

ÜBUNGSAUFGABEN ZUR VORLESUNG GEOMETRIE UND LINEARE ALGEBRA FÜR DAS LEHRAMT

ZUSAMMENGESTELLT VON A. RAINER

Sommersemester 2020

1. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 2. BIS 6. MÄRZ

Aufgabe 1.1. Seien $(K_1, +, \cdot)$ und $(K_2, +, \cdot)$ zwei Körper. Wir erinnern uns, dass eine Abbildung $f : K_1 \rightarrow K_2$ ein Körperhomomorphismus ist, wenn für alle $x, y \in K_1$

- $f(x + y) = f(x) + f(y)$,
- $f(xy) = f(x)f(y)$ und
- $f(1) \neq 0$

gilt. Zeigen Sie, dass dann folgende Aussagen gelten:

- (1) $f(0) = 0$.
- (2) $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in K_1$,
- (3) $f(1) = 1$.
- (4) Wenn $x \neq 0$ ist, dann ist $f(x) \neq 0$ und $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.

Aufgabe 1.2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Körperhomomorphismus.

- (1) Beweisen Sie, dass $f(x) = x$ für alle rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q}$. Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für natürliche $x \in \mathbb{N}$, dann für ganze Zahlen $x \in \mathbb{Z}$ und schließlich für rationale $x \in \mathbb{Q}$, indem Sie Aufgabe 1.1 verwenden.
- (2) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ auch $f(x) \leq f(y)$ gilt. Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für $x = 0$ und verwenden Sie, dass jedes $y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ in der Form $y = z^2$ mit $z \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann.
- (3) Schließen Sie, dass $f(x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, d.h., die Identität ist der einzige Körperhomomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Hinweis: Verwenden Sie, dass \mathbb{Q} in \mathbb{R} dicht liegt.

Aufgabe 1.3. Für diese Aufgabe sei vorausgesetzt, dass wir wissen, dass für jede positive reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ die Gleichung $x^2 = \alpha$ genau zwei reelle Lösungen besitzt, nämlich $\pm\sqrt{\alpha}$.

- (1) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass folgende Identität gilt:

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right).$$

- (2) Schließen Sie, dass die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ keine reelle Lösung hat, wenn $b^2 - 4ac < 0$ ist, genau eine reelle Lösung hat, wenn $b^2 - 4ac = 0$ gilt, und zwei reelle Lösungen besitzt, wenn $b^2 - 4ac > 0$ ist. Zeigen Sie weiters, dass die Lösungen (falls sie existieren) durch die Formel

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

gegeben sind.

Aufgabe 1.4. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Aussagen gelten:

- (1) $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- (2) $\min\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$.
- (3) $|x - y| = \max\{x, y\} - \min\{x, y\}$.

Aufgabe 1.5. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung

$$\frac{6+x}{x} > x$$

erfüllen.

Aufgabe 1.6. Zeigen Sie mit Induktion: In jedem geordneten Körper K gelten die folgenden Aussagen.

- (1) Für alle $x \in K$ mit $x > 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt $x^n > x$.
- (2) Für alle $x \in K$ mit $0 < x < 1$ und alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ gilt $x^n < x$.

2. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 9. BIS 13. MÄRZ

Aufgabe 2.1. Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen, wenn $z = -1 + 2i$, $w = 3 - 4i$ und $u = i$.

- (1) $z + w$, zw , $\frac{(z-w)u}{z}$, $u^{-3}w^2$.
- (2) $\overline{z - w}$, $|z w u|$, $|z \overline{w}|$.

Aufgabe 2.2. Lösen Sie die Gleichung $z^2 = 1 - i$ in den komplexen Zahlen.

Aufgabe 2.3. Wir wissen, dass die Menge M der reellen 2×2 Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, für $a, b \in \mathbb{R}$, mit der Matrixaddition

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & -b_1 - b_2 \\ b_1 + b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

und der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & -a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

als Verknüpfungen einen Körper bilden. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow M$ definiert durch

$$f(a + ib) := \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ein Körperisomorphismus ist.

Aufgabe 2.4. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(z, w) := \operatorname{Re}(z\overline{w})$. Zeigen Sie:

- (1) $f(z, z) \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und es gilt $f(z, z) = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.
- (2) $f(z, w) = f(w, z)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.
- (3) $f(z_1 + tz_2, w) = f(z_1, w) + tf(z_2, w)$ für alle $z_i, w \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$.
- (4) $f(z, w_1 + tw_2) = f(z, w_1) + tf(z, w_2)$ für alle $z, w_i \in \mathbb{C}$ und $t \in \mathbb{R}$.
- (5) $f(z, w)^2 + f(iz, w)^2 = |z|^2 |w|^2$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

(6) $|f(z, w)| \leq |z||w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2.5. (1) Finden Sie die Polardarstellung der komplexen Zahlen i , $1/2 + (\sqrt{3}/2)i$ und $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

(2) Welche komplexen Zahlen $a + ib$ werden durch $e^{i\pi}$, $2(\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$ und $\pi e^{-i\pi/2}$ beschrieben?

Aufgabe 2.6. Finden Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = -1$.

Aufgabe 2.7. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $f(x) = e^{ix}$, ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach (\mathbb{T}, \cdot) ist. Bestimmen Sie den Kern $\ker(f)$.

Aufgabe 2.8. Verwenden Sie die Moivreschen Formeln, um eine Formel zu finden, die $\cos(3\varphi)$ als Polynom in $\cos(\varphi)$ darstellt.

3. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 16. BIS 20. MÄRZ

Aufgabe 3.1. Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$.

(1) Berechnen Sie die Bildpunkte $f(z)$ der Punkte $z = 3$, $z = 1 + i$, $z = -i$ und $z = \frac{1}{6}(1 - i)$ und tragen Sie die Punkte und ihre Bildpunkte in die komplexe Zahlenebene ein.

(2) Interpretieren Sie die Abbildung f geometrisch. Was geschieht mit Punkten auf dem Einheitskreis $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, was mit Punkten mit $|z| < 1$ und Punkten mit $|z| > 1$?

Aufgabe 3.2. Sei \mathcal{E} die Menge \mathbb{R}^2 und sei \mathcal{G} die Menge aller Teilmengen von \mathbb{R}^2 der Gestalt

$$g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\},$$

wobei $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ das Axiom 1 erfüllt: Für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in \mathcal{E}$ gibt es ein eindeutiges Element $g \in \mathcal{G}$ mit $x \in g$ und $y \in g$. Hinweis: Benutzen Sie für die Eindeutigkeit, dass die Lösungsmenge einer Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ gleich bleibt, wenn die Gleichung mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multipliziert wird.

Aufgabe 3.3. In der Situation von Aufgabe 3.2 berechnen Sie konkret die Menge $g = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$, die die Punkte $(1, 1)$ und $(3, 5)$ enthält.

Aufgabe 3.4. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z \neq w$. Setze

$$a := i(z - w) \quad \text{und} \quad b := a\bar{z} + \bar{a}z.$$

Zeigen Sie, dass dann z und w die Gleichung

$$a\bar{z} + \bar{a}z = b$$

erfüllen und dass b eine reelle Zahl ist. Schließen Sie, dass es für je zwei verschiedene Punkte $z, w \in \mathbb{C}$ immer eine Teilmenge $g \subseteq \mathbb{C}$ der Form

$$g := \{z \in \mathbb{C} : a\bar{z} + \bar{a}z = b\}$$

mit $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $z \in g$ und $w \in g$.

