ÜBUNGSBEISPIELE ZUR KOMPLEXEN ANALYSIS

ARMIN RAINER

Sommersemester 2015

Komplexe Zahlen

$\boxed{1}$ Sei $z = 1 - 2i$ und $w = 3 + 4i$. Berechne:

(a) $z + w$, zw, $\frac{z}{w}$, $\frac{w}{z}$, z^{-3}, w^2.

(b) $\overline{z}$, $|z|$, $\overline{w}$, $|w|$, $\langle z, w\rangle$.

$\boxed{2}$ Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ mit der Addition

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v)$$

und der Multiplikation

$$(x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu)$$

ein Körper ist.

$\boxed{3}$ Finde the Quadratwurzeln der komplexen Zahlen i und $1 - i$. Hinweis: Löse die Gleichung $(x + iy)^2 = a + ib$ für $x, y \in \mathbb{R}$ und $a + ib = i$ oder $1 - i$.

$\boxed{4}$ Beweise, dass $||z| - |w|| \le |z - w|$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$.

$\boxed{5}$ Zeige, dass

$$\left|\frac{z - w}{1 - \overline{z}w}\right| < 1 \qquad \text{falls } |z| < 1 \text{ und } |w| < 1.$$

$\boxed{6}$ Zeige, dass

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\langle z, w\rangle \qquad \text{für alle } z, w \in \mathbb{C},$$

und interpretiere die Identität als Kosinussatz.

$\boxed{7}$ Zeige:

(a) Die Gleichungen der Form $\overline{\beta}z + \beta\overline{z} + c = 0$ mit $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c \in \mathbb{R}$ beschreiben die Geraden in der Ebene.

(b) Die Gleichungen der Form $az\overline{z} + \overline{\beta}z + \beta\overline{z} + c = 0$ mit $a, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta|^2 > ac$ beschreiben die Kreise in der Ebene.

Topologische Grundlagen

$\boxed{8}$ Zeige, dass die folgenden Teilmengen in $\mathbb{C}$ offen sind, und bestimme den Abschluss:

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\},$$
$$\mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0], \quad \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

$\boxed{9}$ Seien z_n und w_n konvergente Folgen komplexer Zahlen. Beweise, dass auch die Folgen $z_n + w_n$, $z_n w_n$, $|z_n|$ und $\overline{z_n}$ konvergent sind und dass

$$\lim(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n, \quad \lim(z_n w_n) = \lim z_n \lim w_n,$$
$$\lim |z_n| = |\lim z_n|, \quad \lim \overline{z_n} = \overline{\lim z_n}$$

gilt. Zeige, dass unter der Voraussetzung $\lim z_n \neq 0$ die Folge $1/z_n$ konvergiert und

$$\lim \frac{1}{z_n} = \frac{1}{\lim z_n}.$$

$\boxed{10}$ Beweise: Falls $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(z_1 + \cdots + z_n) = z$.

$\boxed{11}$ Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-i}{(1+i)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n + n i^{-n}}{(n+i)^3}.$$

$\boxed{12}$ Sei $f : X \to Y$ stetig und X zusammenhängend. Beweise, dass $f(X)$ zusammenhängend ist.

$\boxed{13}$ Zeige, dass die Vereinigung zweier Gebiete genau dann ein Gebiet ist, wenn sie einen gemeinsamen Punkt haben. Zur Erinnerung: Ein Gebiet ist eine nichtleere offene zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

$\boxed{14}$ Sei A eine beliebige Teilmenge in $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde der Rand von A definiert durch $\partial A := \overline{A} \setminus \mathring{A}$. Zeige dass $\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C} \setminus A}$. Bestimme den Rand der Mengen in Beispiel $\boxed{8}$.

$\boxed{15}$ Sei A eine abgeschlossene nichtleere Teilmenge in $\mathbb{C}$. Beweise, dass der Abstand eines Punktes $z \in \mathbb{C} \setminus A$ zur Menge A,

$$d(z, A) := \inf\{|z - a| : a \in A\},$$

angenommen wird, d.h., dass es ein $a \in A$ gibt sodass $d(z, A) = |z - a|$.

Holomorphie

$\boxed{16}$ Sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und sei $z \in U$. Berechne die beiden Grenzwerte

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad \lim_{\substack{k\to 0\\ k\in i\mathbb{R}}} \frac{f(z+k) - f(z)}{k}.$$

Schliesse auf die Gültigkeit der Cauchy–Riemannschen Differentialgleichungen.

