr{S}_O$. Nach Proposition 13.20 existieren $s_1, s_2 \in \mathscr{S}_O$ mit $f = s_1 \circ s$ und $g = s \circ s_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f \circ g = g \circ f \quad &\Leftrightarrow \quad s_1 \circ s \circ s \circ s_2 = s \circ s_2 \circ s_1 \circ s \\ &\Leftrightarrow \quad s \circ s_1 \circ s_2 \circ s \circ s_1 \circ s_2 = \mathrm{id} \\ &\Leftrightarrow \quad (s \circ s_1 \circ s_2)^2 = \mathrm{id} \end{aligned}$$

Nach Proposition 13.21 ist $s \circ s_1 \circ s_2$ eine Spiegelung und daher gilt die letzte Gleichheit.

(2) Proposition 13.21 impliziert die Inklusionen $s \circ \mathscr{R}_O \subseteq \mathscr{S}_O$ und $s \circ \mathscr{S}_O \subseteq \mathscr{R}_O$. Die zweite Inklusion impliziert auch $\mathscr{S}_O \subseteq s \circ \mathscr{R}_O$. Somit folgt $s \circ \mathscr{R}_O = \mathscr{S}_O$. In ähnlicher Weise zeigt man $\mathscr{R}_O \circ s = \mathscr{S}_O$.

(3) folgt aus Korollar 13.18. □

Bemerkung 13.23. Theorem 13.22(2) impliziert, dass $\mathscr{R}_O$ eine normale Untergruppe von $\mathscr{I}_O$ ist. Jede Nebenklasse $f \circ \mathscr{R}_O$ ist entweder $\mathscr{R}_O$ oder $\mathscr{S}_O$, je nachdem ob $f \in \mathscr{R}_O$ oder $f \in \mathscr{S}_O$. Die Quotientengruppe $\mathscr{I}_O/\mathscr{R}_O$ hat also die Ordnung 2.

13.4. Gerade und ungerade Isometrien. Eine Isometrie $f \in \mathscr{I}$ heißt **gerade**, wenn f die Komposition von geradzahlig vielen Spiegelungen ist. Ist f die Komposition von ungeradzahlig vielen Spiegelungen, dann nennen wir f eine **ungerade** Isometrie. Die Eigenschaft, gerade oder ungerade zu sein, nennen wir **Parität**.

Wir bezeichnen mit $\mathscr{I}^+$ (bzw. $\mathscr{I}^-$) die Menge aller geraden (bzw. ungeraden) Isometrien. Nach Theorem 13.13 gilt $\mathscr{I} = \mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-$. Wir werden bald sehen, dass $\mathscr{I}^+ \cap \mathscr{I}^- = \emptyset$. Nach Definition ist $\mathscr{I}^+$ eine (normale) Untergruppe von $\mathscr{I}$.

Wir erinnern uns, dass $\mathscr{T}$ die Gruppe der Translation in $\mathcal{E}$ bezeichnet.

Lemma 13.24. *Sei $f \in \mathscr{I}$ und $O \in \mathcal{E}$ beliebig. Dann kann f in eindeutiger Weise in der Form*

$$f = t \circ f_* \qquad \textit{mit } t \in \mathscr{T} \textit{ und } f_* \in \mathscr{I}_O$$

geschrieben werden.

Beweis. Es wird behauptet, dass f in $(\mathcal{E}, O)$ eindeutig in der Form $X \mapsto f_*(X) + A$ geschrieben werden kann. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit: Wenn f diese Form hat, dann gilt $A = f(O)$ und $f_*(X) = f(X) - f(O)$. D.h. A und f_* sind eindeutig durch f bestimmt.

Nun zur Existenz: Sei $f_*(X) := f(X) - f(O)$. Dann ist f_* eine Isometrie mit Fixpunkt O, d.h. $f_* \in \mathscr{I}_O$. Und f hat die gewünschte Form $f(X) = f_*(X) + f(O)$. □

Wir nennen f_* die **reduzierte Form** von f in $(\mathcal{E}, O)$.

Lemma 13.25. *Die reduzierte Form einer Spiegelung s mit Achse g ist die Spiegelung s' mit Spiegelungsachse g' parallel zu g durch O.*

Beweis. Wegen Proposition 13.7 ist $s \circ s'$ eine Translation t. Es folgt $s = t \circ s'$ und somit $s_* = s'$ wegen der Eindeutigkeit der reduzierten Form. □

Proposition 13.26. *Die Abbildung $\mathscr{I} \to \mathscr{I}_O$, $f \mapsto f_*$, ist ein Gruppenhomomorphismus. Es gilt $(\mathscr{I}^+)_* = \mathscr{R}_O$ und $(\mathscr{I}^-)_* = \mathscr{S}_O$.*

Beweis. Seien $f, g \in \mathscr{I}$. Weil $f_*, g_* \in \mathscr{I}_O$ lineare Abbildungen auf $(\mathcal{E}, O)$ sind, gilt

$$\begin{aligned} g(f(X)) &= g(f(O) + f_*(X)) \\ &= g(O) + g_*(f(O)) + g_*(f_*(X)) \\ &= g(f(O)) + g_*(f_*(X)), \end{aligned}$$

d.h. $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ und zeigt, dass die Abbildung $\mathscr{I} \to \mathscr{I}_O$, $f \mapsto f_*$, ein Gruppenhomomorphismus ist.

Lemma 13.25 und die Homomorphismuseigenschaft zeigen, dass die reduzierte Form einer n-fache Komposition von Spiegelungen wieder eine n-fache Komposition von Spiegelungen ist. Die zwei Behauptungen folgen nun mit Proposition 13.21. □

Korollar 13.27. *$\mathscr{I} = \mathscr{I}^+ \cup \mathscr{I}^-$ ist eine Partition. Für jedes $s \in \mathscr{I}^-$ gilt $s \circ \mathscr{I}^+ = \mathscr{I}^+ \circ s = \mathscr{I}^-$.*

Beweis. Wäre $f \in \mathscr{I}^+ \cap \mathscr{I}^-$, so wäre $f_* \in \mathscr{R}_O \cap \mathscr{S}_O$, aber dieser Durchschnitt ist leer. Somit gilt $\mathscr{I}^+ \cap \mathscr{I}^- = \emptyset$. Die zweite Aussage folgt aus Theorem 13.22(2). □

13.5. Klassifikation der Isometrien der Ebene. Sei

$$f = t \circ f_* \quad \text{mit } t \in \mathscr{T} \text{ und } f_* \in \mathscr{I}_O,$$

die eindeutige Form einer Isometrie $f \in \mathscr{I}$ in $(\mathcal{E}, O)$.

Nehmen wir zunächst an, f_* ist eine Rotation. Dank Korollar 13.8 können wir die Translation t in der Form $t = s_1 \circ s_2$ schreiben, wobei die Spiegelungsachse von s_2 durch O verläuft und somit $s_2 \in \mathscr{S}_O$ gilt. Wegen Proposition 13.20 gibt es $s_3 \in \mathscr{S}_O$ mit $f_* = s_2 \circ s_3$. Es folgt

$$f = t \circ f_* = s_1 \circ s_2 \circ s_2 \circ s_3 = s_1 \circ s_3.$$

Somit ist f entweder eine Translation oder eine Rotation, je nachdem ob die Spiegelungsachsen von s_1 und s_3 parallel sind oder nicht.

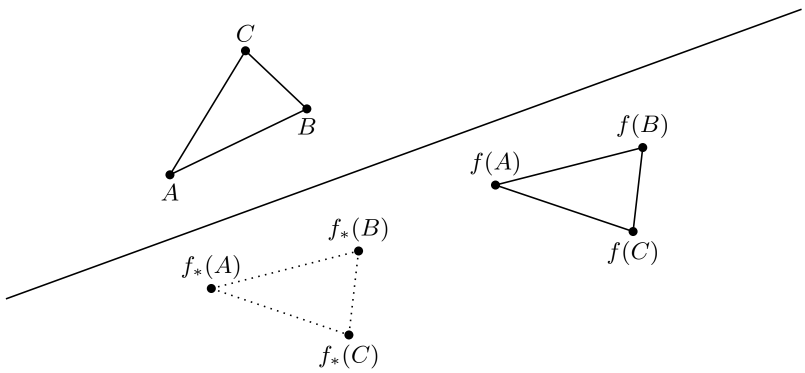
Sei nun f_* eine Spiegelung. Wir wählen ein Achsensystem (g_1, g_2), wobei $g_1 \perp g_2$ und g_1 die Spiegelungsachse von f_* ist. Dann hat f bzgl. (g_1, g_2) die Form

$$(X_1, X_2) \mapsto (X_1 + A_1, -X_2 + A_2).$$

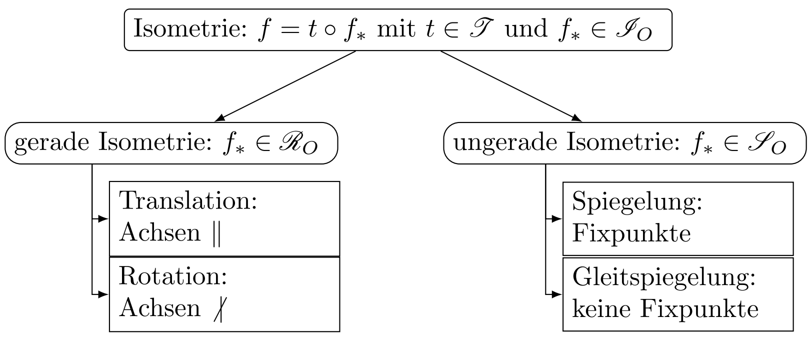
Bzgl. des Achsensystems $(g_1 + A_2, g_2)$ hat f also die Form

$$(X_1, X_2) \mapsto (X_1 + A_1, -X_2).$$

Wenn $A_1 = O$, dann ist f eine Spiegelung. Wenn $A_1 \neq O$, dann bildet f zwar eine Gerade g wieder auf g ab, aber f ist keine Spiegelung. Man spricht in diesem Fall von einer **Gleitspiegelung**.



Wir fassen unsere Erkenntnisse in einem Baumdiagramm zusammen: Es gibt also vier Klassen von Isometrien, nämlich Translationen, Rotationen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen.



Isometrie	hat Fixpunkte	hat keine Fixpunkte
gerade	Rotation	Translation
ungerade	Spiegelung	Gleitspiegelung

14. Ähnlichkeitsabbildungen

14.1. Definition und charakteristische Eigenschaften. Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Eine Abbildung $f : A \to \mathcal{E}$ heißt **Ähnlichkeitsabbildung** (oder einfach **Ähnlichkeit**) mit **Proportionalitätsfaktor** (oder einfach **Faktor**) k, wenn

$$d(f(X), f(Y)) = k \cdot d(X, Y) \quad \text{für alle } X, Y \in A.$$

Die Ähnlichkeiten mit Proportionalitätsfaktor 1 sind also genau die Isometrien.

Lemma 14.1. *Eine Dilatation mit Streckfaktor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Ähnlichkeit mit Proportionalitätsfaktor $|k|$.*

Beweis. In $(\mathcal{E}, O)$ kann eine Dilatation f in der Form

$$X \mapsto kX + A$$

geschrieben werden. Folglich gilt

$$d(f(X), f(Y)) = \|f(X) - f(Y)\| = \|kX - kY\| = |k|\|X - Y\| = |k|d(X, Y). \qquad \square$$

Proposition 14.2. *Sei $A \subseteq \mathcal{E}$ und $k \in \mathbb{R}_{>0}$. Jede Ähnlichkeit $f : A \to \mathcal{E}$ mit Faktor k kann zu einer Ähnlichkeit $\tilde{f} : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit Faktor k erweitert werden. Die Erweiterung ist eindeutig, wenn A nicht kollinear ist, und kann auf genau zwei Arten erfolgen, wenn A kollinear ist, aber mindestens zwei Punkte enthält.*

Beweis. Ist φ eine zentrische Streckung mit Streckfaktor k, dann ist $\varphi^{-1} \circ f$ eine Isometrie. Denn in $(\mathcal{E}, O)$ hat φ die Gestalt $X \mapsto k(X - B) + B$ und somit hat φ^{-1} die Gestalt $X \mapsto k^{-1}(X - B) + B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(\varphi^{-1}(f(X)), \varphi^{-1}(f(Y))) &= d(k^{-1}(f(X) - B) + B, k^{-1}(f(Y) - B) + B) \\ &= k^{-1}d(f(X), f(Y)) = d(X, Y). \end{aligned}$$

Nach Theorem 13.13 hat $\varphi^{-1} \circ f$ eine Erweiterung ψ auf $\mathcal{E}$, welche eindeutig ist, wenn A nicht kollinear ist, und auf genau zwei Arten erfolgen kann, wenn A kollinear ist, aber mindestens zwei Punkte enthält. Dann ist die Ähnlichkeit $\varphi \circ \psi$ die gesuchte Erweiterung. $\square$

Dank dieser Proposition genügt es, von nun an Ähnlichkeiten, die auf $\mathcal{E}$ definiert sind, zu betrachten.

Proposition 14.3. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Jede Ähnlichkeit von $\mathcal{E}$ mit Proportionalitätsfaktor k ist die Komposition einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor k und einer Isometrie.*
(2) *Jede Ähnlichkeit ist eine affine Abbildung, die Orthogonalität erhält.*
(3) *Die Ähnlichkeiten von $\mathcal{E}$ bilden eine Gruppe $\mathscr{A}$. Die Abbildung $\mathscr{A} \to \mathbb{R}_{>0}$, $f \mapsto k(f)$, wobei $k(f)$ der Proportionalitätsfaktor von f ist, ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$.*

Beweis. (1) wurde schon im vorigen Beweis gezeigt.

(2) folgt aus (1), weil jede Isometrie und jede zentrische Streckung affin ist und Orthogonalität erhält.

(3) Übung. □

Theorem 14.4. *Eine affine Abbildung ist genau dann eine Ähnlichkeit, wenn sie Orthogonalität erhält.*

Beweis. Eine Richtung wurde schon gezeigt. Sei nun $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ einen affine Abbildung, die Orthogonalität erhält. Seinen h_1 und h_2 zwei orthogonale Halbgeraden mit dem Ursprung O. Dann sind $f(h_1)$ und $f(h_2)$ zwei orthogonale Halbgeraden mit dem Ursprung $f(O)$. Es gibt eine Isometrie g die h_1 auf $f(h_1)$ und h_2 auf $f(h_2)$ abbildet (vgl. Theorem 13.13).

Somit ist $g^{-1} \circ f$ eine lineare Abbildung auf $(\mathcal{E}, O)$, die Orthogonalität erhält und die Halbgeraden h_1 und h_2 auf sich selbst abbildet. Sei (E_1, E_2) eine Basis von $(\mathcal{E}, O)$ mit $E_i \in h_i$ und $\|E_i\| = 1$, für $i = 1, 2$. Bzgl. dieser Basis hat $g^{-1} \circ f$ die Gestalt

$$(x_1, x_2) \mapsto (k_1 x_1, k_2 x_2), \qquad \text{wobei } k_1 > 0, k_2 > 0.$$

Weil $(1, 1)$ und $(1, -1)$ orthogonal sind (denn $\langle E_1 + E_2 \mid E_1 - E_2 \rangle = \|E_1\|^2 - \|E_2\|^2 = 1 - 1 = 0$) und die Abbildung Orthogonalität erhält, müssen auch (k_1, k_2) und $(k_1, -k_2)$ orthogonal sein. Es folgt $k_1^2 - k_2^2 = 0$, d.h. $k_1 = k_2 =: k$. Daher ist $g^{-1} \circ f$ die zentrische Streckung $h_{O,k}$. Somit ist $f = g \circ h_{O,k}$ eine Ähnlichkeit. □

14.2. Gerade und ungerade Ähnlichkeiten. Eine Ähnlichkeit f von $\mathcal{E}$ heißt **gerade**, wenn f in der Form $f = d \circ g$ geschrieben werden kann, wobei d eine Dilatation mit positivem Streckfaktor und g eine gerade Isometrie ist. Ist die Isometrie g ungerade, dann nennen wir die Ähnlichkeit f **ungerade**.

Proposition 14.5. *Keine Ähnlichkeit von $\mathcal{E}$ ist gerade und ungerade.*

Beweis. Sei $f = d_1 \circ g_1 = d_2 \circ g_2$, wobei d_i Dilatationen mit positivem Streckfaktor und g_i Isometrien sind. Daraus folgt

$$d_2^{-1} \circ d_1 = g_2 \circ g_1^{-1}.$$

Die linke Seite ist eine Dilatation mit positivem Streckfaktor, die rechte Seite eine Isometrie. Gleichheit kann nur gelten, wenn beide Seiten Translationen sind. Insbesondere ist dann $g_2 \circ g_1^{-1}$ eine gerade Isometrie, und folglich sind g_1 und g_2 beide gerade oder beide ungerade. □

Theorem 14.6. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Die Komposition zweier Ähnlichkeiten ist gerade oder ungerade, je nachdem ob sie die gleiche Parität haben oder nicht.*
(2) *Die Menge $\mathscr{A}^+$ der geraden Ähnlichkeiten ist eine Gruppe, die einfach transitiv auf der Menge aller Paare (X, Y) verschiedener Punkte von $\mathcal{E}$ wirkt.*

Beweis. (1) Seinen $f, g \in \mathscr{A}$ und seinen k_f und k_g die entsprechenden Proportionalitätsfaktoren. In $(\mathcal{E}, O)$ ist dann die Abbildung

$$f_*(X) := \tfrac{1}{k_f}(f(X) - f(O))$$

ein Element von $\mathscr{I}_O$ und es gilt

$$f(X) = f(O) + k_f f_*(X).$$

Analog sehen wir, dass

$$g(X) = g(O) + k_g g_*(X)$$

mit $g_* \in \mathscr{I}_O$ gilt. Dank der Linearität von g_* folgt (wie im Beweis von Proposition 13.26)

$$(g \circ f)(X) = (g \circ f)(O) + k_f \cdot k_g \cdot (g_* \circ f_*)(X).$$

Die Aussage folgt nun unmittelbar.

(2) Dass $\mathscr{A}^+$ eine Gruppe ist, folgt aus (1). Sei $A = \{X, Y\}$ mit $X \neq Y$ und $A' = \{X', Y'\}$ mit $X' \neq Y'$. Dank Proposition 14.2 kann die Abbildung $f : A \to \mathcal{E}$ mit $f(X) = X'$ und $f(Y) = Y'$ auf zwei Arten zu einer Ähnlichkeit auf $\mathcal{E}$ erweitert werden: die eine Erweiterung ist eine gerade, die andere eine ungerade Ähnlichkeit (vgl. auch Theorem 13.13). □

Korollar 14.7. *Jede Dilatation ist eine gerade Ähnlichkeit.*

Beweis. Jede Dilatation ist eine Komposition von Translationen, zentrischen Streckungen mit positivem Streckfaktor und Punktsymmetrien. Alle diese Transformationen sind gerade Ähnlichkeiten. □

14.3. Ähnlichkeiten, die einen Punkt fixieren. Wir definieren

$$\mathscr{A}_O := \{f \in \mathscr{A} : f(O) = O\}.$$

Offensichtlich ist $\mathscr{A}_O$ eine Untergruppe von $\mathscr{A}$. Weiters ist

$$\mathscr{A}_O^+ := \mathscr{A}_O \cap \mathscr{A}^+$$

eine Untergruppe von $\mathscr{A}_O$.

Proposition 14.8. *Es gelten die folgenden Aussagen:*

(1) *Die Gruppe $\mathscr{A}_O$ ist isomorph zur Gruppe $\mathbb{R}_{>0} \times \mathscr{I}_O$.*
(2) *Die Gruppe $\mathscr{A}_O^+$ ist isomorph zur Gruppe $\mathbb{R}_{>0} \times \mathscr{R}_O$, daher abelsch, und wirkt einfach transitiv auf $\mathcal{E} \setminus \{O\}$.*

Beweis. (1) Sei $f \in \mathscr{A}_O$. Dann kann f in eindeutiger Weise in der Form

$$f = k_f f_* \quad \text{mit } k_f \in \mathbb{R}_{>0},\ f_* \in \mathscr{I}_O$$

geschrieben werden. Damit ist eine bijektive Abbildung $f \mapsto (k_f, f_*)$ von $\mathscr{A}_O$ nach $\mathbb{R}_{>0} \times \mathscr{I}_O$ definiert. Es handelt sich um einen Gruppenisomorphismus, weil für $g \in \mathscr{A}_O$ gilt

$$(f \circ g)(X) = k_f f_*(k_g g_*(X)) = k_f \cdot k_g \cdot (f_* \circ g_*)(X).$$

(2) Es folgt aus (1), dass die Gruppe $\mathscr{A}_O^+$ isomorph zu $\mathbb{R}_{>0} \times \mathscr{R}_O$, welche abelsch ist (vgl. Theorem 13.22 und Proposition 13.26). Seien $X, Y \in \mathcal{E} \setminus \{O\}$. Dann gibt es nach Theorem 14.6 eine eindeutige gerade Ähnlichkeit f, die das Paar (O, X) auf das Paar (O, Y) abbildet. Insbesondere gilt $f(O) = O$ und somit $f \in \mathscr{A}_O^+$. □

14.4. Klassifikation der Ähnlichkeiten der Ebene. Wir betrachten den Fall, dass der Proportionalitätsfaktor $k \neq 1$ ist, weil wir die Isometrien schon klassifiziert haben.

Proposition 14.9. *Eine Ähnlichkeit f von $\mathcal{E}$ mit Proportionalitätsfaktor $k \neq 1$ hat einen eindeutigen Fixpunkt, den wir **Zentrum** nennen.*

Beweis. Wir lösen die lineare Fixpunktgleichung

$$f(O) + k f_*(X) = X, \quad f_* \in \mathscr{I}_O,$$

im Vektorraum $(\mathcal{E}, O)$. Wir können die Gleichung auch in der Form

$$(\mathrm{id} - k f_*)(X) = f(O)$$

schreiben. Es genügt dann zu zeigen, dass die lineare Abbildung $\mathrm{id} - k f_*$ injektiv ist. Denn dann ist sie invertierbar (wir werden das in Korollar 28.19 beweisen) und die eindeutige Lösung ist

$$X = (\mathrm{id} - k f_*)^{-1}(f(O)).$$

Injektivität von $\mathrm{id} - kf_*$ bedeutet, dass kein $X \neq O$ die Gleichung

$$X = kf_*(X)$$

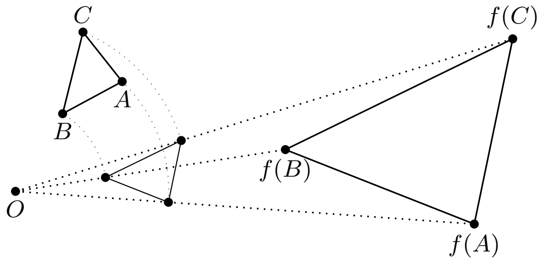
erfüllen kann. Die Gleichung impliziert

$$\|X\| = k\|X\|,$$

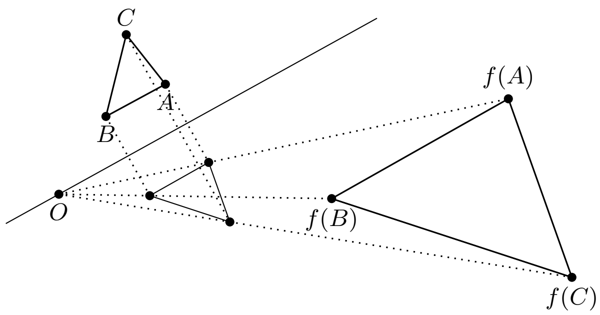
was wegen $k \neq 1$ nur für $\|X\| = 0$ möglich ist. □

Nun können wir die Ähnlichkeiten mit Proportionalitätsfaktor $k \neq 1$ vollständig klassifizieren: Sei f eine Ähnlichkeit mit Zentrum $O \in \mathcal{E}$ und Proportionalitätsfaktor $k \neq 1$.

Wenn f gerade ist, dann ist f ein Element von $\mathscr{A}_O^+$, also eine Komposition einer Drehung und einer zentrischen Streckung $h_{O,k}$ mit Streckfaktor $k \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ (vgl. Proposition 14.8). Wir sprechen von einer **Drehstreckung**.



Wenn f ungerade ist, dann ist f die Komposition einer zentrischen Streckung $h_{O,k}$ und einer Spiegelung mit Spiegelungsachse durch O. Wir sprechen von einer **Klappstreckung**. Die Spiegelungsachse heißt auch **Ähnlichkeitsachse** von f.



KAPITEL 6

Winkel

15. Die Gruppe der Winkel

Wir führen die Definition der Winkel auf den Begriff der Rotation zurück.

15.1. Winkel mit gleichem Scheitelpunkt. Für jeden Punkt $O \in \mathcal{E}$ nennen wir eine Rotation um O einen **Winkel** mit **Scheitelpunkt** O.

Ist (h_1, h_2) ein Paar von Halbgeraden mit Ursprung O, dann nennen wir die Rotation um O, die h_1 in h_2 überführt, den Winkel, der von (h_1, h_2) gebildet wird, und schreiben dafür $\angle(h_1, h_2)$. Diese Rotation ist eindeutig wegen Korollar 13.18.

Die Menge der Winkel mit Scheitelpunkt O ist also die Menge $\mathscr{R}_O$ der Rotationen um O und folglich eine abelsche Gruppe. Wir werden die Gruppenoperation der Gruppe der Winkel additiv schreiben.

15.2. Vergleich von Winkeln mit verschiedenen Scheitelpunkten. Für $A, B \in \mathcal{E}$ bezeichne t_{BA} die Translation, die A auf B abbildet. Die Abbildung t_{BA} ist ein Isomorphismus von $(\mathcal{E}, A)$ nach $(\mathcal{E}, B)$, der sowohl die Vektorraumstruktur als auch die metrische Struktur erhält. Dieser Isomorphismus ist **transitiv** im folgenden Sinn: für alle $A, B, C \in \mathcal{E}$ gilt

$$t_{CA} = t_{CB} \circ t_{BA}. \tag{15.1}$$

Weil Rotationen in Termen von Geraden und Distanzen definiert sind, induziert der Isomorphismus t_{BA} einen Gruppenisomorphismus von $\mathscr{R}_A$ nach $\mathscr{R}_B$, d.h. von der Gruppe der Winkel mit Scheitelpunkt A zur Gruppe der Winkel mit Scheitelpunkt B. Diesen Gruppenisomorphismus werden wir ebenfalls mit t_{BA} bezeichnen.

Sei nun $A \in \mathcal{E}$ beliebig. Wir identifizieren jeden Winkel α mit Scheitelpunkt B mit dem eindeutigen Winkel mit Scheitelpunkt A, der α mittels des Isomorphismus t_{BA} entspricht. Die Transitivität (15.1) garantiert, dass diese Identifikation konsistent ist.

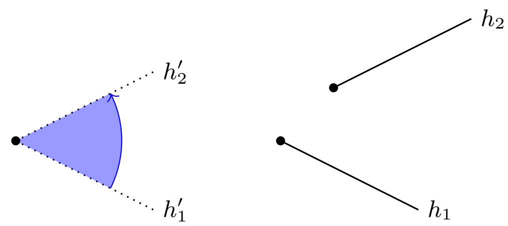
Seien (h_1, h_2) zwei beliebige Halbgeraden mit Ursprung A. Der Isomorphismus $t_{BA} : (\mathcal{E}, A) \to (\mathcal{E}, B)$ bildet h_i auf die parallele Halbgerade h_i', für $i = 1, 2$, mit Ursprung B ab. Vermöge der Identifikation, die wir definiert haben, gilt somit

$$\angle(h_1, h_2) = \angle(h_1', h_2').$$

Diese Beobachtungen rechtfertigen nun die folgende Definition.

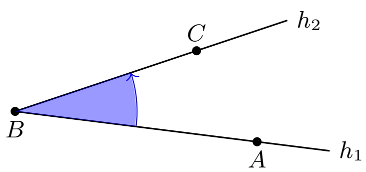
Definition 15.1. In der Ebene $(\mathcal{E}, O)$ ist der **Winkel** $\angle(h_1, h_2)$ eines Paares (h_1, h_2) von Halbgeraden mit beliebigem Ursprung definiert als der Winkel $\angle(h_1', h_2')$ mit Scheitelpunkt O, wobei h_1', h_2' Halbgeraden mit Ursprung O sind mit $h_1' \| h_1$ und $h_2' \| h_2$. Die additive Gruppe der Winkel bezeichnen wir mit $\mathscr{W}$.

Die Definition hängt nur scheinbar von der Wahl von O ab. Beachte, dass in der Definition die Halbgeraden h_1 und h_2 auch unterschiedlichen Ursprung haben können.



Sind h_1 und h_2 zwei Halbgeraden mit Ursprung B und $A \in h_1 \setminus \{B\}$ und $C \in h_2 \setminus \{B\}$ dann schreiben wir auch

$$\angle(A, B, C) := \angle(h_1, h_2).$$

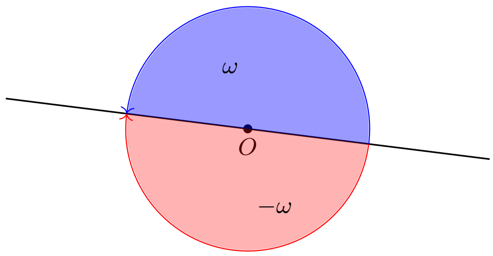


Das neutrale Element der additiven Gruppe $\mathscr{W}$ bezeichnen wir mit 0. Den **geraden Winkel**, der der Punktsymmetrie mit Zentrum O entspricht bezeichnen wir mit ω. Ist (h_1, h_2) ein Paar von Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung, dann gelten:

$$\begin{aligned} \angle(h_1, h_2) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad h_1 = h_2 \\ \angle(h_1, h_2) = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad h_1 \text{ und } h_2 \text{ sind gegensinnig} \end{aligned}$$

Weiters gilt

$$\omega + \omega = 0 \quad \text{oder äquivalent} \quad -\omega = \omega.$$



Sind h_1, h_2, h_3 drei Halbgeraden mit Ursprung O, dann ist die Rotation um O, die h_1 auf h_3 abbildet, die Komposition der Rotation, die h_1 in h_2 überführt, mit der Rotation, die h_2 in h_3 überführt. Somit gilt:

$$\angle(h_1, h_3) = \angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, h_3).$$

Insbesondere gilt

$$\angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, h_1) = \angle(h_1, h_1) = 0$$

and daher

$$\angle(h_1, h_2) = -\angle(h_2, h_1).$$

Im Allgemeinen gilt

$$\angle(h_1, h_n) = \angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, h_3) + \cdots + \angle(h_{n-1}, h_n),$$

wenn $(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ eine endliche Folge von Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung O ist.

15.3. Die Winkelsumme in einem Polygon. Unter einem **Polygon** in der Ebene verstehen wir eine Folge von Punkten $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ (bis auf zyklisches Permutieren), wobei $A_i \neq A_{i+1}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$ und $A_n \neq A_1$ gilt. Wir setzen $A_{n+1} := A_1$. Dann definieren wir, für $i = 1, \dots, n$,

$$h_i := \text{ Halbgerade mit Ursprung } A_i, \text{ die } A_{i+1} \text{ enthält.}$$

Wir nennen $\angle(A_{i-1}, A_i, A_{i+1})$ den **Winkel des Polygons** bei A_i und $\angle(h_{i-1}, h_i)$ den **Außenwinkel des Polygons** bei A_i, wobei $i = 2, \dots, n$. Der Winkel bei A_1 ist $\angle(A_n, A_1, A_2)$, der Aussenwinkel bei A_1 ist $\angle(h_n, h_1)$.

Proposition 15.2. *Es gilt:*

(1) *Die Summe der Außenwinkel in einem Polygon ist* 0.
(2) *Die Summe der Winkel in einem Polygon ist* 0 *oder* ω, *je nachdem ob die Anzahl* n *der Ecken gerade oder ungerade ist.*

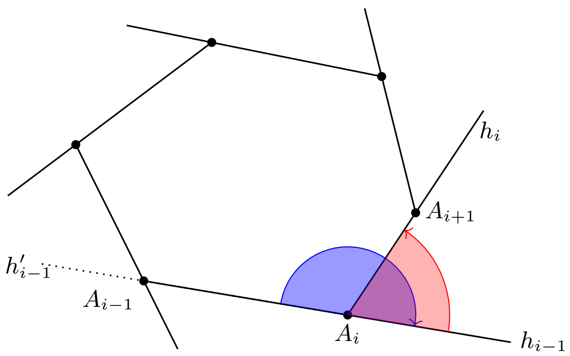
Beweis. (1) Es gilt

$$\angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, h_3) + \cdots + \angle(h_{n-1}, h_n) + \angle(h_n, h_1) = \angle(h_1, h_1) = 0.$$

(2) Wir bezeichen mit h'_{i-1} die Halbgerade mit Ursprung A_i, die den Punkt A_{i-1} enthält. Dann gilt $\angle(h'_{i-1}, h_{i-1}) = \omega$ und somit

$$\angle(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}) = \angle(h'_{i-1}, h_{i-1}) + \angle(h_{i-1}, h_i) = \omega + \angle(h_{i-1}, h_i).$$

Die Summe aller Winkel in einem Polygon $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ist also $n\omega + 0$ wegen (1). Weil $\omega + \omega = 0$, ist diese Summe 0, wenn n gerade ist, und ω, wenn n ungerade ist. □



Insbesondere ist die Winkelsumme in einem Dreieck (A_1, A_2, A_3) immer ω.