Für die folgenden Aufgaben nehmen wir an, dass die Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ die Axiome 0 bis 4 erfüllt.

Aufgabe 3.5. Zeigen Sie Korollar 4.3: Sei $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow g$ die Schiefprojektion auf die Gerade g parallel zu einer Richtung verschieden von der Richtung von g . Ist $M \subseteq \mathcal{E}$ konvex, dann ist auch das Bild $\varphi(M) \subseteq g$ konvex. Ist $N \subseteq g$ konvex, dann ist auch das Urbild $\varphi^{-1}(N) \subseteq \mathcal{E}$ konvex.

Aufgabe 3.6. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass alle Geraden gleichmächtig sind. Die Kardinalzahl der Geraden wurde mit α bezeichnet. Beweisen Sie, dass $\alpha > 2$ schon $\alpha = \infty$ zur Folge hat.

Für die nachfolgenden Aufgaben nehmen wir zusätzlich an, dass $\alpha = \infty$ gilt.

Aufgabe 3.7. Seien h_1 und h_2 zwei nicht-kollineare Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung O . Sei $S(h_1, h_2)$ die konvexe Hülle von $h_1 \cup h_2 \cup \{O\}$. Sei k eine Halbgerade mit Ursprung O , die im Sektor $S(h_1, h_2)$ enthalten ist, und seien $A_1 \in h_1$ und $A_2 \in h_2$. Zeigen Sie:

- (1) Der Sektor $S(h_1, h_2)$ liegt in der abgeschlossenen Halbebene bzgl. der Parallelen zu $g(A_1, A_2)$ durch O , welche $g(A_1, A_2)$ enthält.
- (2) Es gilt $S(h_1, h_2) \subseteq \bar{\mathcal{E}}_1 \cap \bar{\mathcal{E}}_2$, wobei $\bar{\mathcal{E}}_1$ die abgeschlossene Halbebene bzgl. der Trägergeraden von h_1 ist, die h_2 enthält, und $\bar{\mathcal{E}}_2$ die abgeschlossene Halbebene bzgl. der Trägergeraden von h_2 , die h_1 enthält.
- (3) $g(A_1, A_2)$ und die Trägergerade von k schneiden sich in einem Punkt.
- (4) k schneidet die Strecke $[A_1, A_2]$ in einem Punkt.

Aufgabe 3.8. Seien h_1 und h_2 zwei nicht-kollineare Halbgeraden mit dem gleichen Ursprung O . Sei \mathcal{E}_1 die offene Halbebene bzgl. der Trägergeraden \tilde{h}_1 von h_1 , die h_2 enthält, und \mathcal{E}_2 die offene Halbebene bzgl. der Trägergeraden \tilde{h}_2 von h_2 , die h_1 enthält. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ die Menge aller Punkte $X \in \mathcal{E}$ ist, deren Komponenten bzgl. des Achsensystems $(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)$ die Ungleichungen

$$X_1 > O \quad \text{und} \quad X_2 > O$$

erfüllen, wenn die Geraden \tilde{h}_1 und \tilde{h}_2 so geordnet sind, dass h_1 und h_2 jeweils die positive Halbgerade ist.

4. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 23. BIS 27. MÄRZ

Für die Aufgaben 4.1 – 4.3 nehmen wie an, dass die Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ die Axiome 0 – 4 erfüllt und $\alpha = \infty$ gilt.

Aufgabe 4.1. Seien O , A und B drei nicht-kollineare Punkte. Sei $A' \in [O, A]$ und $B' \in [O, B]$. Zeigen Sie, dass für jeden Punkt $C \in [A, B]$ die Strecken $[O, C]$ und $[A', B']$ sich schneiden. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.7.

Aufgabe 4.2. Verwenden Sie Aufgabe 4.1, um folgende Aussage zu beweisen: Ist $M \subseteq \mathcal{E}$ eine beliebige konvexe Menge und $O \in \mathcal{E}$ ein Punkt, dann ist die Menge $N := \bigcup_{X \in M} [O, X]$ ebenfalls konvex.

Aufgabe 4.3. Seien A , B und C drei nicht-kollineare Punkte. Sei H die konvexe Hülle der Menge $\{A, B, C\}$, d.h. der Durchschnitt aller konvexer Teilmengen der Ebene, die die Menge $\{A, B, C\}$ enthalten. Sei S der Durchschnitt der drei abgeschlossenen Halbebenen, die durch die Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$ und $g(C, A)$ definiert sind und jeweils auch den dritten Punkt enthalten. Zeigen Sie $H = S$.

Für die nachfolgenden Aufgaben nehmen wir an, dass die Ebene $(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ die Axiome 0 – 6 erfüllt.

Aufgabe 4.4. Beweisen Sie, dass eine Punktsymmetrie jede Gerade g auf eine Gerade parallel zu g abbildet.

Aufgabe 4.5. Zeigen Sie:

- (1) Die Komposition zweier Punktsymmetrien ist eine Translation.
- (2) Die Komposition einer Punktsymmetrie mit einer Translation ist eine Punktsymmetrie.
- (3) Die n -fache Komposition von Punktsymmetrien ist eine Punktsymmetrie, falls n ungerade ist, und eine Translation, wenn n gerade ist.

Aufgabe 4.6. Zeigen Sie, dass (X, Y, X', Y') genau dann ein Parallelogramm ist, wenn $X + X' = Y + Y'$ gilt.

Aufgabe 4.7. Auf der Menge der orientierten Halbgeraden in \mathcal{E} definieren wir eine Relation

$$g \uparrow\uparrow h \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt eine Translation } t \text{ mit } t(g) = h.$$

In diesem Fall nennen wir g und h *gleichsinnig parallel*. Zeigen Sie:

- (1) Diese Relation ist eine Äquivalenzrelation.
- (2) Zwei orientierten Halbgeraden g und h sind genau dann gleichsinnig parallel, wenn die orientierten Trägergeraden von g und h gleichsinnig parallel sind.

Aufgabe 4.8. Sei $g = \{z \in \mathbb{C} : a\bar{z} + \bar{a}z = b\}$, wobei $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 3.4). Berechnen Sie das Bild der Menge g unter

- (1) der Translation $t : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z + c$, um $c \in \mathbb{C}$,
- (2) der Punktsymmetrie $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto 2d - z$, mit Zentrum $d \in \mathbb{C}$.

Hat das Bild die gleiche Gestalt wie die Menge g ? Unter welchen Bedingungen für a, b, c und d stimmen g und das Bild von g überein?

5. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 30. MÄRZ BIS 3. APRIL

Aufgabe 5.1. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{R} . Zeigen Sie:

- (1) Für alle $x \in V$ gilt $0x = 0$. (Beachten Sie: Die Null auf der linken Seite der Gleichung ist die reelle Zahl $0 \in \mathbb{R}$, die Null auf der rechten Seite ist der Nullvektor in V .)
- (2) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda 0 = 0$. (Hier bezeichnet 0 auf beiden Seiten der Gleichung den Nullvektor in V .)

Aufgabe 5.2. Zeigen Sie, dass \mathbb{R}^2 mit der Addition $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ und der Skalarmultiplikation $\lambda(x_1, x_2) := (\lambda x_1, \lambda x_2)$ ein Vektorraum über \mathbb{R} ist.

Aufgabe 5.3. Beweisen Sie:

- (1) Sei V ein reeller Vektorraum und seien $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ lineare Abbildungen. Dann ist für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ auch die Abbildung $h = \alpha f + \beta g : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \alpha f(x) + \beta g(x)$ linear.

