Gerald Teschl

Susanne Teschl

Mathematik für Informatiker

Band 2: Analysis und Statistik

2. Auflage

Mit 102 Abbildungen

Springer

Gerald Teschl
Universität Wien
Fakultät für Mathematik
Nordbergstraße 15
1090 Wien, Österreich
Gerald.Teschl@univie.ac.at
http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/

Susanne Teschl
Fachhochschule Technikum Wien
Höchstädtplatz 5
1200 Wien, Österreich
Susanne.Teschl@technikum-wien.ac.at
http://www.esi.ac.at/~susanne/

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

ISSN 1614-5216
ISBN-13 978-3-540-72451-3 Springer Berlin Heidelberg New York

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

Satz: Druckfertige LaTeX-Daten der Autoren
Herstellung: LE-TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig
Umschlaggestaltung: KünkelLopka Werbeagentur, Heidelberg
Gedruckt auf säurefreiem Papier 175/3180 YL - 5 4 3 2 1 0

Für Simon

Vorwort

Band 2

Der vorliegende zweite Band schließt nahtlos an den ersten an und bildet mit diesem eine Einheit. Aufgrund der Stoffauswahl ergibt sich zwar eine weitgehende Unabhängigkeit, aber bestimmte Grundbegriffe aus Band 1 werden natürlich vorausgesetzt. Wir werden Sie aber immer wieder an diese erinnern bzw. auf die entsprechenden Abschnitte in Band 1 verweisen. Insbesondere möchten wir das gleich an dieser Stelle tun, indem wir auf das dortige Vorwort verweisen.

Computereinsatz

Auch in diesem Band haben wir Beispiele, bei denen uns der Computereinsatz sinnvoll erscheint, mit „→CAS“ gekennzeichnet und im zugehörigen Abschnitt „Mit dem digitalen Rechenmeister“ mit `Mathematica` gelöst. Die Notebooks dazu sind wie gewohnt auf der Website zum Buch (URL siehe unten) zu finden. Dort finden Sie auch die Einführung in `Mathematica` aus Band 1.

Eine Bitte...

Auch in Band 2 haben wir fleißig Unkraut gejätet, es sind aber trotz aller Bemühungen sicher noch ein paar unentdeckte Fehler darin. Wir freuen uns daher, wenn Sie uns diese mitteilen. Auch Ihr Feedback und Verbesserungsvorschläge sind herzlich willkommen. Die Liste der Korrekturen sowie Ergänzungen finden Sie im Internet unter:

http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-mfi/

Zur zweiten Auflage

An dieser Stelle möchten wir uns zunächst für die zahlreichen Rückmeldungen zur ersten Auflage bedanken. Große Änderungen hat es nicht gegeben. Dafür aber eine Reihe kleinerer Detailverbesserungen auf Anregungen unserer Leserinnen und Leser.

Danksagungen

Unsere Studentinnen und Studenten haben uns auch für diesen Band mit Hinweisen auf Druckfehler und mit Verbesserungsvorschlägen versorgt. Hervorheben möchten wir dabei wieder Markus Horehled, Rudolf Kunschek, Alexander-Philipp Lintenhofer, Christian Scholz, Markus Steindl und Gerhard Sztasek, die sich durch besonders lange Listen ausgezeichnet haben. Unsere Kollegen Oliver Fasching, Markus Fulmek, Florian Wisser und Karl Unterkofler haben wieder zahlreiche Abschnitte kritisch gelesen und uns mit wertvollem Feedback unterstützt. Unschätzbar war insbesondere die Hilfe von Johanna Michor und Wolfgang Timischl. Ihnen allen möchten wir herzlich danken!

Die Open-Source-Projekte (vor allem TeX, LaTeX, TeXShop und Vim), mit welchen diese Seiten erstellt wurden, sollen nicht unerwähnt bleiben.

Wir danken dem Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit, die sich auch bei diesem Band bewährt hat.

Viel Freude und Erfolg mit diesem Buch!