$\boxed{17}$ Betrachte die Funktion

$$\hat{\ell}(z) := \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \operatorname{arccot} \frac{x}{y}, \quad z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0.$$

Zeige, dass $\hat{\ell}$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ist und berechne die Ableitung.

$\boxed{18}$ Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ Bereiche, sei $g : V \to U$ eine stetige Funktion und sei $c \in V$. Sei $f \in \mathcal{H}(U)$ mit $f'(g(c)) \neq 0$ und $f(g(z)) = z$ für alle $z \in V$. Zeige, dass g komplex differenzierbar im Punkt c ist und dass $g'(c) = 1/f'(g(c))$ gilt.

$\boxed{19}$ Weise nach, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x, y) := 3xy - e^x \cos y$ harmonisch ist. Finde eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sodass $\operatorname{Re} f = u$.

20 Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$. Sei $u : R \to \mathbb{R}$ eine harmonische Funktion auf dem offenen Rechteck $R := \{x + iy \in \mathbb{C} : |x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}$. Zeige, dass

$$v : R \to \mathbb{R},\ v(x, y) := \int_{y_0}^{y} u_x(x, t)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_y(s, y_0)\, ds$$

harmonisch und $f = u + iv : R \to \mathbb{C}$ holomorph ist.

21 Sei $f = u + iv$ $\mathbb{R}$-differenzierbar in $\mathbb{C}$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} f & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \\ \frac{\partial}{\partial z} f & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f \end{pmatrix} = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2.$$

Konvergente Folgen und Reihen von Funktionen, Potenzreihen

22 Seien $f, g : X \to \mathbb{C}$ Funktionen und $a \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ folgende Eigenschaften hat:

(a) $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

(b) $\|af\| = |a|\|f\|$.

(c) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

(d) $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$.

23 Untersuche die Funktionenfolge $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_n(z) = nz^n$, $n \geq 1$, auf punktweise und auf gleichmässige Konvergenz.

24 Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{1-z^n}$ auf jeder Kreisscheibe $D_r(0)$ mit $r < 1$ normal konvergiert.

25 Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-z}$ in $\mathbb{C} \backslash \mathbb{N}$ lokal gleichmässig konvergent ist, aber in keinem Punkt von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ absolut konvergiert. Hinweis: Betrachte Real- und Imaginärteil gesondert und verwende das **Dirichlet Kriterium** (ohne Beweis): Seien $f_n : X \to \mathbb{R}$ und $a_n : X \to \mathbb{C}$ derart, dass

- für alle $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ monoton fallend ist,
- (f_n) gleichmässig auf X gegen 0 konvergiert,
- die Partialsummen von $\sum a_n$ gleichmässig auf X beschränkt sind.

Dann konvergiert die Reihe $\sum a_n f_n$ gleichmässig auf X.

26 Bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{c^n}$, wobei $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(2n)!}(z - i)^n$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (\cos n) z^n$.

27 Sei $S \subseteq \mathbb{C}$ unbeschränkt. Beweise: Konvergiert eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gleichmässig auf S, dann ist $f(z)$ ein Polynom.

Elementar-transzendente Funktionen

$\boxed{28}$ Beweise:

(a) Genügt $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ der Differentialgleichung $f' = bf$ für eine Konstante $b \in \mathbb{C}$, so gilt $f(z) = a \exp(bz)$ für eine Konstante $a \in \mathbb{C}$.

(b) Gilt für $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ die Additionsformel $f(z+w) = f(z)f(w)$ für alle $z, w \in \mathbb{C}$ und ist $f(0) \neq 0$, dann gilt $f(z) = \exp(f'(0)z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

$\boxed{29}$ Die folgende Schritten ergeben eine Beweis dafür, dass die Polynomfolge

$$f_n(z) := \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n$$

lokal gleichmässig gegen $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ konvergiert und insbesondere gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \exp z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

(a) Zeige

$$\Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n^k (n-k)!} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

(b) Zeige

$$\Big|1 - \frac{n!}{n^k(n-k)!}\Big| \leq \frac{k(k-1)}{n}, \quad n, k \in \mathbb{N},\ n \geq 1,\ n \geq k.$$

Hinweis: Zeige und verwende, dass $|1 - a^k| \leq (1-a)k$ falls $0 \leq a \leq 1$.