- (2) Die Abbildungen $p_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die durch $p_i(x_1, x_2) := x_i$, wobei $i = 1, 2$, definiert sind, sind linear.
- (3) Die Abbildungen $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \alpha x_1 + \beta x_2$, für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sind linear.

Aufgabe 5.4. Zeigen Sie:

- (1) Jede lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ bildet den Nullvektor in V auf den Nullvektor in W ab.
- (2) Wann ist eine Translation in (\mathcal{E}, O) eine lineare Abbildung? Wann ist eine Punktsymmetrie in (\mathcal{E}, O) eine lineare Abbildung?

Aufgabe 5.5. Sei (E_1, E_2) eine Basis der Ebene (\mathcal{E}, O) . Finden Sie die Geradengleichungen der folgenden Geraden in Koordinaten bzgl. (E_1, E_2) :

- (1) $g(E_1, E_2)$.
- (2) $g(E_1 - E_2, E_1 + E_2)$.
- (3) $g(O, 2E_1 + 3E_2)$.

Aufgabe 5.6. Zeigen Sie, dass die Komposition einer zentrischen Streckung mit Streckfaktor $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mit einer Translation (unabhängig von der Reihenfolge) wieder eine zentrische Streckung mit Streckfaktor k ist.

Aufgabe 5.7. Sei $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ eine zentrische Streckung und g eine orientierte Gerade in \mathcal{E} . Auf der Bildgeraden $g' = f(g)$ wählen wir die Ordnung, sodass g und g' gleichsinnig parallel sind (vgl. Proposition 7.7 und Theorem 8.13). Zeigen Sie, dass $f|_g : g \rightarrow g'$ entweder ordnungserhaltend oder ordnungsumkehrend ist, je nachdem ob der Streckfaktor von f positiv oder negativ ist. Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 5.6, um den allgemeinen Fall auf den Fall zurückzuführen, dass g das Zentrum von f enthält.

Aufgabe 5.8. Zeigen Sie Theorem 9.3:

- (1) Die Dilatationen der Ebene \mathcal{E} bilden eine nicht-abelsche Gruppe \mathcal{D} bezüglich der Komposition.
- (2) Für zwei Elemente $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ gilt $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$ genau dann, wenn d_1 und d_2 beide Translationen oder beide zentrische Streckungen mit dem gleichen Zentrum sind. Hier fassen wir die Identität sowohl als eine Translation als auch als eine zentrische Streckung auf.
- (3) Die Abbildung $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^*$, die $d \in \mathcal{D}$ den Streckfaktor k von d zuordnet, ist ein Gruppenhomomorphismus in die multiplikative Gruppe \mathbb{R}^* .

6. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 20. BIS 24. APRIL

Aufgabe 6.1. Sei δ eine Richtung und sei $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ eine Abbildung mit den folgenden Eigenschaften: Für alle $X \neq Y \in \mathcal{E}$ liegen die Punkte $f(X)$ und $f(Y)$ auf einer zu $g(X, Y)$ parallelen Geraden und für alle $X \in \mathcal{E}$ liegen X und $f(X)$ auf einer Geraden mit der Richtung δ . Zeigen Sie, dass f eine Translation ist.

Aufgabe 6.2. Seien A, B und C drei paarweise verschiedene kollineare Punkte mit dem Teilverhältnis $\frac{AC}{CB} = 2$. Berechnen Sie die Teilverhältnisse

$$\frac{AB}{BC}, \quad \frac{CA}{AB}, \quad \frac{CB}{BA}, \quad \frac{BA}{AC} \quad \text{und} \quad \frac{BC}{CA}.$$

Aufgabe 6.3. Seien A und B verschiedene Punkt der Ebene und $g = g(A, B)$. Skizzieren Sie die folgenden Punkte auf g , die durch ihr Teilverhältnis mit A und B gegeben sind:

$$\frac{AC}{CB} = 1, \quad \frac{AD}{DB} = 2, \quad \frac{AE}{EB} = -2, \quad \frac{AF}{FB} = -\frac{1}{3}, \quad \frac{AG}{GB} = -\frac{3}{2}, \quad \frac{AH}{HB} = -\frac{3}{4}.$$

Aufgabe 6.4. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Sei $X \in (A, B)$ der Punkt auf der Strecke (A, B) , für den

$$\frac{d(A, X)}{d(X, B)} = \frac{d(A, B)}{d(A, X)}$$

gilt. Berechnen Sie die Teilverhältnisse

$$\frac{AX}{XB} \quad \text{und} \quad \frac{BA}{AX}.$$

Man sagt: X teilt (A, B) im *goldenen Schnitt*.

Aufgabe 6.5. In \mathbb{R}^2 seien die drei Punkte $A = (-1, 2)$, $B = (3, 0)$ und $C = (5, -1)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die drei Punkte auf einer Geraden g liegen und berechnen Sie das Teilverhältnis $\frac{AC}{CB}$. Bestimmen Sie die Punkte D , E und F auf g , die

$$\frac{DC}{CB} = -4, \quad \frac{AE}{ED} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{EF}{ED} = \frac{1}{2}$$

erfüllen.

Aufgabe 6.6. Seien A , B , C und X vier paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden. Zeigen Sie, dass

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CX}{XA} = -1$$

gilt.

Aufgabe 6.7. Beweisen Sie den *Satz von Desargues* (mit Hilfe des orientierten Strahlensatzes): Seien g_1 , g_2 und g_3 drei verschiedene Geraden durch einen Punkt O . Seien $A_1, A'_1 \in g_1 \setminus \{O\}$, $A_2, A'_2 \in g_2 \setminus \{O\}$ und $A_3, A'_3 \in g_3 \setminus \{O\}$ so, dass $g(A_1, A_2) \parallel g(A'_1, A'_2)$ und $g(A_2, A_3) \parallel g(A'_2, A'_3)$. Dann gilt $g(A_1, A_3) \parallel g(A'_1, A'_3)$.

Aufgabe 6.8. Beweisen Sie den *Satz von Pappus*: Seien g und g' zwei verschiedene Geraden durch den Punkt O . Seien $A_1, A_2, A_3 \in g \setminus \{O\}$ und $A'_1, A'_2, A'_3 \in g' \setminus \{O\}$ so, dass $g(A_1, A'_2) \parallel g(A_2, A'_1)$ und $g(A_2, A'_3) \parallel g(A_3, A'_2)$. Dann gilt $g(A_1, A'_3) \parallel g(A_3, A'_1)$. Hinweis: Verwenden Sie den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 6.6.

Aufgabe 6.9. Verwenden Sie den Strahlensatz, um ein Verfahren zu finden, mit dem jede gegebene Strecke (A, B) im Verhältnis $p : q$ mit $p, q \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ geteilt werden kann. Genauer: Der Punkt $X \in (A, B)$ mit $\frac{AX}{XB} = \frac{p}{q}$ soll nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruiert werden.

7. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 27. APRIL BIS 1. MAI

Aufgabe 7.1. Zeigen Sie den orientierten Strahlensatz mit Hilfe von Koordinaten: Seien g_1, g_2 zwei Geraden mit Schnittpunkt O und h, k zwei weitere Geraden. Seien $g_1 \cap h = \{H_1\}$, $g_2 \cap h = \{H_2\}$ und $g_1 \cap k = \{K_1\}$, $g_2 \cap k = \{K_2\}$, sodass O, H_1, H_2 und O, K_1, K_2 jeweils paarweise verschieden sind. Dann gilt

$$\frac{OH_1}{OK_1} = \frac{OH_2}{OK_2}$$

genau dann, wenn h und k parallel sind. Hinweis: Wählen Sie die Basis (H_1, H_2) im Vektorraum (\mathcal{E}, O) und rechnen Sie mit entsprechenden Koordinaten.