Theorem 15.3 (Außenwinkelsatz)**.** *In einem Dreieck* (A_1, A_2, A_3) *mit Innenwinkel* $\alpha_1 = \angle(A_3, A_1, A_2)$, $\alpha_2 = \angle(A_1, A_2, A_3)$, $\alpha_3 = \angle(A_2, A_3, A_1)$ *und Außenwinkel* $\alpha'_1 = \angle(h_3, h_1)$, $\alpha'_2 = \angle(h_1, h_2)$, $\alpha'_3 = \angle(h_2, h_3)$ *gilt*

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha'_3 &= 0, \\ \alpha_1 + \alpha'_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha'_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0. \end{aligned}$$

Beweis. Die Winkelsumme ist $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \omega$. Weiters gilt $\alpha_i - \alpha'_i = \omega$ für alle $i = 1, 2, 3$. □

16. Winkel und Ähnlichkeiten

16.1. Winkel und Spiegelungen. Zunächst überlegen wir uns, wie sich Winkel unter Spiegelungen verhalten.

Lemma 16.1. *Sei s eine Spiegelung mit Spiegelungsachse durch O. Sei (h_1, h_2) ein Paar von Halbgeraden mit Ursprung O. Dann gilt*

$$\angle(s(h_1), s(h_2)) = -\angle(h_1, h_2).$$

Beweis. Sei h eine der beiden Halbgeraden der Spiegelungsachse von s mit Ursprung O. Sei s_1 die Spiegelung, die h mit $s(h_1)$ vertauscht. Die Rotation $s_1 \circ s$ bildet dann h auf $s(h_1)$ und h_1 auf h ab. Somit gilt

$$\angle(h, s(h_1)) = \angle(h_1, h).$$

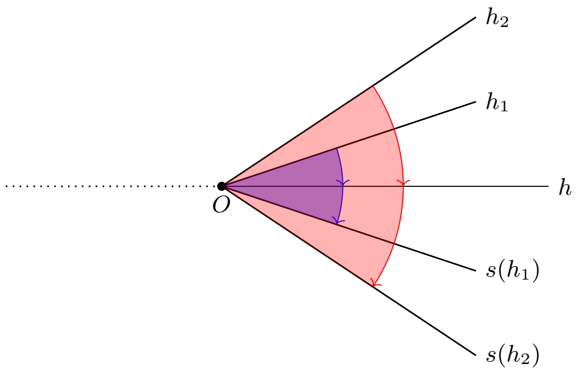
Analog sieht man

$$\angle(h, s(h_2)) = \angle(h_2, h).$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\angle(s(h_1), s(h_2)) &= \angle(s(h_1), h) + \angle(h, s(h_2))\\ &= \angle(h, h_1) + \angle(h_2, h)\\ &= \angle(h_2, h_1)\\ &= -\angle(h_1, h_2).\end{aligned}$$

□



16.2. Winkel und Ähnlichkeiten.

Proposition 16.2. *Sei (h_1, h_2) ein Paar von Halbgeraden in $\mathcal{E}$ und sei $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Ähnlichkeit. Dann gilt*

$$\begin{aligned}\angle(f(h_1), f(h_2)) &= \angle(h_1, h_2) \quad \textit{wenn } f \textit{ gerade ist,}\\ \angle(f(h_1), f(h_2)) &= -\angle(h_1, h_2) \quad \textit{wenn } f \textit{ ungerade ist.}\end{aligned}$$

Beweis. Jede Ähnlichkeit f ist eine Komposition einer Dilatation mit positivem Streckfaktor und einer Isometrie mit Fixpunkt O der gleichen Parität wie f. Dilatationen mit positivem Streckfaktor erhalten die Richtung von Halbgeraden und Parallelität; daher erhalten sie Winkel. Somit genügt es den Fall zu betrachten, dass f eine Isometrie mit Fixpunkt O ist und h_1 und h_2 den gleichen Ursprung O haben.

Wenn die Isometrie f ungerade ist, dann ist f eine Spiegelung und mit Lemma 16.1 gilt

$$\angle(f(h_1), f(h_2)) = -\angle(h_1, h_2).$$

Wenn f gerade ist, dann ist f die Komposition zweier Spiegelungen und es folgt

$$\angle(f(h_1), f(h_2)) = -(-\angle(h_1, h_2)) = \angle(h_1, h_2). \qquad \square$$

16.3. Charakterisierung von Rotationen.

Proposition 16.3. *Sei θ ein Winkel, $A \in \mathcal{E}$ und $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann die Rotation um A, die den Winkel θ realisiert, wenn $f(A) = A$ und*

$$d(A, X) = d(A, f(X)) \quad \text{und} \quad \angle(X, A, f(X)) = \theta \quad \text{für alle } X \neq A.$$

Beweis. Die Rotation um A, die den Winkel θ realisiert, hat natürlich diese Eigenschaften. Andererseits definieren für jedes $X \neq A$ die Bedingungen

$$d(A, X) = d(A, Y) \quad \text{und} \quad \angle(X, A, Y) = \theta$$

einen eindeutigen Punkt Y. Folglich muss jede Abbildung f mit den gegebenen Eigenschaften die Rotation um A sein, die dem Winkel θ entspricht. $\square$

Theorem 16.4. *Sei $A \in \mathcal{E}$ und sei $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Abbildung. Die Abbildung f ist genau dann eine Rotation um A, wenn:*

(1) *$f(A) = A$.*
(2) *Für jedes $X \neq A$ gilt $d(A, X) = d(A, f(X))$.*
(3) *Für alle X, Y verschieden von A gilt $\angle(X, A, Y) = \angle(f(X), A, f(Y))$.*

Beweis. Sei f eine Rotation um A. Dann gelten natürlich (1) und (2). Weiters folgt (3) aus Proposition 16.2.

Umgekehrt, wenn f die Bedingung (3) erfüllt, dann gilt

$$\angle(X, A, f(X)) = \angle(X, A, Y) + \angle(Y, A, f(Y)) + \angle(f(Y), A, f(X)) = \angle(Y, A, f(Y))$$

für alle $X, Y \neq A$. Deshalb folgt aus Proposition 16.3, dass f eine Rotation um A ist. $\square$

16.4. Charakterisierung von Ähnlichkeiten.

Theorem 16.5. *Sei A eine nicht-kollineare Teilmenge von $\mathcal{E}$ und sei $f : A \to \mathcal{E}$ eine injektive Abbildung. Wenn*

$$\angle(f(X), f(Y), f(Z)) = \angle(X, Y, Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in A, \tag{16.1}$$

dann ist f die Einschränkung einer eindeutigen geraden Ähnlichkeit von $\mathcal{E}$ auf A. Wenn

$$\angle(f(X), f(Y), f(Z)) = -\angle(X, Y, Z) \quad \text{für alle } X, Y, Z \in A, \tag{16.2}$$

dann ist f die Einschränkung einer eindeutigen ungeraden Ähnlichkeit von $\mathcal{E}$ auf A.

Beweis. Wir können annehmen, dass f Winkel erhält; im Fall (16.2) setzen wir dafür f noch mit einer Spiegelung zusammen. Wähle zwei verschiedene Punkte X_0, Y_0 in A. Dann gibt es eine eindeutige gerade Ähnlichkeit $f_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die X_0 auf $f(X_0)$ und Y_0 auf $f(Y_0)$ abbildet (vgl. Theorem 14.6(2)). Die Abbildung $h = f_1^{-1} \circ f : A \to \mathcal{E}$ fixiert X_0 und Y_0 und erhält Winkel. Daraus folgt: für jedes $X \notin g(X_0, Y_0)$ schneiden sich die Geraden $g(X_0, X)$ und $g(Y_0, X)$ und es gilt $g(X_0, h(X)) \| g(X_0, X)$ und $g(Y_0, h(X)) \| g(Y_0, X)$. Damit gilt $h(X) = X$.

Das zeigt, dass h außerhalb von $g(X_0, Y_0)$ die Identität ist. Weil A nicht-kollinear ist, gibt es ein $Z_0 \in A$ mit $Z_0 \notin g(X_0, Y_0)$. Wie oben sieht man, dass h auch außerhalb von $g(X_0, Z_0)$ die Identität ist. Es folgt, dass h auf ganz A die Identität ist. Weil A drei nicht-kollineare Punkte enthält, ist die einzige Ähnlichkeit auf $\mathcal{E}$, die h erweitert, die Identität. Das heißt, dass f die Einschränkung der Ähnlichkeit f_1 ist, und die Ähnlichkeit f_1 ist eindeutig.

Die Ähnlichkeit f_1 ist gerade. Im Fall (16.2) muss sie noch mit einer Spiegelung zusammengesetzt werden, was die Parität ändert. □

16.5. Ähnliche und kongruente Dreiecke. Zwei nicht degenerierte Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') heißen **ähnlich**, wenn es eine Ähnlichkeit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ gibt, die $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$ erfüllt. Dann folgt aus der Definition der Ähnlichkeit, dass

$$\frac{d(A', B')}{d(A, B)} = \frac{d(B', C')}{d(B, C)} = \frac{d(C', A')}{d(C, A)} \tag{16.3}$$

gilt. Und aus Proposition 16.2 folgt, dass entsprechende Winkel bis auf das Vorzeichen gleich sind:

$$\begin{aligned} \angle(A', B', C') &= \pm\angle(A, B, C), \\ \angle(B', C', A') &= \pm\angle(B, C, A), \\ \angle(C', A', B') &= \pm\angle(C, A, B). \end{aligned} \tag{16.4}$$

Das Vorzeichen ist positiv, wenn die Ähnlichkeit gerade ist, und negativ, wenn sie ungerade ist.

Zwei ähnliche Dreiecke heißen **kongruent**, wenn die Ähnlichkeit f sogar eine Isometrie ist. In diesem Fall sind alle Verhältnisse in (16.3) gleich 1.

Theorem 16.6 (W:W:W Satz)**.** *Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind ähnlich, wenn die Relationen* (16.4) *(jeweils mit dem gleichen Vorzeichen) gelten.*

Beweis. Der Satz ist eine Konsequenz von Theorem 16.5. □

Theorem 16.7 (S:W:S Satz)**.** *Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind ähnlich, wenn die Relationen*

$$\angle(C', A', B') = \pm\angle(C, A, B)$$

und

$$\frac{d(A', B')}{d(A, B)} = \frac{d(C', A')}{d(C, A)}$$

gelten.

Beweis. Sei $f : \{A, B, C\} \to \mathcal{E}$ die Abbildung, die $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$ erfüllt. Wir können annehmen, dass

$$\angle(f(C), f(A), f(B)) = \angle(C, A, B)$$

gilt. Es gibt eine eindeutige gerade Ähnlichkeit $f_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die A auf $f(A)$ und B auf $f(B)$ abbildet. Die Abbildung $h = f_1^{-1} \circ f : \{A, B, C\} \to \mathcal{E}$ fixiert A und B und es gilt (dank Theorem 16.5)

$$\angle(h(C), h(A), h(B)) = \angle(f(C), f(A), f(B)) = \angle(C, A, B),$$

weil f_1^{-1} winkelerhaltend ist. Weiters gilt

$$1 = \frac{d(A, B)}{d(A, B)} = \frac{d(h(A), h(B))}{d(A, B)} = \frac{d(h(C), h(A))}{d(C, A)}$$

und daher $d(h(C), A) = d(C, A)$. Es folgt, dass auch C ein Fixpunkt von h ist. Wir können schließen, dass h die Einschränkung der Identität auf $\mathcal{E}$ ist. Somit ist f die Einschränkung der Ähnlichkeit f_1. □

Theorem 16.8 (S:S:S Satz)**.** *Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind ähnlich, wenn die Relationen* (16.3) *gelten.*

Beweis. Wie im vorigen Beweis definieren wir f und finden eine Ähnlichkeit $f_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, die A auf $f(A)$ und B auf $f(B)$ abbildet. Dann gelten für $h = f_1^{-1} \circ f$ die Relationen

$$1 = \frac{d(h(A), h(B))}{d(A, B)} = \frac{d(h(B), h(C))}{d(B, C)} = \frac{d(h(C), h(A))}{d(C, A)}$$

insbesondere ist $h : \{A, B, C\} \to \mathcal{E}$ eine Isometrie mit zwei Fixpunkten A und B. Nach Proposition 13.10 ist h die Einschränkung der Identität oder der Spiegelung an der Achse $g(A, B)$. In jedem Fall ist f die Einschränkung einer Ähnlichkeit. □

Theorem 16.9 (SSS Satz)**.** *Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind kongruent, wenn die Relationen*

$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(B', C') = d(B, C), \quad d(C', A') = d(C, A)$$

gelten.

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Konsequenz von Theorem 13.13. □

Theorem 16.10 (SWS Satz)**.** *Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind kongruent, wenn die Relationen*

$$\angle(C', A', B') = \pm\angle(C, A, B)$$

und

$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(C', A') = d(C, A)$$

gelten.

Beweis. Der Satz wird in analoger Weise zum S:W:S Satz gezeigt. □

Theorem 16.11 (WSW Satz)**.** *Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind kongruent, wenn die Relationen*

$$d(A', B') = d(A, B)$$

und

$$\angle(C', A', B') = \pm\angle(C, A, B), \quad \angle(A', B', C') = \pm\angle(A, B, C)$$

(mit jeweils gleichen Vorzeichen) gelten.

Beweis. Sei $f : \{A, B, C\} \to \mathcal{E}$ die Abbildung, die $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$ erfüllt. Wir können annehmen, dass

$$\angle(f(C), f(A), f(B)) = \angle(C, A, B), \quad \angle(f(A), f(B), f(C)) = \angle(A, B, C).$$

Es gibt eine gerade Isometrie f_1, die A auf $f(A)$ und B auf $f(B)$ abbildet (die Translation, die A in $f(A)$ überführt, zusammengesetzt mit einer Rotation um A). Die Abbildung $h = f_1^{-1} \circ f$ fixiert A und B und hat (dank Theorem 16.5) die Eigenschaft

$$\angle(h(C), h(A), h(B)) = \angle(C, A, B), \quad \angle(h(A), h(B), h(C)) = \angle(A, B, C).$$

Nun schneiden sich die Geraden $g(A, C)$ und $g(B, C)$ in C und es gilt $g(A, h(C)) \| g(A, C)$ und $g(B, h(C)) \| g(B, C)$. Somit folgt $h(C) = C$. Daher ist $h : \{A, B, C\} \to \mathcal{E}$ die Identität und hat als eindeutige isometrische Erweiterung die Identität auf $\mathcal{E}$. Es folgt, dass f sich zu einer Isometrie erweitern lässt. □

Korollar 16.12. *In einen Dreieck (A, B, C) gilt*

$$d(A, C) = d(B, C) \quad \Leftrightarrow \quad \angle(C, A, B) = \angle(A, B, C).$$

So ein Dreieck nennt man ***gleichschenklig****.*

Beweis. Sei g die Streckensymmetrale von (A, B). Wenn $d(A, C) = d(B, C)$ gilt, dann liegt C auf g wegen Proposition 12.14. Dann ist B das Bild von A unter der Spiegelung s an der Achse g. Es folgt, dass

$$\angle(C, A, B) = -\angle(s(C), s(A), s(B)) = -\angle(C, B, A) = \angle(A, B, C).$$

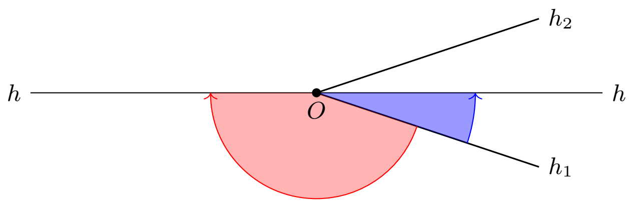
Umgekehrt gelte $\angle(C, A, B) = \angle(A, B, C)$. Dann sind die Dreiecke (A, B, C) und (B, A, C) nach dem WSW Satz kongruent. $\square$

16.6. Winkelsymmetrale und rechte Winkel.

Proposition 16.13. *Ist α ein Winkel, dann hat die Gleichung $2x = \alpha$ genau zwei Lösungen in $\mathscr{W}$, die sich um ω unterscheiden. Genauer: Sind h_1 und h_2 zwei Halbgeraden mit Ursprung O, dann sind die Halbgeraden h mit Ursprung O, welche*

$$2\angle(h_1, h) = \angle(h_1, h_2)$$

erfüllen, genau die beiden Halbgeraden der Achse der Spiegelung s, die h_1 mit h_2 vertauscht.



Beweis. Seien also h_1 und h_2 zwei Halbgeraden mit Ursprung O und $\angle(h_1, h_2) = \alpha$. Die Bedingung $2\angle(h_1, h) = \angle(h_1, h_2)$ ist äquivalent zu

$$2\angle(h_1, h) = \angle(h_1, h) + \angle(h, h_2) \quad \Leftrightarrow \quad \angle(h_1, h) = \angle(h, h_2).$$

Diese Bedingung ist erfüllt, falls h eine der beiden Halbgeraden der Achse der Spiegelung s ist; das folgt aus Lemma 16.1.

Umgekehrt gelte $\angle(h_1, h) = \angle(h, h_2)$. Sei h_2' das Bild von h_1 unter der Spiegelung an der Trägergeraden von h. Nach Lemma 16.1 gilt dann

$$\angle(h_1, h) = -\angle(h_2', h) = \angle(h, h_2')$$

und daher $\angle(h, h_2') = \angle(h, h_2)$, d.h. $h_2' = h_2$. Es folgt, dass die Trägergerade von h die Spiegelungsachse von s ist. $\square$

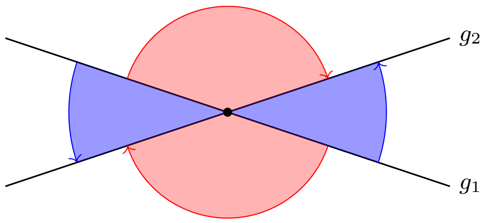
Korollar 16.14. *Wir haben die folgenden Spezialfälle:*

(1) *Die Gleichung $2x = 0$ hat genau die Lösungen 0 und ω.*
(2) *Die beiden Lösungen der Gleichung $2x = \omega$ werden **rechte Winkel** genannt. Es gilt:*

$$h_1 \perp h_2 \quad \Leftrightarrow \quad \angle(h_1, h_2) \text{ ist ein rechter Winkel.} \quad \square$$

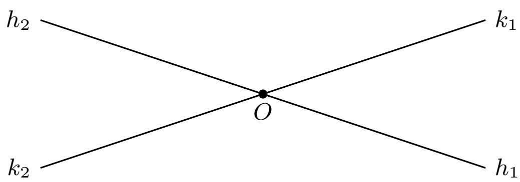
16.7. Winkel eines Paares von Geraden. Sei (g_1, g_2) ein Paar von Geraden durch O. Die **Winkel des Paares** (g_1, g_2) sind nach Definition die Rotationen um O, die g_1 in g_2 überführen.

Es gibt genau zwei solche Winkel. Man erhält sie als jene Winkel, die eine Halbgerade in g_1 (mit Ursprung O) mit den beiden Halbgeraden in g_2 bildet (die Wahl der Halbgeraden in g_1 spielt keine Rolle). Die Differenz der beiden Winkel ist ω.



Diese Definition kann nun durch Parallelität auf beliebige Paare von Geraden bzw. Richtungen ausgedehnt werden.

16.8. Scheitelwinkel, Stufenwinkel und Wechselwinkel. Wenn sich zwei Geraden in einem Punkt O schneiden, dann erhalten wir vier Halbgeraden mit Ursprung O.



Mit der Beschriftung wie in der Zeichnung gilt

$$\angle(h_1, k_1) + \angle(k_1, k_2) = \angle(h_1, k_2) = \angle(h_1, h_2) + \angle(h_2, k_2)$$

d.h.

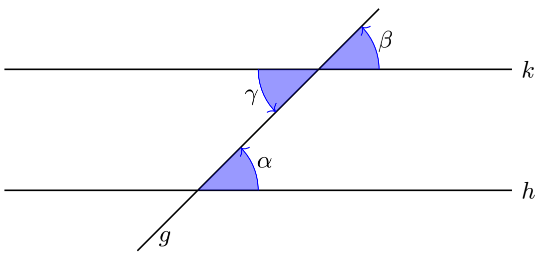
$$\angle(h_1, k_1) + \omega = \omega + \angle(h_2, k_2)$$

und somit

$$\angle(h_1, k_1) = \angle(h_2, k_2)$$

Die sogenannten **Scheitelwinkel** $\angle(h_1, k_1)$ und $\angle(h_2, k_2)$ sind also gleich. Ebenso folgt, dass die Scheitelwinkel $\angle(k_1, h_2)$ und $\angle(k_2, h_1)$ gleich sind.

Seien nun h und k parallele Geraden und g eine Gerade, die h und k schneidet.

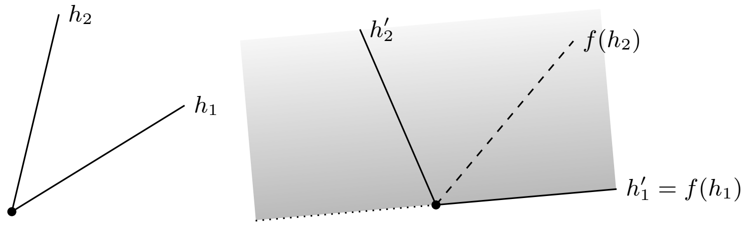


Mit den Bezeichnungen wie in der Zeichnung gilt $\alpha = \beta$; das ist eine Konsequenz der Definition der Winkel. Die Winkel α und β heißen **Stufenwinkel**. Nun gilt $\beta = \gamma$, weil β und γ Scheitelwinkel sind. Folglich gilt auch $\alpha = \gamma$. Die Winkel α und γ heißen **Wechselwinkel**. Gilt in dieser Konstellation umgekehrt $\alpha = \beta$ oder $\alpha = \gamma$, dann sind die Geraden h und k parallel.

Entsprechende Aussagen gelten natürlich auch für entsprechende andere Winkel in dieser Situation.

17. Orientierung

17.1. Orientierung von Paaren von Halbgeraden. Sei $\mathscr{H}$ die Menge der Paare (h_1, h_2) von nicht-kollinearen Halbgeraden in $\mathcal{E}$ mit dem gleichen Ursprung. Für $(h_1, h_2), (h_1', h_2') \in \mathscr{H}$ sagen wir, dass (h_1, h_2) und (h_1', h_2') die **gleiche Orientierung** haben, wenn für die eindeutige *gerade* Isometrie f, die h_1 auf h_1' abbildet, $f(h_2)$ und h_2' in der gleichen Halbebene bzgl. der Trägergeraden von h_1' liegen.



Lemma 17.1. *Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{H}$ definiert. Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen.*

Beweis. Die Relation ist natürlich reflexiv, weil die Identität eine gerade Isometrie ist. Sie ist symmetrisch, weil mit der geraden Isometrie f auch die inverse Abbildung f^{-1} eine gerade Isometrie ist, und Isometrien Halbebenen auf Halbebenen abbilden. Die Transitivität folgt, weil die Komposition von geraden Isometrien wieder gerade ist.

Es gibt genau zwei Äquivalenzklassen, weil jede Gerade zwei Halbebenen induziert. □

Wenn wir ein Paar (h_1^0, h_2^0) in $\mathscr{H}$ fixieren und als Referenz benützen, dann können wir in Bezug auf (h_1^0, h_2^0) von positiver und negativer Orientierung sprechen: ein Paar (h_1, h_2) hat **positive Orientierung**, wenn es die gleiche Orientierung wie das Referenzpaar (h_1^0, h_2^0) hat, und **negative Orientierung**, wenn es nicht die gleiche Orientierung wie (h_1^0, h_2^0) hat.

Proposition 17.2. *Gerade Ähnlichkeiten sind orientierungserhaltend, ungerade Ähnlichkeiten kehren die Orientierung um.* □

17.2. Orientierung von Winkeln. Seien α, α' zwei Winkel beide ungleich 0 und ω. Wir sagen, dass α und α' die **gleiche Orientierung** haben, wenn es Paare (h_1, h_2) und (h_1', h_2') in $\mathscr{H}$ gibt, die die gleiche Orientierung haben und $\angle(h_1, h_2) = \alpha$ und $\angle(h_1', h_2') = \alpha'$ erfüllen. Dadurch ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathscr{W} \setminus \{0, \omega\}$ mit genau zwei Äquivalenzklassen definiert.

Proposition 17.3. *Sei (X, Y, Z) ein nicht-degeneriertes Dreieck in $\mathcal{E}$. Dann haben die drei Winkel*

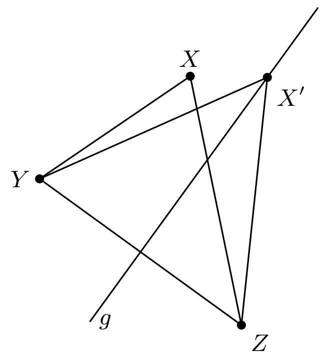
$$\angle(X, Y, Z), \quad \angle(Y, Z, X) \quad \text{und} \quad \angle(Z, X, Y)$$

alle die gleiche Orientierung.

Beweis. Wir zeigen, dass $\angle(X, Y, Z)$ und $\angle(Y, Z, X)$ die gleiche Orientierung haben. Der Rest folgt analog.

Sei X' ein Punkt auf der Streckensymmetralen g von (Y, Z), der in der gleichen Halbebene bzgl. $g(Y, Z)$ liegt wie X. Dann haben natürlich $\angle(X, Y, Z)$ und $\angle(X', Y, Z)$ die gleiche Orientierung, ebenso wie $\angle(Y, Z, X)$ und $\angle(Y, Z, X')$. Es gilt

$\angle(X', Y, Z) = -\angle(X', Z, Y)$, weil die beiden Winkel durch Spiegelung an g ineinander übergehen, und daher $\angle(X', Y, Z) = \angle(Y, Z, X')$ (vgl. Korollar 16.12). Also haben $\angle(X, Y, Z)$ und $\angle(Y, Z, X)$ die gleiche Orientierung. $\square$

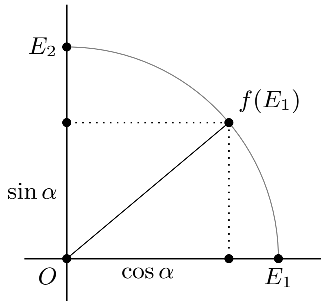


KAPITEL 7

Trigonometrie

18. Elementare Trigonometrie

18.1. Kosinus und Sinus. Sei α ein Winkel. Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis für $(\mathcal{E}, O)$. Sei f die Rotation um O, die den Winkel α realisiert. Die Koordinaten von $f(E_1)$ bzgl. der Basis (E_1, E_2) heißen **Kosinus** von α und **Sinus** von α und werden mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ bezeichnet.



Es gilt

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \tag{18.1}$$

denn nach (12.4) haben wir

$$1 = d(O, E_1)^2 = d(f(O), f(E_1))^2 = \|(\cos\alpha)E_1 + (\sin\alpha)E_2\|^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha.$$

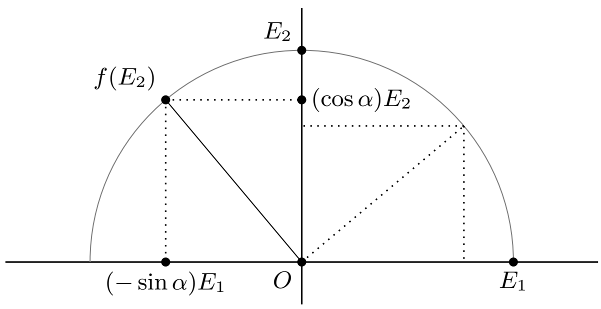
Die Identität (18.1) liefert sofort

$$|\cos\alpha| \leq 1 \quad \text{und} \quad |\sin\alpha| \leq 1. \tag{18.2}$$

Es gilt nun herauszufinden, wie $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ von der Wahl der Basis abhängen.

Proposition 18.1. *Der Kosinus* $\cos\alpha$ *ist unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis. Der Sinus* $\sin\alpha$ *hingegen wechselt das Vorzeichen bei Wechsel der Orthonormalbasis auf eine Orthonormalbasis der entgegengesetzten Orientierung.*

Beweis. Wenn die Basis (E_1, E_2) durch (E_2, E_1) ersetzt wird, dann hat $f(E_2)$ die Koordinaten $\cos\alpha$ und $-\sin\alpha$ bzgl. (E_2, E_1).



Wenn die Basis (E_1', E_2') aus der Basis (E_1, E_2) durch eine Rotation g um O hervorgeht, gilt, weil Rotationen um O miteinander kommutieren,

$$\begin{aligned} f(E_1') = f(g(E_1)) = g(f(E_1)) &= g((\cos\alpha)E_1 + (\sin\alpha)E_2) \\ &= (\cos\alpha)g(E_1) + (\sin\alpha)g(E_2) \\ &= (\cos\alpha)E_1' + (\sin\alpha)E_2'. \end{aligned}$$

Also ändern $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ sich nicht.

Wenn die Basis (E_1', E_2') aus der Basis (E_1, E_2) durch eine Translation hervorgeht, bleiben die Werte von $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ erhalten, weil Translationen Distanzen und Winkel erhalten.

Die allgemeine Aussage folgt aus diesen drei Spezialfällen, weil wir aus der ursprünglichen Orthonormalbasis jede andere erhalten können, indem wir zunächst eine Rotation um O gefolgt von einer Translation und schließlich gegebenenfalls eine Spiegelung durchführen. $\square$

Wenn wir also mit dem Sinus arbeiten, sollte immer klar sein, welche Orthonormalbasis wir zugrundelegen. Standardmäßig zeigt die orientierte Gerade $g(O, E_1)$ auf der Arbeitsfläche nach rechts und die orientierte Gerade $g(O, E_2)$ vertikal nach oben.

Proposition 18.2. *Sei (h_1, h_2) ein Paar von Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung. Dann gilt*

$$\cos\angle(h_1, h_2) = c(h_1, h_2),$$

d.h. der Kosinus des Winkels $\angle(h_1, h_2)$ ist das Projektionsverhältnis von (h_1, h_2).

Beweis. Sei O der Ursprung von h_1 und h_2. Sei E_1 der Punkt auf h_1 mit $d(O, E_1) = 1$. Bezeichnen wir mit f die Rotation um O, die den Winkel $\angle(h_1, h_2)$ realisiert, dann ist $f(E_1)$ der Punkt P auf h_2 mit der Eigenschaft $d(O, P) = 1$. Für die Orthogonalprojektion P_1 von P auf die Trägergerade von h_1 gilt in $(\mathcal{E}, O)$,

$$P_1 = (\cos\angle(h_1, h_2))E_1 = c(h_1, h_2)E_1,$$

nach der Definition des Kosinus und des Projektionsverhältnisses. $\square$

Korollar 18.3. *Sei α ein rechter Winkel. Dann gilt $\cos\alpha = 0$ und $\sin\alpha = \pm 1$, wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Referenzbasis abhängt.* $\square$

18.2. Die Matrixdarstellung einer Rotation. Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{E}, O)$ mit positiver Orientierung (bzgl. einer festen Referenzbasis). Sei f die Rotation um O, die den Winkel α realisiert, und sei g die Rotation um O, die E_1 auf E_2 abbildet.

Dann ist g^2 die Punktsymmetrie mit Zentrum O (vgl. Proposition 13.5). Es folgt

$$g(E_1) = E_2, \quad g(E_2) = g^2(E_1) = -E_1.$$

Mit

$$f(E_1) = (\cos\alpha)E_1 + (\sin\alpha)E_2$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} f(E_2) = f(g(E_1)) = g(f(E_1)) &= (\cos\alpha)g(E_1) + (\sin\alpha)g(E_2) \\ &= (\cos\alpha)E_2 - (\sin\alpha)E_1. \end{aligned}$$

Wenn x_1, x_2 die Koordinaten von X bzgl. der Basis (E_1, E_2) sind, dann gilt $X = x_1E_1 + x_2E_2$ und folglich

$$f(X) = x_1 f(E_1) + x_2 f(E_2)$$

$$= (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha)E_1 + (x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)E_2.$$

Die Matrixdarstellung der Rotation f bzgl. der Basis (E_1, E_2) ist demnach

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 18.4. Ist (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{E}, O)$ mit negativer Orientierung, dann hat f bzgl. dieser Basis die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Jede ungerade Isometrie mit Fixpunkt O kann als Komposition einer Rotation um O mit einer Spiegelung s mit der Achse $g(O, E_1)$ geschrieben werden. Es folgt, dass die Matrixdarstellung einer solchen Isometrie die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

hat. Die Spiegelung s hat nämlich die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

18.3. Additionsformeln. Sei f_1 (bzw. f_2) die Rotation um O, die den Winkel α_1 (bzw. α_2) realisiert. Die Komposition $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1$ ist die Rotation um O, die den Winkel $\alpha_1 + \alpha_2$ realisiert.

In jeder beliebigen Basis ist die Matrixdarstellung von $f_1 \circ f_2$ das Matrixprodukt der Matrixdarstellungen von f_1 und f_2. Wählen wir eine Orthonormalbasis mit positiver Orientierung, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1+\alpha_2) & -\sin(\alpha_1+\alpha_2) \\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \cos(\alpha_1+\alpha_2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2 & \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es folgen die beiden **Additionsformeln**

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1+\alpha_2) &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2, \\ \sin(\alpha_1+\alpha_2) &= \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung für eine Orthonormalbasis mit negativer Orientierung würde auf das gleiche Ergebnis führen. Als Spezialfälle (für $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$) erhalten wir

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \tag{18.3}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{18.4}$$

Wegen Proposition 18.2 und Axiom 8 gilt für alle Winkel $\alpha \in \mathscr{W}$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha). \tag{18.5}$$

Mit der Additionsformel folgt

$$0 = \sin(\alpha - \alpha) = \sin(\alpha)\cos(-\alpha) + \cos(\alpha)\sin(-\alpha) = \cos(\alpha)(\sin(\alpha) + \sin(-\alpha))$$

und somit

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha); \tag{18.6}$$

$\cos\alpha = 0$ genau dann, wenn $\pm\alpha$ ein rechter Winkel ist und in diesen Fall folgt die Identität aus Korollar 18.3.

Setzen wir

$$E(\alpha) := \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad \alpha \in \mathscr{W},$$

dann sind die Additionsformeln äquivalent zur Identität

$$E(\alpha_1 + \alpha_2) = E(\alpha_1)E(\alpha_2). \tag{18.7}$$

Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{E}, O)$, dann können wir die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ mit $(\mathcal{E}, O)$ vermöge der Abbildung

$$x_1 + ix_2 \mapsto x_1E_1 + x_2E_2$$

identifizieren. Mit dieser Identifikation ist $E(\alpha)$ der Bildpunkt $f(E_1)$ der Rotation um O, die den Winkel α realisiert. Somit liefert E eine bijektive Abbildung von $\mathscr{W}$ auf die Menge

$$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

der komplexen Zahlen mit Absolutbetrag 1. Nun bildet $\mathbb{T}$ eine multiplikative Gruppe und (18.7) bedeutet, dass

$$E : \mathscr{W} \to \mathbb{T} \tag{18.8}$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Wir können folglich die Gruppe der Winkel $\mathscr{W}$ mit $\mathbb{T}$ identifizieren.

18.4. Der Kosinussatz.

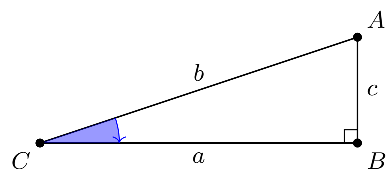
Theorem 18.5. *Sei (A, B, C) ein Dreieck mit $A \neq C$ und $B \neq C$. Wenn $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ und $c = d(A, B)$, dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle(A, C, B).$$

Beweis. Das Theorem folgt aus Proposition 12.3 und Proposition 18.2. □

Korollar 18.6. *Sei (A, B, C) ein Dreieck mit $A \neq C$ und $B \neq C$ und einem rechten Winkel $\angle(C, B, A)$. Dann gilt*

$$\cos\angle(A, C, B) = \frac{a}{b} = \text{ Längenverhältnis von Ankathete zu Hypothenuse.}$$



Beweis. Nach dem Kosinussatz 18.5 und dem Satz von Pythagoras 12.3 gilt

$$\cos\angle(A, C, B) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + (a^2 + c^2) - c^2}{2ab} = \frac{a}{b}.$$ □

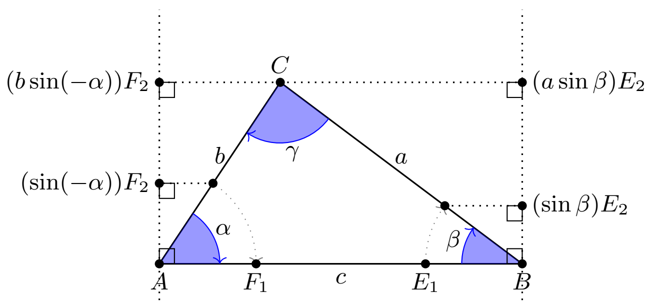
18.5. Der Sinussatz.