(c) Folgere

$$\Big|\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \Big(1 + \frac{z}{n}\Big)^n\Big| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n}, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ n \geq 1,$$

und schliesse daraus, dass f_n lokal gleichmässig gegen exp konvergiert.

$\boxed{30}$ Berechne $\log i$, $\log \frac{-1\pm i}{\sqrt{2}}$, $i^{1/i}$ und $i^{\sqrt{i}}$.

$\boxed{31}$ Beweise:

(a) $(zw)^\alpha = z^\alpha w^\alpha$ falls $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z, w \in \mathbb{C}^-$ mit $|\arg z + \arg w| < \pi$.

(b) $\log(z^\alpha) = \alpha \log z$ falls $\alpha \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^-$ mit $|\operatorname{Im}(\alpha \log z)| < \pi$.

(c) $(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ falls $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^-$ mit $|\operatorname{Im}(\alpha \log z)| < \pi$.

(d) $(i \cdot \frac{-1+i}{\sqrt{2}})^i \neq i^i \cdot (\frac{-1+i}{\sqrt{2}})^i$, $\log(e^{2\pi i}) \neq 2\pi i \log e$, und $(e^{2\pi i})^i \neq e^{2\pi i \cdot i}$.

$\boxed{32}$ Zeige, dass $\sinh : \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\} \to \mathbb{C} \setminus \{iy \in i\mathbb{R} : |y| \geq 1\}$ bijektiv ist, und beweise folgende Formel für die Umkehrfunktion:

$$\operatorname{arcsinh} w = \log(w + \sqrt{1 + w^2}), \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{iy \in i\mathbb{R} : |y| \geq 1\}.$$

Bestimme die Ableitung von $\operatorname{arcsinh} w$.

$\boxed{33}$ Zeige, dass

$$\operatorname{arcsinh} w = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{4^n n!^2} \frac{w^{2n+1}}{2n+1}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Hinweis: Entwickle die Ableitung aus $\boxed{32}$ und integriere gliedweise.

$\boxed{34}$ Zeige, dass $\tan : \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\} \to \mathbb{C} \setminus \{iy \in i\mathbb{R} : |y| \geq 1\}$ bijektiv ist, und beweise folgende Formel für die Umkehrfunktion:

$$\arctan w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iw}{1-iw}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus \{iy \in i\mathbb{R} : |y| \geq 1\}.$$

Entwickle $\arctan w$ in eine Potenzreihe um $0 \in \mathbb{C}$.

Komplexe Integration, Cauchy Integralsatz und Anwendungen

$\boxed{35}$ Berechne die folgenden Wegintegrale:

(a)

$$\int_{[0,1+i]} (z-2i)^2 \, dz, \quad \int_{\partial Q} \overline{z} \, dz, \quad \int_{\partial \mathbb{D}} |z|^2 \, dz,$$

wobei $Q := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in [0,1]\}$; nach Konvention ist der Rand ∂Q ($\partial \mathbb{D}$ usw.) immer mathematisch positiv orientiert.

(b) Bereche

$$\int_{\partial D_r(0)} \operatorname{Re} z \, dz$$

zunächst direkt und dann unter Verwendung der Formel

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{r^2}{z}\Big), \quad z \in \partial D_r(0).$$

$\boxed{36}$ Zeige: Der Hauptzweig des Logarithmus ist gegeben durch

$$\log z = \int_\gamma \frac{1}{z} \, dz, \quad z \in \mathbb{C}^-,$$

wobei γ ein beliebiger Weg von 1 nach z in $\mathbb{C}^-$ ist. Hinweis: Überprüfe die Formel zuerst für den Weg γ_0 bestehend aus dem Streckenelement, das von 1 nach $|z|$ führt, und dem Kreisbogen von $|z|$ nach z (Mittelpunkt im Ursprung). Argumentiere dann, dass die Formel auch für alle weiteren Wege von 1 nach z in $\mathbb{C}^-$ gilt.

$\boxed{37}$ Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich. Sei (f_n) eine Folge stetiger, integrabler Funktionen auf U, die lokal gleichmässig gegen eine Funktion f konvergiert. Zeige, dass auch f integrabel ist.