Wien, im Mai 2007 Gerald und Susanne Teschl

Inhaltsverzeichnis

Analysis

Anhang

19

Differentialrechnung I

19.1 Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Betrachten wir die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Sie ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht definiert, es gibt hier also keinen Funktionswert. Wir können uns nun fragen, wie sich die Funktionswerte verhalten, wenn sich das Argument x dem Wert 0 *nähert*. Man könnte vermuten, dass die Funktionswerte dann wegen des Faktors $\frac{1}{x}$ über alle Schranken wachsen. Andererseits verschwindet aber auch $\sin(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$, daher könnte man auch vermuten, dass die Funktionswerte sich immer mehr dem Wert 0 nähern. Es könnte aber auch sein, dass sich die Nullstelle des Zählers und des Nenners in irgendeiner Weise „aufheben"!

Nehmen wir als Nächstes den Graphen von f zu Hilfe, der in Abbildung 19.1 dargestellt ist. Daraus sehen wir, dass sich die Funktionswerte $f(x)$ immer mehr

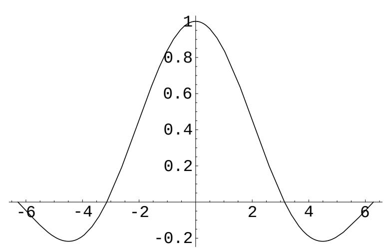

Abbildung 19.1. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

dem Wert 1 nähern, je näher x dem Wert 0 kommt! Das bestätigt auch die folgende Wertetabelle (Winkel im Bogenmaß):

x	± 0.1	± 0.01	± 0.001
$f(x)$	0.99833416	0.9999833	0.9999998

Die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ist also an der Stelle $x_0 = 0$ zwar nicht definiert, die Funktionswerte verhalten sich aber bei Annäherung von x an 0 so, als ob der Funktionswert an der Stelle 0 gleich 1 wäre. Man sagt, dass die Funktion $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

an der Stelle $x_0 = 0$ den *Grenzwert* $y_0 = 1$ hat. Präzise können wir den Grenzwert mithilfe von Folgen definieren (vergleiche Abschnitt „Folgen" in Band 1):

Definition 19.1 Sei $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ (muss nicht notwendigerweise im Definitionsbereich D von f liegen). Wenn für jede Folge $x_n \in D \backslash \{x_0\}$ mit $x_n \to x_0$ gilt, dass $f(x_n) \to y_0$, dann nennt man y_0 den **Grenzwert von f für x gegen x_0** und schreibt dafür kurz:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0.$$

Wie bei Folgen ist $y_0 = \pm\infty$ erlaubt und wir sprechen in diesem Fall wieder von bestimmter Divergenz.

Analog ist der Grenzwert im komplexen Fall definiert, indem man überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt.

Mit anderen Worten: y_0 ist der Grenzwert von f für x gegen x_0, wenn die Funktionswerte $f(x)$ dem Wert y_0 beliebig nahe kommen, sobald die zugehörigen Argumente x dem Wert x_0 beliebig nahe kommen.

Etwas formaler gesagt („ε-δ-Definition des Grenzwertes"): Für ein beliebiges vorgegebenes $\varepsilon > 0$ existiert ein zugehöriges $\delta > 0$, sodass für alle x mit $|x - x_0| \le \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon$ gilt.

In diesem Sinn gilt in unserem Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Diesen Grenzwert kann man zum Beispiel so berechnen: Aus der Abschätzung $\sin(x) \le x \le \sin(x) + 1 - \cos(x)$ für $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (siehe Abschnitt 18.3) folgt:

$$0 \le 1 - \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1 - \cos(x)}{x}.$$

Für die rechte Seite gilt

$$\frac{1 - \cos(x)}{x} = \frac{x}{1 + \cos(x)} \frac{1 - \cos(x)^2}{x^2} = \frac{x}{1 + \cos(x)} \frac{\sin(x)^2}{x^2} \le x$$

wobei $\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1$ und im letzten Schritt $1 + \cos(x) \ge 1$ und nochmals $\sin(x) \le x$ verwendet wurde. Der letzte Ausdruck konvergiert gegen Null wenn $x \to 0$ und damit folgt die Behauptung.

In diesem Beispiel legt der Grenzwert nahe, die Lücke im Definitionsbereich zu schließen, indem wir $f(0) = 1$ festlegen.