Theorem 18.7. *Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes Dreieck. Wir führen folgende Bezeichnungen ein: $a = d(B, C)$, $b = d(A, C)$ und $c = d(A, B)$ sowie $\alpha = \angle(C, A, B)$, $\beta = \angle(A, B, C)$, und $\gamma = \angle(B, C, A)$. Dann gilt*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Beweis. Nach Proposition 17.3 haben die Winkel α, β und γ die gleiche Orientierung.

Sei E_1 der Punkt auf der Halbgerade durch A mit Ursprung B, der $d(B, E_1) = 1$ erfüllt. Sei f die Rotation um B, die den Winkel β realisiert. Dann liegt $f(E_1)$ auf der Halbgeraden durch C mit Ursprung B und es gilt $d(B, f(E_1)) = 1$. Sei E_2 so gewählt, dass (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis für $(\mathcal{E}, B)$ bildet. Dann ist $(\sin\beta)E_2$ die Orthogonalprojektion von $f(E_1)$ auf $g(B, E_2)$ und folglich $(a\sin\beta)E_2$ die Orthogonalprojektion von C auf $g(B, E_2)$.



Sei F_1 der Punkt auf der Halbgerade durch B mit Ursprung A, der $d(A, F_1) = 1$ erfüllt. Sei h die Rotation um A, die den Winkel $-\alpha$ realisiert. Dann liegt $h(F_1)$ auf der Halbgeraden durch C mit Ursprung A und es gilt $d(A, h(F_1)) = 1$. Wir wählen nun F_2 so, dass (F_1, F_2) eine Orthonormalbasis für $(\mathcal{E}, A)$ bildet, die gleich orientiert ist wie (E_1, E_2). Dann ist $(\sin(-\alpha))F_2$ die Orthogonalprojektion von $h(F_1)$ auf $g(A, F_2)$ und folglich $(b\sin(-\alpha))F_2$ die Orthogonalprojektion von C auf $g(A, F_2)$.

Nach Konstruktion bildet $(A, B, (a\sin\beta)E_2, (b\sin(-\alpha))F_2)$ ein Rechteck. Weil die Basen (E_1, E_2) und (F_1, F_2) die gleiche Orientierung haben und die Winkel $-\alpha$ und β verschieden orientiert sind, folgt

$$b\sin\alpha = a\sin\beta.$$

Die erste Identität ist gezeigt. Die zweite Identität folgt analog. □

Korollar 18.8. *In der Situation von Theorem 18.7 sei γ ein rechter Winkel. Dann gilt*

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \textit{und} \quad \sin\beta = \frac{b}{c},$$

also Längenverhältnis von Gegenkathete zu Hypothenuse. □

19. Winkelmaße

19.1. Existenz und Eindeutigkeit von Winkelmaßen.

Theorem 19.1. *Es existiert eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *φ ist surjektiv.*
(2) *φ ist ein Gruppenhomomorphismus, d.h.*

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(3) *φ ist stetig, d.h.*

$$\lim_{x\to 0} |\varphi(x) - 1| = 0.$$

Je zwei solche Abbildungen unterscheiden sich nur durch Komposition mit einer Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = kx$, für $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Wir werden dieses Theorem hier nicht beweisen. Dies geschieht typischerweise in der Komplexen Analysis.

Bemerkung 19.2. Eine Abbildung, die die geforderten Eigenschaften erfüllt ist

$$x \mapsto e^{ix},$$

wobei e^{ix} durch die Potenzreihe

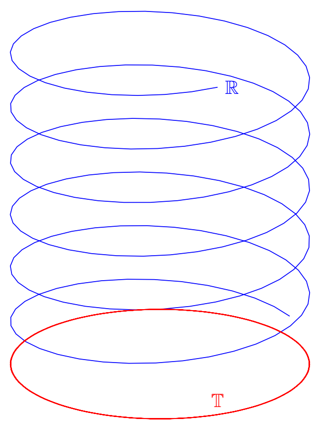
$$e^{ix} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!}$$

gegebenen ist.

Vermöge des Isomorphismus (18.8) identifizieren wir die additive Gruppe der Winkel mit der multiplikative Gruppe $\mathbb{T}$. Mittels dieser Identifikation hat eine Abbildung φ aus Theorem 19.1 die Homomorphismuseigenschaft

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Definition 19.3. Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{T} \cong \mathscr{W}$ wie in Theorem 19.1 nennt man ein **Winkelmaß**.



19.2. Periode, Gradmaß und Bogenmaß. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{W}$ ein Winkelmaß. Dann ist $\varphi^{-1}(0)$ eine (abgeschlossene) Untergruppe von $\mathbb{R}$. Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, mit $\varphi(x) = \omega$. Daher gilt $\varphi(2x) = \varphi(x) + \varphi(x) = \omega + \omega = 0$. Also ist die Untergruppe $\varphi^{-1}(0)$ weder $\mathbb{R}$ noch $\{0\}$. Man kann zeigen, dass

$$\varphi^{-1}(0) = a\mathbb{Z} = \{na : n \in \mathbb{Z}\}$$

für ein $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Diese Zahl a heißt **Periode** von φ. (Das Argument ist wie folgt (es stützt sich aber auf einige Fakten aus der Analysis): Sei $a := \inf\{|x| : x \in \varphi^{-1}(0) \setminus \{0\}\}$. Wenn $a = 0$, dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ ein $x \in \varphi^{-1}(0) \setminus \{0\}$ mit

$|x| < \epsilon$. Wir können annehmen, dass $x > 0$ gilt (sonst nehmen wir $-x$). Für ein gegebenes $y \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $nx \leq y < (n+1)x$ und daher $|y - nx| < x < \epsilon$. Das zeigt, dass $\varphi^{-1}(0)$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt. Weil $\varphi^{-1}(0)$ abgeschlossen ist folgt $\varphi^{-1}(0) = \mathbb{R}$, ein Widerspruch. Somit gilt $a > 0$.)

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\varphi(x + na) = \varphi(x) + \varphi(na) = \varphi(x).$$

Insbesondere gilt

$$2\varphi(a/2) = \varphi(a/2) + \varphi(a/2) = \varphi(a) = 0.$$

Daher muss der Winkel $\varphi(a/2)$ entweder 0 oder ω sein (vgl. Korollar 16.14). Aber weil $a/2 \notin a\mathbb{Z}$ muss

$$\varphi(a/2) = \omega$$

gelten. Daraus folgt,

$$2\varphi(a/4) = \omega,$$

d.h. $\varphi(a/4)$ ist ein rechter Winkel (vgl. Korollar 16.14). Wir sagen, dass das Winkelmaß **positiv** ist, wenn $\varphi(a/4)$ der positive rechte Winkel ist (bzgl. der gewählten Referenzorthogonalbasis). Andernfalls ist nennen wir φ **negativ**; dann ist $-\varphi$ positiv.

Für jede positive reelle Zahl $b > 0$ gibt es ein eindeutiges Winkelmaß ψ mit Periode b. Ist nämlich φ ein gegebenes Winkelmaß mit Periode a, dann ist ψ die Abbildung

$$x \mapsto \varphi(\tfrac{a}{b}x). \tag{19.1}$$

Die gebräuchlichsten Winkelmaße sind das **Gradmaß** mit der Periode $a = 360$ und das **Bogenmaß** mit der Periode $b = 2\pi$. Im ersten Fall sagt man das Winkelmaß wird in **Grad** gemessen, im zweiten Fall in **Radiant**. Um die beiden Fälle gut unterscheiden zu können schreiben wir für das Gradmaß auch $\varphi(x) = x^\circ$ (also z.B. 360°, 90°, 60° etc.).

Gemäß (19.1) geschieht die Umrechnung von Grad- auf Bogenmaß durch die Abbildung

$$x^\circ \mapsto \frac{2\pi}{360^\circ}x^\circ$$

und von Bogen- auf Gradmaß durch

$$x \mapsto \Big(\frac{360}{2\pi}x\Big)^\circ.$$

Für jeden Winkel $\alpha_0 \in \mathscr{W}$ hat die Gleichung $\varphi(x) = \alpha_0$ mindestens eine Lösung x_0, weil φ surjektiv ist. Dann wird die Gleichung zu

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x - x_0) = 0$$

und wir sehen, die Lösungsmenge der Gleichung ist $x_0 + a\mathbb{Z}$. Jede Zahl $x_0 + na$, für $n \in \mathbb{Z}$, ist also ein Maß des Winkels α_0. Genau eine der Zahlen liegt im Intervall $[0, a)$; sie wird das **Hauptwinkelmaß** von α_0 genannt. Das Hauptwinkelmaß für das Gradmaß (bzw. das Bogenmaß) liegt also im Intervall $[0^\circ, 360^o)$ (bzw. $[0, 2\pi)$).

19.3. Kosinus und Sinus als Funktionen auf $\mathbb{R}$. Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis von $(\mathcal{E}, O)$, die als Referenzbasis dienen soll. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{W}$ das positive Bogenmaß (d.h. Winkel werden in Radiant gemessen). Mittels φ können wir die Abbildungen cos und sin, die auf $\mathscr{W}$ definiert sind, als 2π-periodische Abbildungen auf $\mathbb{R}$ betrachten:

$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{ und } \quad \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt

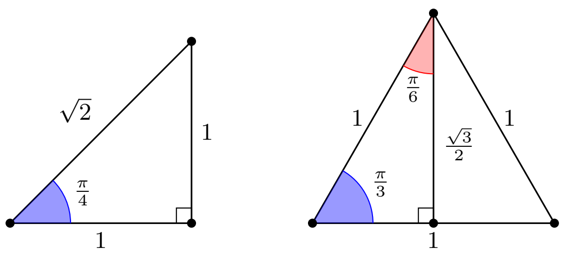
$$\cos(0) = \cos(2\pi) = 1, \quad \sin(0) = \sin(2\pi) = 0$$

und nach Korollar 18.3
$$\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 1.$$
Dank (18.3) und (18.4) können wir
$$\cos(\pi) = \cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0 - 1 = -1$$
und
$$\sin(\pi) = 2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$
folgern. Weiters gilt nach den Additionsformeln
$$\cos\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = \cos(\pi)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$
und auf ähnliche Weise
$$\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = -1.$$
Allgemeiner liefern die Additionsformeln
$$\cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x),$$
$$\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin(x)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) + \cos(x)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$
und
$$\cos(x+\pi) = \cos(x)\cos(\pi) - \sin(x)\sin(\pi) = -\cos(x),$$
$$\sin(x+\pi) = \sin(x)\cos(\pi) + \cos(x)\sin(\pi) = -\sin(x).$$
Nach (18.5) und (18.6) ist cos eine gerade Funktion, d.h. $\cos(-x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und sin eine ungerade Funktion, d.h. $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Wir wollen nun einige weitere spezielle Werte des Kosinus und des Sinus ermitteln:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Diese Werte lassen sich einfach mit Korollar 18.6 und Korollar 18.8 berechnen:



19.4. Absolutes Winkelmaß. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathscr{W}$ das Bogenmaß. Für $\alpha \in \mathscr{W}$ definieren wir das **absolute Winkelmaß** als
$$p(\alpha) := \inf\{|x| : \varphi(x) = \alpha\}.$$
Das absolute Winkelmaß ist vom Hauptwinkelmaß zu unterscheiden: ist z.B. α der Winkel, der bzgl. der Identifikation $\mathscr{W} \cong \mathbb{T}$ der komplexen Zahl $-i$ entspricht, dann ist $\frac{3\pi}{2}$ das Hauptwinkelmaß (bzgl. des Bogenmaßes) von α, während das absolute Winkelmaß $p(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ ist.

Proposition 19.4. *Für alle $\alpha, \beta \in \mathscr{W}$ gilt:*

(1) $p(\alpha) = p(-\alpha)$.

(2) $p(\alpha+\beta) \leq p(\alpha)+p(\beta)$.

Durch $d(\alpha,\beta) := p(\beta-\alpha) \in [0,\pi]$ *ist eine Distanzfunktion auf* $\mathscr{W}$ *definiert, die invariant unter der Gruppenoperation ist, d.h. für alle* $\alpha,\beta,\gamma \in \mathscr{W}$ *gilt:*

- $d(\alpha,\beta) \geq 0$ *und* $d(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$.
- $d(\alpha,\beta)=d(\beta,\alpha)$.
- $d(\alpha,\gamma) \leq d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma)$.
- $d(\alpha+\gamma,\beta+\gamma)=d(\alpha,\beta)$.

Beweis. (1) ist klar, weil $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.

(2) Es existieren $x,y \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(x)=\alpha$ und $p(\alpha)=|x|$ und $\varphi(y)=\beta$ und $p(\beta)=|y|$. Weiters gilt $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)=\alpha+\beta$ und daher

$$p(\alpha+\beta) \leq |x+y| \leq |x|+|y| = p(\alpha)+p(\beta).$$

Dass d die angeführten Eigenschaften hat, folgt leicht aus (1) und (2). □

Bemerkung 19.5. Jeder Winkel $\alpha \neq \omega$ ist durch sein absolutes Winkelmaß und seine Orientierung eindeutig bestimmt. Manchmal wir die Theorie der Winkel davon ausgehend entwickelt.

Sind h_1 und h_2 Halbgeraden, bzw. A,B,C drei verschiedene Punkte, dann bezeichnen wir das absolute Winkelmaß von $\angle(h_1,h_2)$, bzw. $\angle(A,B,C)$, auch mit

$$\measuredangle(h_1,h_2) := p(\angle(h_1,h_2)), \quad \text{bzw.}$$
$$\measuredangle(A,B,C) := p(\angle(A,B,C)).$$

19.5. SSW und S:S:W Satz.

Lemma 19.6. *Sei* (A_1,A_2,A_3) *ein nicht-degeneriertes Dreieck mit den Winkeln* $\alpha_1=\angle(A_3,A_1,A_2)$, $\alpha_2=\angle(A_1,A_2,A_3)$ *und* $\alpha_3=\angle(A_2,A_3,A_1)$. *Sei* α_2' *der Außenwinkel bei* A_2. *Dann gilt*

$$p(\alpha_1)+p(\alpha_3)=p(\alpha_2')$$

und insbesondere

$$p(\alpha_1)<p(\alpha_2') \quad \text{und} \quad p(\alpha_3)<p(\alpha_2').$$

Beweis. Nach Theorem 15.3 gilt

$$\alpha_1+\alpha_3=-\alpha_2'.$$

Die Winkel α_1, α_2 und α_3 haben die gleiche Orientierung (vgl. Proposition 17.3) und die Summe $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\omega$. Es folgt, dass in diesem Fall $p(\alpha_1+\alpha_3)=p(\alpha_1)+p(\alpha_3)$ gilt. Das Lemma folgt nun leicht. □

Lemma 19.7. *Sei* (A,B,C) *ein nicht-degeneriertes Dreieck mit* $a=d(B,C)$, $b=d(C,A)$ *und* $c=d(C,B)$ *und* $\alpha=\angle(C,A,B)$, $\beta=\angle(A,B,C)$ *und* $\gamma=\angle(B,C,A)$. *Dann gilt*

$$b<c \quad \Leftrightarrow \quad p(\beta)<p(\gamma).$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $b<c$ gilt. Dann existiert $D \in [A,B]$ mit $d(A,D)=b$. Wegen Korollar 16.12 gilt

$$\measuredangle(A,D,C)=\measuredangle(D,C,A)<p(\gamma).$$

Die letzte Ungleichung folgt, weil $p(\gamma)=\measuredangle(D,C,A)+\measuredangle(B,C,D)$. Die Anwendung des Lemma 19.6 auf das Dreieck (B,D,C) liefert

$$\measuredangle(A,D,C)>p(\beta)$$

und somit $p(\beta)<p(\gamma)$.

Umgekehrt sei $p(\beta) < p(\gamma)$. Dann kann nach dem letzten Absatz nicht $c < b$ sein. Genausowenig kann $c = b$ gelten, weil das dem Korollar 16.12 widersprechen würde. $\square$

Theorem 19.8 (SSW Satz)**.** *Zwei Dreiecke* (A, B, C) *und* (A', B', C') *sind kongruent, wenn die Relationen*

$$\measuredangle(A', B', C') = \measuredangle(A, B, C),$$
$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(C', A') = d(C, A)$$

und

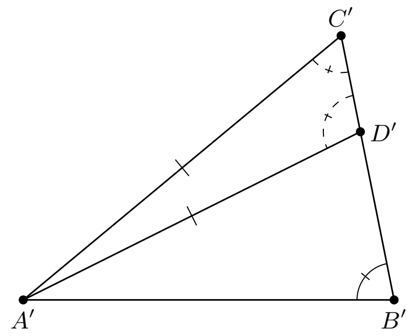
$$d(C, A) \geq d(A, B)$$

gelten.

Beweis. Wir können annehmen, dass

$$\angle(A', B', C') = \angle(A, B, C).$$

Wegen dem SWS Satz genügt es zu zeigen, dass $d(B', C') = d(B, C)$.



Angenommen $d(B', C') > d(B, C)$. Dann gibt es einen Punkt $D' \in (B', C')$ mit $d(B', D') = d(B, C)$. Wegen dem SWS Satz sind die Dreiecke (A, B, C) und (A', B', D') kongruent, insbesondere gilt

$$d(A', D') = d(A, C) = d(A', C').$$

Dank Korollar 16.12 gilt

$$\angle(A', D', C') = \angle(D', C', A').$$

Das Lemma 19.6 ergibt

$$\measuredangle(D', C', A') = \measuredangle(A', D', C') > \measuredangle(A', B', C').$$

Weiters impliziert Lemma 19.7, dass dann $d(A, B) = d(A', B') > d(A', C') = d(C, A)$ gilt. Das ist ein Widerspruch zu den Voraussetzungen.

Die Annahme $d(B', C') < d(B, C)$ führt analog auf einen Widerspruch. $\square$

Theorem 19.9 (S:S:W Satz)**.** *Zwei Dreiecke* (A, B, C) *und* (A', B', C') *sind ähnlich, wenn die Relationen*

$$\measuredangle(A', B', C') = \measuredangle(A, B, C),$$
$$\frac{d(A', B')}{d(A, B)} = \frac{d(C', A')}{d(C, A)}$$

und

$$d(C, A) \geq d(A, B)$$

gelten.

Beweis. Sei $f : \{A, B, C\} \to \mathcal{E}$ die Abbildung $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ und $f(C) = C'$. Wir können annehmen, dass

$$\angle(f(A), f(B), f(C)) = \angle(A, B, C)$$

gilt. Sei $f_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine gerade Ähnlichkeit, die A auf $f(A)$ und B auf $f(B)$ abbildet. Die Abbildung $h = f_1^{-1} \circ f$ fixiert A und B und es gilt

$$\angle(h(A), h(B), h(C)) = \angle(A, B, C)$$

und weiters

$$1 = \frac{d(h(A), h(B))}{d(A, B)} = \frac{d(h(C), h(A))}{d(C, A)}$$

d.h. $d(h(C), A) = d(C, A)$. Nach dem SSW Satz sind die Dreiecke (A, B, C) und $(A, B, h(C))$ kongruent. Daher ist h die Einschänkung einer Isometrie auf $\mathcal{E}$ und folglich f die Einschränkung einer Ähnlichkeit. $\square$

KAPITEL 8

Der Kreis

20. Elementare Eigenschaften

20.1. Definition und Symmetrie des Kreises. Sei $A \in \mathcal{E}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Menge

$$C(A, r) := \{X \in \mathcal{E} : d(A, X) = r\}$$

ist der **Kreis** mit **Radius** $r > 0$ und **Mittelpunkt** A. Wir nennen

$$D(A, r) := \{X \in \mathcal{E} : d(A, X) < r\}$$

das **Innere** des Kreises $C(A, r)$ und

$$\{X \in \mathcal{E} : d(A, X) > r\}$$

das **Äußere**. Wir nennen $D(A, r)$ auch **offene Kreisscheibe** und $D(A, r) \cup C(A, r)$ **abgeschlossene Kreisscheibe**. Jede Halbgerade mit Ursprung A schneidet $C(A, r)$ in einem eindeutigen Punkt.

Proposition 20.1. *Es gilt:*

(1) *Es gibt eine eindeutige Punktsymmetrie, die $C(A, r)$ auf $C(A, r)$ abbildet, nämlich die Punktsymmetrie mit Zentrum A.*
(2) *Die Spiegelungen, die $C(A, r)$ auf $C(A, r)$ abbilden, sind genau jene Spiegelungen, deren Achsen A enthalten.*

Beweis. (1) Nach Definition läßt die Punktsymmetrie mit Zentrum A den Kreis $C(A, r)$ invariant. Sei umgekehrt B das Zentrum einer Punktsymmetrie, die $C(A, r)$ invariant läßt. Sei g eine Gerade durch A und B. Diese Gerade schneidet $C(A, r)$ in zwei Punkten C_1, C_2. Nach der Definition der Punktsymmetrie ist sowohl A als auch B Mittelpunkt von C_1 und C_2. Es folgt $A = B$.

(2) Sei g eine Gerade durch A und sei s die Spiegelung an der Achse g. Wenn $X \in C(A, r)$, dann gilt (weil s eine Isometrie ist)

$$d(A, s(X)) = d(A, X) = r,$$

d.h. $s(X) \in C(A, r)$. Das zeigt $s(C(A, r)) \subseteq C(A, r)$. Somit gilt auch

$$C(A, r) = s^2(C(A, r)) \subseteq s(C(A, r))$$

und daher $s(C(A, r)) = C(A, r)$.

Umgekehrt sei g die Spiegelungsachse einer Spiegelung, die $C(A, r)$ auf $C(A, r)$ abbildet. Sei g' die orthogonale Gerade zu g durch A. Dann bildet nach dem vorigen Paragraphen auch die Spiegelung an g' den Kreis $C(A, r)$ auf $C(A, r)$ ab. Die Komposition der beiden Spiegelungen ist eine Punktsymmetrie, die $C(A, r)$ auf $C(A, r)$ abbildet. Wegen (1) muss es die Punktsymmetrie mit Zentrum A sein. Folglich verläuft g durch A. □

Korollar 20.2. *Es gilt $C(A_1, r_1) = C(A_2, r_2)$ genau dann, wenn $A_1 = A_2$ und $r_1 = r_2$.*

Beweis. Die Punkte A_1 und A_2 sind die Zentren der eindeutigen Punktsymmetrien, die den gleichen Kreis invariant lassen. Nach Proposition 20.1(1) folgt $A_1 = A_2$. Dann ist auch klar, dass $r_1 = r_2$. Die andere Richtung ist trivial. □

Korollar 20.3. *Der Kreis $C(A, r)$ wird unter jeder Rotation um A auf sich selbst abgebildet. Für alle $r > 0$ und alle $X \in C(A, r)$ gilt*

$$C(A, r) = \{f(X) : f \in \mathscr{R}_A\}.$$

Weiters gilt $\{f(A) : f \in \mathscr{R}_A\} = \{A\}$.

Beweis. Das Korollar folgt aus Proposition 20.1(2), weil die Rotation um A genau die Kompositionen zweier Spiegelungen mit Achsen durch A sind. □

Korollar 20.4. *Seien $C_1 = C(A_1, r_1)$ und $C_2 = C(A_2, r_2)$ zwei Kreise mit $A_1 \neq A_2$. Dann bildet die Spiegelung an der Achse $g(A_1, A_2)$ sowohl $C_1 \cup C_2$ als auch $C_1 \cap C_2$ auf sich selbst ab.* □

20.2. Kreise unter Ähnlichkeiten.

Proposition 20.5. *Das Bild eines Kreises $C(A, r)$ unter einer Ähnlichkeit f mit Proportionalitätsfaktor $k > 0$ ist der Kreis $C(f(A), kr)$.*

Beweis. Zunächst gilt $f(C(A, r)) \subseteq C(f(A), kr)$, weil für $X \in C(A, r)$ auch

$$d(f(A), f(X)) = kd(A, X) = kr$$

gilt. Weil die Umkehrabbildung f^{-1} eine Ähnlichkeit mit Proportionalitätsfaktor k^{-1} ist, folgt somit auch $f^{-1}(C(f(A), kr)) \subseteq C(A, r)$. Weiters folgt

$$C(f(A), kr) = f(f^{-1}(C(f(A), kr))) \subseteq f(C(A, r))$$

und $f(C(A, r)) = C(f(A), kr)$ ist gezeigt. □

Proposition 20.6. *Für je zwei Kreise $C(A, r)$ und $C(A', r')$ existieren genau zwei Dilatationen von $\mathcal{E}$, die $C(A, r)$ auf $C(A', r')$ abbilden. Die entsprechenden Streckfaktoren unterscheiden sich nur um das Vorzeichen.*

Beweis. In $(\mathcal{E}, O)$ bildet die Dilatation $X \mapsto kX + B$ dank Proposition 20.5 den Kreis $C(A, r)$ auf den Kreis $C(kA + B, |k|r)$ ab. Wegen Korollar 20.2 ist die Gleichheit $C(A', r') = C(kA + B, |k|r)$ äquivalent zu

$$A' = kA + B \quad \text{und} \quad r' = |k|r,$$

was wiederum äquivalent zu

$$k = \pm\frac{r'}{r} \quad \text{und} \quad B = A' - kA$$

ist. Die Proposition folgt. □

20.3. Konvexität von Kreisscheiben.

Proposition 20.7. *Jede offene und jede abgeschlossene Kreisscheibe ist konvex.*

Beweis. Seien $X, Y \in D(A, r)$ und $Z \in [X, Y]$. Nach Korollar 12.12 gilt

$$d(A, Z) \leq \max\{d(A, X), d(A, Y)\} < r,$$

d.h. $Z \in D(A, r)$. Das Argument für abgeschlossene Kreisscheiben funktioniert analog. □

Korollar 20.8. *Der Durchschnitt zweier Kreisscheiben ist konvex. Der Durchschnitt einer Kreisscheibe und einer Halbebene ist konvex.* □

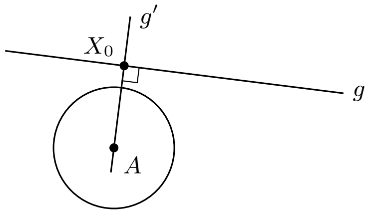
20.4. Der Durchschnitt von Kreis und Gerade.

Proposition 20.9. *Sei g eine Gerade, $C = C(A, r)$ ein Kreis und d der Abstand von A zu g. Sei g' die orthogonale Gerade zu g durch A und X_0 der Schnittpunkt von g und g'. Es gilt:*

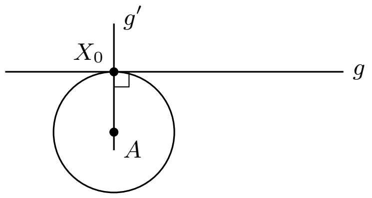
- *Wenn $d > r$, dann ist $C \cap g = \emptyset$ und g liegt im Äußeren von C.*
- *Wenn $d = r$, dann ist $C \cap g = \{X_0\}$ und $g \setminus \{X_0\}$ liegt im Äußeren von C.*
- *Wenn $d < r$, dann ist $C \cap g = \{X_1, X_2\}$, wobei $X_1 \neq X_2$, und (X_1, X_2) liegt im Inneren und $g \setminus [X_1, X_2]$ im Äußeren von C.*

Beweis. Die Proposition folgt aus Proposition 12.9. □

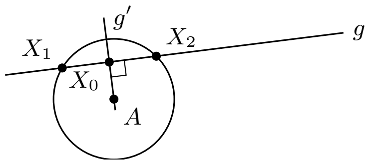
Im dritten Fall heißt die Strecke (X_1, X_2) eine **Sehne** und die Gerade g eine **Sekante** der Kreises C.



$d > r$



$d = r$



$d < r$

Korollar 20.10. *Ist X ein Punkt im Inneren und Y ein Punkt im Äußeren eines Kreises C, dann schneidet $[X, Y]$ den Kreis C in einem eindeutigen Punkt.*

Beweis. Sei g die Gerade durch X und Y. Es liegt, dann der dritte Fall der vorigen Proposition vor. Somit gilt $X \in (X_1, X_2)$ und $Y \in g \setminus [X_1, X_2]$. Das Korollar folgt. □

20.5. Kreistangenten. Sei $C = C(A, r)$ ein Kreis und sei $X \in C$ ein Punkt auf dem Kreis. Die **Tangente** an den Kreis C im Punkt X ist nach Definition die Gerade g durch X, die orthogonal zu $g(X, A)$ ist.

Die Proposition 20.9 zeigt, dass g den Kreis C nur im Punkt X trifft und dass $g \setminus \{X\}$ im Äußeren von C liegt. Folglich verläuft keine Tangente durch einen inneren Punkt des Kreises und die einzige Tangente durch einen Punkt auf dem Kreis ist die Tangente in diesem Punkt.

Lemma 20.11. *Sei $C = C(A, r)$ und g eine Gerade. Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:*

(1) *g ist Tangente an C in X.*
(2) *$g \cap C = \{X\}$.*
(3) *Die Orthogonalprojektion von A auf g ist X und $d(A, X) = r$.*

Beweis. (1) und (3) sind äquivalent nach der Definition der Tangente.

(1) $\Rightarrow$ (2) folgt aus Proposition 20.9.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es gelte nun (2). Dann ist $X \in C$ und daher $d(A, X) = r$. Wäre X nicht die Orthogonalprojektion von A auf X, dann wäre $d(A, g) < d(A, X) = r$ (vgl. Proposition 12.9). Nach Proposition 20.9 würde das aber (2) widersprechen. □

Proposition 20.12. *Sei $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ eine Ähnlichkeit ist und C ein Kreis. Dann ist g genau dann die Tangente an C im Punkt X, wenn $f(g)$ die Tangente an $f(C)$ in $f(X)$ ist.*

Beweis. Es gilt $g \cap C = \{X\}$ genau dann, wenn $f(g) \cap f(C) = \{f(X)\}$. Nach dem Lemma ist die Proposition damit bewiesen. □

Insbesondere folgt im Falle, dass f eine Dilatation ist, dass die Tangenten an C und $f(C)$ in entsprechenden Punkten parallel sind (vgl. Theorem 9.1).

20.6. Der Durchschnitt zweier Kreise.

Proposition 20.13. *Seien $C = C(A, r)$, $C' = C(A', r')$ Kreise und $d = d(A, A')$. Dann gilt*

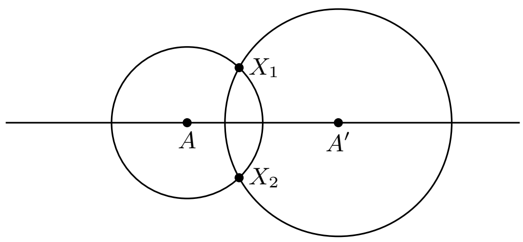
$$C \cap C' \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad |r - r'| \leq d \leq r + r'.$$

Beweis. Angenommen $X \in C \cap C'$. Dann hat das Dreieck (A, A', X) die Seitenlängen d, r' und r. Theorem 12.8 impliziert, dass die Ungleichungen $|r - r'| \leq d \leq r + r'$ gelten (wenn $d = 0$, überprüft man die Ungleichungen leicht direkt).

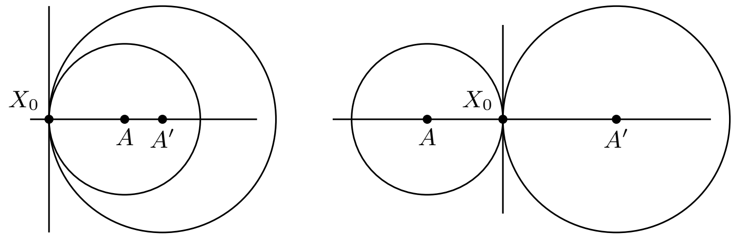
Umgekehrt implizieren die Ungleichungen $|r - r'| \leq d \leq r + r'$ nach Theorem 12.8 die Existenz eines Dreiecks (B, B', Y) mit den Seitenlängen $d = d(B, B')$, $r = d(B, Y)$ und $r' = d(B', Y)$. Dann gibt es eine Isometrie $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ mit $f(B) = A$ und $f(B') = A'$. Der Punkt $f(Y)$ muss auf beiden Kreisen C und C' liegen, denn $d(f(Y), A) = d(Y, B) = r$ und $d(f(Y), A') = d(Y, B') = r'$. (Wenn $d = 0$, dann folgt $A = A'$ und $r = r'$, d.h. $C = C'$.) □

Wir wollen nun die verschiedenen Möglichkeiten diskutieren:

1. **Fall:** Wenn $d = 0$, dann gilt $C \cap C' = C = C'$.
2. **Fall:** Wenn $d \neq 0$ und $|r - r'| < d < r + r'$, dann gilt $C \cap C' = \{X_1, X_2\}$, wobei X_1 und X_2 durch Spiegelung an der Geraden $g(A, A')$ ineinander übergehen.



3. Fall: Wenn $d \neq 0$ und $|r - r'| = d < r + r'$ oder $|r - r'| < d = r + r'$, dann gilt $C \cap C' = \{X_0\}$ und die beiden Kreise haben eine gemeinsame Tangente im Punkt X_0.



20.7. Die Kreisgleichung.

Proposition 20.14. *Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis für $(\mathcal{E}, O)$. Seien $A = a_1E_1 + a_2E_2$ und $X = x_1E_1 + x_2E_2$. Dann gilt*

$$C(A, r) = \big\{X = x_1E_1 + x_2E_2 \in \mathcal{E} : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2\big\}.$$

Beweis. Die Bedingung $X \in C(A, r)$ ist äquivalent zu $d(A, X)^2 = r^2$. In Koordinaten bzgl. (E_1, E_2) hat diese Gleichung die behauptete Form (vgl. (12.4)). □

Die Gleichung

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = r^2$$

kann auf die Gestalt

$$x_1^2 + x_2^2 + 2\alpha x_1 + 2\beta x_2 + \gamma = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \tag{20.1}$$

gebracht werden. Wir wollen uns umgekehrt überlegen, wann die Gleichung (20.1) die Gleichung eines Kreises ist. Durch quadratische Ergänzung kann die Gleichung in folgender Form geschrieben werden

$$(x_1 + \alpha)^2 + (x_2 + \beta)^2 + \gamma - \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Es können drei Fälle eintreten:

- Wenn $\gamma > \alpha^2 + \beta^2$, dann ist die linke Seite strikt positiv und daher kann die Gleichung keine Lösung haben.
- Wenn $\gamma = \alpha^2 + \beta^2$, dann ist $x_1 = -\alpha$, $x_2 = -\beta$ die einzige Lösung.
- Wenn $\gamma < \alpha^2 + \beta^2$, dann ist die Lösungsmenge der Gleichung der Kreis $C(A, r)$ mit Mittelpunkt $A = -\alpha E_1 - \beta E_2$ und Radius $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma}$.