Aufgabe 7.2. Seien A, B und C drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene \mathcal{E} . Zeigen Sie, dass jeder Punkt X in (\mathcal{E}, O) in eindeutiger Weise in der Form

$$X = \alpha A + \beta B + \gamma C, \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \alpha + \beta + \gamma = 1,$$

geschrieben werden kann. Man nennt (α, β, γ) die *baryzentrischen Koordinaten* von X bzgl. (A, B, C) . Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Basis von (\mathcal{E}, O) und verwenden Sie die Darstellung bzgl. dieser Basis.

Aufgabe 7.3. Seien A, B und C drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene (\mathcal{E}, O) .

- (1) Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Mittelpunkte M_{AB}, M_{BC} und M_{CA} der Strecken $(A, B), (B, C)$ und (C, A) .
- (2) Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden $g(A, M_{BC})$ und $g(B, M_{CA})$.
- (3) Zeigen Sie, dass S auf der Geraden $g(C, M_{AB})$ liegt. Der Punkt S heißt *Schwerpunkt* des Dreiecks (A, B, C) .

Aufgabe 7.4. Seien A, B und C drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene (\mathcal{E}, O) . Sei $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ eine affine Abbildung mit $A' = f(A), B' = f(B)$ und $C' = f(C)$, sodass A', B' und C' nicht-kollinear sind. Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt S von (A, B, C) unter f auf den Schwerpunkt S' von (A', B', C') abgebildet wird.

Aufgabe 7.5. Seien A, B und C drei nicht-kollineare Punkte in der Ebene (\mathcal{E}, O) .

- (1) Zeigen Sie, dass die Menge

$$K = \{X = \alpha A + \beta B + \gamma C : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \alpha + \beta + \gamma = 1\}$$

konvex ist. Hinweis: Es gilt $X \in [X_1, X_2]$ genau dann, wenn $X = tX_1 + (1-t)X_2$ für ein $t \in [0, 1]$.

- (2) Beweisen Sie, dass K die konvexe Hülle von $\{A, B, C\}$ ist. Mit anderen Worten: Die konvexe Hülle von $\{A, B, C\}$ ist die Menge aller Punkte mit nicht-negativen baryzentrischen Koordinaten bzgl. (A, B, C) .

Aufgabe 7.6. Zeigen Sie, dass ein Parallelogramm genau dann ein Rechteck ist, wenn die beiden Diagonalen die gleiche Länge haben.

Aufgabe 7.7. Seien $A, B \in \mathcal{E}$ mit $A \neq B$. Sei O der Mittelpunkt von A und B und g die Streckensymmetrale von (A, B) .

- (1) Für jedes $X \in \mathcal{E}$ gilt:

$$d(X, B)^2 - d(X, A)^2 = 4d(O, A) \cdot \xi,$$

wobei ξ die Abszisse auf $g(A, B)$ von X im Achsensystem $(g(A, B), g)$ ist und $g(A, B)$ so orientiert ist, dass $O < A$ gilt.

- (2) Sei \mathcal{E}_A (bzw. \mathcal{E}_B) die offene Halbebene bzgl. g , die A (bzw. B) enthält. Dann gilt

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathcal{E} : d(X, A) < d(X, B)\},$$

$$\mathcal{E}_B = \{X \in \mathcal{E} : d(X, B) < d(X, A)\},$$

$$g = \{X \in \mathcal{E} : d(X, A) = d(X, B)\}.$$

Hinweis: Rechnen Sie im Vektorraum (\mathcal{E}, O) und verwenden Sie Proposition 11.4 und Lemma 11.2.

Aufgabe 7.8. Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes Dreieck. Verwenden Sie Aufgabe 7.7, um zu zeigen, dass sich die Streckensymmetralen von (A, B) , (B, C) und (C, A) in einem Punkt U schneiden und dass

$$d(U, A) = d(U, B) = d(U, C)$$

gilt. Der Punkt U heißt *Umkreismittelpunkt* des Dreiecks (A, B, C) .

8. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 4. BIS 8. MAI

Aufgabe 8.1. Zeigen Sie, dass jede Spiegelung parallele Geraden auf parallele Geraden abbildet.

Aufgabe 8.2. Seien A und B verschiedene Punkte in \mathcal{E} . Zeigen Sie, dass die Spiegelung s mit Spiegelungsachse $g(A, B)$ in (\mathcal{E}, O) durch die Formel

$$s(X) = X + 2\left(A + \frac{\langle B - A \mid X - A \rangle}{\|B - A\|^2}(B - A) - X\right)$$

gegeben ist.

Aufgabe 8.3. Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis von (\mathcal{E}, O) . Berechnen Sie die Koordinatendarstellung bzgl. (E_1, E_2) der Spiegelung s_A mit Spiegelungsachse $g(O, A)$, wobei:

- (1) $A = E_i, i = 1, 2.$
- (2) $A = E_1 - E_2.$
- (3) $A = -5E_1 + 7E_2.$

Aufgabe 8.4. Seien A, B und O drei verschiedene Punkte.

- (1) Finden Sie eine Formel für die Rotation $r = s_A \circ s_B$ in (\mathcal{E}, O) , wobei s_A (bzw. s_B) die Spiegelung mit Spiegelungsachse $g(O, A)$ (bzw. $g(O, B)$) ist.
- (2) Sei (E_1, E_2) eine Orthonormalbasis von (\mathcal{E}, O) . Berechnen Sie die Koordinatendarstellung der Rotation $r = s_{E_1} \circ s_{E_1+E_2}$ bzgl. (E_1, E_2) .

Aufgabe 8.5. Zeigen Sie, dass es zu einer Orthonormalbasis (E_1, E_2) von (\mathcal{E}, O) und einer Orthonormalbasis (E'_1, E'_2) von (\mathcal{E}, O') stets eine eindeutige Isometrie $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ mit $f(O) = O', f(E_1) = E'_1$ und $f(E_2) = E'_2$ gibt.

Aufgabe 8.6. Seien A und B zwei Teilmengen der Ebene \mathcal{E} mit der Eigenschaft, dass der Durchschnitt $A \cap B$ zwei verschiedene Punkte X_1 und X_2 enthält. Beweisen Sie: Wenn eine Isometrie $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ existiert, sodass $f(A) = B$ und $f|_{A \cap B} = \text{id}$, dann ist f die Identität auf \mathcal{E} oder es gilt $A \cap B = (A \cup B) \cap g(X_1, X_2)$. (Was hat diese Aufgabe mit der Beobachtung zu tun, dass beim Falten von Papier die Faltkante stets ein Geradenstück ist?)

Aufgabe 8.7. Beweisen Sie: Die Ähnlichkeiten von \mathcal{E} bilden eine Gruppe \mathcal{A} . Die Abbildung $\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}, f \mapsto k(f)$, wobei $k(f)$ der Proportionalitätsfaktor von f ist, ist ein Gruppenshomomorphismus in die multiplikative Gruppe $\mathbb{R}_{>0}$.

Aufgabe 8.8. Seien $A \neq B$ und $A' \neq B'$ Punkte in (\mathcal{E}, O) .