$\boxed{38}$ Seien U_1 und U_2 Gebiete in $\mathbb{C}$, sodass $U_1 \cap U_2$ ebenfalls ein Gebiet ist. Sei $f \in C(U_1 \cup U_2)$ so, dass $f|_{U_1}$ und $f|_{U_2}$ jeweils integrabel sind. Beweise, dass auch f integrabel auf $U_1 \cup U_2$ ist. Bleibt die Aussage richtig, wenn $U_1 \cap U_2$ nicht zusammenhängend ist?

$\boxed{39}$ Verwende die Potenzreihenentwicklung, um die folgenden Wegintegrale zu bestimmen:

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{\sin z}{z} \, dz, \quad \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{e^z}{z^2} \, dz.$$

$\boxed{40}$ Betrachte $U = \mathbb{C} \setminus [0,1]$ und $f : U \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/(z(z-1))$. Zeige, dass $\int_\gamma f \, dz = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ in U.

$\boxed{41}$ Bestimme den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)^2}\, dx.$$

Hinweis: Wende Cauchys Theorem auf $f(z) = 1/(z+i)^2$ und den Weg $[-R, R]+\gamma_R$ an, wobei γ_R den Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius R und Mittelpunkt 0 durchläuft. Führe den Grenzübergang $R \to \infty$ durch.

$\boxed{42}$ Die **Poisson Integralformel**. Sei f holomorph in einer Umgebung der abgeschlossenen Kreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$.

(a) Zeige, dass für jedes $w \in \mathbb{D}$ die Funktion $z \mapsto f(z)/(1-\overline{w}z)$ holomorph in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ ist.

(b) Leite die Poisson Integralformel für holomorphe Funktionen her:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\frac{1-|z|^2}{|\zeta - z|^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\, dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

(c) Zerlegen wir $f = u + iv$ in Real- und Imaginärteil, so gilt:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{u(\zeta)}{\zeta}\frac{\zeta + z}{\zeta - z}\, d\zeta + iv(0), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Hinweis: Zeige:

- Die rechte Seite der Gleichung definiert eine in holomorphe Funktion $g(z)$ auf $\mathbb{D}$.
- $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$ und $f(0) = g(0)$.
- Eine holomorphe Funktion, deren Realteil identisch verschwindet, ist lokal konstant.

(d) Folgere: Sei u eine reellwertige Funktion, die harmonisch in einer Umgebung von $\overline{\mathbb{D}}$ ist. Dann gilt die Poisson Integralformel für harmonische Funktionen:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(e^{it})\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\, dt, \quad z \in \mathbb{D}.$$

$\boxed{43}$ Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Bereich. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) U is zusammenhängend.

(b) Die Algebra $\mathcal{H}(U)$ ist nullteilerfrei, d.h., falls $f, g \in \mathcal{H}(U)$ und $fg = 0$ dann ist $f = 0$ oder $g = 0$.

$\boxed{44}$ Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes nicht-konstante komplexe Polynom mindestens eine komplexe Nullstelle hat. Beweise den Fundamentalsatz unter Verwendung des Satzes von Liouville.

$\boxed{45}$ Sei f eine ganze Funktion. Beweise: Existieren positive Konstanten $M, r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$, sodass $|f(z)| \le M|z|^n$ für alle $|z| > r$, dann ist f ein Polynom vom Grad $\le n$.

$\boxed{46}$ Die **Riemannsche Zetafunktion**. Zeige, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ in jeder Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1 + \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, normal konvergiert. Schliesse daraus, dass $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^z$ eine holomorphe Funktion in der Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ ist.

Biholomorphe Abbildungen und Möbiustransformationen

$\boxed{47}$ Bestimme die Möbiustransformation f, welche $f(0) = 1$, $f(1) = (1+i)/\sqrt{2}$ und $f(\infty) = i$ erfüllt. Was ist das Bild unter f der positiven reellen Achse, der Geraden durch 0 und des Einheitskreises?

$\boxed{48}$ Zeige, dass die Abbildung $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}^-$, $f(z) = -z^2$, biholomorph ist. Finde eine biholomorphe Abbildung $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}^-$. Hinweis: Verwende die Cayleyabbildung.

$\boxed{49}$ Zeige, dass jede Möbiustransformation f das Doppelverhältnis erhält:

$$D(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = D(z_1, z_2, z_3, z_4)$$

für alle paarweise verschiedenen $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$, wobei

$$D(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}.$$

$\boxed{50}$ Beweise: Vier verschiedene Punkte in $\mathbb{C}$ liegen genau dann auf einem Kreis, wenn ihr Doppelverhältnis reell ist.