21. Der Peripheriewinkelsatz

21.1. Der Peripheriewinkelsatz.

Lemma 21.1. *Sei (X, O, Y) ein nicht-degeneriertes gleichschenkliges Dreieck, $d(O, X) = d(O, Y)$. Dann gilt*

$$\angle(X, O, Y) + 2\angle(O, Y, X) = \angle(X, O, Y) + 2\angle(Y, X, O) = \omega.$$

Beweis. Nach Proposition 15.2 gilt

$$\angle(X, O, Y) + \angle(O, Y, X) + \angle(Y, X, O) = \omega$$

und nach Korollar 16.12 gilt

$$\angle(O, Y, X) = \angle(Y, X, O). \qquad \square$$

Theorem 21.2. *Seien A, X und B drei verschiedene Punkte auf einem Kreis $C(O,r)$. Dann gilt:*

$$2\angle(A,X,B) = \angle(A,O,B).$$

Beweis. Das Lemma 21.1 angewendet auf die beiden gleichschenkligen Dreiecke (X,O,A) und (B,O,X) liefert

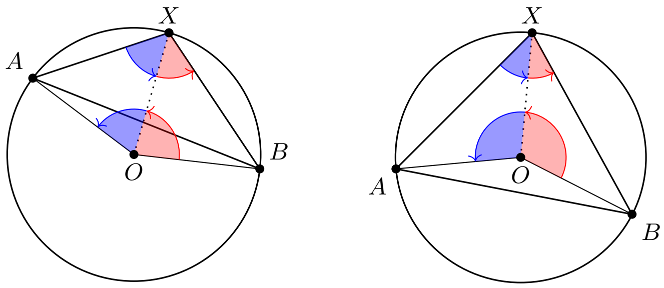
$$\angle(X,O,A) + 2\angle(A,X,O) = \omega \quad \text{und} \quad \angle(B,O,X) + 2\angle(O,X,B) = \omega.$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt

$$\angle(B,O,A) + 2\angle(A,X,B) = 0$$

oder äquivalent dazu

$$2\angle(A,X,B) = \angle(A,O,B). \qquad \square$$

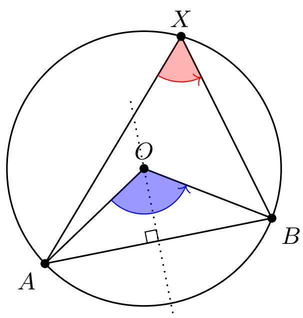


Korollar 21.3. *Seien A und B verschiedene Punkte in $\mathcal{E}$ und sei $\alpha \in \mathscr{W} \setminus \{0\}$ ein Winkel. Sei C der Kreis durch A und B, dessen Mittelpunkt O durch die Gleichung*

$$2\angle(B,A,O) = \omega - \alpha$$

definiert ist. Dann gilt für alle $X \in \mathcal{E} \setminus \{A,B\}$

$$X \in C \quad \Leftrightarrow \quad 2\angle(A,X,B) = \alpha.$$



Beweis. Für einen beliebigen Punkt O auf der Streckensymmetrale von (A,B) gilt

$$2\angle(B,A,O) = \omega - \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \angle(A,O,B) = \alpha,$$

weil die Winkelsumme im gleichschenkligen Dreieck (A,O,B) gleich ω ist.

Sei $X \in \mathcal{E} \setminus \{A, B\}$. Wenn $X \in C$, dann impliziert Theorem 21.2

$$2\angle(A, X, B) = \angle(A, O, B) = \alpha.$$

Umgekehrt gelte $2\angle(A, X, B) = \alpha$. Dann sind die Punkte A, X, B nicht kollinear, denn wären sie kollinear, dann würde $2\angle(A, X, B) = 0 \neq \alpha$ folgen. Es gibt einen eindeutigen Kreis C' durch A, X, B (davon werden wir uns in Proposition 24.4 überzeugen). Sei O' der entsprechende Mittelpunkt. Theorem 21.2 impliziert

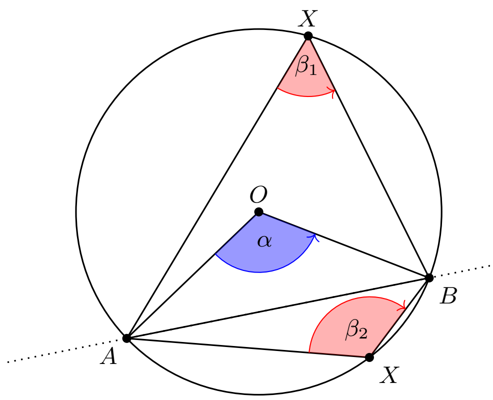
$$\alpha = 2\angle(A, X, B) = \angle(A, O', B).$$

Dann gilt $O = O'$, $C = C'$ und somit $X \in C$. $\square$

Sind β_1 und β_2 die beiden Lösungen der Gleichung $2\beta = \alpha$, wobei $\alpha \in \mathscr{W} \setminus \{0\}$, dann gilt $\beta_i \in \mathscr{W} \setminus \{0, \omega\}$ und $\beta_1 - \beta_2 = \omega$ (vgl. Proposition 16.13). Einer dieser Winkel hat positive Orientierung, der andere hat negative Orientierung.

In der Situation des Korollars seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ die Halbebenen, die der Geraden $g(A, B)$ entsprechen. Die Orientierung des Winkels $\angle(A, X, B)$ ist positiv oder negativ, je nachdem ob sich X in $\mathcal{E}_1$ oder $\mathcal{E}_2$ befindet (weil $\angle(A, X, B)$ und $\angle(X, B, A)$ nach Proposition 17.3 gleich orientiert sind).

Es folgt, dass auf dem einen Kreisbogen $C \cap \mathcal{E}_1$ der Winkel $\angle(A, X, B)$ den Wert β_1 und auf dem zweiten Kreisbogen den Wert β_2 annimmt.



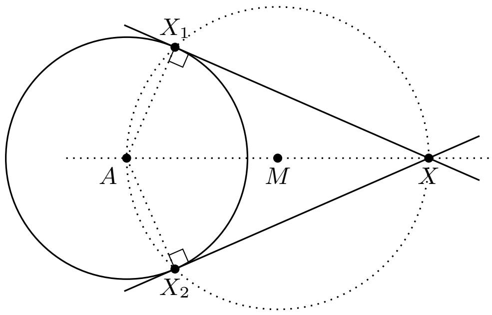
Korollar 21.4. *Für $A \neq B$ und jeden Winkel $\beta \in \mathscr{W} \setminus \{0, \omega\}$ ist die Menge der Punkte $X \in \mathcal{E}$ mit $\angle(A, X, B) = \beta$ ein Kreisbogen mit den Enden A und B.* $\square$

21.2. Satz von Thales. Als Spezialfall erhalten wir den **Satz von Thales**:

Theorem 21.5. *Sei C ein Kreis und seien A und B **diametral gegenüberliegende** Punkte auf C, d.h. A und B sind die beiden Schnittpunkte von C mit einer Gerade durch den Mittelpunkt von C. Für jeden Punkt $X \in C \setminus \{A, B\}$ ist $\angle(A, X, B)$ ein rechter Winkel.*

Ist umgekehrt (A, X, B) ein nicht-degeneriertes Dreieck mit rechtem Winkel $\angle(A, X, B)$, dann liegt X auf dem Kreis durch A und B, dessen Mittelpunkt der Mittelpunkt von A und B ist. $\square$

21.3. Kreistangenten durch einen Punkt im Äußeren des Kreises. Sei $C = C(A, r)$ ein Kreis und X ein Punkt im Äußeren von C. Sei M der Mittelpunkt der Strecke (X, A) und C' der Kreis mit Mittelpunkt M durch X und A. Die Diskussion nach Proposition 20.13 zeigt, dass sich C und C' in zwei verschiedenen Punkten X_1, X_2 schneiden. Nach dem Satz von Thales 21.5 sind die Geraden $g(X, X_1)$ und $g(X, X_2)$ die Tangenten an den Kreis C durch den Punkt X.



22. Die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises

22.1. Potenzabbildung. Sei $C = C(A, r)$ ein Kreis. Die **Potenz** eines Punktes $X \in \mathcal{E}$ bezüglich des Kreises C ist definiert durch

$$p(X) := d(A, X)^2 - r^2.$$

Dadurch ist die sogenannte **Potenzabbildung** $p : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ bezüglich des Kreises C definiert. Es gilt offensichtlich $p(X) < 0$, wenn X im Inneren von C liegt, $p(X) = 0$, wenn X auf C liegt, und $p(X) > 0$, wenn X im Äußeren von C liegt.

22.2. Tangenten-, Sekanten- und Sekantensatz.

Proposition 22.1. *Sei p die Potenzabbildung bezüglich eines Kreises $C = C(A, r)$. Es gilt:*

(1) *Wenn P und Q diametral gegenüberliegende Punkte auf C sind, dann gilt*
$$p(X) = \langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle, \qquad \textit{für alle } X \in \mathcal{E}.$$
(2) *Wenn P und Q zwei verschiedene Punkte auf C sind und $X \in \mathcal{E}$ mit P, Q kollinear ist, dann gilt*
$$p(X) = \langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle.$$
(3) *Wenn X auf der Tangente an C im Punkt $P \in C$ liegt, dann gilt*
$$p(X) = \langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XP} \rangle.$$

Beweis. (1) Es gilt (vgl. Abschnitt 11.5)

$$\begin{aligned}\langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle &= \langle \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AP} \mid \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AQ} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AP} \mid \overrightarrow{XA} - \overrightarrow{AP} \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{XA} \mid \overrightarrow{XA} \rangle - \langle \overrightarrow{AP} \mid \overrightarrow{AP} \rangle \\ &= d(X, A)^2 - r^2 = p(X).\end{aligned}$$

(2) Sei P' der Punkt auf C, der P diametral gegenüberliegt. Dann sind, nach Theorem 21.5, $\overrightarrow{P'Q}$ und $\overrightarrow{XP}$ orthogonal. Daher gilt wegen (1)

$$\langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle = \langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XP'} + \overrightarrow{P'Q} \rangle = \langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XP'} \rangle = p(X).$$

(3) In diesem Fall ist (X, A, P) ein rechtwinkeliges Dreieck und des Satz von Pythagoras 12.3 liefert

$$\langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XP} \rangle = d(X,P)^2 = d(X,A)^2 - r^2 = p(X). \qquad \square$$

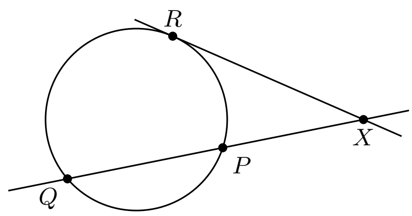
Theorem 22.2 (Tangentensatz)**.** *Sei C ein Kreis und g eine Sekante von C mit $g \cap C = \{P, Q\}$. Sei X ein Punkt auf g im Äußeren des Kreises C und sei g' eine Tangente an C durch X mit $g' \cap C = \{R\}$. Dann gilt*

$$d(X,P) \cdot d(X,Q) = d(X,R)^2.$$

Beweis. Nach Proposition 22.1(2) und (3) gilt

$$\langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle = p(X) = \langle \overrightarrow{XR} \mid \overrightarrow{XR} \rangle = d(X,R)^2.$$

Die linke Seite ist gleich $d(X,P) \cdot d(X,Q)$, weil P und Q auf der gleichen Halbgeraden mit Ursprung X liegen. $\square$



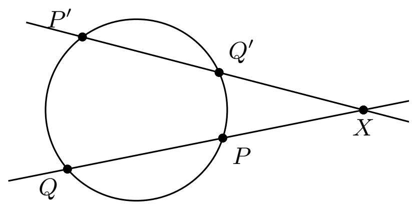
Theorem 22.3 (Sekantensatz)**.** *Sei C ein Kreis und g, g' zwei Sekanten von C mit $g \cap C = \{P, Q\}$ und $g' \cap C = \{P', Q'\}$, die sich im Äußeren von C in einem Punkt X schneiden. Dann gilt*

$$d(X,P) \cdot d(X,Q) = d(X,P') \cdot d(X,Q').$$

Sind g, g' Tangenten an C mit $g \cap C = \{P\}$ und $g' = \{P'\}$, dann gilt

$$d(X,P) = d(X,P').$$

Beweis. Der Tangentensatz zeigt, dass das Produkt $d(X,P) \cdot d(X,Q)$ unabhängig von der Sekante g durch X ist. $\square$



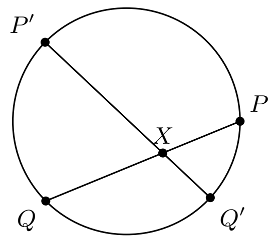
Theorem 22.4 (Sehnensatz)**.** *Sei C ein Kreis und g, g' zwei Sekanten von C mit $g \cap C = \{P, Q\}$ und $g' \cap C = \{P', Q'\}$, die sich im Inneren von C in einem Punkt X schneiden. Dann gilt*

$$d(X,P) \cdot d(X,Q) = d(X,P') \cdot d(X,Q').$$

Beweis. Dank Proposition 22.1(2) gilt

$$\langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle = p(X) = \langle \overrightarrow{XP'} \mid \overrightarrow{XQ'} \rangle.$$

Es gilt $\langle \overrightarrow{XP} \mid \overrightarrow{XQ} \rangle = -d(X,P) \cdot d(X,Q)$ und $\langle \overrightarrow{XP'} \mid \overrightarrow{XQ'} \rangle = -d(X,P') \cdot d(X,Q')$, weil $X \in [P,Q]$ und $X \in [P',Q']$. Das Theorem folgt. □



KAPITEL 9

Das Dreieck

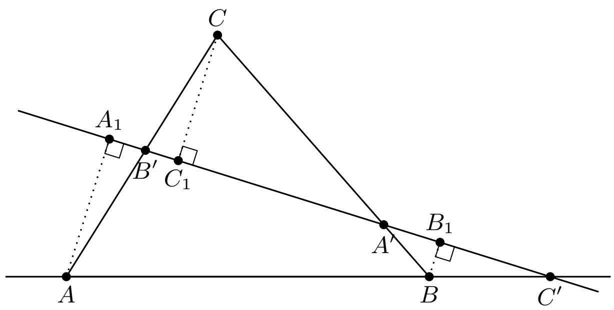
23. Der Satz von Menelaos und der Satz von Ceva

23.1. Der Satz von Menelaos.

Theorem 23.1. *Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes Dreieck. Sei g eine Gerade mit $g \cap \{A, B, C\} = \emptyset$ und mit $g \cap g(A, B) = \{C'\}$, $g \cap g(B, C) = \{A'\}$ und $g \cap g(C, A) = \{B'\}$. Dann gilt*

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = -1. \tag{23.1}$$

Gilt umgekehrt (23.1) für drei Punkte $C' \in g(A, B)$, $A' \in g(B, C)$ und $B' \in g(C, A)$, dann sind A', B' und C' kollinear.



Beweis. Seien A_1, B_1 und C_1 die Orthogonalprojektionen der Punkte A, B und C auf die Gerade g. Nach dem orientierten Strahlensatz 9.7 gilt

$$\frac{C'A}{C'B} = \frac{AA_1}{BB_1}, \quad \frac{A'B}{A'C} = \frac{BB_1}{CC_1}, \quad \frac{B'C}{B'A} = \frac{CC_1}{AA_1}$$

und somit

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \Big(-\frac{AA_1}{BB_1}\Big) \cdot \Big(-\frac{BB_1}{CC_1}\Big) \cdot \Big(-\frac{CC_1}{AA_1}\Big) = -1.$$

Wir zeigen nun die Umkehrung. Zunächst behaupten wir, dass sich die Geraden $g = g(B', A')$ und $g(A, B)$ in einem Punkt C'' schneiden. Angenommen g und $g(A, B)$ wären parallel. Dann würde der orientierten Strahlensatz 9.7

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{A'C}$$

implizieren. Mit der Bedingung (23.1) würde daraus

$$\frac{AC'}{C'B} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{C'A}{C'B} = 1$$

folgen, ein Widerspruch weil $A \neq B$. Wenn A_1, B_1 und C_1 wie vorher die Orthogonalprojektionen von A, B und C auf g bezeichnen, dann gilt

$$\frac{C''A}{C''B} = \frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AA_1}{CC_1} \cdot \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{B'A}{B'C} \cdot \frac{A'C}{A'B}$$

Mit (23.1) folgt

$$\frac{AC''}{C''B} = \frac{AC'}{C'B}$$

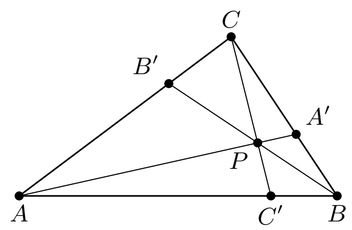
d.h. $C' = C''$. □

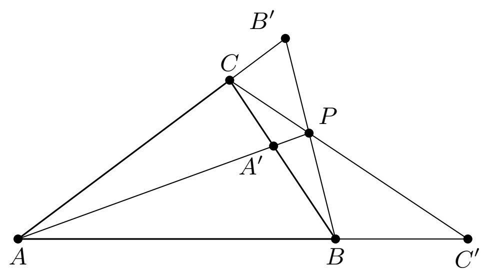
23.2. Der Satz von Ceva.

Theorem 23.2. *Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes Dreieck. Sei $P \in \mathcal{E} \setminus ([A, B] \cup [B, C] \cup [C, A])$ und $g(A, B) \cap g(C, P) = \{C'\}$, $g(B, C) \cap g(A, P) = \{A'\}$ und $g(C, A) \cap g(B, P) = \{B'\}$. Dann gilt*

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1. \tag{23.2}$$

Gilt umgekehrt (23.2) für drei Punkte $C' \in g(A, B)$, $A' \in g(B, C)$ und $B' \in g(C, A)$, dann sind die drei Geraden $g(A, A')$, $g(B, B')$ und $g(C, C')$ entweder parallel oder sie schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt.





Beweis. Wenden wir den Satz von Menelaos auf das Dreieck (A, B, A') und die Gerade $g(C, C')$ an, dann folgt

$$\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BC}{CA'} \cdot \frac{A'P}{PA} = -1.$$

Analog erhalten wir für das Dreieck (A, C, A') und $g(B, B')$

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CB}{BA'} \cdot \frac{A'P}{PA} = -1.$$

Durch Divison der beiden Gleichungen finden wir (23.2).

Betrachten wir nun die Umkehrung. Wenn $g(A, A')$ und $g(B, B')$ parallel sind, folgt aus dem orientierten Strahlensatz 9.7

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{B'A}{AC}.$$

Zusammen mit (23.2) folgt

$$1 = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{B'A}{AC} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{CB'}{AC}$$

und daher

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{AC}{CB'}.$$

Der orientierte Strahlensatz 9.7 impliziert, dass $g(B, B')$ und $g(C, C')$ parallel sind.

Wir nehmen nun an, dass sich $g(A, A')$ und $g(B, B')$ in einem Punkt P schneiden. Dann können $g(C, P)$ und $g(A, B)$ nicht parallel sein, denn sonst würde der orientierte Strahlensatz 9.7

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{AB}{CP} \quad \text{und} \quad \frac{CB'}{B'A} = -\frac{CP}{AB}$$

implizieren und mit (23.2) folgt

$$1 = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = \frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{AB}{CP} \cdot \Big(-\frac{CP}{AB}\Big)$$

d.h. $\frac{C'A}{C'B} = 1$, ein Widerspruch. Somit schneiden sich $g(C, P)$ und $g(A, B)$ in einem Punkt C''. Der erste Teil des Satzes von Ceva angewendet auf das Dreick (A, B, C) und P liefert

$$\frac{AC''}{C''B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Zusammen mit (23.2) folgt

$$\frac{AC''}{C''B} = \frac{AC'}{C'B}$$

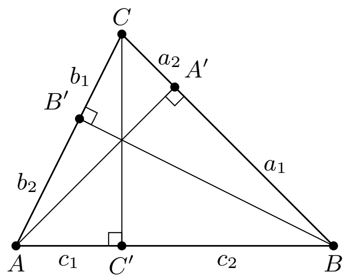
d.h. $C' = C''$. □

24. Besondere Punkte und Geraden im Dreieck

24.1. Der Höhenschnittpunkt. Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes Dreieck. Sei g_A die Gerade durch A orthogonal zu $g(B, C)$, g_B die Gerade durch B orthogonal zu $g(C, A)$ und g_C die Gerade durch C orthogonal zu $g(A, B)$. Die Geraden g_A, g_B und g_C heißen **Höhenlinien** des Dreiecks (A, B, C). Die entsprechenden Schnittpunkte $\{A'\} = g_A \cap g(B, C)$, $\{B'\} = g_B \cap g(C, A)$ und $\{C'\} = g_C \cap g(A, B)$ heißen **Höhenfußpunkte**.

Proposition 24.1. *Die drei Höhenlinien eines nicht-degenerierten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt H, dem **Höhenschnittpunkt** des Dreiecks.*

Beweis. Wir beweisen die Behauptung im Falle, dass die drei Höhenfußpunkte auf den Dreiecksseiten liegen, d.h. $A' \in (B, C)$, $B' \in (C, A)$ und $C' \in (A, B)$.



Bezeichnen wir die Streckenlängen wie in der Zeichnung, dann liefert der Satz von Pythagoras 12.3

$$\begin{aligned}
(c_1 + c_2)^2 &= b_2^2 + d(B, B')^2\\
(a_1 + a_2)^2 &= c_2^2 + d(C, C')^2\\
(b_1 + b_2)^2 &= a_2^2 + d(A, A')^2\\
(c_1 + c_2)^2 &= a_1^2 + d(A, A')^2\\
(a_1 + a_2)^2 &= b_1^2 + d(B, B')^2
\end{aligned}$$

$$(b_1+b_2)^2 = c_1^2 + d(C,C')^2$$

und es folgt

$$\begin{aligned}(c_1+c_2)^2 + b_1^2 &= (a_1+a_2)^2 + b_2^2\\ (a_1+a_2)^2 + c_1^2 &= (b_1+b_2)^2 + c_2^2\\ (b_1+b_2)^2 + a_1^2 &= (c_1+c_2)^2 + a_2^2.\end{aligned}$$

Weiters folgt aus den ersten beiden Gleichungen

$$(c_1+c_2)^2 + b_1^2 - (b_1+b_2)^2 - c_2^2 = b_2^2 - c_1^2$$

und durch Vereinfachung

$$c_1(c_1+c_2) = b_2(b_1+b_2).$$

Ähnlich findet man durch Kombination der ersten mit der dritten, bzw. der zweiten mit der dritten Gleichung

$$b_1(b_1+b_2) = a_2(a_1+a_2) \quad \text{und} \quad a_1(a_1+a_2) = c_2(c_1+c_2).$$

Durch Multiplikation folgt

$$a_1b_1c_1(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2) = a_2b_2c_2(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$$

und daher (weil a_i, b_i und c_i alle positiv sind)

$$\frac{a_1b_1c_1}{a_2b_2c_2} = 1.$$

Das bedeutet für die Teilverhältnisse (weil die Höhenfußpunkte auf den Seiten liegen)

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = 1.$$

Der Satz von Ceva 23.2 liefert, dass sich die Höhenlinien in einem Punkt schneiden, denn sie sind klarerweise nicht parallel.

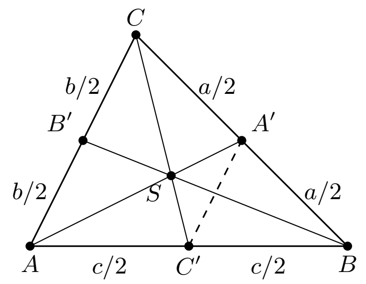
Wenn (A,B,C) ein rechtwinkeliges Dreieck ist mit rechtem Winkel in A, dann gilt $g_B = g(A,B)$ und $g_C = g(A,C)$. Die drei Höhenlinien schneiden sich also in A.

Den Fall, dass ein Höhenfuß nicht auf entsprechender Seite des Dreiecks liegt, empfehlen wir als Übung. □

24.2. Der Schwerpunkt. Sei (A,B,C) ein nicht-degeneriertes Dreieck. Die Geraden durch die Eckpunkte und die Mittelpunkte der jeweils gegenüberliegenden Seite heißen **Schwerlinien** des Dreiecks.

Proposition 24.2. *Die drei Schwerlinien eines nicht-degenerierten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S, dem* ***Schwerpunkt*** *des Dreiecks. Dieser Punkt teilt jede der Strecken von Ecke zum Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite im Verhältnis* $2:1$.

Beweis. Dass sich die drei Schwerlinien in einem Punkt schneiden, folgt leicht aus dem Satz von Ceva 23.2 und der folgenden Zeichnung (es ist klar, dass die Schwerlinien nicht parallel sein können).



Wir zeigen nun die Behauptung zum Verhältnis 2 : 1. Die Dreiecke (A, B, C) und (C', B, A') sind ähnlich nach dem S:W:S Satz 16.7. Es folgt, dass $d(A', C') = b/2$. Nach dem orientierten Strahlensatz 9.7 sind die Geraden $g(A, C)$ und $g(A', C')$ parallel. Wenden wir den Strahlensatz 9.7 auf diese parallelen Geraden und die Geraden $g(A, A')$ und $g(C, C')$ an, so erhalten wir

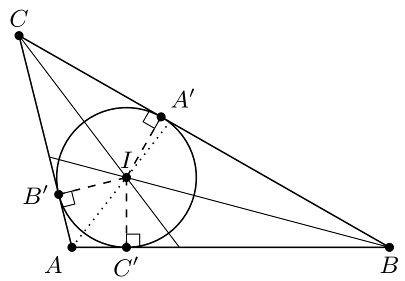
$$\frac{d(A,S)}{d(S,A')} = \frac{b}{b/2} = 2.$$

Der Beweis für die anderen beiden Schwerlinien ist analog. □

24.3. Der Inkreismittelpunkt.

Proposition 24.3. *Die drei Trägergeraden der Winkelsymmetralen der Innenwinkel eines nicht-degenerierten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt I, dem* ***Inkreismittelpunkt*** *des Dreiecks.*

Beweis. Die Trägergeraden der Winkelsymmetralen der Innenwinkel $\angle(A, B, C)$ und $\angle(B, C, A)$ schneiden sich in einem Punkt I. Seinen A', B' und C' die Orthogonalprojektionen von I auf die entsprechenden Seiten wie in der folgenden Zeichnung.



Nach dem WSW Satz 16.11 sind die Dreiecke (C', B, I) und (A', B, I) kongruent und daher gilt $d(C', I) = d(A', I)$. Analog folgt $d(B', I) = d(A', I)$ und daher $d(C', I) = d(B', I)$. Nach dem Satz von Pythagoras 12.3 und dem SSS Satz 16.9 sind die Dreiecke (A, C', I) und (A, B', I) kongruent. Insbesondere liegt I auf der Trägergeraden der Winkelsymmetralen von $\angle(C, A, B)$. □

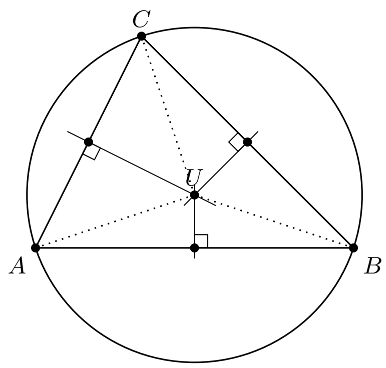
Der Beweis des Satzes liefert außerdem, dass

$$d(I, g(A, B)) = d(I, g(B, C)) = d(I, g(C, A)) =: r.$$

Der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius r berührt die Seiten des Dreiecks in den Punkten A', B', C', welche also Tangenten an den Kreis sind. Dieser Kreis heißt **Inkreis** des Dreiecks.

24.4. Der Umkreismittelpunkt.

Proposition 24.4. *Die drei Streckensymmetralen der Seiten eines nicht-degenerierten Dreiecks schneiden sich in einem Punkt U, dem **Umkreismittelpunkt** des Dreiecks.*



Beweis. Die Streckensymmetralen der Seiten (A, B) und (B, C) schneiden sich in einem Punkt U. Dann gilt $d(A, U) = d(B, U)$ und $d(B, U) = d(C, U)$ und daher auch $d(A, U) = d(C, U)$ (vgl. Proposition 12.14). Sei g die Gerade durch U, die orthogonal zu $g(A, C)$ ist. Nach Proposition 12.9 schneidet g die Strecke (A, C) in ihrem Mittelpunkt, d.h. g ist die Streckensymmetrale von (A, C). □

Es folgt somit

$$d(U, A) = d(U, B) = d(U, C) =: R.$$

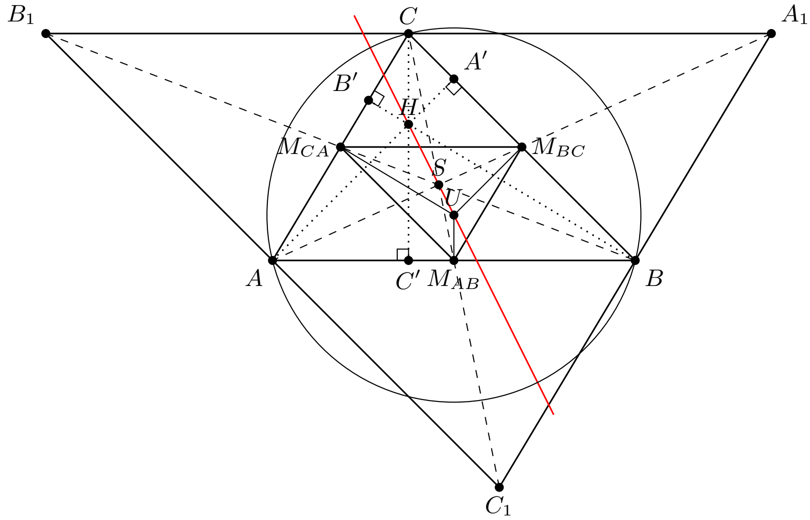
Der Kreis mit Mittelpunkt U und Radius R verläuft durch die Eckpunkte des Dreiecks. Dieser Kreis heißt **Umkreis** des Dreiecks.

24.5. Die Eulergerade. In einem gleichseitigen Dreieck fallen die Punkte H, S und U zusammen. In einem nicht gleichseitigen Dreieck sind die drei Punkte kollinear:

Proposition 24.5. *Die Punkte H, S, U eines nicht gleichseitigen Dreiecks liegen auf einer Geraden, der sogenannten **Eulergeraden**. Weiters gilt*

$$\frac{HS}{SU} = 2.$$

Beweis. Die zentrische Streckung h mit Zentrum S und Streckfaktor $-\frac{1}{2}$ bildet das Dreieck (A, B, C) auf das Dreieck (M_{BC}, M_{CA}, M_{AB}) ab. Und die Umkehrabbildung h^{-1} bildet das Dreieck (A, B, C) auf das Dreieck (A_1, B_1, C_1) ab. Es folgt, dass A (bzw. B und C) der Mittelpunkt von (B_1, C_1) (bzw. (C_1, A_1) und (A_1, B_1)) ist. Die Höhenlinien das Dreiecks (A, B, C) sind die Seitensymmetralen des Dreiecks (A_1, B_1, C_1), und daher ist H der Umkreismittelpunkt von (A_1, B_1, C_1). (Damit ist ein alternativer Beweis für Proposition 24.1 erbracht.)



Die Ähnlichkeit h erhält Orthogonalität und bildet daher H auf den Höhenschnittpunkt des Dreiecks (M_{BC}, M_{CA}, M_{AB}) ab, welcher aber der Umkreismittelpunkt U von (A, B, C) ist. Aus der Definition von h folgt, dass H, S und U kollinear sind und dass

$$\frac{HS}{SU} = 2$$

gilt. □

Die Höhenfußpunkte A', B', C', die Seitenmittelpunkte M_{AB}, M_{BC}, M_{CA} und die Mittelpunkte der Strecken (H, A), (H, B), (H, C) liegen alle auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt N der Mittelpunkt der Strecke (H, U) ist (Übung). Dieser Kreis heißt **Neunpunktekreis** oder **Feuerbachkreis**; er ist auf dem Titelblatt abgebildet.

Teil 2

Lineare Algebra

KAPITEL 10

Der $\mathbb{R}^n$ und Matrizen

Es sei daran erinnert, dass wir den Begriff des Vektorraums sowie den Begriff der linearen Abbildung zwischen Vektorräumen in Abschnitt 8.1 eingeführt haben. In den folgenden Abschnitten werden wir diese Begriffe und ihre Zusammenhänge genauer studieren. Diese Theorie wird **Lineare Algebra** genannt.

25. Die Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$

25.1. Geraden in $\mathbb{R}^2$. Die Euklidische Ebene $(\mathcal{E}, O)$ mit Ursprung O kann nach der Wahl einer Orthonormalbasis mit der Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ identifiziert werden.

Wir haben in (8.1) gesehen, dass jede Gerade in $\mathcal{E} \cong \mathbb{R}^2$ in Koordinaten durch eine Gleichung der Form

$$a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0, \quad a_1, a_2, b \in \mathbb{R}, \ (a_1, a_2) \neq (0, 0),$$

dargestellt werden kann. Umgekehrt repräsentiert jede Gleichung dieser Form eine Gerade in $\mathcal{E} \cong \mathbb{R}^2$.

Lemma 25.1. *Für eine Teilmenge $g \subseteq \mathbb{R}^2$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Es gibt $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, sodass*
$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}.$$

(2) *Es gibt $p, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, sodass*
$$g = \{p + tv \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Beweis. Seien $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Dann ist für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \tag{25.1}$$

äquivalent zu

$$\exists t \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) = t(-a_2, a_1). \tag{25.2}$$

In der Tat, falls $a_1 \neq 0$, dann führt mit (25.1) die Wahl $t = \frac{x_2}{a_1}$ auf (25.2). Falls $a_2 \neq 0$, dann setzt man $t = -\frac{x_1}{a_2}$. Die umgekehrte Richtung ist trivial.

(1) $\Rightarrow$ (2) Weil $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, gibt es $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ mit $a_1p_1 + a_2p_2 = b$ (falls $a_1 \neq 0$ können wir z.B. $p_1 = b/a_1$ und $p_2 = 0$ wählen). Wir setzen $p = (p_1, p_2)$ und $v = (-a_2, a_1)$. Dann gilt, wegen der Äquivalenz von (25.1) und (25.2),

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 = b \quad &\Leftrightarrow \quad a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : (x_1 - p_1, x_2 - p_2) = t(-a_2, a_1) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : x = p + tv. \end{aligned}$$

Das zeigt (2).

(2) $\Rightarrow$ (1) Wenn p und v wie in (2) gegeben sind, dann zeigt die Kette von Äquivalenzen mit $a_1 := v_2$ und $a_2 := -v_1$ auch (1). $\square$

Die Darstellung in (1) ist die **Beschreibung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ in Form einer (affin)linearen Gleichung**, in (2) haben wir die **Parameterdarstellung einer Geraden in $\mathbb{R}^2$**.

Ist g eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, dann heißt jeder Vektor der Form $p_1 - p_2$, wobei $p_1 \neq p_2 \in g$ zwei verschiedene Punkte von g sind, ein **Richtungsvektor** von g. Ist g in Parameterdarstellung $g = \{p+tv : t \in \mathbb{R}\}$ gegeben, dann ist $\{tv : t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}$ die Menge der Richtungsvektoren von g. Wie im obigem Beweis gesehen, ist $(-a_2, a_1)$ ein Richtungsvektor der Geraden $g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$, wobei $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$.