- (1) Sei zusätzlich $A = A'$. Finden Sie eine explizite Beschreibung für die ungerade Ähnlichkeit f (als Komposition einer geeigneten zentrischen Streckung und einer geeigneten Spiegelung), die $f(A) = A'$ und $f(B) = B'$ erfüllt.
- (2) Finden Sie unter Verwendung von (1) im allgemeinen Fall eine explizite Beschreibung für die ungerade Ähnlichkeit f (als Komposition einer zentrischen Streckung, einer Spiegelung und einer Translation), die $f(A) = A'$ und $f(B) = B'$ erfüllt.

9. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 11. BIS 15. MAI

Aufgabe 9.1. Zeigen Sie den SWS Satz: Zwei Dreiecke (A, B, C) und (A', B', C') sind kongruent, wenn die Relationen

$$\angle(C', A', B') = \pm \angle(C, A, B)$$

und

$$d(A', B') = d(A, B), \quad d(C', A') = d(C, A)$$

gelten.

Aufgabe 9.2. Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes gleichseitiges Dreieck. Zeigen Sie

$$\angle(A, B, C) = \angle(B, C, A) = \angle(C, A, B).$$

Zeigen Sie weiters, dass wenn M_{AB} (bzw. M_{BC} und M_{CA}) der Mittelpunkt von (A, B) (bzw. (B, C) und (C, A)) ist, dann gilt

$$2\angle(A, B, M_{CA}) = \angle(A, B, C),$$

$$2\angle(B, C, M_{AB}) = \angle(B, C, A),$$

$$2\angle(C, A, M_{BC}) = \angle(C, A, B),$$

sowie

$$g(C, M_{AB}) \perp g(A, B), \quad g(A, M_{BC}) \perp g(B, C), \quad g(B, M_{CA}) \perp g(C, A).$$

Aufgabe 9.3. Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes gleichschenkliges Dreieck mit $d(A, B) = d(A, C)$ und der Eigenschaft, dass die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle(B, C, A)$ die Seite (A, B) in einem Punkt X so schneidet, dass die Dreiecke (A, B, C) und (C, X, B) ähnlich sind. Zeigen Sie, dass X die Strecke (A, B) im goldenen Schnitt teilt (vgl. Aufgabe 6.4). Das Dreieck (A, B, C) wird *goldenes Dreieck* genannt.

Aufgabe 9.4. Ein *regelmäßiges Fünfeck* ist ein Polygon $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ mit gleich langen Seiten

$$d(A_i, A_{i+1}) = a > 0, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \text{wobei } A_6 := A_1$$

und gleichen Innenwinkeln

$$\angle(A_{i-1}, A_i, A_{i+1}) = \alpha, \quad i = 1, \dots, 5, \quad \text{wobei } A_0 := A_5.$$

Bestimmen Sie das Verhältnis der Länge der Diagonalen zur Länge der Seiten, d.h. $\frac{d}{a}$, wobei $d := d(A_1, A_3) = d(A_1, A_4)$. Warum haben alle Diagonalen die gleiche Länge? Hinweis: Suchen Sie ein goldenes Dreieck.

Aufgabe 9.5. Seien A und B zwei Punkte in \mathcal{E} , die in der gleichen offenen Halbebene bzgl. einer Geraden g liegen. Seien A' und B' die Orthogonalprojektionen von A und B auf g . Wir suchen einen Punkt $O \in [A', B']$, sodass $\angle(A', O, A) = \angle(B, O, B')$. Beschreiben Sie ein Konstruktionsverfahren für den Punkt O und begründen Sie. Was hat die Aufgabe mit dem Billardspiel zu tun?

Aufgabe 9.6. Sei (A_1, A_2, A_3) ein beliebiges nicht-degeneriertes Dreieck. Sei M_3 (bzw. M_1 und M_2) der Mittelpunkt der Seite (A_1, A_2) (bzw. (A_2, A_3) und (A_3, A_1)). Sei U_1 der Umkreismittelpunkt von (A_1, M_3, M_2) , U_2 der Umkreismittelpunkt von (A_2, M_1, M_3) und U_3 der Umkreismittelpunkt von (A_3, M_2, M_1) (vgl. Aufgabe 7.8). Sei S_1 der Schwerpunkt von (A_1, M_3, M_2) , S_2 der Schwerpunkt von (A_2, M_1, M_3) und S_3 der Schwerpunkt von (A_3, M_2, M_1) (vgl. Aufgabe 7.4). Zeigen Sie, dass die Dreiecke (U_1, U_2, U_3) und (S_1, S_2, S_3) kongruent sind. Hinweis: Die Dreiecke (A_1, M_3, M_2) , (M_3, A_2, M_1) und (M_2, M_1, A_3) werden durch geeignete Translationen aufeinander abgebildet.

Aufgabe 9.7. Sei (A, B, C) eine nicht-degeneriertes Dreieck und sei $X \in (B, C)$. Zeigen Sie:

$$\angle(B, A, X) = \angle(X, A, C) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(X, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, C)}.$$

Hinweis: Sei D der Schnittpunkt der Geraden durch C parallel zu $g(A, X)$ mit $g(A, B)$. Zeigen Sie zunächst

$$\frac{d(X, B)}{d(X, C)} = \frac{d(A, B)}{d(A, D)}.$$

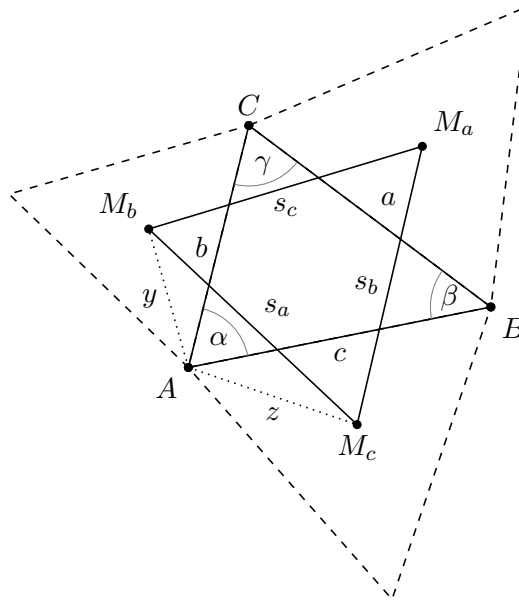
Aufgabe 9.8. Begründen Sie alle Werte für \sin und \cos in der folgenden Tabelle:

| | | | | | |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |

10. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 18. BIS 22. MAI

Aufgabe 10.1. Der *Satz von Napoleon* besagt: Werden über den Seiten eines nicht-degenerierten Dreiecks (A, B, C) außen gleichseitige Dreiecke errichtet, dann bilden deren Mittelpunkte ein gleichseitiges Dreieck; in einem gleichseitigen Dreieck gilt $U = H = I = S$ (vgl. Aufgabe 9.2) und dieser Punkt wird Mittelpunkt genannt.

In der folgenden Abbildung gelte $\alpha = \angle(C, A, B)$, $\beta = \angle(A, B, C)$, $\gamma = \angle(B, C, A)$ und die lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnen Streckenlängen.



Beweisen Sie den Satz von Napoleon, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

- (1) Zeigen Sie $\frac{b}{2} = y \cos(\frac{\pi}{6})$, $\frac{c}{2} = z \cos(\frac{\pi}{6})$ und

$$s_a^2 = y^2 + z^2 - 2yz \cos(\alpha + \frac{\pi}{3}).$$

- (2) Leiten Sie aus (1) die Identität

$$3s_a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos(\alpha) + \sqrt{3}bc \sin(\alpha)$$

ab.