Ist g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, p ein beliebiger Punkt auf g und v ein Richtungsvektor von g, dann gilt

$$g = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}. \tag{25.3}$$

Es existiert nämlich ein $q \in g$ und $w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $g = \{q + sw : s \in \mathbb{R}\}$. Weiters gilt $p = q + s_0w$ für ein $s_0 \in \mathbb{R}$ und, weil w ein Richtungsvektor von g, gibt es ein $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $w = rv$. Für beliebiges $s \in \mathbb{R}$ gilt

$$q + sw = q + s_0w + sw - s_0w = p + (s - s_0)w = p + (s - s_0)rv.$$

Umgekehrt gilt für beliebiges $t \in \mathbb{R}$

$$p + tv = p - s_0w + \tfrac{t}{r}w + s_0w = q + (\tfrac{t}{r} + s_0)w.$$

Damit ist die Behauptung (25.3) bewiesen.

Lemma 25.2. *Zwei Geraden g und h in $\mathbb{R}^2$ sind genau dann parallel, wenn sie die gleiche Menge von Richtungsvektoren haben.*

Beweis. Sei $v = (v_1, v_2)$ ein Richtungsvektor von g und $w = (w_1, w_2)$ ein Richtungsvektor von h. Dann gilt wegen Lemma 25.1

$$h = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : w_2x_1 - w_1x_2 = b\}$$

für ein geeignetes $b \in \mathbb{R}$. Weiters hat g die Gestalt

$$g = \{p + tv : t \in \mathbb{R}\}.$$

Die Schnittpunkte von g und h entsprechen den Parameterwerten $t \in \mathbb{R}$, für die

$$w_2(p_1 + tv_1) - w_1(p_2 + tv_2) = b$$

gilt. Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$t(w_2v_1 - w_1v_2) = b + w_1p_2 - w_2p_1.$$

Nun schneiden sich g und h in einem einzigen Punkt genau dann, wenn die Gleichung eine eindeutige Lösung $t \in \mathbb{R}$ besitzt. Das ist genau dann der Fall, wenn $w_2v_1 - w_1v_2 \neq 0$. D.h. g und h sind parallel genau dann, wenn $w_2v_1 - w_1v_2 = 0$. Die Äquivalenz von (25.1) und (25.2) zeigt, dass diese Bedingung äquivalent dazu ist, dass $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ existiert mit $w = rv$. □

25.2. Normalvektordarstellung. Die Wahl einer Orthonormalbasis von $(\mathcal{E}, O)$ liefert eine Identifikation von $\mathcal{E}$ mit $\mathbb{R}^2$. Nach (12.3) ergibt sich dadurch das innere Produkt

$$\langle x \mid y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

für $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ auf $\mathbb{R}^2$. Zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$ sind genau dann orthogonal, wenn ihre Richtungsvektoren orthogonal sind, d.h. ihr inneres Produkt Null ist.

Unter einem **Normalvektor** einer Geraden g in $\mathbb{R}^2$ verstehen wir jeden Vektor $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, der orthogonal auf die Richtungsvektoren von g steht. Ist n ein Normalvektor von g, dann ist auch tn für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Normalvektor von g.

Sind n, m Normalvektoren von g, dann gibt es ein $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $n = tm$. Weiters ist (v_1, v_2) genau dann ein Richtungsvektor von g, wenn $(-v_2, v_1)$ ein Normalvektor von g ist.

Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$, a ein Punkt auf g und n ein Normalvektor von g. Dann gilt

$$g = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle n \mid x - a\rangle = 0\}. \tag{25.4}$$

Umgekehrt ist die Teilmenge $g \subseteq \mathbb{R}^2$, die durch (25.4) gegeben ist, wobei $a \in \mathbb{R}^2$ und $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, eine Gerade durch a mit Normalvektor n. Die Darstellung (25.4) heißt **Normalvektordarstellung** der Geraden g.

Beispiel 25.3. Die Gerade g in $\mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung

$$2x_1 - 5x_2 = -1$$

gegeben. Wir wollen g in Parameterdarstellung und in Normalvektordarstellung anschreiben. Zunächst stellen wir fest, dass $n = (2, -5)$ ein Normalvektor von g ist und dass $a = (2, 1)$ ein Punkt auf g ist, denn die Gleichung kann in der Form

$$\langle (2, -5) \mid (x_1, x_2)\rangle = \langle (2, -5) \mid (2, 1)\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle (2, -5) \mid (x_1, x_2) - (2, 1)\rangle = 0$$

geschrieben werden. Der besseren Übersicht halber ist es auch üblich die Vektoren in $\mathbb{R}^2$ als Spaltenvektoren zu schreiben: Die Normalvektordarstellung von g ist also

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \right\}$$

Ein Richtungsvektor von g ist $\binom{5}{2}$ und somit erhalten wir die Parameterdarstellung

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 25.4. Wir suchen die Gerade g in $\mathbb{R}^2$, welche durch die zwei Punkte $a = \binom{3}{1}$ und $b = \binom{-2}{-2}$ geht. Ein Richtungsvektor von g ist $a - b = \binom{3}{1} - \binom{-2}{-2} = \binom{5}{3}$. Damit gilt

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ein Normalvektor von g ist also $\binom{-3}{5}$. Somit ist die Normalvektordarstellung

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Durch Berechnung des inneren Produktes finden wir die Geradengleichung

$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -3x_1 + 5x_2 = -4\}.$$

Beispiel 25.5. Die Gerade g in $\mathbb{R}^2$ ist durch die Gleichung

$$-x_1 - 2x_2 = 3$$

gegeben. Wir suchen die Gerade durch $a = \binom{7}{5}$ parallel zu g und die Gerade durch a orthogonal zu g. Der Vektor $\binom{-1}{-2}$ ist ein Normalvektor von g und folglich ist $\binom{2}{-1}$ ein Richtungsvektor von g. Dann ist

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - 2x_2 = -17\}$$

die Gerade durch a parallel zu g und

$$g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 9\}$$

die Gerade durch a orthogonal zu g.

25.3. Die Orthogonalprojektion in Koordinaten.

Proposition 25.6. *Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Richtungsvektor v und Normalvektor n und sei a ein Punkt auf g. Die Orthogonalprojektion p' auf g eines Punktes $p \in \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch*

$$p' = p - \frac{\langle n \mid p - a\rangle}{\|n\|^2} n = a + \frac{\langle v \mid p - a\rangle}{\|v\|^2} v.$$

Insbesondere gilt für den Abstand von p zu g

$$d(p, g) = d(p, p') = \frac{|\langle n \mid p - a\rangle|}{\|n\|}.$$

Beweis. Die Gerade h durch p, welche orthogonal zu g ist, hat die Gestalt

$$h = \{p + tn : t \in \mathbb{R}\}.$$

Weiters gilt

$$g = \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle n \mid x - a\rangle = 0\}.$$

Um den Schnittpunkt p' von g und h zu berechnen, betrachten wir

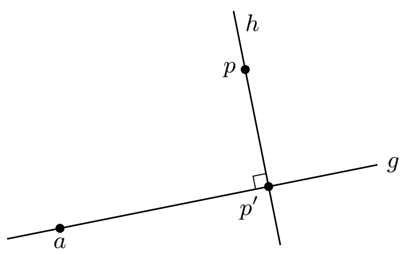
$$\langle n \mid p + tn - a\rangle = 0,$$

was zu

$$t = -\frac{\langle n \mid p - a\rangle}{\|n\|^2}$$

führt. Damit folgt

$$p' = p + tn = p - \frac{\langle n \mid p - a\rangle}{\|n\|^2} n.$$



In dieser Situation ist p' die Orthogonalprojektion von a auf die Gerade h und v ist ein Normalvektor von h. Somit liefert das bereits Bewiesene

$$p' = a - \frac{\langle v \mid a - p\rangle}{\|v\|^2} v = a + \frac{\langle v \mid p - a\rangle}{\|v\|^2} v. \qquad \square$$

Beispiel 25.7. Wir wollen die Orthogonalprojektion des Punktes $p = \binom{1}{1}$ auf die Gerade g durch $a = \binom{-3}{4}$ und $b = \binom{2}{9}$ und den Abstand $d(p, g)$ berechnen. Ein Richtungsvektor von g ist $b - a = \binom{2}{9} - \binom{-3}{4} = \binom{5}{5}$ und daher ist $n = \binom{-1}{1}$ ein Normalvektor. Die Orthogonalprojektion p' von p auf g ist also

$$\begin{aligned} p' &= p - \frac{\langle n \mid p - a\rangle}{\|n\|^2} n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\langle \binom{-1}{1} \mid \binom{1}{1} - \binom{-3}{4}\rangle}{\|\binom{-1}{1}\|^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{7}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Abstand von p zu g ist

$$d(p,g) = d(p,p') = \frac{|\langle n \mid p - a\rangle|}{\|n\|} = \tfrac{7}{\sqrt{2}} = \tfrac{7\sqrt{2}}{2}.$$

25.4. Der Durchschnitt zweier Geraden. Will man den Durchschnitt zweier Geraden im $\mathbb{R}^2$ berechnen, so stößt man auf ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen. Sind beide Geraden in Form von linearen Gleichungen gegeben,

$$\begin{aligned} g_1 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1\}, \quad (a_{11},a_{12}) \neq (0,0),\\ g_2 &= \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2\}, \quad (a_{21},a_{22}) \neq (0,0), \end{aligned}$$

dann ist die Lösungsmenge

$$g_1 \cap g_2 = \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right\}.$$

Wenn die Geraden nicht parallel sind, dann besteht $g_1 \cap g_2$ aus einem eindeutigen Punkt. Wenn sie parallel sind, dann widersprechen sich die Gleichungen und haben somit keine gemeinsame Lösung oder eine Gleichung ist ein Vielfaches der anderen und die Lösungsmenge bildet eine Gerade, deren Beschreibung einen Parameter benötigt.

26. Der Raum $\mathbb{R}^n$ und Matrizen

26.1. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Wir bezeichnen mit $\mathbb{R}^n$ die Menge aller **n-Tupel** reeller Zahlen, d.h.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } 1 \leq i \leq n\}.$$

In anderen Worten ist $\mathbb{R}^n$ das n-fache kartesische Produkt $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Im Folgenden werden wir Elemente von $\mathbb{R}^n$ auch einfach als **Vektoren** bezeichnen.

Es gibt zwei natürliche Operationen für die Elemente von $\mathbb{R}^n$, die **Addition** und die **Skalarmultiplikation**. Beide Operationen sind komponentenweise definiert. Für einen Vektor $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ nennt man x_i, für $i = 1,\dots,n$, die **Komponenten** von x. Die Summe zweier Vektoren $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$x + y = (x_1,\dots,x_n) + (y_1,\dots,y_n) := (x_1 + y_1,\dots,x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Multiplikation eines Vektors $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\lambda x = \lambda(x_1,\dots,x_n) := (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Die Rechenregeln für die reellen Zahlen liefen die folgenden Eigenschaften für die Addition und die Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^n$:

Proposition 26.1. *Seien $x,y,z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$.
(2) $x + y = y + x$.
(3) $x + 0 = x$, *wobei* $0 := (0,\dots,0)$, *der* ***Nullvektor***.
(4) $x + (-x) = 0$, *wobei* $-x := (-x_1,\dots,-x_n)$.
(5) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
(6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
(7) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$.
(8) $1x = x$.

Das heißt $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Beweis. Übung. □

Es ist oft nützlich die Elemente des $\mathbb{R}^n$ als **Spaltenvektoren** zu schreiben:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

26.2. Matrizen. Seien n und m positive natürliche Zahlen. Eine reelle $m \times n$ **Matrix** ist ein rechteckiges Schema der Form

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit reellen Einträgen $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Die Menge aller reellen $m \times n$ Matrizen wird mit $\mathbb{R}^{m \times n}$ bezeichnet.

Zwei $m \times n$ Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ können komponentenweise addiert werden:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiters ist die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$ komponentenweise definiert:

$$\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die **Nullmatrix** $0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die $m \times n$ Matrix, deren Einträge alle Null sind.

Proposition 26.2. *Die Menge der $m \times n$ Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Nullmatrix ist der Nullvektor.*

Beweis. Übung. □

Das **Produkt** einer $m \times n$ Matrix A mit einer $n \times p$ Matrix B ist folgende $m \times p$ Matrix:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \\ &:= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{jp} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj} b_{jp} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Produkt AB ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.

Beispiel 26.3. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 & -7 \\ 10 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir den Eintrag der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte mit A_{ij} bezeichnen, können wir die Addition, Skalarmultiplikation und das Produkt von Matrizen auch kurz wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} (A+B)_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}, \quad (A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}), \\ (\lambda A)_{ij} &= \lambda A_{ij}, \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \lambda \in \mathbb{R}), \\ (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times p}). \end{aligned}$$

Die $n \times n$ **Einheitsmatrix** $I_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist definiert durch

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$. Wir bezeichnen die j-te Spalte von I_n als den j-ten **Einheitsvektor** $e_j \in \mathbb{R}^n$. Inbesondere gilt

$$I_n = (e_1 \; e_2 \; \cdots \; e_n).$$

Proposition 26.4. *Seien $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $(A + A')B = AB + A'B$.
(2) $A(B + B') = AB + AB'$.
(3) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
(4) $A(BC) = (AB)C$.
(5) $AI_n = A = I_m A$.

Beweis. (1) Es gilt

$$\begin{aligned} \big((A+A')B\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(A+A')_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A_{ik} + A'_{ik})B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n} A'_{ik}B_{kj} = (AB)_{ij} + (A'B)_{ij} = (AB + A'B)_{ij}. \end{aligned}$$

(2) folgt analog.

(3) Es gilt

$$\big(\lambda(AB)\big)_{ij} = \lambda(AB)_{ij} = \lambda \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj},$$

was weiter gleich

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda A_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda A)_{ik}B_{kj} = \big((\lambda A)B\big)_{ij}$$

und auch

$$\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\lambda B_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\lambda B)_{kj} = \big(A(\lambda B)\big)_{ij}$$

ist.

(4) Wir haben

$$\big(A(BC)\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(BC)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \sum_{\ell=1}^{p} B_{k\ell}C_{\ell j}$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{k\ell} \Big) C_{\ell j} = \sum_{\ell=1}^{p} (AB)_{i\ell} C_{\ell j} = \big((AB)C\big)_{ij}.$$

(5) Es gilt

$$\big(AI_n\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik} A_{kj} = \big(I_m A\big)_{ij}. \qquad \square$$

Beispiel 26.5. Das Produkt zweier Matrizen ist nicht kommutativ: z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren Spaltenvektoren $v \in \mathbb{R}^n$ mit Matrizen, die nur eine Spalte aufweisen, d.h. wir identifizieren $\mathbb{R}^n$ mit $\mathbb{R}^{n\times 1}$. Weiters bezeichnen wir $1 \times n$ Matrizen auch als **Zeilenvektoren**. Damit ist für jede $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ das Produkt $Av \in \mathbb{R}^{m\times 1} \cong \mathbb{R}^m$ definiert,

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj} v_j \end{pmatrix}$$
$$= v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{26.1}$$

Proposition 26.4 zeigt, dass somit jede $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_A(x) = Ax$, definiert. Umgekehrt hat jede lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diese Gestalt:

Theorem 26.6. *Für jede $m\times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f_A(x) = Ax$, eine lineare Abbildung. Ist umgekehrt $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, dann existiert ein eindeutige $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sodass $g = f_A$, nämlich*

$$A = \big(g(e_1)\ g(e_2)\ \cdots\ g(e_n)\big), \tag{26.2}$$

d.h. die Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren unter g.

Beweis. Nur der zweite Teil der Behauptung ist noch zu zeigen. Sei $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Nun gilt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Wegen der Linearität von g und (26.1) folgt

$$g(x) = x_1 g(e_1) + \cdots + x_n g(e_n) = Ax = f_A(x),$$

wobei A durch (26.2) gegeben ist. $\square$

Beispiel 26.7. Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$ ist offensichtlich linear. Es gilt $f(e_1) = \binom{1}{2}$ und $f(e_2) = \binom{-1}{3}$. Somit ist

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 26.8. Wir wollen die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ finden, die $\binom{1}{1}$ auf $\binom{2}{-1}$ und $\binom{0}{2}$ auf $\binom{6}{4}$ abbildet. Es gilt also

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = f(e_1+e_2) = f(e_1)+f(e_2) = 2e_1 - e_2 = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$
$$f\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = f(2e_2) = 2f(e_2) = 6e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}.$$

Die zweite Gleichung ergibt $f(e_2) = 3e_1 + 2e_2 = \binom{3}{2}$ und durch Einsetzen in die erste Gleichung erhalten wir $f(e_1) = 2e_1 - e_2 - f(e_2) = 2e_1 - e_2 - (3e_1 + 2e_2) = -e_1 - 3e_2 = \binom{-1}{-3}$. Somit gilt

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 3\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

Korollar 26.9. *Seien $A, A' \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $f_{A+A'} = f_A + f_{A'}$.
(2) $f_{\lambda A} = \lambda f_A$.
(3) $f_{AB} = f_A \circ f_B$.
(4) $f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$.

Beweis. Das Korollar folgt leicht aus Proposition 26.4. □

26.3. Invertierbare Matrizen. Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, sodass

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Die inverse Matrix A^{-1} ist eindeutig bestimmt; falls $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Eigenschaft $AB = I_n = BA$ hat, dann folgt

$$B = BI_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = I_nA^{-1} = A^{-1}.$$

Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei invertierbare Matrizen, dann ist auch das Produkt AB invertierbar mit der inversen Matrix

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Denn

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

und die Aussage folgt aus der Eindeutigkeit der inversen Matrix.

Die Menge aller invertierbaren $n \times n$ Matrizen bildet folglich bzgl. des Matrixproduktes eine (nicht abelsche) Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, die **allgemeine lineare Gruppe** genannt wird; das neutrale Element ist die Einheitsmatrix I_n.

Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Die assozierte lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (vgl. Theorem 26.6) ist invertierbar mit der Umkehrabbildung

$$f_A^{-1} = f_{A^{-1}}.$$

Denn nach Korollar 26.9 gilt

$$f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{AA^{-1}} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n},$$
$$f_{A^{-1}} \circ f_A = f_{A^{-1}A} = f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Ist umgekehrt f_A bijektiv, dann ist nach Proposition 8.7 auch die Umkehrabbildung f_A^{-1} linear. Nach Theorem 26.6 gibt es eine eindeutige Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $f_A^{-1} = f_B$. Dann gilt

$$f_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = f_A \circ f_A^{-1} = f_A \circ f_B = f_{AB}$$

und daher $AB = I_n$, analog folgt auch $I_n = BA$. Das zeigt, dass A invertierbar ist.

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass eine $n \times n$ Matrix A genau dann invertierbar ist, wenn die assozierte lineare Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv ist.

Bezeichnen wir mit $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ die Gruppe der linearen Automorphismen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann folgt, dass

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n), \quad A \mapsto f_A,$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

KAPITEL 11

Teilräume, Basen und Dimension

27. Lineare Teilräume

27.1. Lineare Teilräume. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine nicht-leere Teilmenge $U \subseteq V$ heißt **(linearer) Teilraum** von V, wenn für alle $x, y \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$ gilt. Insbesondere sind $\{0\}$ und V Teilräume von V. Man spricht auch von **Teilvektorraum** oder **Untervektorraum**.

Proposition 27.1. *Ein Teilraum U eines Vektorraums V ist mit der induzierten Addition und Skalarmultiplikation selbst ein Vektorraum.*

Beweis. Zunächst zeigen wir, dass $0 \in U$. Weil $U \neq \emptyset$, existiert $x \in U$. Weil für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $\lambda x \in U$ ist, folgt $0 \in U$ aus $0x = 0$ (vgl. Abschnitt 8.1). Weiters gilt $-x = (-1) \cdot x \in U$. Das zeigt, dass für jedes $x \in U$ auch $-x \in U$. Nun ist es nicht mehr schwierig, die restlichen Axiome zu überprüfen. □

Korollar 27.2. *Sind U_1 und U_2 Teilräume von V, so ist auch $U_1 \cap U_2$ ein Teilraum von V.* □

Lemma 27.3. *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei U ein linearer Teilraum von W. Dann ist $f^{-1}(U)$ ein linearer Teilraum von V. Insbesondere ist der **Kern***

$$\ker f := f^{-1}(0)$$

der linearen Abbildung $f : V \to W$ ein linearer Teilraum von V.

Beweis. Weil U den Nullvektor enthalten muss und $f(0) = 0$ gilt, ist $0 \in f^{-1}(U)$ und damit nicht-leer. Seien $x_1, x_2 \in f^{-1}(U)$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \in U$, weil U ein linearer Teilraum ist, und folglich $x_1 + x_2 \in f^{-1}(U)$. Analog hat man $f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1) \in U$ und daher $\lambda x_1 \in f^{-1}(U)$. □

Der **Kern** einer $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist nach Definition der Kern der assozierten linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, d.h.

$$\ker A := \ker f_A.$$

Lemma 27.4. *Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Sei $f : V \to W$ injektiv. Weil $f(0) = 0$ gilt $0 \in \ker f$. Wegen der Injektivität kann $f^{-1}(0) = \ker f$ höchstens ein Element enthalten. Es folgt $\ker f = \{0\}$.

Umgekehrt gelte $\ker f = \{0\}$. Seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Es folgt

$$f(x - y) = f(x) - f(y) = 0$$

und daher $x - y = 0$, weil $\ker f = \{0\}$. Somit gilt $x = y$. □

Beispiel 27.5. Der Kern einer $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\ker A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{r} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j = 0 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j = 0 \end{array} \right\}$$

ist der Lösungsraum eines homogenen linearen Gleichungssystems. Z.B. ist der Kern der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

die Menge

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}.$$

In diesem Beispiel ist die zweite Gleichung $-4x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$ ein Vielfaches der ersten Gleichung und ist daher redundant.

Lemma 27.6. *Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei U ein linearer Teilraum von V. Dann ist $f(U)$ ein linearer Teilraum von W. Insbesondere ist das **Bild***

$$\operatorname{im} f := f(V)$$

der linearen Abbildung $f : V \to W$ ein linearer Teilraum von W.

Beweis. Der Nullvektor 0 ist in U enthalten und somit gilt $0 = f(0) \in f(U)$. Seien $y_1, y_2 \in f(U)$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in U$ mit $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$. Dann folgt

$$y_1 + y_2 = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2) \in f(U),$$

weil U ein linearer Teilraum ist und daher $x_1 + x_2 \in U$. Wenn $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt genauso

$$\lambda y_1 = \lambda f(x_1) = f(\lambda x_1) \in f(U). \qquad \square$$

Das **Bild** einer $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist nach Definition das Bild der assozierten linearen Abbildung $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\operatorname{im} A := \operatorname{im} f_A.$$

27.2. Linearkombinationen und Erzeugendensysteme. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und seien $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$. Dann heißt jede Summe der Form

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k, \qquad \text{wobei } \lambda_i \in \mathbb{R},$$

eine **Linearkombination** der Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Die Menge

$$\operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_k) := \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k : \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

aller Linearkombinationen von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ wird die **lineare Hülle** der Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ genannt. Wir setzen auch $\operatorname{span}(\emptyset) := \{0\}$.

Ist X eine Teilmenge von V, dann ist die lineare Hülle von X die Menge aller Linearkombinationen endlich vieler Vektoren in X, d.h.

$$\operatorname{span} X := \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k : x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{F \subseteq X \text{endlich}} \operatorname{span} F.$$

Proposition 27.7. $\operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *ist ein linearer Teilraum von V.*

Beweis. Linearkombinationen von $x_1, x_2, \ldots, x_k$ können addiert werden

$$(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) + (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_k x_k) = (\lambda_1 + \mu_1)x_1 + \cdots + (\lambda_k + \mu_k)x_k$$

und mit Skalaren λ multipliziert werden

$$\lambda(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k) = (\lambda\lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda\lambda_k)x_k.$$

Offensichtlich ist $\operatorname{span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ nicht leer, denn $0 = 0x_1 + \cdots + 0x_k$. □

Bemerkung 27.8. Ebenso ist auch $\operatorname{span} X$ für eine beliebige Teilmenge $X \subseteq V$ ein linearer Teilraum von V. Das zeigt der gleiche Beweis; zwei Linearkombinationen können auf gleiche Länge gebracht werden, wenn zusätzliche Skalare einfach Null sind.

Offenbar ist $\operatorname{span}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ der kleinste lineare Teilraum von V, der die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k$ enthält. Man sagt auch es ist der von $x_1, x_2, \dots, x_k$ **aufgespannte Teilraum**.

Beispiel 27.9. Das Bild einer $m \times n$ Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\operatorname{im} A = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

ist der Teilraum von $\mathbb{R}^m$, der von den n Spalten der Matrix A aufgespannt wird. Z.B. ist das Bild der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right).$$

Sei U ein linearer Teilraum eines Vektorraums V. Man sagt, die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ bilden ein **Erzeugendensystem** von U, wenn

$$\operatorname{span}(x_1, x_2, \dots, x_k) = U$$

gilt, d.h. wenn $x_1, x_2, \dots, x_k$ den Teilraum U aufspannen. Insbesondere ist $\emptyset$ ein Erzeugendensystem von $\{0\}$.

Proposition 27.10. *Die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ bilden genau dann ein Erzeugendensystem von U, wenn die lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^k \to U, \quad (t_1, \dots, t_k) \mapsto t_1 x_1 + \cdots + t_k x_k,$$

surjektiv ist. □

Proposition 27.11. *Die Einheitsvektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$.* □

28. Basen und Dimension

28.1. Lineare Unabhängigkeit. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ heißen **linear unabhängig**, falls

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0.$$

Andernfalls heißen die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k$ **linear abhängig**. Die leere Menge $\emptyset$ von Vektoren ist nach Konvention linear unabhängig. Ein einzelner Vektor $x \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $x \neq 0$. Eine unendliche Menge X von Vektoren in V heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge von X linear unabhängig ist.

Proposition 28.1. *Die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen geschrieben werden kann.*

Beweis. Nehmen wir an, $x_1, x_2, \dots, x_k$ sind linear unabhängig und

$$x_i = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k.$$

Dann folgt

$$0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + (-1) x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k,$$

was der linearen Unabhängigkeit von $x_1, x_2, \dots, x_k$ widerspricht.

Umgekehrt seien die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k$ linear abhängig, d.h. es existiert mindestens ein i, sodass $\lambda_i \neq 0$ und

$$0 = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{i-1} x_{i-1} + \lambda_i x_i + \lambda_{i+1} x_{i+1} + \dots + \lambda_k x_k.$$

Dann gilt

$$x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} x_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} x_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} x_k,$$

d.h. x_i ist eine Linearkombination der übrigen Vektoren. □

Proposition 28.2. *Die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die lineare Abbildung*

$$f : \mathbb{R}^k \to V, \quad (t_1, \dots, t_k) \mapsto t_1 x_1 + \dots + t_k x_k,$$

injektiv ist.

Beweis. Wie man leicht sieht, ist die Abbildung f linear. Nach Lemma 27.4 ist f genau dann injektiv, wenn $\ker f = \{0\}$. Aber diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k \in V$ linear unabhängig sind. □

Proposition 28.3. *Die Einheitsvektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ von $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig.* □

Beispiel 28.4. Seien die folgenden Vektoren in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Weil $v_1 \neq 0$ ist die Menge $\{v_1\}$ linear unabhängig. Die Bedingung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$$

ist äquivalent zu den drei Gleichungen

$$7\lambda_1 = 0, \quad -8\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \quad \lambda_1 = 0,$$

welche natürlich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ implizieren. Folglich ist die Menge $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig. Die Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist linear abhängig, weil $v_3 = -v_1 + v_2$. Hingegen ist die Menge $\{v_1, v_2, v_4\}$ linear unabhängig, denn die Bedingung

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_4 v_4 = 0$$

ist äquivalent zu den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} 7\lambda_1 + \lambda_4 &= 0 \\ -8\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_4 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die erste und die dritte Gleichung implizieren $\lambda_1 = \lambda_4 = 0$, und die zweite liefert dann auch $\lambda_2 = 0$. Die $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist linear abhängig, weil sie die linear abhängige Menge $\{v_1, v_2, v_3\}$ enthält.

28.2. Basen. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine **Basis** von V ist eine linear unabhängige Menge $X \subseteq V$, sodass

$$V = \operatorname{span} X,$$

d.h. jeder Vektor $x \in V$ kann als endliche Linearkombination von Elementen in X geschrieben werden. Mit anderen Worten: Eine Basis von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V. Insbesondere ist $\emptyset$ eine Basis von $\{0\}$. Der Vektorraum V heißt **endlichdimensional**, falls V eine endliche Basis besitzt.

Sei V endlichdimensional. Eine **geordnete Basis** ist ein (geordnetes) Tupel $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ von Vektoren in V, sodass $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

Proposition 28.5. *Die Einheitsvektoren bilden eine Basis $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Sie wird als **Standardbasis** bezeichnet.* □

Lemma 28.6. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $(v_1, \dots, v_n)$ eine geordnete Basis von V. Dann kann jeder Vektor $x \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination*

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$$

der Basisvektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ geschrieben werden.

Beweis. Es ist nur noch die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen. Sei also $x = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ eine andere Darstellung. Dann gilt

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = 0.$$

Weil die Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ linear unabhängig sind, muss $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ gelten. □

28.3. Dimension. Es ist naheliegend, die Dimension eines endlichdimensionalen Vektorraums als die Anzahl der Elemente in einer Basis zu definieren. Dazu müssen wir zuerst beweisen, dass je zwei Basen gleich viele Elemente besitzen. Das geschieht in den folgenden beiden Theoremen.

Wir benötigen ein Lemma.

Lemma 28.7. *Ein Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ von Vektoren $x_i \in V \setminus \{0\}$ ist genau dann linear abhängig, wenn mindestens einer der Vektoren $x_2, x_3, \dots, x_k$ eine Linearkombination der vorangehenden (d.h. links davon stehenden) Vektoren ist.*

Beweis. Dass die Bedingung hinreichend ist, folgt aus Proposition 28.1.

Wir nehmen somit an, dass die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_k$ linear abhängig sind. Sei i die kleinste Zahl $2 \leq i \leq k$, sodass die Vektoren $x_1, x_2, \dots, x_i$ linear abhängig sind; dann ist i wohl-definiert, weil im schlimmsten Fall $i = k$ gilt. Das bedeutet, dass

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_i x_i = 0$$

für Skalare $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i$, die nicht alle Null sind. Dann folgt aber, dass $\lambda_i \neq 0$; sonst wäre i nicht minimal. Somit gilt

$$x_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} x_1 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} x_{i-1}.$$

Das heißt x_i ist eine Linearkombination der vorangehenden Vektoren $x_1, \dots, x_{i-1}$. □

Theorem 28.8 (**Basisergänzungssatz**). *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ist $\{x_1, \dots, x_k\}$ eine Menge linear unabhängiger Vektoren in V, dann kann man Vektoren $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+\ell}$ in V finden, sodass die Menge $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+\ell}\}$ eine Basis von V ist.*

Beweis. Weil V endlichdimensional ist, existiert eine endliche geordnete Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V. Wir betrachten das Tupel

$$T = (x_1, \dots, x_k, v_1, \dots, v_n).$$

Die Vektoren in T sind linear abhängig, weil jedes x_i in T eine Linearkombination von $v_1, \dots, v_n$ ist (vgl. Proposition 28.1). Lemma 28.7 impliziert, dass es einen Vektor im Tupel T gibt, der eine Linearkombination der vorangehenden (d.h. links davon stehenden) Vektoren ist. Sei y der erste Vektor mit dieser Eigenschaft. Dann ist $y \notin \{x_1, \dots, x_k\}$, weil $\{x_1, \dots, x_k\}$ nach Annahme linear unabhängig ist. Folglich ist $y = v_i$ für ein $i = 1, \dots, n$. Sei nun

$$T' = (x_1, \dots, x_k, v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1} \dots, v_n)$$

das Tupel, das wir erhalten, wenn wir v_i aus T entfernen. Dann gilt $\operatorname{span}(T') = V$, denn v_i ist eine Linearkombination der Vektoren $x_1, \dots, x_k, v_1, \dots, v_{i-1}$ und $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis. Ist T' linear unabhängig, sind wir fertig. Andernfalls wiederholen wir den Vorgang, bis wir zu einer linear unabhängigen Menge gelangen, die $\{x_1, \dots, x_k\}$ enthält und deren lineare Hülle V ist. □

Theorem 28.9. *Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum und sind $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_m\}$ zwei Basen von V, dann gilt $n = m$.*

Beweis. Wir betrachten das Tupel

$$T = (y_m, x_1, \dots, x_n).$$

Dann ist T linear abhängig und wir können wie im Beweis des Basisergänzungssatzes 28.8 schließen, dass

$$T' = (y_m, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1} \dots, x_n)$$

die Eigenschaft $\operatorname{span}(T') = V$ besitzt. Nun setzen wir

$$S = (y_{m-1}, T') = (y_{m-1}, y_m, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1} \dots, x_n)$$

und wiederholen das Argument. Wir sehen, dass es mindestens so viele Vektoren x_i wie y_j geben muss, denn andernfalls müssten die y_j, die noch nicht in dem Tupel vorkommen, Linearkombinationen der im Tupel vorkommenden y_j sein. Das widerspricht der linearen Unabhängigkeit von $\{y_1, \dots, y_m\}$. Nach m Schritten erhalten wir also eine Menge, in der m der x_i durch $y_1, \dots, y_m$ ersetzt wurden und deren lineare Hülle V ist. Es folgt $n \geq m$. Vertauscht man die Rollen von $\{x_1, \dots, x_n\}$ und $\{y_1, \dots, y_m\}$, so folgt auch $n \leq m$. □

Das Theorem zeigt, dass folgende Definition sinnvoll ist.

Definition 28.10. Die **Dimension** $\dim V$ eines endlichdimensionaler Vektorraums V ist die Anzahl der Vektoren in einer Basis von V. Inbesondere hat der Vektorraum $\{0\}$ die Dimension 0, denn die leere Menge ist eine Basis von $\{0\}$. Ist $\dim V = n$, dann sagen wir auch, dass V ein n-**dimensionaler** Vektorraum ist.

Korollar 28.11. *Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ hat die Dimension n.* □

Korollar 28.12. *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Jeder lineare Teilraum U von V ist endlichdimensional und* $\dim U \leq \dim V$.

Beweis. Sei n die Dimension von V. Aus Theorem 28.8 und Theorem 28.9 folgt: Jede linear unabhängige Menge $\{v_1, \dots, v_k\}$ von Vektoren in V erfüllt $k \le n$. Es folgt, dass die Menge

$$\{j : \text{ es gibt eine Menge von } j \text{ linear unabhängigen Vektoren in } U\}$$

ein Maximum k besitzt und $k \le n$ gilt. Sei also $\{v_1, \dots, v_k\}$ eine solche Menge von linear unabhängigen Vektoren in U. Wir behaupten, dass

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = U$$

gilt. Sei $v \in U$ beliebig. Wegen der Maximalität von k muss $\{v, v_1, \dots, v_k\}$ linear abhängig sein, d.h. es existieren $\lambda_i \in \mathbb{R}$ nicht alle 0 mit

$$\lambda_0 v + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = 0.$$

Weil die Menge $\{v_1, \dots, v_k\}$ linear unabhängig ist, muss $\lambda_0 \neq 0$ gelten. Daher gilt

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} v_1 - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} v_k \in \operatorname{span}(v_1, \dots, v_k).$$

Es folgt $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_k) = U$. Insbesondere ist $(v_1, \dots, v_k)$ eine Basis von U und $\dim U = k \le n = \dim V$. □

Korollar 28.13. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum. Sei $X \subseteq V$ eine Menge von n Vektoren. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *X ist eine Basis von V.*
(2) *X ist linear unabhängig.*
(3) $\operatorname{span} X = V$, *d.h. X ist ein Erzeugendensystem von V.*

Eine Menge $X \subseteq V$ bestehend aus mehr als n Vektoren ist linear abhängig.

Beweis. Sei X eine n-elementige Teilmenge von V. Dass (1) sowohl (2) als auch (3) impliziert ist klar.

Sei X linear unabhängig. Dann kann X nach Theorem 28.8 zu einer Basis ergänzt werden. Aber nach Theorem 28.9 hat jede Basis n Vektoren. Folglich muss schon X selbst eine Basis sein.

Nehmen wir an, es gilt $\operatorname{span} X = V$. Wäre X linear abhängig, dann gäbe es eine Basis mit weniger als n Vektoren, ein Widerspruch zu Theorem 28.9. □

Beispiel 28.14. Die Menge $\{v_1, v_2, v_4\}$ in Beispiel 28.4 bildet eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Korollar 28.15. *Sei U ein linearer Teilraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Dann gilt $U = V$ genau dann, wenn* $\dim U = \dim V$.

Beweis. Wir nehmen an $n = \dim U = \dim V$ (die andere Richtung ist trivial). Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von U. Dann ist $\{v_1, \dots, v_n\}$ dank Korollar 28.13 auch eine Basis von V. Insbesondere gilt $U = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_n) = V$. □

28.4. Der kanonische Basisisomorphismus.

Theorem 28.16. *Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und sei $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Tupel von Vektoren in V. Die Abbildung*

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to V, \quad (t_1, \dots, t_n) \mapsto t_1 x_1 + \cdots + t_n x_n$$

ist ein genau dann ein linearer Isomorphismus, wenn $\mathcal{B}$ eine Basis von V ist. Die Abbildung $\varphi_{\mathcal{B}}$ wird der ***kanonische Basisisomorphismus*** *genannt.*

Beweis. Das Theorem folgt aus Proposition 27.10 und Proposition 28.2. □

Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei reellen Vektorräumen. Sei $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (y_1, \ldots, y_m)$ eine Basis von W. Dann ist die Komposition $\varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung (vgl. Proposition 8.6). Nach Theorem 26.6 gibt es eine eindeutige Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, sodass

$$f_A = \varphi_{\mathcal{C}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}.$$

Das folgende kommutative Diagramm beschreibt einprägsam die Situation:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & W \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{C}}"'] \end{tikzcd}$$

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen kann also durch Wahl von Basen für V und W immer durch eine eindeutig bestimmte Matrix A dargestellt werden. Umgekehrt kann f natürlich auch aus A zurückgewonnen werden, denn $f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ f_A \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$.

28.5. Die Dimensionsformel.

Theorem 28.17 (**Dimensionsformel**). *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt*

$$\dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = n.$$

Beweis. Sei $(x_1, \ldots, x_\ell)$ eine Basis von $\ker(f)$. Nach Theorem 28.8 können wir diese zu einer Basis $(x_1, \ldots, x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_n)$ von V ergänzen. Dann gilt

$$\operatorname{im}(f) = \operatorname{span}(f(x_{\ell+1}), \ldots, f(x_n)),$$

weil jede Linearkombination von $(x_1, \ldots, x_\ell, x_{\ell+1}, \ldots, x_n)$ unter f auf eine Linearkombination von $f(x_{\ell+1}), \ldots, f(x_n)$ abgebildet wird.

Wir zeigen nun, dass die Vektoren $f(x_{\ell+1}), \ldots, f(x_n)$ linear unabhängig sind. Denn dann ist $(f(x_{\ell+1}), \ldots, f(x_n))$ eine Basis von $\operatorname{im}(f)$ und es gilt

$$\dim \operatorname{im}(f) = n - \ell = n - \dim \ker(f).$$

Nun impliziert

$$0 = \lambda_{\ell+1} f(x_{\ell+1}) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = f(\lambda_{\ell+1} x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_n x_n),$$

dass $\lambda_{\ell+1} x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_n x_n$ in $\ker(f)$ liegt. Also gilt

$$\lambda_{\ell+1} x_{\ell+1} + \cdots + \lambda_n x_n = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_\ell x_\ell$$

für geeignete Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$. Weil die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind, muss $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ gelten. Insbesondere sind die Vektoren $f(x_{\ell+1}), \ldots, f(x_n)$ linear unabhängig. □

Man bezeichnet die Dimension des Bildes von f als den **Rang** von f,

$$\operatorname{rank}(f) := \dim \operatorname{im}(f),$$

und die Dimension des Kerns von f als den **Defekt** von f,

$$\operatorname{def}(f) := \dim \ker(f).$$

Die Dimensionsformel kann also auch in der Form

$$\operatorname{def}(f) + \operatorname{rank}(f) = n$$

geschrieben werden.

Korollar 28.18. *Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume. Wenn es eine bijektive lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, dann muss $\dim V = \dim W$ gelten.*

Beweis. Weil f surjektiv ist, d.h. $\operatorname{im}(f) = W$, gilt nach der Dimensionsformel

$$\dim \ker(f) + \dim W = \dim V.$$

Weil f injektiv ist, d.h. $\ker f = \{0\}$, folgt $\dim W = \dim V$. □

Korollar 28.19. *Seien V und W zwei n-dimensionale Vektorräume und sei $f : V \to W$ linear. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

(1) *f ist bijektiv.*
(2) *f ist injektiv.*
(3) *f ist surjektiv.*

Beweis. (1) impliziert natürlich (2) und (3).

(2) ⇒ (1) Wenn f injektiv ist, gilt $\ker(f) = \{0\}$ (vgl. Lemma 27.4) und die Dimensionsformel impliziert $\dim \operatorname{im}(f) = n$. Dann folgt $\operatorname{im}(f) = W$ dank Korollar 28.15, d.h. f ist surjektiv.

(3) ⇒ (1) Wenn f surjektiv ist, gilt $\operatorname{im}(f) = W$. Nach der Dimensionsformel gilt $n = \dim \ker(f) + \dim \operatorname{im}(f) = \dim \ker(f) + n$ und daher $\dim \ker(f) = 0$. Mit Korollar 28.15 folgt $\ker(f) = \{0\}$ und f ist injektiv (vgl. Lemma 27.4). □

28.6. Der Rang einer Matrix. Der **Rang** einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert durch

$$\operatorname{rank} A := \operatorname{rank} f_A = \dim \operatorname{im}(f_A).$$

Nach Beispiel 27.9 ist $\operatorname{rank} A$ die Dimension des Teilraums des $\mathbb{R}^m$, der von den Spalten von A aufgespannt wird. Insbesondere stimmt der Rang von A mit der Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A überein.

Proposition 28.20. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dann gilt:*

(1) *Die Spalten von A sind genau dann linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$, wenn* $\operatorname{rank} A = n$.
(2) *Die Spalten von A bilden genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^m$, wenn* $\operatorname{rank} A = m$.
(3) *Die Spalten von A bilden genau dann eine Basis von $\mathbb{R}^m$, wenn* $\operatorname{rank} A = m = n$.

Beweis. (1) Die Spalten sind genau dann linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$, wenn $\ker A = \{0\}$ (wegen Proposition 28.2) oder äquivalent $\dim \ker A = 0$. Nach der Dimensionsformel ist das äquivalent zu $\operatorname{rank} A = n$.

(2) Die Spalten von A bilden genau dann ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^m$, wenn $\operatorname{im} A = \mathbb{R}^m$. Nach Korollar 28.15 ist das äquivalent zu $\operatorname{rank} A = m$.

(3) folgt aus (1) und (2). □

Korollar 28.21. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *A ist invertierbar.*
(2) $\operatorname{rank} A = n$.
(3) *Die Spalten von A bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.*
(4) *Die Spalten von A bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$.*
(5) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

Beweis. Die vorige Proposition liefert die Äquivalenz von (2)–(5).

Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bijektiv ist (vgl. Abschnitt 26.3) und diese Bedingung ist äquivalent zu (3) (vgl. Theorem 28.16). □

KAPITEL 12

Lineare Gleichungssysteme

Unter einem **linearen Gleichungssystem** verstehen wir eine endliches System von Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{28.1}$$

wobei die Skalare $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ bekannt und die **Unbekannten** $x_1, \dots, x_n$ gesucht sind. Setzen wir

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

dann kann das Gleichungssystem in der kompakten Form

$$Ax = b$$

geschrieben werden. Das Gleichungssystem heißt **homogen**, falls b der Nullvektor ist, d.h. $Ax = 0$, andernfalls heißt es **inhomogen**.

Der **Lösungsraum**

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \ker A$$

des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ ist ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$ (vgl. Lemma 27.3).

Wir werden in diesem Abschnitt einen Algorithmus kennenlernen, der es erlaubt die Dimension und eine Basis des Lösungsraum L zu berechnen. Damit können wir eine Parameterdarstellung von L finden. Des Weiteren werden wir auch sehen, wie inhomogene lineare Gleichungssysteme gelöst werden können.

29. Das Eliminationsverfahren

29.1. Elementare Zeilenumformungen. Unter **elementaren Zeilenumformungen** verstehen wir jede der folgendenen Operationen mit Matrizen:

(1) Vertauschung zweier Zeilen.
(2) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar ungleich Null.
(3) Addition eines skalaren Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Lemma 29.1. *Kern und Rang einer Matrix ändern sich unter elementaren Zeilenumformungen nicht. Das Bild kann sich sehr wohl ändern.*

Beweis. Sei $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ eine $m \times n$ Matrix. Der Kern von A ist der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems (28.1) im Spezialfall $b = 0$. Vertauschung zweier Zeilen von A entspricht der Vertauschung zweier Gleichungen, was den Lösungsraum unverändert lässt. Ebenso ändert sich der Lösungsraum nicht, wenn eine Gleichung mit einem Skalar ungleich Null multipliziert wird. Drittens, wenn die j-te Gleichung durch

$$(\lambda a_{i1} + a_{j1})x_1 + (\lambda a_{i2} + a_{j2})x_2 + \cdots + (\lambda a_{in} + a_{jn})x_n = 0$$

ersetzt wird, dann ändert sich der Lösungsraum ebenfalls nicht.

Da der Kern von A unverändert bleibt, bleibt nach der Dimensionsformel 28.17 auch der Rang gleich. $\square$

29.2. Zeilenstufenform. Eine Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ hat **Zeilenstufenform**, wenn sie von folgender Gestalt ist:

$$\begin{pmatrix}
0\cdots 0 & \tilde{a}_{1j_1} & *\cdots * & * & *\cdots * & * & \cdots & * & *\cdots * & * & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & \tilde{a}_{2j_2} & *\cdots * & * & \cdots & * & *\cdots * & * & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & \tilde{a}_{3j_3} & \cdots & * & *\cdots * & * & *\cdots * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{k-1\,j_{k-1}} & *\cdots * & * & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & \tilde{a}_{k\,j_k} & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0
\end{pmatrix}$$

wobei $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$, $\tilde{a}_{ij_i} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und $*$ beliebige Eintragungen bezeichnet. Und $\tilde{A}$ hat **reduzierte Zeilenstufenform**, falls $\tilde{A}$ folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix}
0\cdots 0 & 1 & *\cdots * & 0 & *\cdots * & 0 & \cdots & 0 & *\cdots * & 0 & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & *\cdots * & 0 & \cdots & 0 & *\cdots * & 0 & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & \cdots & 0 & *\cdots * & 0 & *\cdots * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 1 & *\cdots * & 0 & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 1 & *\cdots * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0
\end{pmatrix}$$

Beispiel 29.2. Wir bringen die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform. Zunächst addieren wir geeignete Vielfache der ersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um alle Einträge bis auf den ersten in der ersten Spalte Null zu setzen.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & -7 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt addieren wir das Negative der zweiten Zeile zur dritten Zeile.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & -7 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Nun addieren wir das $-\frac{7}{5}$-fache der dritten Zeile zur vierten Zeile und dividieren anschließend die dritte Zeile durch -5.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -6 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -6 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Wir dividieren die zweite Zeile durch 3.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 3 & -6 & -3 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{7}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Wir addieren die zweite Zeile zur ersten Zeile.

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{7}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{7}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt addieren wir geeignete Vielfache der dritten Zeile zur ersten und zur zweiten Zeile.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{7}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

29.3. Das Gaußsche Eliminationsverfahren.

Theorem 29.3. *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform (bzw. reduzierte Zeilenstufenform) $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ wie in Abschnitt 29.2 gebracht werden. Weiters gilt:*

(1) $\operatorname{rank} A = k$ *und* $\dim\ker(A) = n-k$.
(2) *Die Spalten von A mit den Nummern $j_1, j_2, \dots, j_k$ bilden eine Basis für* $\operatorname{im}(A)$.
(3) *Ist die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, dann bilden die Vektoren*

$$e_j - \sum_{\ell=1}^{k} \tilde{a}_{\ell j} e_{j_\ell}, \quad j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j_1,\dots,j_k\},$$

eine Basis von $\ker(A)$.

Beweis. Wir zeigen mit Induktion, dass A spaltenweise von links nach rechts auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden kann. Induktiv nehmen wir an, dass die ersten $q-1$ Spalten von A bereits reduzierte Zeilenstufenform haben, wobei $q-1<n$. Sei $p-1$ die Anzahl der nicht-trivialen Zeilen der ersten $q-1$ Spalten von A. Gilt $p-1=m$, dann hat A reduzierte Zeilenstufenform und wir sind fertig. Sei also $p-1<m$. Dann gilt $a_{p,1} = a_{p,2} = \cdots = a_{p,q-1} = 0$. Wenn die Elemente $a_{p,q}, a_{p+1,q}, \dots, a_{m,q}$ alle Null sind, dann haben die ersten q Spalten von A reduzierte Zeilenstufenform, d.h. der Induktionsschritt ist gezeigt. Sei also eines der Elemente $a_{p,q}, a_{p+1,q}, \dots, a_{m,q}$ verschieden von Null. Durch das Vertauschen zweier Zeilen können wir $a_{p,q} \neq 0$ erreichen und durch Multiplikation der p-ten Zeile mit $a_{p,q}^{-1}$ erhalten wir $a_{p,q} = 1$. Durch Addition geeigneter Vielfacher der p-ten Zeile zu den restlichen Zeilen, bekommen wir schließlich $a_{p,j} = 0$ für alle $j \neq q$. Die verwendeten elementaren Zeilenumformungen lassen die ersten $q-1$ Spalten von A unverändert. Damit ist auch in diesem Fall der Induktionsschritt gezeigt.

Die Aussagen (1) und (3) sind klar, wenn $A = \tilde{A}$. Im Allgemeinen folgt die Aussage dann aus Lemma 29.1.

Es gilt noch (2) zu beweisen. Wir bezeichnen mit B die Matrix, die aus A durch Streichen aller Spalten bis auf jene mit den Nummern $j_1, j_2, \dots, j_k$ hervorgeht. Sei $\tilde{B}$ die Matrix, die wir erhalten, wenn wir die gleichen elementaren Zeilenumformungen auf B anwenden, die von A auf $\tilde{A}$ geführt haben. Dann ist $\tilde{B}$ die Matrix, die aus $\tilde{A}$ durch Streichen aller Spalten bis auf jene mit den Nummern $j_1, j_2, \dots, j_k$ hervorgeht. Also hat $\tilde{B}$ Zeilenstufenform und alle k Spalten sind nicht der Nullvektor. Somit gilt $\ker(\tilde{B}) = \{0\}$ und wegen Lemma 29.1 daher auch $\ker(B) = \{0\}$. Das bedeutet, dass die Spalten von B linear unabhängig sind. Wir können schließen, dass die Spalten von A mit den Nummern $j_1, j_2, \dots, j_k$ linear unabhängig im Bild $\operatorname{im}(A)$ sind. Weil $\dim \operatorname{im}(A) = \operatorname{rank}(A) = k$ bilden diese Spalten eine Basis von $\operatorname{im}(A)$. □

29.4. Inhomogene lineare Gleichungssysteme. Wir erinnern uns, dass ein inhomogenes lineares Gleichungssystem in der Form

$$Ax = b$$

geschrieben werden kann, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Wir wollen den **Lösungsraum**

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

beschreiben. Ein inhomogenes Gleichungssystem muss im Allgemeinen keine Lösung besitzen. In diesem Zusammenhang ist die **erweiterte Matrix**

$$(A \mid b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

nützlich.

Lemma 29.4. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(1) *Das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt Lösungen.*
(2) $b \in \operatorname{im}(A)$.
(3) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b)$.

Beweis. Übung. □

Falls $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine spezielle Lösung von $Ax = b$ ist, dann gilt

$$x \in L \iff Ax = b \iff A(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker(A) \iff x \in x_0 + \ker(A).$$

Das bedeutet

$$L = x_0 + \ker(A).$$

Um das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen, genügt es also, eine spezielle Lösung x_0 von $Ax = b$ und die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ zu finden.

Theorem 29.5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Das inhomogene lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn*

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \mid b).$$

Durch elementare Zeilenumformungen kann man die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ auf die Form $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ bringen, wobei $\tilde{A}$ (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Sind $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ wie in 29.2, so ist $Ax = b$ genau dann lösbar, wenn

$$\tilde{b}_{k+1} = \tilde{b}_{k+2} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$$

gilt. In diesem Fall liefern die ersten k Zeilen von $(\tilde{A} \mid \tilde{b})$ ein inhomogenes Gleichungssystem mit der gleichen Lösungsmenge. Ist die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, dann bildet

$$x_0 := \tilde{b}_1 e_{j_1} + \tilde{b}_2 e_{j_2} + \cdots + \tilde{b}_k e_{j_k}$$

eine spezielle Lösung von $Ax = b$.

Beweis. Die erste Aussage wurde schon im obigen Lemma gezeigt. Wie im Beweis von Lemma 29.1 sieht man, dass die Lösungsmengen von $Ax = b$ und $\tilde{A}x = \tilde{b}$ übereinstimmen. Die restlichen Aussagen folgen nun leicht. □

29.5. Matrixinversion. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Wenn wir die inverse Matrix A^{-1} berechnen wollen, müssen wir das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$AX = I_n$$

lösen. Dabei handelt es sich um ein System von n^2 Gleichungen und n^2 Unbekannten (den Einträgen von X), welches jedoch in n unabhängige Gleichungssysteme

$$Ax_1 = e_1, \quad Ax_2 = e_2, \quad \ldots \quad Ax_n = e_n \tag{29.1}$$

mit je n Gleichungen und n Unbekannten zerfällt. Hier bezeichnen $x_1, \ldots, x_n$ die Spalten von X.

Theorem 29.6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar. Dann kann die $n \times (2n)$ Matrix $(A \mid I_n)$ durch elementare Zeilenumformungen in die Form $(I_n \mid A^{-1})$ gebracht werden.*

Beweis. Nach Theorem 29.3 kann A durch elementare Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden. Weil A invertierbar ist, gilt $\operatorname{rank} A = n$ (vgl. Korollar 28.21). Die reduzierte Zeilenstufenform von A muss daher die Einheitsmatrix I_n sein. Die gleiche Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A \mid I_n)$ angewendet, ergeben also die Matrix $(I_n \mid X)$ für ein $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Nun zeigt Theorem 29.5, dass die Spalten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von X die Gleichungssysteme in (29.1) lösen. Es gilt also $AX = I_n$ und folglich $X = A^{-1}$. □

29.6. Elementare Spaltenumformungen. Die elementaren Zeilenumformungen erlauben es Parameterdarstellungen für die Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme zu berechnen. Ist umgekehrt ein affiner Teilraum durch eine Parameterdarstellung gegeben, dann kann man diesen mittels elementarer Spaltenumformungen als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems beschreiben.

Unter **elementaren Spaltenumformungen** verstehen wir jede der folgendenen Operationen mit Matrizen:

(1) Vertauschung zweier Spalten.
(2) Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar ungleich Null.
(3) Addition eines skalaren Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Analog zu Lemma 29.1 sieht man

Lemma 29.7. *Bild und Rang einer Matrix bleiben bei elementare Spaltenumformungen unverändert.* □

Analog zu Theorem 29.3 beweist man

Theorem 29.8. *Durch elementare Spaltenumformungen kann jede Matrix auf reduzierte Spaltenstufenform gebracht werden.* □

Die (reduzierte) Spaltenstufenform ist natürlich analog zur (reduzierten) Zeilenstufenform definiert. Anhand der reduzierten Spaltenstufenform kann man leicht eine Basis des von den Spaltenvektoren erzeugten Teilraumes angeben und ein (minimales) lineares Gleichungssystem dafür finden. Wir demonstrieren dies anhand von Beispielen im folgenden Abschnitt.

30. Beispiele

Die folgenden Beispielen stammen größtenteils aus [**Hal19**].

Beispiel 30.1. Sei $L \subseteq \mathbb{R}^5$ der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 12x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Wir wollen die Dimension und eine Basis von L bestimmen. Sei A die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Theorem 29.3 gilt $\dim L = \dim \ker(A) = 5 - 2 = 3$. Eine Basis für L ist (nach Theorem 29.3(3))

$$e_3 - 2e_1 + 1e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 - 3e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 - e_1 - 2e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass $\varphi : \mathbb{R}^3 \to L$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t_1 - 3t_2 - t_3 \\ t_1 - 2t_3 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

ein linearer Isomorphismus ist, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums L. Des Weiteren folgt, dass

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 + 2x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Die reduzierte Zeilenstufenform zeigt auch, dass die Matrix A Rang 2 hat und, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Bildes $\operatorname{im}(A)$ bilden.

Beispiel 30.2. Wir wollen den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix}$$

bestimmen, indem wir sie auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\operatorname{rank}(A) = 4$ und somit bilden die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Beispiel 30.3. Wir wollen überprüfen ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ sind. Dazu bringen wir die Matrix mit den Spalten v_1, v_2, v_3 und v_4 auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & -8 & -7 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -7 \\ 2 & 0 & 5 & 6 \\ 4 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -7 \\ 6 & 0 & 15 & 18 \\ 12 & 0 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & -2 & 31 & 32 \\ 0 & -4 & 41 & 43 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & -2 & 31 & 32 \\ 0 & 0 & -21 & -21 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -8 & -7 \\ 0 & -2 & 31 & 32 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3, somit ist $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$.

Beispiel 30.4. Sei V der lineare Teilraum von $\mathbb{R}^5$ der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Wir wollen ein Gleichungssystem $Ax = 0$ finden, dessen Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{R}^5 : Ax = 0\}$ mit V übereinstimmt. Das bedeutet wir wollen das Gleichungssystem

$$av_1 = 0, \quad av_2 = 0, \quad av_3 = 0$$

lösen, wobei $a = (a_1, a_2, \dots, a_5)$ der Zeilenvektor der Unbekannten ist. Wir betrachten die Matrix, deren Spalten die Vektoren v_1, v_2, v_3, und bringen sie auf reduzierte Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 5 & 18 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Weil die reduzierte Spaltenstufenform das gleiche Bild hat (vgl. Lemma 29.7), bilden ihre Spalten eine Basis von V. Wir können ablesen, dass

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ -6x_1 - 5x_2 - 4x_3 + x_5 &= 0 \end{aligned}$$

ein Gleichungssystem ist, dessen Lösungsmenge V ist.

Alternativ können wir auch mit der Zeilenstufenform arbeiten: Wir betrachten die Matrix derer Zeilen die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind und bringen sie auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 0 & 6 & 8 \\ -3 & 5 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Eine Basis des Kerns dieser Matrix ist, nach Theorem 29.3,

$$e_4 - e_1 - 2e_2 - 3e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 - 6e_1 - 5e_2 - 4e_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fassen wir diese Vektoren als Zeilen einer Matrix auf, dann haben wir die gesuchte Koeffizientenmatrix A gefunden:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 30.5. Wir wollen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

invertieren:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Somit gilt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 30.6. Wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned}$$

lösen. Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Es folgt, dass das Gleichungssystem die eindeutige Lösung $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$ hat.

Beispiel 30.7. Das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= -1 \\ x_1 + 7x_2 + 17x_3 + 20x_4 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 - 16x_3 - 17x_4 &= 2 \end{aligned}$$

besitzt keine Lösung, weil

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 20 & 9 \\ 2 & -1 & -16 & -17 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & -22 & -25 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und somit der Rang der Koeffizientenmatrix nicht mit dem Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix übereinstimmt.

Beispiel 30.8. Wir wollen alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 10 \\ 2 & 0 & 8 & 10 \\ 2 & 1 & 10 & 13 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 12 \\ 19 \\ -17 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir bringen die erweiterte Matrix $(A \mid b)$ in reduzierte Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -5 & 10 & 10 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 10 & 13 & 19 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & -17 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 10 & 13 & 19 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & -17 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 21 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -14 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir können nun die spezielle Lösung

$$x_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und eine Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung $Ax = 0$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ablesen (vgl. Theorem 29.5). Der Lösungsraum des inhomogenen Gleichungssystems ist also

$$L = x_0 + \operatorname{span}(v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und $\varphi : \mathbb{R}^2 \to L$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - 4t_1 - 5t_2 \\ 7 - 2t_1 - 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

ist eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

KAPITEL 13

Die Determinante

31. Die Determinante einer quadratischen Matrix

31.1. Existenz und Eindeutigkeit der Determinante. Wir wissen, der Rang einer Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Spalten von A (vgl. Abschnitt 28.6). Der Rang von A stimmt aber auch mit der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von A überein:

Lemma 31.1. *Der Rang einer Matrix A ist die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen von A.*

Beweis. Die elementaren Zeilenumformungen lassen die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen unverändert, denn der lineare Teilraum, der von den Zeilen aufgespannt wird, bleibt offensichtlich gleich. Nach Lemma 29.1 bleibt auch der Rang unter elementaren Zeilenumformungen gleich. Für Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform stimmen die beiden Zahlen offensichtlich überein. □

Theorem 31.2. *Es existiert eine eindeutige Abbildung* $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $\det$ *ist linear in jeder Zeile.*
(2) *Gilt* $\operatorname{rank} A < n$, *dann* $\det A = 0$.
(3) $\det I_n = 1$.

Diese eindeutige Abbildung wird ***Determinante*** *genannt.*

Wir überlegen uns zunächst, wie sich eine Abbildung mit den Eigenschaften 31.2(1) und 31.2(2) unter elementaren Zeilenumformungen verhält.

Lemma 31.3. *Sei* $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften 31.2(1) und 31.2(2). Dann gilt:*

(1) *Geht ein Matrix A durch Vertauschen zweier Zeilen in eine Matrix $\tilde{A}$ über, dann gilt* $\det \tilde{A} = -\det A$.
(2) *Geht ein Matrix A durch Multiplikation einer Zeilen mit $\lambda \in \mathbb{R}$ in eine Matrix $\tilde{A}$ über, dann gilt* $\det \tilde{A} = \lambda \cdot \det A$.
(3) *Geht ein Matrix A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile in eine Matrix $\tilde{A}$ über, dann gilt* $\det \tilde{A} = \det A$.

Beweis. (2) folgt direkt aus der Linearität von det in den Zeilen.

(3) Wir schreiben die Matrix A in der Form

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix},$$

wobei wir mit $a_1, \dots, a_n$ die Zeilen von A bezeichnen. Dann gilt

$$\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det A.$$

Hier verwenden wir zuerst die Linearität in den Zeilen. Weil die Zeilen der Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

nicht linear unabhängig sind, gilt wegen Lemma 31.1 $\operatorname{rank} A' < n$ und somit $\det A' = 0$.

(1) Wir haben

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Wir addieren in A und in $\tilde{A}$ jeweils die i-te zur j-ten Zeile:

$$A' = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{A}' = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Dann unterscheiden sich A' und $\tilde{A}'$ nur in der i-ten Zeile und nach (3) gilt $\det A = \det A'$ und $\det \tilde{A} = \det \tilde{A}'$. Wegen der Linearität von det in den Zeilen gilt

$$0 = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det A' + \det \tilde{A}' = \det A + \det \tilde{A}$$

und es folgt $\det \tilde{A} = -\det A$. □

Beweis von Theorem 31.2. Eindeutigkeit: Seien det und det′ zwei Abbildungen, die 31.2(1), 31.2(2) und 31.2(3) erfüllen. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Wenn $\operatorname{rank} A < n$, dann gilt $\det A = 0 = \det' A$. Wir können also annehmen, dass $\operatorname{rank} A = n$. Dann folgt (vgl. Theorem 29.6), dass A durch elementaren Zeilenumformungen in die Form I_n gebracht werden kann. Weil $\det I_n = 1 = \det' I_n$ und wegen Lemma 31.3 muss $\det A = \det' A$ gelten.

Existenz: Wir zeigen die Existenz mit Induktion nach n. Für $n = 1$ hat klarerweise die Abbildung $\det : \mathbb{R}^{1\times 1} \to \mathbb{R}$, $(a) \mapsto a$, die gewünschten Eigenschaften.

Wir nehmen nun an, die Determinante ist für $(n-1) \times (n-1)$ Matrizen schon definiert. Für $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichnen wir mit A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die aus A durch Weglassen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht. Und wir definieren $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ durch

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}. \tag{31.1}$$

Wir zeigen, dass diese Abbildung die Eigenschaften 31.2(1), 31.2(2) und 31.2(3) hat.

31.2(1): Wir zeigen die Linearität in der k-ten Zeile, indem wir beweisen, dass jeder Summand

$$(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

linear in der k-ten Zeile von A ist. Wenn $k \neq i$, folgt dies einfach aus der Tatsache, dass $\det : \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)} \to \mathbb{R}$ linear in der k-ten Zeile ist, weil a_{ij} nicht von der k-ten Zeile abhängt. Wenn hingegen $k = i$ ist, ist A_{ij} unabhängig von der k-ten Zeile, aber die Abbildung $\mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, $A \mapsto a_{kj}$, ist linear in der k-ten Zeile. Die Eigenschaft ist bewiesen.

31.2(2): Sei nun $\operatorname{rank} A < n$. Dann gibt es eine Zeile, die eine Linearkombination der anderen Zeilen ist. Folglich, kann diese Zeile durch elementaren Zeilenumformungen des dritten Typs annulliert werden. Weil wir schon wissen, dass det linear in jeder Zeile ist, muss eine Matrix mit einer Nullzeile Determinante Null haben. D.h. es genügt zu zeigen, dass $\det A = \det \tilde{A}$ gilt, wenn $\tilde{A}$ aus A durch eine elementare Zeilenumformung von Typ 3 hervorgeht (und det durch (31.1) definiert ist). Weil wir schon wissen, dass det linear in jeder Zeile ist und somit

$$\det \tilde{A} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_p \\ \vdots \\ \lambda a_p + a_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_p \\ \vdots \\ a_p \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_p \\ \vdots \\ a_q \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_p \\ \vdots \\ a_p \\ \vdots \end{pmatrix} + \det A$$

gilt, genügt es zu beweisen, dass die Determinante verschwindet, wenn zwei Zeilen übereinstimmen.

Nehmen wir also an, dass die p-te und die q-te Zeile von A gleich sind (o.B.d.A $p < q$). Dann gilt

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = (-1)^{p+j} a_{pj} \det A_{pj} + (-1)^{q+j} a_{qj} \det A_{qj},$$

weil alle anderen Summanden nach Induktionsannahme verschwinden, da die betreffenden Matrizen A_{ij} zwei gleiche Zeilen haben. Man kann die Matrizen A_{pj} und A_{qj} durch $q - p - 1$ viele Zeilenvertauschungen ineinander überführen. Nach der Induktionsannahme gilt dann

$$\det A_{qj} = (-1)^{q-p-1} \det A_{pj}.$$

Weil $a_{pj} = a_{qj}$ für alle j, folgt

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{p+j} a_{pj} \det A_{pj} + (-1)^{q+j} a_{qj} \det A_{qj} \\ &= (-1)^{p+j+q-p-1} a_{qj} \det A_{qj} + (-1)^{q+j} a_{qj} \det A_{qj} \\ &= \big((-1)^{q+j-1} + (-1)^{q+j}\big) a_{qj} \det A_{qj} = 0. \end{aligned}$$

Die Eigenschaft 31.2(2) ist gezeigt.

31.2(3): Es gilt

$$\det I_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \delta_{ij} \det(I_n)_{ij} = (-1)^{j+j} \delta_{jj} \det(I_n)_{jj} = 1.$$

Das Theorem ist bewiesen. □

Korollar 31.4. *Eine quadratische Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$.*

Beweis. Nach Korollar 28.21 ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rank} A = n$. Nach Theorem 31.2 wissen wir schon, dass $\det A = 0$ falls $\operatorname{rank} A < n$. Sei also $\operatorname{rank} A = n$. Dann kann A durch elementare Zeilenumformungen in I_n übergeführt werden. Dank Lemma 31.3 kann also $\det A$ nicht Null sein. □

31.2. Berechnung der Determinante. Die Formel (31.1) für die Determinante, nämlich

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

nennt man **Entwicklung nach der j-ten Spalte**.

Da für 1×1 Matrizen $A = (a)$ natürlich $\det A = \det(a) = a$ gilt, folgt damit für 2×2 Matrizen durch Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Für 3×3 Matrizen liefert Entwicklung nach der ersten Spalte

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \\ &= a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Methode der Berechnung ist bei zunehmender Größe der Matrix sehr rechenintensiv. Wir werden nun ein ökonomischeres Verfahren kennenlernen. Dazu betrachten wir zunächst folgendes Lemma.

Lemma 31.5. *Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine **obere Dreiecksmatrix**, d.h. alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen sind Null: $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$. Dann gilt*

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Beweis. Induktion nach n und Entwicklung nach der ersten Spalte. □

Die Determinante jeder quadratischen Matrix A kann wie folgt berechnet werden:

- Durch elementare Zeilenumformungen bringt man die Matrix A in obere Dreiecksform $\tilde{A}$. Das ist dank Theorem 29.3 immer möglich. In Lemma 31.3 haben wir gesehen, wie sich dabei die Determinante ändert. In Grunde benötigt man dafür nur Vertauschungen von Zeilen und Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen. Wenn insgesamt p Zeilenvertauschungen nötig sind, gilt $\det A = (-1)^p \det \tilde{A}$.

- Die Determinante von $\tilde{A}$ ist nun dank Lemma 31.5 leicht bestimmt.

Beispiel 31.6. Wir berechnen die Determinante der Matrix aus Beispiel 30.2:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix} &= (-1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\
&= -\det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.
\end{aligned}$$

31.3. Die Produktformel.

Theorem 31.7. *Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

Beweis. Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig. Wir betrachten die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}, \quad A \mapsto \det(AB).$$

Wir zeigen zuerst, dass f linear in den Zeilen von A ist. Wenn $a_1, \ldots, a_n$ die Zeilen von A und $b_1, \ldots, b_n$ die Spalten von B bezeichen, so können wir das Produkt AB wie folgt schreiben

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle a_1 \mid b_1 \rangle & \cdots & \langle a_1 \mid b_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_n \mid b_1 \rangle & \cdots & \langle a_n \mid b_n \rangle \end{pmatrix}$$

wobei $\langle a_i \mid b_j \rangle := \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Wir sehen, dass bei Änderung der i-ten Zeile von A sich nur die i-te Zeile von AB ändert und dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \mapsto AB$$

linear in der i-ten Zeile ist. Weil auch det linear in der i-ten Zeile ist, folgt die Behauptung.