- (3) Folgern Sie aus (2):

$$3s_a^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin(\alpha)}{a}.$$

- (4) Erklären Sie, warum auch die Identitäten

$$3s_b^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin(\beta)}{b},$$

$$3s_c^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + \sqrt{3}abc \frac{\sin(\gamma)}{c},$$

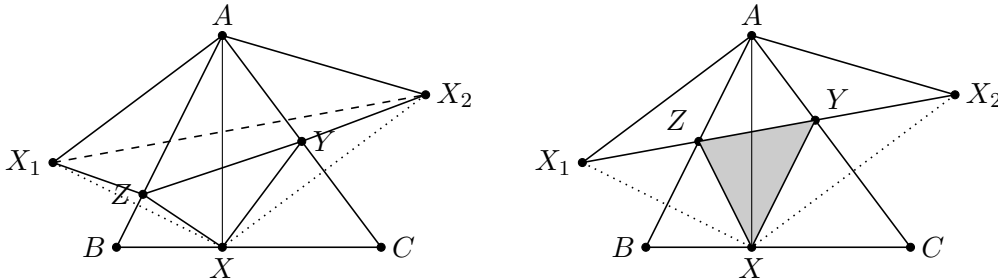
gelten und wie daraus $s_a = s_b = s_c$ folgt.

Aufgabe 10.2. Sei (A, B, C) ein *spitzwinkliges Dreieck*, d.h. das absolute Winkelmaß aller Innenwinkel ist kleiner als $\frac{\pi}{2}$. *Fagnano's Problem* besteht darin, Punkte $X \in (B, C)$,

$Y \in (C, A)$ und $Z \in (A, B)$ zu finden, sodass

$$U(X, Y, Z) := d(X, Y) + d(Y, Z) + d(Z, X)$$

minimal ist. Es wird also ein dem Dreieck (A, B, C) eingeschriebenes Dreieck (X, Y, Z) mit minimalem Umfang $U(X, Y, Z)$ gesucht.



Lösen Sie Fagnano's Problem, indem Sie die folgenden Schritte durchführen.

- (1) Sei X_1 (bzw. X_2) der Bildpunkt von X unter der Spiegelung an der Geraden $g(A, B)$ (bzw. $g(A, C)$). Zeigen Sie, dass

$$U(X, Y, Z) = d(X_1, Z) + d(Z, Y) + d(Y, X_2)$$

gilt.

- (2) Zeigen Sie: Bei festgehaltenem X ist $U(X, Y, Z)$ minimal, wenn Y und Z auf der Geraden $g(X_1, X_2)$ liegen. In diesem Fall gilt $U(X, Y, Z) = d(X_1, X_2)$. Hinweis: Dreiecksungleichung.
- (3) Beweisen Sie, dass $d(X_1, A) = d(X, A) = d(X_2, A)$ und

$$\angle(X_1, A, X_2) = 2\angle(B, A, C)$$

gilt. Dann sei $\alpha := \angle(B, A, C)$.

- (4) Schließen Sie, dass $\angle(X_1, A, X_2)$ konstant bleibt, wenn X variiert wird, und dass

$$d(X_1, X_2) = 2d(A, X) \sin(\alpha)$$

gilt. Hinweis: Betrachten Sie das Dreieck (X_1, M, A) , wobei M der Mittelpunkt von (X_1, X_2) ist.

- (5) Folgern Sie, dass $U(X, Y, Z) = d(X_1, X_2)$ minimal ist, wenn X die Orthogonalprojektion von A auf $g(B, C)$ ist.

Bemerkung: Man kann zeigen, dass die Lösung von Fagnano's Problem das Dreieck der Höhenfußpunkte ist.

Aufgabe 10.3. Sei (A, B, C) ein gleichseitiges Dreieck. Die Gerade g durch die Mittelpunkte M_{BC} und M_{CA} der Strecken (B, C) und (C, A) schneidet den Umkreis von (A, B, C) in den Punkten P und Q . Verwenden Sie den Sehnensatz, um das Verhältnis

$$\frac{d(M_{CA}, M_{BC})}{d(M_{BC}, P)}$$

zu berechnen, wenn die Bezeichnungen P und Q so gewählt sind, dass $d(M_{BC}, P) < d(M_{BC}, Q)$ gilt.

Aufgabe 10.4. Ein *Sehnenviereck* ist ein Viereck (A, B, C, D) mit der Eigenschaft, dass die Punkte A, B, C, D auf einem Kreis liegen und die Diagonalen (A, C) und (B, D) einen Schnittpunkt haben. Zeigen Sie:

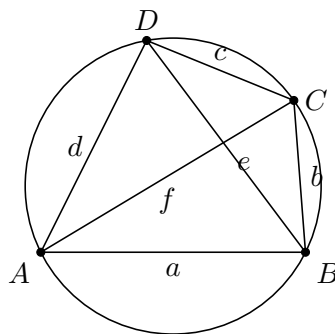
$$\angle(A, B, C) + \angle(C, D, A) = \pi = \angle(D, A, B) + \angle(B, C, D).$$

Hinweis: Peripheriewinkelsatz.

Aufgabe 10.5. Der *Satz von Ptolemäus* besagt, dass für ein Sehnenviereck (A, B, C, D) stets

$$d(A, C)d(B, D) = d(A, B)d(C, D) + d(B, C)d(A, D) \quad (1)$$

gilt. Beweisen Sie den Satz von Ptolemäus, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:



(1) Sei $\alpha := \angle(D, A, B)$. Zeigen Sie die beiden Identitäten

$$e^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha, \quad e^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha.$$

(2) Folgern Sie

$$e^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

(3) Finden Sie eine analoge Formel für f^2 .

(4) Wie folgt daraus die Gleichung (1)?

Aufgabe 10.6. Verwenden Sie den Satz von Ptolemäus, um

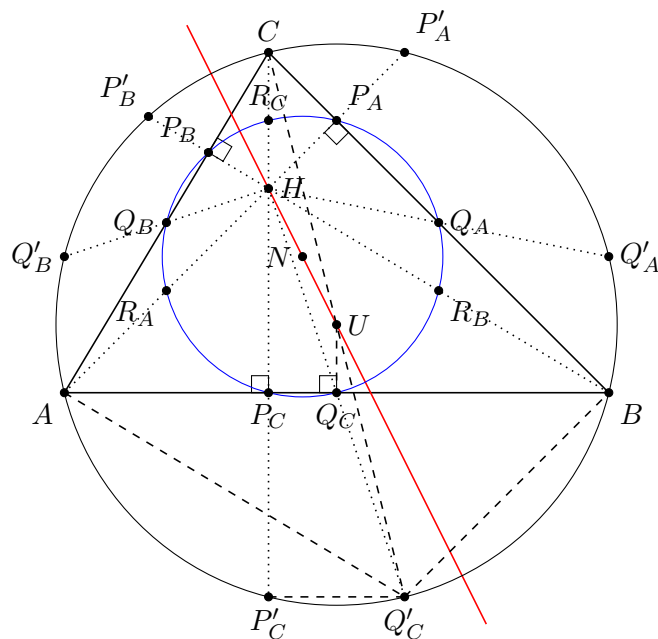
(1) erneut die Aufgabe 9.4 zu lösen,

(2) die Seitenlänge b des regelmäßigen Zehnecks in Abhängigkeit des Radius r des umschriebenen Kreises zu berechnen.

11. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 25. BIS 29. MAI

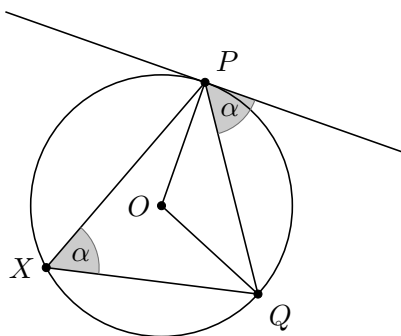
Aufgabe 11.1. Sei (A, B, C) ein nicht-degeneriertes, nicht-gleichseitiges Dreieck mit Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U . Sei N der Mittelpunkt der Strecke (H, U) . Dann gilt: Die Höhenfußpunkte P_A, P_B, P_C , die Seitenmittelpunkte Q_A, Q_B, Q_C und die Mittelpunkte R_A, R_B, R_C der Strecken $(H, A), (H, B), (H, C)$ liegen alle auf einem Kreis mit Mittelpunkt N .

Zeigen Sie diese Aussage, indem Sie die folgenden Schritte durchführen:



- (1) Sei h die zentrische Streckung mit Zentrum H und Streckfaktor 2. Warum bildet h die Punkte R_A, R_B, R_C auf die Punkte A, B, C ab?
- (2) Sei Q'_C der Punkt auf dem Umkreis k des Dreiecks (A, B, C) , der dem Punkt C diametral gegenüber liegt. Zeigen Sie, dass (A, Q'_C, B, H) ein Parallelogramm ist.
- (3) Schließen Sie, dass $h(Q_C) = Q'_C$ gilt. Auf analoge Weise zeigt man $h(Q_A) \in k$ und $h(Q_B) \in k$.
- (4) Sei P'_C der (neben C zweite) Schnittpunkt des Umkreises k mit der Höhenlinie $g(C, P_C)$. Zeigen Sie, dass P_C der Mittelpunkt der Strecke (H, P'_C) ist, d.h. $h(P_C) = P'_C$. Auf analoge Weise zeigt man $h(P_A) \in k$ und $h(P_B) \in k$. (Wie kann man argumentieren, wenn $P'_C = C$ gilt, d.h. wenn $g(C, P_C)$ die Tangente an k in C ist?)
- (5) Verwenden Sie Proposition 20.5 um zu zeigen, dass die neun Punkte $P_A, P_B, P_C, Q_A, Q_B, Q_C, R_A, R_B, R_C$ auf einem Kreis mit Mittelpunkt N liegen.

Aufgabe 11.2. Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r und sei $[P, Q]$ eine Sehne von k . Zeigen Sie, dass in der Situation der Abbildung



- (1) die beiden mit α bezeichneten Winkel das gleiche absolute Winkelmaß haben,
- (2) $d(P, Q) = 2r \sin(\alpha)$ gilt.

Aufgabe 11.3. Es sei in \mathbb{R}^2 der Kreis k mit Mittelpunkt m und Radius $r > 0$ durch die Kreisgleichung $\langle x - m \mid x - m \rangle = r^2$ gegeben.

- (1) Sei p ein Punkt auf dem Kreis k . Finden Sie die Normalvektordarstellung der Tangente in p an den Kreis k .
- (2) Sei $m = (1, 2)$ und $r = 1$. Finden Sie die Geradengleichung der Tangente in $p = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2})$ an den Kreis mit Mittelpunkt m und Radius r .

Aufgabe 11.4. Es sei in \mathbb{R}^2 der Kreis k mit Mittelpunkt m und Radius $r > 0$ durch die Kreisgleichung $\langle x - m \mid x - m \rangle = r^2$ gegeben. Sei $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{m\}$ ein beliebiger Punkt. Die Gerade g mit der Geradengleichung $\langle p - m \mid x - m \rangle = r^2$ heißt *Polare* von p bzgl. des Kreises k .

- (1) Berechnen Sie die Normalvektordarstellung der Geraden g . Schließen Sie, dass $g \perp g(m, p)$ und dass im Fall $p \in k$ die Polare g die Tangente an k in p ist.
- (2) Berechnen Sie den Abstand $d(m, g)$ und schließen Sie, dass der Durchschnitt $k \cap g$ genau dann aus zwei verschiedenen Punkten besteht, wenn p im Äußeren des Kreises k liegt.
- (3) Wir nehmen nun an, dass p im Äußeren des Kreises k liegt. Sei $x \in k \cap g$. Zeigen Sie, dass die beiden Vektoren $x - m$ und $x - p$ orthogonal zueinander sind. Schließen Sie, dass x der Berührungspunkt einer Tangente durch p an den Kreis k ist.

Aufgabe 11.5. Sei $p = (7, 0)$. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangenten durch p an den Kreis k mit Mittelpunkt $m = (1, 0)$ und Radius 2.

Aufgabe 11.6. In der Situation von Aufgabe 11.4 soll der Punkt $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{m\}$ jetzt im Inneren des Kreises k liegen. Sei h eine Sekante durch p mit $m \notin h$. Sei v ein Richtungsvektor und n ein Normalvektor von h . Sei $[a_1, a_2] \subseteq h$ die entsprechende Sehne.

- (1) Berechnen Sie den Skalar $s \in \mathbb{R}$ (in Abhängigkeit von r , m und p), sodass der Punkt $x = m + sn$ auf der Polaren g von p bzgl. des Kreises k liegt.
- (2) Zeigen Sie, dass der Punkt x auf den beiden Tangenten an k in den Punkten a_1 und a_2 liegt. Hinweis: Verwenden Sie (1) und die Geradengleichung der Tangenten.
- (3) Schließen Sie, dass die Polare g die Menge der Schnittpunkte der beiden Tangenten an k in den Endpunkten aller Sehnen durch p ist, die m nicht enthalten.

Aufgabe 11.7. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \{1\}$ und $a \neq b \in \mathbb{R}^2$. Der *Kreis des Apollonios* ist die Menge A aller Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, die

$$d(a, x) = \lambda d(x, b)$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass es sich dabei tatsächlich um einen Kreis handelt und bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius in Abhängigkeit von λ , a und b .

12. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 1. BIS 5. JUNI

Aufgabe 12.1. Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \\ 6 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -10 & 9 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} (b_1 \ b_2 \ b_3) =$$

$$(a_1 \ a_2 \ a_3) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

Aufgabe 12.2. Bestimmen Sie die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, die

$$f \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

erfüllt. Berechnen Sie $f \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 12.3. Sind die folgenden Teilmengen lineare Teilräume des reellen Vektorraums \mathbb{R}^3 ? Begründen Sie!

- (1) $A_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$.
- (2) $A_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$.
- (3) $A_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
- (4) $A_4 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 1\}$.
- (5) $A_5 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 = x_3 = 0\}$.
- (6) $A_6 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq 0\}$.
- (7) $A_7 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \exists t, s \in \mathbb{R} : (x_1, x_2, x_3) = t(1, -3, 5) + s(2, 0, -3)\}$.

Aufgabe 12.4. Sei V ein reeller Vektorraum und $U, W \subseteq V$ lineare Teilräume.

- (1) Zeigen Sie, dass $U + W := \{u + w : u \in U, w \in W\}$ ein linearer Teilraum von V ist.
- (2) Sei $V := \mathbb{R}^3$ und $U := \text{span}(e_1 + e_2, e_2)$. Finden Sie einen Vektor $w_1 \in \mathbb{R}^3$, sodass mit $W_1 := \text{span}(w_1)$ die Identität $U + W_1 = \mathbb{R}^3$ gilt, und einen Vektor $w_2 \in \mathbb{R}^3$, sodass mit $W_2 := \text{span}(w_2)$ die Identität $U + W_2 = \mathbb{R}^3$ nicht gilt.