Weiters gilt $f(I_n) = \det(I_n B) = \det B$ und $f(A) = \det(AB) = 0$ wenn $\operatorname{rank} A < n$. Denn: Die Inklusion $\operatorname{im}(AB) \subseteq \operatorname{im} A$ impliziert $\operatorname{rank}(AB) = \dim \operatorname{im}(AB) \leq \dim \operatorname{im} A = \operatorname{rank} A < n$ und daher $\det(AB) = 0$.

Falls $\det B \neq 0$, dann hat also $f / \det(B)$ die charakteristischen Eigenschaften der Determinante und wegen der Eindeutigkeit in Theorem 31.2 folgt $f(A)/\det(B) = \det A$, d.h. $\det(AB) = \det A \det B$.

Falls $\det B = 0$, dann ist nach Korollar 31.4 $\operatorname{rank} B < n$ und daher $\dim \ker B > 0$ wegen der Dimensionsformel 28.17. Weil $\ker B \subseteq \ker(AB)$, muss auch $\dim \ker(AB) > 0$ und folglich $\operatorname{rank}(AB) < n$ gelten. Dann gilt auch $\det(AB) = 0$ und die Formel ist in jedem Fall richtig. $\square$

Korollar 31.8. *Die Abbildung* $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ *ist ein Gruppenhomomorphismus, wobei* $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *die abelsche Gruppe mit der Multiplikation reeller Zahlen als Verknüpfung ist.* □

Korollar 31.9. *Ist* A *invertierbar, d.h.* $\det A \neq 0$*, dann gilt*

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$

Beweis. Nach der Produktformel gilt

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$$

und somit

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}.$$ □

31.4. Die Leibniz-Formel.

Theorem 31.10. *Für alle* $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gilt*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}.$$

Hier bezeichnet S_n die Menge der Permutation von $\{1,\dots,n\}$ und $\mathrm{sgn}(\sigma)$ ist das Signum der Permutation σ, d.h. $+1$ bzw. -1, wenn σ als Komposition einer geraden bzw. ungeraden Anzahl von Vertauschungen benachbarter Zahlen geschrieben werden kann. Wir werden dieses Theorem hier nicht beweisen. Die Beweisstrategie ist einfach wieder zu überprüfen, dass die rechte Seite die charakteristischen Eigenschaften der Determinante aus Theorem 31.2 besitzt.

31.5. Die Determinante der transponierten Matrix. Ist $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine $m \times n$ Matrix, dann heißt die durch

$$a^t_{ij} := a_{ji}$$

definierte $n \times m$ Matrix $A^t = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die **transponierte Matrix** von A. Man erhält also A^t aus A, indem man Zeilen als Spalten schreibt.

Es gelten die folgenden Rechenregeln für alle Matrizen A, B und Skalare λ (für welche $A + B$ und AB definiert sind):

- $(A + B)^t = A^t + B^t$ und $(\lambda A)^t = \lambda A^t$.
- $(A^t)^t = A$.
- $(AB)^t = B^t A^t$.

Wir rechnen die dritte Eigenschaft nach:

$$\Big(\sum_k a_{ik} b_{kj}\Big)^t = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b^t_{ik} a^t_{kj}.$$

Theorem 31.11. *Für alle* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *gilt* $\det(A) = \det(A^t)$.

Beweis. Nach Lemma 31.1 gilt $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A^t)$, weil der Rang einer Matrix sowohl die Anzahl der linear unabhängigen Spalten als auch die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen ist. Weiters gilt $I^t_n = I_n$.

Nun zeigen wir noch, dass die Determinante $\det A$ auch linear in jeder Spalte von A ist. Die Linearität in der j-ten Spalte folgt aus der Entwicklungsformel (31.1),

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

weil A_{ij} hängt nicht von der j-ten Spalte von A ab und $A \mapsto a_{ij}$ offensichtlich linear in der j-ten Spalte ist.

Daher hat $A \mapsto \det(A^t)$ die charakteristischen Eigenschaften der Determinante und nach der Eindeutigkeit in Theorem 31.2 gilt also $\det(A) = \det(A^t)$. □

Korollar 31.12. *Man kann also die Determinante auch nach jeder Zeile entwickeln.* □

31.6. Die Cramersche Regel.

Theorem 31.13. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar und $b \in \mathbb{R}^n$, dann hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die eindeutige Lösung*

$$x_i = \frac{1}{\det A} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Um x_i zu berechnen, wird also die i-te Spalte von A durch b ersetzt.

Beweis. Das System $Ax = b$ kann auch in der Form

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Das ist äquivalent zu

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + 1 \cdot \begin{pmatrix} x_i a_{1i} - b_1 \\ \vdots \\ x_i a_{ni} - b_n \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = 0.$$

Es folgt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & x_i a_{1i} - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & x_i a_{ni} - b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0,$$

weil die Spalten der Matrix linear abhängig sind. Wegen der Linearität der Determinante in der i-ten Spalte folgt die Aussage. □

32. Euklidische Vektorräume

32.1. Inneres Produkt und Norm. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Ein **inneres Produkt** (auch **Skalarprodukt** genannt) auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Bilinearität: Für jedes $x \in V$ ist sowohl $\langle \cdot \mid x \rangle$ als auch $\langle x \mid \cdot \rangle$ linear.
(2) Symmetrie: Für alle $x, y \in V$ gilt $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$.
(3) Positive Definitheit: $\langle x \mid x \rangle > 0$ für alle $x \neq 0$.

Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein Vektorraum V versehen mit einem inneren Produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

Beispiel 32.1. Sei $(\mathcal{E}, \mathscr{G})$ eine Ebene, die die Axiome 0–8 erfüllt, und sei $O \in \mathcal{E}$. Dann ist $(\mathcal{E}, O)$ mit dem inneren Produkt, das in Abschnitt 11.2 eingeführt wurde, ein euklidischer Vektorraum.

Beispiel 32.2. Durch

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \langle x \mid y \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \tag{32.1}$$

ist ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Es wird **Standardskalarprodukt** genannt.

Sei $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Für $x \in V$ ist die **Norm** von x durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$$

definiert.

Proposition 32.3. *Sei $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Die Norm hat die folgenden Eigenschaften:*

(1) $\|x\| \geq 0$ *für alle* $x \in V$ *und* $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ *für alle* $x \in V$ *und alle* $\lambda \in \mathbb{R}$.
(3) $|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ *für alle* $x, y \in V$ ***(Cauchy–Schwarz Ungleichung)****.*
(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *für alle* $x, y \in V$ ***(Dreiecksungleichung)****.*

Beweis. (1) und (2) folgen unmittelbar aus der Definition.

(3) Der Beweis der Cauchy–Schwarz Ungleichung ist der gleiche wie in Proposition 11.4.

(4) Die Dreiecksungleichung folgt leicht aus der Cauchy–Schwarz Ungleichung; wie im Beweis von Proposition 12.4. □

Seien x, y zwei Element $\neq 0$ in einem euklidischen Vektorraum. Der **Winkel** $\alpha(x, y)$ zwischen x und y wird durch

$$\cos \alpha(x, y) := \frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\|\|y\|}, \quad 0 \leq \alpha(x, y) \leq \pi$$

definiert. Wegen der Cauchy–Schwarz Ungleichung gilt

$$-1 \leq \frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1.$$

Der Kosinus ist eine bijektive Abbildung $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Somit ist $\alpha(x, y)$ wohldefiniert.

32.2. Orthogonale Vektoren. Zwei Vektoren x, y eines euklidischen Vektorraums heißen **orthogonal**, und wir schreiben $x \perp y$, falls

$$\langle x \mid y \rangle = 0.$$

Äquivalent dazu ist $\alpha(x, y) = \pi/2$.

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Für eine Teilmenge M von V bezeichnen wir die Menge

$$M^\perp := \{x \in V : x \perp y \text{ für alle } y \in M\}$$

als das **orthogonale Komplement** von M in V.

Lemma 32.4. *$M^\perp$ ist ein linearer Teilraum von V.*

Beweis. Weil $0 \in M^\perp$ ist $M^\perp$ nicht-leer. Wenn $x, y \in M^\perp$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ dann gilt

$$\langle \lambda x + y \mid v \rangle = \lambda \langle x \mid v \rangle + \langle y \mid v \rangle = 0$$

für alle $v \in M$. □

Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ eines euklidischen Vektorraums nennt man **orthonormal**, wenn $\|x_i\| = 1$ für alle $i = 1, \ldots, k$ und $x_i \perp x_j$ für alle $i \neq j$ gilt (d.h. $\langle x_i \mid x_j \rangle = \delta_{ij}$). Wenn zusätzlich $\operatorname{span}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = V$ gilt, heißt $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ eine **Orthonormalbasis** von V.

Proposition 32.5. *Ein System von orthonormalen Vektoren ist stets linear unabhängig.*

Beweis. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ orthonormal und $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k = 0$. Dann folgt, für jedes $i = 1, \ldots, k$,

$$0 = \langle \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k \mid x_i \rangle = \lambda_i \langle x_i \mid x_i \rangle = \lambda_i. \qquad \square.$$

Proposition 32.6. *Sei $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann gilt für alle $x \in V$ die Formel*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x \mid x_i \rangle x_i.$$

Beweis. Weil $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Basis ist, gilt $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ gilt für geeignete Skalare λ_i. Es folgt

$$\langle x \mid x_i \rangle = \langle \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mid x_i \rangle = \lambda_i \langle x_i \mid x_i \rangle = \lambda_i. \qquad \square$$

Proposition 32.7. *Seien die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ orthonormal in V und sei $U := \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_k)$. Dann kann jeder Vektor $x \in V$ in eindeutiger Weise in der Form*

$$x = u + v, \quad u \in U \text{ und } v \in U^{\perp},$$

dargestellt werden. Es gilt

$$u = \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid x_i \rangle x_i \quad \text{und} \quad v = x - \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid x_i \rangle x_i.$$

Beweis. *Eindeutigkeit*: Angenommen es gilt auch $x = u' + v'$ mit $u' \in U$ und $v \in U^{\perp}$. Dann folgt $(u - u') + (v - v') = 0$ und $\langle u - u' \mid v - v' \rangle = 0$ und somit $\langle u - u' \mid u - u' \rangle = 0$, d.h. $u = u'$, was auch $v = v'$ ergibt.

Existenz: Sei $x \in V$ gegeben. Wir machen den Ansatz $u = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$. Dann gilt $u \in U$. Die Bedingung $v := x - u \in U^{\perp}$ bedeutet

$$\langle v \mid x_i \rangle = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, k,$$

was äquivalent zu

$$\langle x \mid x_i \rangle - \lambda_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, k.$$

Die Behauptung ist bewiesen. $\square$

Das folgende Theorem zeigt uns, wie wir orthonormale Vektoren gewinnen können.

Theorem 32.8 (Gram–Schmidt Orthonormaliserungsverfahren)**.** *Sind die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ linear unabhängig in einem euklidischen Vektorraum, dann ist durch*

$$v_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

und die Rekursionsformel

$$v_{j+1} := \frac{x_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1} \mid v_i \rangle v_i}{\|x_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1} \mid v_i \rangle v_i\|}, \quad j = 1, \ldots, k-1,$$

eine Orthonormalsystem $(v_1, \ldots, v_k)$ gegeben, sodass

$$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_j) = \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_j)$$

für alle $j \leq k$.

Beweis. Das Theorem folgt leicht mit Induktion und der Hilfe von Proposition 32.7: wenn $v_1, \dots, v_j$ mit den gewünschten Eigenschaften schon gefunden sind, dann betrachten wir

$$U := \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j) = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_j).$$

Nach Proposition 32.7 ist dann

$$w_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \langle x_{j+1} \mid v_i \rangle v_i$$

der Anteil von x_{j+1} in $U^\perp$. Nach dem Normieren $v_{j+1} := w_{j+1}/\|w_{j+1}\|$ gilt dann

$$\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j+1}) = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_{j+1}).$$

Die Behauptung ist bewiesen. □

Korollar 32.9. *In jedem endlichdimensionalen euklidischen Vektorraum existiert eine Orthonormalbasis.* □

Korollar 32.10. *Sei V ein euklidischer Vektorraum und U ein endlichdimensionaler Teilraum. Es gibt eine eindeutige lineare Abbildung $p_U : V \to U$ mit den Eigenschaften*

$$p_U|_U = \mathrm{id}_U \qquad \textit{und} \qquad \ker p_U = U^\perp.$$

Ist $(v_1, \dots, v_k)$ eine Orthonormalbasis von U, dann gilt

$$p_U(x) = \sum_{i=1}^{k} \langle x \mid v_i \rangle v_i, \quad x \in V.$$

Die Abbildung p_U heißt ***Orthogonalprojektion*** *auf U.*

Beweis. Weil wir eine Orthonormalbasis von U wählen können, zeigt die angegebene Formel die Existenz der Abbildung p_U.

Angenommen es gibt eine weitere Abbildung $q_U : V \to U$ mit $q_U|_U = \mathrm{id}_U$ und $\ker q_U = U^\perp$. Dann haben wir, für jedes beliebiges $x \in V$ zwei Zerlegungen in U- und $U^\perp$-Anteil

$$x = p_U(x) + (x - p_U(x)) = q_U(x) + (x - q_U(x)).$$

Nach Proposition 32.7 ist die Zerlegung aber eindeutig, was bedeutet, dass $p_U(x) = q_U(x)$ gilt. □

Korollar 32.11. *Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und U ein Teilraum. Wenn $U^\perp = \{0\}$, dann folgt $U = V$.*

Beweis. Die lineare Abbildung $p_U : V \to U$ ist surjektiv und wegen $\ker p_U = U^\perp = \{0\}$ auch injektiv. Es folgt, dass $p_U : V \to U$ bijektiv ist. Weil $p_U|_U = \mathrm{id}_U$, muss $U = V$ gelten. □

Beispiel 32.12. Sei U der Teilraum von $\mathbb{R}^3$, der von den Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Eine Orthonormalbasis von U wird von den Vektoren

$$v_1 := \frac{x_1}{\|x_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und
$$v_2 := \frac{x_2 - \langle x_2 \mid v_1\rangle v_1}{\|x_2 - \langle x_2 \mid v_1\rangle v_1\|}$$
gebildet. Nun gilt
$$x_2 - \langle x_2 \mid v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}$$
und
$$\|x_2 - \langle x_2 \mid v_1\rangle v_1\| = \frac{1}{3}\sqrt{25+1+16} = \frac{1}{3}\sqrt{42}$$
und somit
$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{42}}\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}.$$
Die Orthogonalprojektion $p_U : \mathbb{R}^3 \to U$ auf den Teilraum U ist also die Abbildung
$$p_U\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \frac{x_1+x_2+x_2}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{-5x_1+x_2+4x_3}{42}\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}.$$

32.3. Orthogonale Abbildungen. Seien V und W euklidische Vektorräume (in beiden Fällen bezeichnen wir das innere Produkt mit $\langle\cdot \mid \cdot\rangle$). Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ heißt **orthogonal** (oder auch **isometrisch**), wenn
$$\langle f(x) \mid f(y)\rangle = \langle x \mid y\rangle \quad \text{für alle } x, y \in V.$$

Lemma 32.13. *Eine orthogonale Abbildung $f : V \to W$ ist immer injektiv.*

Beweis. Wenn $x \in \ker f$, dann gilt $\langle x \mid x\rangle = \langle f(x) \mid f(x)\rangle = 0$ und daher $x = 0$, d.h. $\ker f = \{0\}$. □

Proposition 32.14. *Seien V und W euklidische Vektorräume und sei $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ genau dann orthogonal, wenn $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ ein Orthonormalsystem ist.*

Beweis. Wenn $f : V \to W$ orthogonal ist, dann gilt
$$\langle f(x_i) \mid f(x_j)\rangle = \langle x_i \mid x_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Umgekehrt sei $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ eine Orthonormalsystem, d.h. die Beziehung $\langle f(x_i) \mid f(x_j)\rangle = \delta_{ij}$ wird vorausgesetzt. Für $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ und $y = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$ gilt dann
$$\begin{aligned}
\langle f(x) \mid f(y)\rangle &= \langle f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \mid f(\sum_{j=1}^n \mu_j x_j)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i) \mid \sum_{j=1}^n \mu_j f(x_j)\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle x_i \mid x_j\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \mid \sum_{j=1}^n \mu_j x_j\rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle x \mid y \rangle. \qquad \square$$

Korollar 32.15. *Sei V ein endlichdimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ orthogonal. Dann ist f ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Das folgt aus Korollar 28.19 und Lemma 32.13. $\square$

Betrachten wir $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt (32.1). Zu jeder orthogonalen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert eine eindeutige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass $f(x) = f_A(x) = Ax$ (vgl. Theorem 26.6). Diese Matrizen heißen **orthogonale Matrizen**. Wir bezeichnen die Menge der orthogonalen $n \times n$ Matrizen mit $\mathrm{O}(n)$.

Theorem 32.16. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent.*

(1) *A ist orthogonal, d.h. $A \in \mathrm{O}(n)$.*
(2) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.*
(3) *$A^tA = I_n$.*
(4) *A ist invertierbar und $A^{-1} = A^t$.*
(5) *$AA^t = I_n$.*
(6) *Die Zeilen von A bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Die Spalten von A sind die Bilder unter f_A der Standardbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{R}^n$. Die Äquivalenz von (1) und (2) folgt somit aus Proposition 32.14.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Wenn $a_1, \dots, a_n$ die Spalten von A bezeichnen, dann ist das Element von A^tA in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte genau $\langle a_i \mid a_j \rangle$. Folglich ist die Beziehung $A^tA = I_n$ äquivalent dazu, dass die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bilden.

(1) $\Rightarrow$ (4) Nach Korollar 32.15 ist A invertierbar mit $A^{-1} = A^t$.

(4) $\Rightarrow$ (3) und (4) $\Rightarrow$ (5) sind offensichtlich.

(5) $\Leftrightarrow$ (6) folgt analog zu (2) $\Leftrightarrow$ (3).

(6) $\Rightarrow$ (4) Wenn die Zeilen von A eine Orthonormalbasis bilden, dann ist A^t invertierbar und $AA^t = I_n$ impliziert, dass $A^{-1} = A^t$ gilt. $\square$

Als Folgerung erhalten wir, dass eine orthogonale Matrix A immer $\det A = \pm 1$ erfüllt, es gilt nämlich

$$1 = \det I_n = \det(A^tA) = \det A^t \det A = (\det A)^2.$$

Die Elemente von $\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) : \det A = +1\}$ werden **spezielle orthogonale Matrizen** genannt.

Es ist nun leicht zu sehen, dass $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sind. Man spricht von der **orthogonalen Gruppe** und der **speziellen orthogonalen Gruppe**.

33. Geometrische Interpretation der Determinante

33.1. Flächeninhalt eines Parallelogramms. Wir betrachten das Parallelogramm in $\mathbb{R}^2$, das von den beiden Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird (das Parallelogramm hat die Ecken $0, v, v+w, w$). Wir wollen dem Parallelogramm einen **orientierten Flächeninhalt** zuordnen, d.h. wir suchen eine Abbildung $\tilde{A} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den folgenden natürlichen Eigenschaften:

(1) $(v, w) \mapsto \tilde{A}(v, w)$ soll linear in v und in w sein.
(2) Wenn v und w linear abhängig sind, soll $\tilde{A}(v, w) = 0$ gelten.

(3) $\tilde{A}(e_1, e_2) = 1$.

Nach Theorem 31.2 gibt es genau eine Abbildung mit den gewünschten Eigenschaften, nämlich

$$\tilde{A}(v, w) = \det(v, w) = \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}.$$

Somit definieren wir den **Flächeninhalt** des Parallelogramms, das von $v, w \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird, durch

$$A(v, w) = |\det(v, w)|.$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} |\det(v, w)| &= \left|\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}\right| = |v_1 w_2 - v_2 w_1| = \sqrt{(v_1 w_2 - v_2 w_1)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 w_2^2 + v_2^2 w_1^2 - 2 v_1 v_2 w_1 w_2} \\ &= \sqrt{(v_1^2 + v_2^2)(w_1^2 + w_2^2) - (v_1 w_1 + v_2 w_2)^2} \\ &= \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v \mid w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Wir können also den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von $v, w \in \mathbb{R}^2$ aufgespannt wird, auch durch

$$A(v, w) = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v \mid w \rangle^2}$$

definieren. Und diese Definition macht auch für Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ (oder $\mathbb{R}^n$) Sinn.

33.2. Das Kreuzprodukt. Unter dem **Kreuzprodukt** zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ versteht man den Vektor

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \det\left(\begin{smallmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{smallmatrix}\right) \\ -\det\left(\begin{smallmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{smallmatrix}\right) \\ \det\left(\begin{smallmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ -v_1 w_3 + v_3 w_1 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Lemma 33.1. *Für beliebige Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt:*

(1) *Das Kreuzprodukt $x \times y$ ist linear in x und linear in y.*
(2) *Es gilt $x \times y = -y \times x$ und $x \times x = 0$ (**Schiefsymmetrie**).*
(3) $\langle x \times y \mid z \rangle = \det(x, y, z) = \langle x \mid y \times z \rangle$.
(4) $\langle x \times y \mid x \rangle = 0 = \langle x \times y \mid y \rangle$.
(5) $(x \times y) \times z = \langle z \mid x \rangle y - \langle y \mid z \rangle x$ *(**Graßmann Identität**).*
(6) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x \mid y \rangle^2$.
(7) $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$ *(**Jacobi Identität**).*

Beweis. Übung. □

Proposition 33.2. *Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $v \times w \neq 0$. In diesem Fall bildet $(v, w, v \times w)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und es gilt $\det(v, w, v \times w) > 0$. Die Norm $\|v \times w\|$ stimmt mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms überein, das von v und w aufgespannt wird.*

Beweis. Sind v und w linear abhängig, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda w$. Daher gilt

$$v \times w = (\lambda w) \times w = \lambda(w \times w) = 0.$$

Umgekehrt impliziert $v \times w = 0$ dank Lemma 33.1(6) $\|v\|\|w\| = |\langle v \mid w \rangle|$, d.h. v und w sind linear abhängig.

Wenn v und w linear unabhängig sind, dann liefert Lemma 33.1(3)

$$\det(v, w, v \times w) = \langle v \times w \mid v \times w \rangle = \|v \times w\|^2 > 0.$$

Insbesondere ist $(v, w, v \times w)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

Nach Lemma 33.1(6) stimmt $\|v \times w\|$ mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms überein, das von v und w aufgespannt wird. □

Proposition 33.3. *Das Kreuzprodukt zweier linear unabhängiger Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist durch die folgenden drei Eigenschaften eindeutig bestimmt:*

(1) *$v \times w$ ist orthogonal zu v und w.*
(2) *$\|v \times w\|$ stimmt mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms überein, das von v und w aufgespannt wird.*
(3) *$\det(v, w, v \times w) > 0$.*

Beweis. Wir haben schon gesehen, dass das Kreuzprodukt diese Eigenschaften hat.

Sei nun $n \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor, der diese drei Eigenschaften besitzt. Weil $(v, w, v\times w)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist, gilt

$$n = \lambda_1 v + \lambda_2 w + \lambda_3 (v \times w)$$

für Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n \mid v \rangle = \langle v \mid v \rangle \lambda_1 + \langle w \mid v \rangle \lambda_2, \\ 0 &= \langle n \mid w \rangle = \langle v \mid w \rangle \lambda_1 + \langle w \mid w \rangle \lambda_2. \end{aligned}$$

Weil

$$\det \begin{pmatrix} \langle v \mid v \rangle & \langle w \mid v \rangle \\ \langle v \mid w \rangle & \langle w \mid w \rangle \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v \mid w \rangle^2 = \|v \times w\|^2 \neq 0,$$

hat dieses Gleichungssystem die eindeutige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, d.h. $n = \lambda_3 (v \times w)$. Nun gilt (nach Annahme (2))

$$\|v \times w\| = \|n\| = \|\lambda_3 (v \times w)\| = |\lambda_3| \cdot \|v \times w\|$$

und folglich $\lambda_3 = \pm 1$. Aber Annahme (3) zeigt, dass $\lambda_3 = 1$ sein muss. □

Beispiel 33.4. Wir wollen das Orthonormalsystem (v_1, v_2) aus Beispiel 32.12 zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen. Dazu berechen wir

$$v_1 \times v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die drei Vektoren v_1, v_2 und $v_1 \times v_2$ bilden die gewünschte Orthonormalbasis. Beachte, dass $v_1 \times v_2$ im Kern der Orthogonalprojektion p_U liegt.

33.3. Volumen eines Parallelepipeds. Analog zum orientierten Flächeninhalt eines Parallelogramms verlangen wir für das **orientierte Volumen** $\tilde{V}(u, v, w)$ des Parallelepipeds, das von drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, die folgenden Eigenschaften:

(1) $(u, v, w) \mapsto \tilde{V}(u, v, w)$ soll linear in u, v und w sein.
(2) Wenn u, v und w linear abhängig sind, soll $\tilde{V}(u, v, w) = 0$ gelten.
(3) $\tilde{V}(e_1, e_2, e_3) = 1$.

Nach Theorem 31.2 gibt es genau eine Abbildung $\tilde{V} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit den gewünschten Eigenschaft, nämlich

$$\tilde{V}(u, v, w) = \det(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Das **Volumen** des Parallelepipeds, das von drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird, definieren wir durch

$$V(u, v, w) := |\det(u, v, w)|.$$

Nach Lemma 33.1(3) gilt auch die Formel

$$V(u, v, w) = |\langle u \times v \mid w\rangle|.$$

Beispiel 33.5. Es seinen die drei Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds ist

$$V(u, v, w) = |\det(u, v, w)| = |\det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}| = 37.$$

Der Flächeninhalt der Seitenflächen ist

$$A(u, v) = \|u \times v\| = \| \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \| = \sqrt{182},$$

$$A(u, w) = \|u \times w\| = \| \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ -7 \end{pmatrix} \| = \sqrt{213},$$

$$A(v, w) = \|v \times w\| = \| \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ -8 \end{pmatrix} \| = \sqrt{433}.$$

Gegenüberliegende Seitenflächen haben den gleichen Flächeninhalt.

KAPITEL 14

Eigenwerte und Eigenvektoren

34. Diagonalisierbarkeit

34.1. Eigenwerte und Eigenvektoren. Sei V ein reeller Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt **Eigenwert** von f, wenn ein Vektor $v \neq 0$ in V existiert, sodass

$$f(v) = \lambda v.$$

In diesem Fall heißt v **Eigenvektor** zum Eigenwert λ, und die Menge

$$E_\lambda := \{v \in V : f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda \,\mathrm{id})$$

heißt **Eigenraum** zum Eigenwert λ. Unter den Eigenwerten, Eigenvektoren und Eigenräumen einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ versteht man die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der zugehörigen Abbildung f_A.

Die Eigenräume sind lineare Teilräume, auf denen die lineare Abbildung einfach durch Multiplikation mit dem entsprechenden Eigenwert wirkt. Die Dimension $\dim E_\lambda$ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ.

34.2. Das charakteristische Polynom.

Proposition 34.1. *Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann Eigenwert einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wenn*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ ist Eigenwert von } A \quad &\Leftrightarrow \quad \exists v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} : Av = \lambda v \\
&\Leftrightarrow \quad \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\
&\Leftrightarrow \quad \dim\ker(A - \lambda I_n) > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}(A - \lambda I_n) < n \\
&\Leftrightarrow \quad \det(A - \lambda I_n) = 0. \qquad \square
\end{aligned}$$

Das **charakteristische Polynom** einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist das Polynom

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Die Proposition besagt also, dass die Eigenwerte einer Matrix A genau die reellen Nullstellen des charakteristischen Polynoms P_A sind.

Beispiel 34.2. (1) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2.$$

Somit ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert von A. Der Eigenraum $E_2 = \ker(A - 2I_2)$ ist die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = 0.$$

Somit gilt $E_2 = \operatorname{span}(\binom{1}{0})$ und jeder Vektor $v \in E_2 \setminus \{0\}$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2. Geometrisch bedeutet es, dass $x \mapsto Ax$ in Richtung $\binom{1}{0}$ durch Multiplikation mit 2 wirkt. Auf Vektoren, die nicht Vielfache von $\binom{1}{0}$ sind, ist die Wirkung nicht durch Multiplikation mit einem Skalar beschreibbar.

(2) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Also hat B die Eigenwerte 1 und -1. Der Eigenraum E_1 ist der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Es folgt $E_1 = \operatorname{span}(\binom{1}{1})$ und ähnlich zeigt man $E_{-1} = \operatorname{span}(\binom{-1}{1})$. Die Abbildung $x \mapsto Bx$ wirkt also auf skalaren Vielfachen von $\binom{1}{1}$ durch Multiplikation mit 1 und auf skalaren Vielfachen von $\binom{-1}{1}$ durch Multiplikation mit -1. Geometrisch ist die Abbildung also eine Spiegelung an der Geraden durch 0 mit Richtungsvektor $\binom{1}{1}$.

(3) Das charakteristische Polynom der Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Es existieren keine reellen Eigenwerte. Die Abbildung $x \mapsto Cx$ ist eine Rotation um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ um den Ursprung. Auf keinem Vektor $v \neq 0$ wirkt die Abbildung durch Multiplikation mit einem Skalar.

34.3. Diagonalisierbarkeit.

Theorem 34.3. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, \dots, v_k$ entsprechende Eigenvektoren (d.h. $v_i \neq 0$ und $Av_i = \lambda_i v_i$ für $i = 1, \dots, k$). Dann sind die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^n$. Weiters gilt*

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k} \leq n.$$

Beweis. Wir verwenden Induktion nach k. Der Fall $k = 1$ ist trivial.

Wir nehmen nun an, dass die Eigenvektoren $v_1, \dots, v_{k-1}$ linear unabhängig sind. Seinen $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k = 0. \tag{34.1}$$

Lassen wir die Matrix A auf beide Seiten der Gleichung wirken, erhalten wir

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \mu_k \lambda_k v_k = 0.$$

Ziehen wir das λ_k-fache von (34.1) davon ab, bekommen wir

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \cdots + \mu_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0.$$

Die Induktionsannahme, dass $v_1, \dots, v_{k-1}$ linear unabhängig sind, impliziert

$$\mu_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

und weil die Eigenwerte als paarweise verschieden vorausgesetzt waren, gilt

$$\mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Nach (34.1) gilt somit $\mu_k v_k = 0$ und daher $\mu_k = 0$, weil $v_k \neq 0$. Es ist also gezeigt, dass die Vektoren $v_1, \dots, v_k$ linear unabhängig sind.

Sei nun $n_i := \dim E_{\lambda_i}$. Für $i = 1, \dots, k$ wählen wir eine Basis $(v_1^i, \dots, v_{n_i}^i)$ von E_{λ_i}. Um die Ungleichung

$$\dim E_{\lambda_1} + \cdots + \dim E_{\lambda_k} \leq n.$$

zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass die Vektoren

$$v_1^1, \dots, v_{n_1}^1, v_1^2, \dots, v_{n_2}^2, \dots, v_1^k, \dots, v_{n_k}^k$$

linear unabhängig sind. Seien $\lambda_j^i \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\lambda_1^1 v_1^1 + \ldots + \lambda_{n_1}^1 v_{n_1}^1 + \ldots + \lambda_1^k v_1^k + \ldots + \lambda_{n_k}^k v_{n_k}^k = 0.$$

Setzen wir $w_i := \lambda_1^i v_1^i + \ldots + \lambda_{n_i}^i v_{n_i}^i \in E_{\lambda_i}$, dann wird diese Identität zu

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_k = 0.$$

Weil die w_i nach dem ersten Teil des Beweises linear unabhängig sind, muss

$$w_1 = w_2 = \cdots = w_k = 0$$

gelten. Dann folgt aber, dass alle Skalare λ_j^i Null sein müssen, weil die Vektoren $(v_1^i, \dots, v_{n_i}^i)$ für jedes $i = 1, \dots, k$ linear unabhängig sind. □

Wenn eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ genau n verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und entsprechende Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$ besitzt, dann bilden nach dem vorigen Satz die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$. In diesem Fall ist $B := (v_1\ v_2\ \cdots\ v_n)$ eine invertierbare Matrix, und es gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Die Matrix $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist eine sogenannte **Diagonalmatrix** mit den Einträgen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ auf der Diagonale, alle anderen Einträge sind Null.

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar**, falls es eine invertierbare Matrix B gibt, sodass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist.

Proposition 34.4. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis des $\mathbb{R}^n$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht.*

Beweis. Wenn es eine invertierbare Matrix B mit $B^{-1}AB = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ gibt und wenn $v_1, \dots, v_n$ die Spalten von B sind, dann folgt

$$\begin{aligned} AB &= B\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &\Leftrightarrow \quad A(v_1\ \cdots\ v_n) = (v_1\ \cdots\ v_n)\,\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \\ &\Leftrightarrow \quad (Av_1\ \cdots\ Av_n) = (\lambda_1 v_1\ \cdots\ \lambda_n v_n), \end{aligned}$$

d.h. $(v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A. Die Rückrichtung folgt mit der gleichen Rechnung, weil B invertierbar ist, wenn die Spalten von B eine Basis bilden. □

Für die Diagonalisierbarkeit ist es nicht notwendig (jedoch hinreichend), dass alle Eigenwerte verschieden sind, z.B. ist jede Diagonalmatrix diagonalisierbar.

Die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ im Beweis müssen nicht alle verschieden sein, sondern manche (oder alle) Eigenwerte können mehrfach auftreten. Ein Eigenwert, der öfter als einmal auftritt, ist auch eine mehrfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms; die Vielfachheit der Nullstelle bezeichnet man als **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts. Wenn A Eigenwerte λ_i mit algebraischer Vielfachheit $m_i \geq 2$ hat, dann kann A diagonalisierbar sein oder nicht, je nachdem ob $\dim E_{\lambda_i} = m_i$ für alle i gilt oder nicht.

Beispiel 34.5. In Beispiel 34.2 ist nur die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar. Der Eigenvektor $\binom{1}{1}$ zum Eigenwert 1 und der Eigenvektor $\binom{-1}{1}$ zum Eigenwert -1 bilden die Spalten der invertierbaren Matrix B, für die

$$B^{-1}AB = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt.

35. Hauptachsentransformation

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass symmetrische Matrizen $A = A^t$ stets diagonalisierbar sind. Wir beweisen ein etwas allgemeineres Theorem über selbstadjungierte Abbildungen, weil dadurch der Beweis einfacher und transparenter wird.

35.1. Selbstadjungierte lineare Abbildungen. Sei V eine euklidischer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$. Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ heißt **selbstadjungiert**, wenn

$$\langle f(x) \mid y \rangle = \langle x \mid f(y) \rangle, \qquad \text{für alle } x, y \in V. \tag{35.1}$$

Lemma 35.1. *Sei $f : V \to V$ selbstadjungiert. Dann sind je zwei Eigenvektoren v_1, v_2 von f zu unterschiedlichen Eigenwerten $\lambda_1 \neq \lambda_2$ orthogonal.*

Beweis. Es gilt

$$\lambda_1 \langle v_1 \mid v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1 \mid v_2 \rangle = \langle f(v_1) \mid v_2 \rangle = \langle v_1 \mid f(v_2) \rangle = \langle v_1 \mid \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1 \mid v_2 \rangle.$$

Weil $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt $\langle v_1 \mid v_2 \rangle = 0$. □

Lemma 35.2. *Sei λ ein Eigenwert und v ein zugehöriger Eigenvektor einer selbstadjungierten Abbildung $f : V \to V$. Der lineare Teilraum*

$$v^\perp := \{x \in V : \langle x \mid v \rangle = 0\}$$

ist invariant unter f, d.h. $f(v^\perp) \subseteq v^\perp$. Insbesondere ist die Einschränkung $f|_{v^\perp} : v^\perp \to v^\perp$ wohldefiniert und natürlich wieder selbstadjungiert.