Aufgabe 12.5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

- (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
- (2) $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (3) $\begin{pmatrix} 9 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Aufgabe 12.6. Sei \mathcal{P}_n die Menge aller Polynome $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ mit reellen Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n vom Grad $\leq n$.

(1) Zeigen Sie, dass \mathcal{P}_n mit der Addition

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n) \\ := (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n \end{aligned}$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) := \lambda a_0 + \lambda a_1x + \dots + \lambda a_nx^n$$

ein Vektorraum über \mathbb{R} ist.

(2) Können Sie ein Basis von \mathcal{P}_n angeben?

(3) Sind die Polynome $x(x-1)^2$, $x(x-1)$ und $x^3 - x$ in \mathcal{P}_3 linear unabhängig?

(4) Bilden die Polynome der Gestalt $ax^2 + bx^7$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$, einen linearen Teilraum von \mathcal{P}_{13} ?

Aufgabe 12.7. (1) Charakterisieren Sie, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die beiden Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$ linear unabhängig in \mathbb{R}^2 sind.

(2) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in \mathbb{R}^3 sind.

Aufgabe 12.8. Seien die Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n linear unabhängig im reellen Vektorraum V . Sei $w \in V$.

(1) Zeigen Sie: Wenn die Vektoren $v_1 + w, v_2 + w, \dots, v_n + w$ linear abhängig sind, dann gilt $w \in \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_n)$.

(2) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Umkehrung nicht gilt.

13. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 8. BIS 12. JUNI

Aufgabe 13.1. Bestimmen Sie den Rang und Parameterdarstellungen des Kerns und des Bildes der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.2. Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie die inverse Matrix A^{-1} und lösen Sie die Gleichung $AX = B$.

Aufgabe 13.3. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Berechnen Sie für solche λ die inverse Matrix A^{-1} . Hinweis: Verwenden Sie das Verfahren zur Matrixinversion und achten Sie darauf, für welche λ die einzelnen Schritte zulässig sind.

Aufgabe 13.4. Zeigen Sie Lemma 29.4: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Das inhomogene lineare Gleichungssystem $Ax = b$ besitzt Lösungen.
- (2) $b \in \text{im}(A)$.
- (3) $\text{rank}(A) = \text{rank}(A \mid b)$.

Aufgabe 13.5. Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 13.6. (1) Bestimmen Sie Parameterdarstellungen des Kerns und des Bildes der linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ -3x_1 + 4x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung der linearen Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$g \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 13.7. Beschreiben Sie

(1) den affinen Teilraum

$$H := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

von \mathbb{R}^3 als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems,

(2) die Menge $L := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 11x_3 = 4\}$ durch eine Parameterdarstellung.

Aufgabe 13.8. Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= a \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= b \\ x_1 + 4x_2 - 9x_3 &= c \end{aligned}$$

lösbar? Bestimmen Sie in diesem Fall eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

14. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 15. BIS 19. JUNI

Aufgabe 14.1. Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \\ 55 & -88 & 15 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 14.2. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$ Matrix

$$A_n = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit $a_{ij} = 1$ wenn $i + j = n + 1$ und $a_{ij} = 0$ andernfalls.

Aufgabe 14.3. Beweisen Sie die *Regel von Sarrus*:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Aufgabe 14.4. Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Hierbei ist $A = (a_{ij})$ eine $p \times p$ Matrix, $B = (b_{ij})$ eine $q \times q$ Matrix, $C = (c_{ij})$ eine $p \times q$ Matrix und

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} & c_{11} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pp} & c_{p1} & \cdots & c_{pq} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{q1} & \cdots & b_{qq} \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Identität zuerst im Fall $A = I_p$ und dann im Fall $B = I_q$. Führen Sie dann die allgemeine Situation auf diese Spezialfälle zurück, indem Sie die Produktformel für die Determinante verwenden.

Aufgabe 14.5. Sei U der lineare Teilraum von \mathbb{R}^3 , der von den Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

(1) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

- (2) Ergänzen Sie die gefundene Orthonormalbasis von U zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 .
- (3) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion $p_U : \mathbb{R}^3 \rightarrow U$ auf U .

Aufgabe 14.6. Seien x, y, z Vektoren in \mathbb{R}^3 . Zeigen Sie:

- (1) $\det(x, y, z) = \langle x \times y \mid z \rangle = \langle x \mid y \times z \rangle$.
- (2) $(x \times y) \times z = \langle z \mid x \rangle y - \langle y \mid z \rangle x$.
- (3) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x \mid y \rangle^2$.
- (4) $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$.

Aufgabe 14.7. Berechnen Sie das Volumen und den Flächeninhalt der Seitenflächen des Parallelepipeds, welches von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Aufgabe 14.8. Die beiden Geraden

$$g_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad g_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

sind *windschief*, d.h. sie sind weder parallel noch schneiden sie sich.

- (1) Bestimmen Sie die Gerade h , die g_1 und g_2 orthogonal schneidet. Hinweis: Bestimmen Sie die affine Ebene, in der g_1 und h liegen, und schneiden Sie diese mit g_2 .
- (2) Berechnen Sie den Abstand $d(g_1, g_2)$ der beiden Geraden g_1 und g_2 , welcher durch

$$d(g_1, g_2) = \|p_1 - p_2\|$$

definiert ist, wobei $g_i \cap h = \{p_i\}$, $i = 1, 2$.

Aufgabe 14.9. Seien allgemein $g_1 = \{a_1 + tv_1 : t \in \mathbb{R}\}$ und $g_2 = \{a_2 + tv_2 : t \in \mathbb{R}\}$ windschiefe Geraden in \mathbb{R}^3 . Begründen Sie die Formel

$$d(g_1, g_2) = \frac{|\langle v_1 \times v_2 \mid a_1 - a_2 \rangle|}{\|v_1 \times v_2\|}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Ebene $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle n \mid x - a_2 \rangle = 0\}$ mit $n := \frac{v_1 \times v_2}{\|v_1 \times v_2\|}$ und verwenden Sie, dass der Abstand eines Punktes p von H durch $|\langle n \mid p - a_2 \rangle|$ gegeben ist (vgl. Proposition 25.6).

15. AUFGABEN FÜR DIE WOCHE VOM 22. BIS 26. JUNI

Aufgabe 15.1. Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sind die Matrizen A , B und C diagonalisierbar?

Aufgabe 15.2. Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sind die Matrizen A , B und C diagonalisierbar?

Aufgabe 15.3. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix},$$

d.h. finden Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und eine Matrix P mit $P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Aufgabe 15.4. Zeigen Sie:

- (1) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann ist λ genau dann ein Eigenwert von A , wenn λ ein Eigenwert von A^t ist.
- (2) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar mit den Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Dann gilt $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.
- (3) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar. Wenn $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von A ist, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} .

Aufgabe 15.5. Es sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Finden Sie eine orthogonale Matrix P , sodass P^tAP eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 15.6. Verwenden Sie die Hauptachsentransformation, um die Quadrik

$$q(x) = 9x_1^2 - 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = 0$$

durch eine geeignete Isometrie von \mathbb{R}^2 in Hauptlage zu bringen. Um welchen Typ von Quadrik handelt es sich?

Aufgabe 15.7. Führen Sie die Hauptachsentransformation an der Quadrik

$$q(x) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 - 6x_1 + 2x_2 - \frac{133}{6} = 0$$

durch. Um welchen Kegelschnitt handelt es sich?

Aufgabe 15.8. Bestimmen Sie die Achsen der Kegelschnitte in Aufgabe 15.6 und Aufgabe 15.7.