Beweis. Aus $\langle x \mid v \rangle = 0$ folgt mit der Selbstadjungiertheit von f

$$\langle f(x) \mid v \rangle = \langle x \mid f(v) \rangle = \langle x \mid \lambda v \rangle = \lambda \langle x \mid v \rangle = 0.$$

Es folgt $f(v^\perp) \subseteq v^\perp$. Dass die Einschränkung $f|_{v^\perp}$ selbstadjungiert ist, ist klar, weil die definierende Bedingung (35.1) einfach auf $x, y \in v^\perp$ eingeschränkt wird. □

35.2. Symmetrische Matrizen. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $f : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Wir betrachten den kanonischen Basisisomorphismus $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^n \to V$ (vgl. Theorem 28.16) und die entsprechende Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sodass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] & V \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \end{tikzcd}$$

Ein Standardbasisvektor $e_j \in \mathbb{R}^n$ wird dann wie folgt abgebildet:

$$e_j \mapsto v_j = \varphi_{\mathcal{B}}(e_j) \mapsto f(v_j)$$

und

$$e_j \mapsto Ae_j \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i.$$

Weil das Diagramm kommutiert, muss also

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \tag{35.2}$$

gelten.

Lemma 35.3. *In dieser Situation gilt*

$$a_{ij} = \langle v_i \mid f(v_j)\rangle, \qquad 1 \le i, j \le n.$$

Beweis. Wenden wir $\langle v_i \mid \cdot\rangle$ auf (35.2) an, erhalten wir

$$\langle v_i \mid f(v_j)\rangle = \langle v_i \mid \sum_{k=1}^n a_{kj} v_k\rangle = \sum_{k=1}^n a_{kj}\langle v_i \mid v_k\rangle = a_{ij}. \qquad \square$$

Eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt **symmetrisch**, wenn $A = A^t$, d.h. $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \le i, j \le n$.

Proposition 35.4. *Sei V ein euklidischer Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Eine lineare Abbildung $f : V \to V$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn die entsprechende Matrix A bezüglich $\mathcal{B}$ symmetrisch ist.*

Beweis. Ist $f : V \to V$ selbstadjungiert, dann gilt dank Lemma 35.3

$$a_{ij} = \langle v_i \mid f(v_j)\rangle = \langle f(v_i) \mid v_j\rangle = \langle v_j \mid f(v_i)\rangle = a_{ji},$$

d.h. A ist symmetrisch.

Umgekehrt impliziert $a_{ij} = a_{ji}$ nach Lemma 35.3

$$\langle f(v_i) \mid v_j\rangle = \langle v_i \mid f(v_j)\rangle$$

auf den Basisvektoren v_i und somit auch allgemein:

$$\begin{aligned}\langle f(x) \mid y\rangle &= \langle f(\sum_i x_i v_i) \mid \sum_j y_j v_j\rangle = \langle \sum_i x_i f(v_i) \mid \sum_j y_j v_j\rangle \\ &= \sum_i \sum_j x_i y_j \langle f(v_i) \mid v_j\rangle = \sum_i \sum_j x_i y_j \langle v_i \mid f(v_j)\rangle = \langle x \mid f(y)\rangle,\end{aligned}$$

für alle $x, y \in V$. $\square$

35.3. Diagonalisierbarkeit selbstadjungierter Abbildungen.

Lemma 35.5. *Jede selbstadjungierte Abbildung $f : V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums V $(n \geq 1)$ besitzt einen Eigenvektor.*

Beweis. Wir überlegen uns zuerst, dass es genügt, die Aussage für symmetrische $n \times n$ Matrizen A zu zeigen. In der Tat, wenn $f_A = \varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ f \circ \varphi_{\mathcal{B}}$ die Matrixdarstellung von f bezüglich einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ ist, dann ist A dank Proposition 35.4 symmetrisch. Wenn $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, dann ist $v := \varphi_{\mathcal{B}}(x)$ ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ:

$$f(v) = f(\varphi_{\mathcal{B}}(x)) = \varphi_{\mathcal{B}}(Ax) = \varphi_{\mathcal{B}}(\lambda x) = \lambda \varphi_{\mathcal{B}}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)) = \lambda v.$$

Wir müssen zeigen, dass das charakteristische Polynom $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ eine reelle Nullstelle besitzt (vgl. Proposition 34.1). Der Fundamentalsatz der Algebra 2.2 besagt, dass P_A eine komplexe Nullstelle hat, d.h. es existiert $c = a + ib \in \mathbb{C}$ mit $P_A(c) = 0$.

Nun definiert aber A eine ($\mathbb{C}$-)lineare Abbildung $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $z \mapsto Az$, und wie im reellen Fall folgt, dass $c \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert dieser Abbildung ist. Daher gibt es einen Eigenvektor $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ und diesen können wir in Real- und Imaginärteil zerlegen:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x + iy.$$

Dann gilt $Az = cz$ und somit

$$Ax + iAy = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

oder äquivalent dazu

$$\begin{aligned} Ax &= ax - by, \\ Ay &= bx + ay. \end{aligned}$$

Weil A symmetrisch ist und die Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, daher nach Proposition 35.4 selbstadjungiert ist, gilt

$$\langle ax - by \mid y \rangle = \langle Ax \mid y \rangle = \langle x \mid Ay \rangle = \langle x \mid bx + ay \rangle$$

und daher

$$b(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 0.$$

Weil $z \neq 0$ und somit $\|x\|^2 + \|y\|^2 \neq 0$, folgt $b = 0$. Das bedeuted $c = a \in \mathbb{R}$ ist eine reelle Nullstelle von P_A. □

Theorem 35.6 (Hauptachsentransformation)**.** *Sei V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ selbstadjungiert. Dann existiert eine Orthonormalbasis von V bestehend aus Eigenvektoren von f. Weiters existiert eine orthogonale Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to V$ (wobei $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt versehen ist), sodass*

$$p^{-1} \circ f \circ p = f_D$$

gilt, wobei

$$D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_k)$$

eine Diagonalmatrix ist mit den Eigenwerten von f auf der Diagonalen, die sich gemäß ihrer geometrischen Vielfachheit wiederholen.

Beweis. Wir zeigen mit Induktion nach n, dass es eine Orthonormalbasis bestehend aus Eigenvektoren von f gibt. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial, weil $\emptyset$ ein solche Basis ist. Sei also $n \geq 1$. Nach Lemma 35.5 existiert ein Eigenwert λ und ein zugehöriger Eigenvektor v von f. Nach Lemma 35.2 können wir den $(n-1)$-dimensionalen Teilraum $v^\perp := \{x \in V : \langle x \mid v\rangle = 0\}$ betrachten und die Einschränkung $f|_{v^\perp} : v^\perp \to v^\perp$ ist wohldefiniert und selbstadjungiert; dass $\dim v^\perp = n-1$, folgt aus Proposition 32.7. Die Induktionsannahme liefert eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_{n-1})$ bestehend aus Eigenvektoren für die Abbildung $f|_{v^\perp} : v^\perp \to v^\perp$. Setzen wir $v_n := v/\|v\|$, dann ist $(v_1, \ldots, v_n)$ die gesuchte Orthonormalbasis von V.

Die Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to V$ erhält man, indem man eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ aus Eigenvektoren wählt und so ordnet, dass Eigenvektoren, die zum selben Eigenwert gehören jeweils nebeneinander stehen. Dann hat der Basisisomorphismus $p := \varphi_{\mathcal{B}}$ die gewünschte Eigenschaft; $\varphi_{\mathcal{B}}$ bildet die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ auf die Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ ab, d.h. $\varphi_{\mathcal{B}}$ ist eine orthogonale Abbildung (vgl. Proposition 32.14). $\square$

Korollar 35.7. *Jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist diagonalisierbar. Es gibt eine orthogonale Matrix $P \in \mathrm{O}(n)$ sodass*

$$P^{-1}AP = P^tAP =: D$$

eine Diagonalmatrix ist. Die Diagonaleinträge von D sind die Eigenwerte von A, wobei jeder Eigenwert so oft erscheint, wie seine geometrische Vielfachheit angibt. Die Spalten von P bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bestehend aus Eigenvektoren von A.

Beweis. Wende das vorige Theorem auf $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt an. $\square$

Beispiel 35.8. Wir führen die Hauptachsentransformation für die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

durch.

Schritt 1: Wir bestimmen die Eigenwerte. Das charakteristische Polynom von A ist

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = -(\lambda-2)(\lambda+1)^2.$$

Somit sind -1 und 2 die Eigenwerte von A.

Schritt 2: Für jeden Eigenwert λ bestimmen wir eine Basis des Eigenraums E_λ. Dazu lösen wir zunächst das Gleichungssystem $(A-(-1)I_3)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Eigenraums $E_{-1} = \ker(A-(-1)I_3)$ ist

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun lösen wir das Gleichungssystem $(A-2I_3)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Eigenraums $E_2 = \ker(A - 2I_3)$ ist

$$w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schritt 3. Wir orthonormalisieren die Basen der Eigenräume. Wir setzen

$$v_1 := \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2 := \frac{w_2 - \langle w_2 \mid v_1 \rangle v_1}{\|w_2 - \langle w_2 \mid v_1 \rangle v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden v_1 und v_2 eine Orthonormalbasis von E_{-1}. Weiters wird E_2 von

$$v_3 := \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt.

Schritt 4. Aneinanderreihung der Orthonormalbasen der Eigenräume liefert die Spalten der gesuchten orthogonalen Matrix P. Die gesuchte orthogonale Matrix P ist

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Sie erfüllt

$$P^t A P = \mathrm{Diag}(-1, -1, 2).$$

36. Quadriken im $\mathbb{R}^2$

36.1. Quadratische Polynome und Quadriken in zwei Variablen. Ein **quadratisches Polynom** auf $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Setzen wir

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

dann kann das quadratische Polynom q auch in der Form

$$q(x) = x^t A x + B^t x + f \tag{36.1}$$

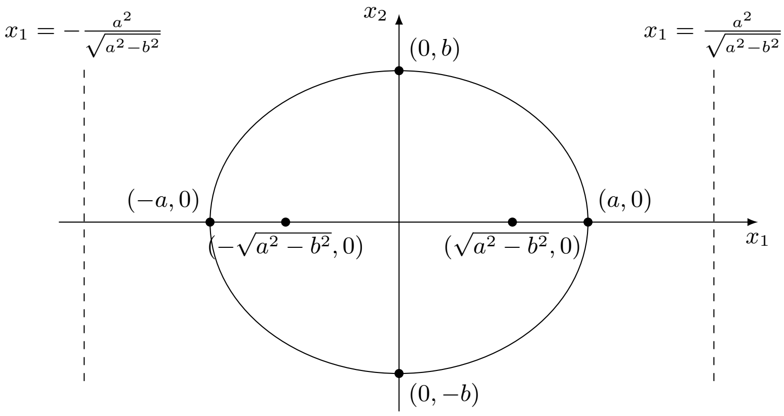
geschrieben werden. Unter einer **Quadrik** in $\mathbb{R}^2$ verstehen wir die Nullstellenmenge $\{x \in \mathbb{R}^2 : q(x) = 0\}$ eines quadratischen Polynoms.

Wir werden sehen, dass Quadriken in $\mathbb{R}^2$ typischerweise Kegelschnitte sind. Aber es treten auch degenerierte Kurven als Quadriken auf; z.B.

- $x_1^2 + x_2^2 = -1$ hat keine Lösung.
- Die Quadrik $x_1^2 + x_2^2 = 0$ besteht aus einem Punkt.
- Die Quadrik $x_1^2 - x_2^2 = 0$ besteht aus zwei sich schneidenden Geraden.
- $x_1^2 = 1$ besteht aus zwei parallelen Geraden.
- $x_1^2 = 0$ ist eine Gerade.
- Die Quadrik $0 = 0$ ist ganz $\mathbb{R}^2$.

36.2. Kegelschnitte in Hauptlage. Eine **Ellipse** in Hauptlage ist die Quadrik

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}.$$



Bemerkung 36.1. Die Punkte $F_{\pm} = (\pm\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ heißen **Brennpunkte** der Ellipse, wobei $a \geq b > 0$. Ein Punkt X liegt genau dann auf der Ellipse, wenn

$$d(X, F_-) + d(X, F_+) = 2a.$$

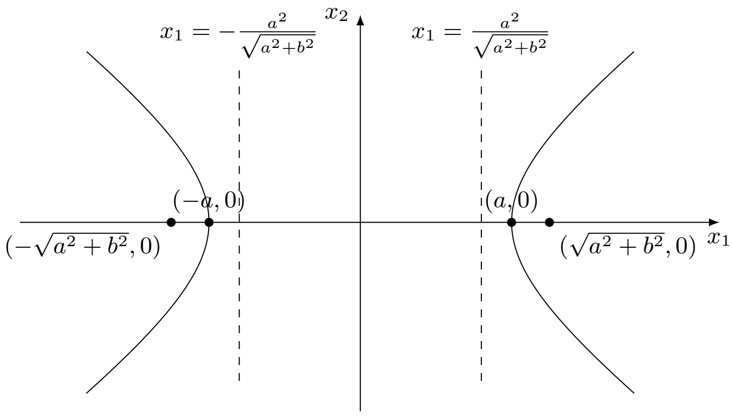
Die Geraden $g_{\pm}$ mit den Geradengleichungen $x_1 = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ sind die **Leitgeraden** der Ellipse. Für alle Punkte X auf der Ellipse gilt

$$\frac{d(X, F_-)}{d(X, g_-)} = \frac{d(X, F_+)}{d(X, g_+)} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \epsilon.$$

Die **numerische Exzentrizität** ϵ einer Ellipse erfüllt stets $\epsilon < 1$.

Eine **Hyperbel** in Hauptlage ist die Quadrik

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}_{>0}.$$



Bemerkung 36.2. Die Punkte $F_\pm = (\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ heißen **Brennpunkte** der Hyperbel, wobei $a \geq b > 0$. Ein Punkt X liegt genau dann auf der Hyperbel, wenn

$$|d(X, F_-) - d(X, F_+)| = 2a.$$

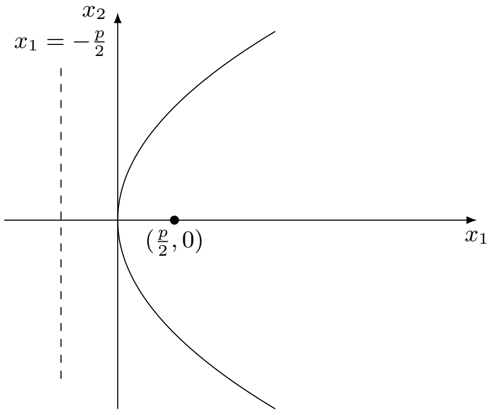
Die Geraden $g_\pm$ mit den Geradengleichungen $x_1 = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sind die **Leitgeraden** der Hyperbel. Für alle Punkte X auf der Hyperbel gilt

$$\frac{d(X, F_-)}{d(X, g_-)} = \frac{d(X, F_+)}{d(X, g_+)} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \epsilon.$$

Die **numerische Exzentrizität** ϵ einer Hyperbel erfüllt stets $\epsilon > 1$.

Eine **Parabel** in Hauptlage ist die Quadrik

$$x_2^2 = 2px_1, \quad p \in \mathbb{R}_{>0}.$$



Bemerkung 36.3. Der Punkt $F = (\frac{p}{2}, 0)$ heißt **Brennpunkt** der Parabel. Die Gerade g mit der Geradengleichung $x_1 = -\frac{p}{2}$ ist die **Leitgerade** der Parabel. Ein Punkt X liegt genau dann auf der Parabel, wenn

$$\frac{d(X, F)}{d(X, g)} = 1 = \epsilon.$$

Die **numerische Exzentrizität** ϵ einer Parabel erfüllt also stets $\epsilon = 1$.

36.3. Quadriken in allgemeiner Lage. Ist eine allgemeine Quadrik gegeben, z.B.

$$9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 6x_1 + 8x_2 - 3 = 0,$$

so ist zunächst völlig unklar, um welchen Typ es sich handelt.

Mit Hilfe der Hauptachsentransformation werden wir die Quadrik durch eine Isometrie von $\mathbb{R}^2$ in Hauptlage bringen. Dann können wir den Typ der Quadrik leicht feststellen.

Lemma 36.4. *Sei A eine symmetrische 2×2 Matrix, B eine 2×1 Matrix und $c \in \mathbb{R}$. Das quadratische Polynom*

$$q(x) = x^t Ax + B^t x + c$$

kann durch eine Substitution $x = R\bar{x}$, wobei $R \in \mathrm{SO}(2)$, auf eine Form ohne gemischten Term gebracht werden:

$$q(R\bar{x}) = \bar{x}^t R^t AR\bar{x} + B^t R\bar{x} + c = \bar{x}^t D\bar{x} + B^t R\bar{x} + c$$

mit einer Diagonalmatrix D.

Beweis. Dank Korollar 35.7 existiert eine Matrix $P \in \mathrm{O}(2)$, deren Spalten eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren v_1, v_2 von A sind, sodass $P^tAP =: D$ eine Diagonalmatrix ist. Dann gilt $\det P = \pm 1$. Falls $\det P = -1$, können wir v_2 durch $-v_2$ ersetzen. Wir erhalten also in jedem Fall eine Matrix $R \in \mathrm{SO}(2)$ mit $R^tAR = D$. □

Beispiel 36.5. Wir untersuchen nun die Quadrik

$$q(x) = 9x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 - 6x_1 + 8x_2 - 3 = 0. \tag{36.2}$$

Wir bringen sie auf die Form

$$q(x) = \big(x_1, x_2\big)\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \big(-6, 8\big)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 3.$$

Um den gemischten Term $-4x_1x_2$ zu entfernen, diagonalisieren wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

wie in Lemma 36.4. Das charakteristische Polynom ist

$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 9-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} = (9-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 15\lambda + 50 = (\lambda-5)(\lambda-10).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 5 ist

$$E_5 = \ker\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 10 ist

$$E_{10} = \ker\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Dann ist die Matrix

$$R := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Element von SO(2) und erfüllt

$$R^tAR = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} =: D.$$

Wir setzen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{36.3}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) &= \big(\bar{x}_1, \bar{x}_2\big)\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \big(-6, 8\big)\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} - 3 \\ &= 5\bar{x}_1^2 + 10\bar{x}_2^2 + 2\sqrt{5}\bar{x}_1 + 4\sqrt{5}\bar{x}_2 - 3. \end{aligned}$$

Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$q(\bar{x}) = 5\Big(\bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 10\Big(\bar{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 - 6.$$

Durch die Substitution

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36.4}$$

bringen wir die Quadrik also auf die Form

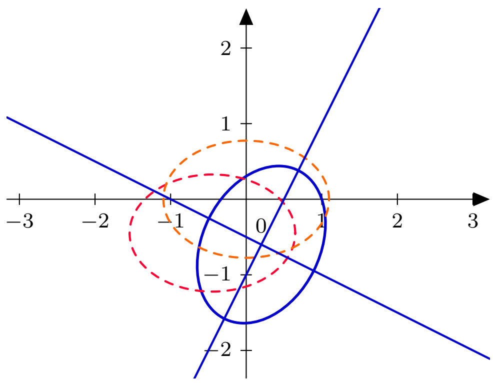
$$5\tilde{x}_1^2 + 10\tilde{x}_2^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tilde{x}_1^2}{\frac{6}{5}} + \frac{\tilde{x}_2^2}{\frac{3}{5}} = 1.$$

Es handelt sich um eine Ellipse in Hauptlage mit den Halbachsen $\sqrt{\frac{6}{5}}$ und $\sqrt{\frac{3}{5}}$.

Die Komposition der Rotation (36.3) und der Translation (36.4) bilden die ursprüngliche Quadrik (36.2) auf diese Ellipse in Hauptlage ab. Die ursprüngliche Quadrik ist daher ebenso eine Ellipse mit Halbachsen $\sqrt{\frac{6}{5}}$ und $\sqrt{\frac{3}{5}}$. Den Mittelpunkt $\frac{1}{5}(1,-3)$ der Ellipse (36.2) erhält man, wenn man den Mittelpunkt $\tilde{x} = 0$ der Ellipse in Hauptlage in (36.3) und (36.4) einsetzt. Die Achsen der Ellipse in Hauptlage sind $\tilde{x}_1 = 0$ und $\tilde{x}_2 = 0$. Um die Achsen der Ellipse (36.2) zu bestimmen, verwenden wir die Inverse der Rotation (36.3), welche durch

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = R^t x = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Achsen der Ellipse (36.2) sind also $x_1 + 2x_2 = -1$ und $2x_1 - x_2 = 1$.



Beispiel 36.6. Die Quadrik

$$q(x) = 7x_1^2 - 12x_1x_2 - 2x_2^2 - 10x_1 + 2 = 0 \tag{36.5}$$

kann in der Form

$$q(x) = \big(x_1, x_2\big) \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \big(-10, 0\big) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2$$

geschrieben werden. Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -6 \\ -6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(7-\lambda)(2+\lambda) - 36 = \lambda^2 - 5\lambda - 50 = (\lambda+5)(\lambda-10).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -5 ist

$$E_{-5} = \ker \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 10 ist

$$E_{10} = \ker \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Die Matrix

$$R := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist ein Element von SO(2) und erfüllt

$$R^t A R = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} =: D.$$

Wir setzen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{36.6}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + (-10, 0) \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + 2 \\ &= -5\bar{x}_1^2 + 10\bar{x}_2^2 - 2\sqrt{5}\bar{x}_1 + 4\sqrt{5}\bar{x}_2 + 2. \end{aligned}$$

Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$q(\bar{x}) = -5\Big(\bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 10\Big(\bar{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big)^2 + 1.$$

Durch die Substitution

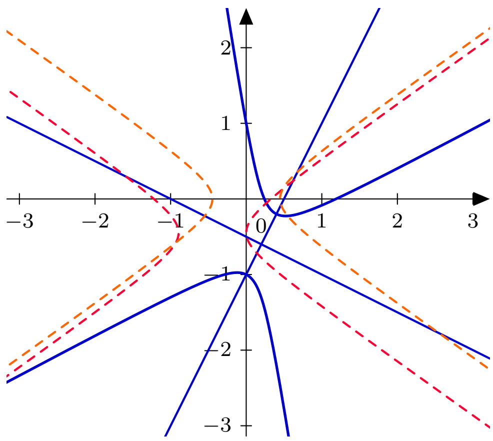
$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{36.7}$$

bringen wir die Quadrik also auf die Form

$$-5\tilde{x}_1^2 + 10\tilde{x}_2^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\tilde{x}_1^2}{\frac{1}{5}} - \frac{\tilde{x}_2^2}{\frac{1}{10}} = 1.$$

Es handelt sich um eine Hyperbel in Hauptlage mit den Halbachsen $\sqrt{\frac{1}{5}}$ und $\sqrt{\frac{1}{10}}$.

Die Komposition der Rotation (36.6) und der Translation (36.7) bilden die urspründliche Quadrik (36.5) auf diese Hyperbel in Hauptlage ab. Die ursprüngliche Quadrik ist daher ebenso eine Hyperbel mit Halbachsen $\sqrt{\frac{1}{5}}$ und $\sqrt{\frac{1}{10}}$. Wie im vorigen Beispiel sehen wir: Der Mittelpunkt der Hyperbel (36.5) ist $\frac{1}{5}(1, -3)$. Die Achsen sind $x_1 + 2x_2 = -1$ und $2x_1 - x_2 = 1$.



Beispiel 36.7. Wir schreiben die Quadrik

$$q(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 9x_2^2 - 12x_1 - 16x_2 + 7 = 0 \tag{36.8}$$

in der Form

$$q(x) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-12, -16) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 7.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

ist

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(9-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist

$$E_0 = \ker \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 10 ist

$$E_{10} = \ker \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}).$$

Die Matrix

$$R := \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ist ein Element von SO(2) und erfüllt

$$R^t A R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} =: D.$$

Wir setzen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{36.9}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) &= \big(\bar{x}_1, \bar{x}_2\big) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \big(-12, -16\big) \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + 7 \\ &= 10\bar{x}_2^2 - 2\sqrt{10}\bar{x}_1 - 6\sqrt{10}\bar{x}_2 + 7. \end{aligned}$$

Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$q(\bar{x}) = -2\sqrt{10}\Big(\bar{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}\Big) + 10\Big(\bar{x}_2 - \frac{3}{\sqrt{10}}\Big)^2.$$

Durch die Substitution

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{36.10}$$

bringen wir die Quadrik also auf die Form

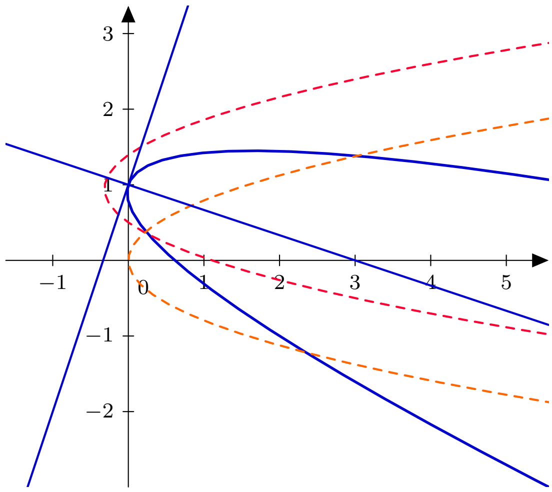
$$-2\sqrt{10}\tilde{x}_1 + 10\tilde{x}_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{x}_2^2 = \frac{2}{\sqrt{10}}\tilde{x}_1.$$

Es handelt sich um eine Parabel in Hauptlage.

Die Komposition der Rotation (36.9) und der Translation (36.10) bilden die urspründliche Quadrik (36.8) auf diese Parabel in Hauptlage ab. Die ursprüngliche Quadrik ist daher ebenso eine Parabel. Der Scheitel der Parabel (36.8) ist der Punkt $(0, 1)$. Die Achsen der Parabel in Hauptlage sind $\tilde{x}_1 = 0$ und $\tilde{x}_2 = 0$. Um die Achsen der Parabel (36.8) zu bestimmen, verwenden wir die Inverse der Rotation (36.9), welche durch

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = R^t x = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Achsen der Ellipse (36.2) sind also $3x_1 - x_2 = -1$ und $x_1 + 3x_2 = 3$.



Beispiel 36.8. Wir schreiben die Quadrik

$$q(x) = 23x_1^2 - 72x_1x_2 + 2x_2^2 + 580x_1 - 60x_2 + 350 = 0 \tag{36.11}$$

in der Form

$$q(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (580, -60)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 350.$$

Das charakteristische Polynom der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 23 & -36 \\ -36 & 2 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 23-\lambda & -36 \\ -36 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (23-\lambda)(2-\lambda) - 36^2 = \lambda^2 - 25\lambda - 1250 = (\lambda+25)(\lambda-50). \end{aligned}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 50 ist

$$E_{50} = \ker\begin{pmatrix} -27 & -36 \\ -36 & -48 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -25 ist

$$E_{-25} = \ker\begin{pmatrix} 48 & -36 \\ -36 & 27 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}).$$

Die Matrix

$$R := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

ist ein Element von SO(2) und erfüllt

$$R^t A R = \begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix} =: D.$$

Wir setzen

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = R\bar{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}. \tag{36.12}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} q(\bar{x}) &= (\bar{x}_1, \bar{x}_2)\begin{pmatrix} 50 & 0 \\ 0 & -25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + (580, -60)\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + 350 \\ &= 50\bar{x}_1^2 - 25\bar{x}_2^2 + 500\bar{x}_1 + 300\bar{x}_2 + 350. \end{aligned}$$

Durch quadratisches Ergänzen finden wir

$$\frac{1}{25}q(\bar{x}) = 2(\bar{x}_1 + 5)^2 - (\bar{x}_2 - 6)^2.$$

Durch die Substitution

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \tag{36.13}$$

bringen wir die Quadrik also auf die Form

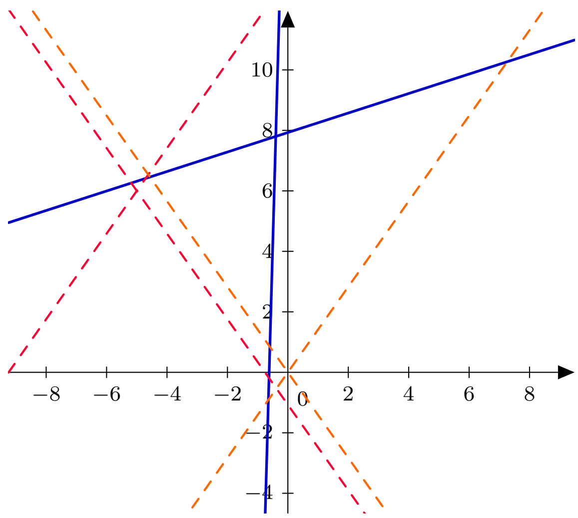
$$2\tilde{x}_1^2 - \tilde{x}_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{2}\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2)(\sqrt{2}\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) = 0.$$

Es handelt sich um die beiden Geraden $\sqrt{2}\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 = 0$ und $\sqrt{2}\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = 0$.

Die Komposition der Rotation (36.12) und der Translation (36.13) bilden die ursprüngliche Quadrik (36.11) auf diese beiden Geraden durch 0 ab. Die ursprüngliche Quadrik besteht daher ebenso aus zwei sich schneidenden Geraden. Der Schnittpunkt ist der Punkt $\frac{1}{5}(-2, 39)$. Um die Geraden (36.11) zu bestimmen, verwenden wir die Inverse der Rotation (36.9), welche durch

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = R^t x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Eine leichte Rechnung ergibt, dass die Quadrik (36.11) aus den Geraden $(3-4\sqrt{2})x_1+(4+3\sqrt{2})x_2 = 30+25\sqrt{2}$ und $(3+4\sqrt{2})x_1+(4-3\sqrt{2})x_2 = 30-25\sqrt{2}$ besteht.



Liste der Axiome

Axiom 0. *Die Ebene $\mathcal{E}$ enthält mindestens zwei verschiedenen Geraden. Jede Gerade enthält mindestens zwei verschienen Punkte.*

Dieses Axioms folgt aus den anderen Axiomen. Es erweist sich aber nützlich für den schrittweisen Aufbau der Theorie.

• **Inzidenzaxiome.**

Axiom 1. *Für je zwei verschiedene Punkte $A, B \in \mathcal{E}$ gibt es eine eindeutige Gerade, die A und B enthält.*

Axiom 2. *Für jede Gerade g und jeden Punkt A gibt es eine eindeutige Gerade parallel zu g durch A.*

• **Ordnungsaxiome.**

Axiom 3. *Auf jeder Geraden gibt es zwei Totalordnungen, die eine ist die Umkehrung der anderen.*

Axiom 4. *Wenn g und h parallele Geraden sind, A, A' Punkte auf g und B, B' Punkte auf h sind und eine Gerade k, die parallel zu g und h ist, die Strecke $[A, B]$ schneidet, so schneidet k auch die Strecke $[A', B']$.*

• **Axiome der affinen Struktur.**

Axiom 5. *Es existiert eine Abbildung $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *$d(X, Y) = d(Y, X)$ für alle $X, Y \in \mathcal{E}$.*
(2) *Ist g eine orientierte Gerade, $X \in g$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$, dann existiert ein eindeutiger Punkt Y auf g, sodass $X \leq Y$ und $d(X, Y) = r$.*
(3) *Wenn $X \in [A, B]$, dann gilt $d(A, X) + d(X, B) = d(A, B)$.*

Axiom 6. *Seien g und h parallele Geraden, A, A' Punkte auf g und B, B' Punkte auf h. Dann führt die Gerade k, welche parallel zu g und h ist und durch den Mittelpunkt von A und B verläuft, auch durch den Mittelpunkt von A' und B'.*

• **Axiome der metrischen Struktur.**

Axiom 7. ***Orthogonalität*** *ist eine Relation $\perp$ auf der Menge der Geraden $\mathscr{G}$ in $\mathcal{E}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) *$g \perp h \;\Leftrightarrow\; h \perp g$.*
(2) *$g \perp h$ impliziert, dass g und h nicht parallel sind.*
(3) *Für jede Gerade g gibt es mindestens eine Gerade h mit $g \perp h$.*
(4) *Für je zwei Geraden g, h mit $g \perp h$ und jede Gerade h' gilt $h \| h' \;\Leftrightarrow\; g \perp h'$.*

Gilt $g \perp h$ dann nennen wir die Geraden g und h ***orthogonal.***

Axiom 8. *Für je zwei Halbgeraden h_1 und h_2 mit dem gleichen Ursprung gilt*

$$c(h_1, h_2) = c(h_2, h_1).$$

Äquivalente Formulierung: Für jedes Tripel (O, A, B) von nicht-kollinearen Punkten mit $d(O, A) = d(O, B)$ gilt: Bezeichnen A' und B' die Orthogonalprojektionen von A und B auf $g(O, B)$ bzw. $g(O, A)$, dann gilt $\overline{OA'} = \overline{OB'}$ auf den Geraden $g(O, B)$ bzw. $g(O, A)$, wenn diese so orientiert sind, dass $O \leq B$ und $O \leq A$.

Literaturverzeichnis

[AF15] I. Agricola and T. Friedrich, *Elementargeometrie*, 4. ed., Springer Spektrum, 2015.

[Bac59] F. Bachmann, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Eine Vorlesung*, vol. 96, Springer, Berlin, 1959 (German).

[Bir32] G. D. Birkhoff, *A set of postulates for plane geometry, based on scale and protractor*, Ann. Math. (2) **33** (1932), 329–345 (English).

[Cho69] G. Choquet, *Geometry in a modern setting*, Hermann Publishers in Arts and Science, 1969 (English).

[Gre08] M. J. Greenberg, *Euclidean and non-Euclidean geometries. Development and history*, 4th ed. ed., New York, NY: W. H. Freeman and Company, 2008 (English).

[Hal19] S. Haller, *Geometrie und lineare Algebra für das Lehramt*, `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`, 2019.

[Hal74] P. R. Halmos, *Finite-dimensional vector spaces.*, Reprint of the 2nd ed., Springer, 1974 (English).

[Har00] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Berlin: Springer, 2000 (English).

[Hil99] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie.*, Leipzig: B. G. Teubner. 92 S. gr. 8°. (Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.) (1899)., 1899.

[Jän04] K. Jänich, *Lineare Algebra*, 10. Aufl. ed., Berlin: Springer, 2004 (German).

[Moi90] E. E. Moise, *Elementary geometry from an advanced standpoint*, 3rd ed., Reading, MA: Addison-Wesley, 1990 (English).

[MP91] R. S. Millman and G. D. Parker, *Geometry. A metric approach with models*, 2nd ed., New York etc.: Springer-Verlag, 1991 (English).

Index