Natürlich kann es vorkommen, dass eine Funktion gar keinen Grenzwert für x gegen x_0 besitzt (so wie ja auch nicht jede Folge konvergent ist).

Der Begriff des Grenzwertes ermöglicht es, das Verhalten der Funktion in der Umgebung einer Stelle x_0 zu untersuchen. Das ist zum Beispiel dann nützlich, wenn es $f(x_0)$ gar nicht gibt, so wie bei unserem Beispiel zu Beginn. Mithilfe des Grenzwertes konnten wir herausfinden, ob der Funktionsgraph hier eine „Lücke", einen „Sprung" oder eine Polstelle, usw. hat.

Manchmal ist es notwendig zu unterscheiden, ob man sich x_0 von links ($x < x_0$) oder von rechts ($x > x_0$) nähert (weil es z. B. links und rechts von x_0 verschiedene

Funktionsvorschriften gibt). In diesem Fall spricht man, wenn sie existieren, vom **linksseitigen Grenzwert** bzw. vom **rechtsseitigen Grenzwert**. Schreibweise:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to x_0+} f(x).$$

Der Grenzwert existiert genau dann, wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert (existieren und) gleich sind.

Aus den Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Folgen (vergleiche Abschnitt „Folgen" in Band 1) ergeben sich die analogen Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen:

Satz 19.2 (Rechenregeln für Grenzwerte) Sind f und g Funktionen mit $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim_{x\to x_0} g(x) = b$, so gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) &= c\cdot a \quad \text{für ein beliebiges } c\in\mathbb{R}\\
\lim_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x)) &= a\pm b\\
\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) &= a\cdot b\\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{a}{b}, \quad \text{falls } b\neq 0
\end{aligned}$$

Beispiel 19.3 Grenzwert einer Funktion

Wie verhalten sich die Funktionswerte für x gegen x_0?

a) $f(x) = 2x+1$, $x_0 = 3$.

b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2+1, & x<2\\ -x+5\,, & x>2 \end{cases}, \qquad \text{und } x_0 = 2.$$

Lösung zu 19.3

a) Sei x_n eine beliebige Folge, die gegen 3 konvergiert. Dann ist $f(x_n) = 2x_n+1$ nach den Rechenregeln für konvergente Folgen eine konvergente Folge mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 2\cdot 3+1 = 7$. Somit ist der Grenzwert der Funktion nach Definition 19.1
$$\lim_{x\to 3}(2x+1) = 7.$$
Dieses Beispiel ist natürlich nicht besonders aufregend, weil die Funktion an der Stelle $x_0 = 3$ definiert ist und die Funktionswerte sich für x gegen 3 dem Funktionswert $f(3) = 7$ nähern, so wie man es sich von einer „braven" Funktion erwartet (etwas professioneller werden wir später solche Funktionen „stetig" nennen).

b) Links von $x_0 = 2$ ist $f(x) = \frac{1}{2}x^2+1$ (eine Parabel), rechts von $x_0 = 2$ ist $f(x) = -x+5$ (eine Gerade). Wenn sich x von links an $x_0 = 2$ annähert, erhalten wir den linksseitigen Grenzwert:
$$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-}(\frac{1}{2}x^2+1) = \frac{1}{2}2^2+1 = 3.$$

Bei Annäherung von rechts gegen 2 ergibt sich der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} (-x+5) = -2+5 = 3.$$

Also ist linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert = 3 und damit gleich *der* Grenzwert für x gegen 2 (siehe Abbildung 19.2). ■

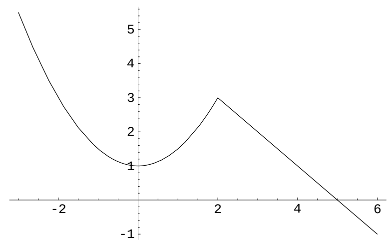

Abbildung 19.2. Stückweise definierte Funktion aus Beispiel 19.3 b)

Nun zu typischen Beispielen von Funktionen, die *keinen* Grenzwert für x gegen eine bestimmte Stelle x_0 besitzen:

Beispiel 19.4 Funktionen ohne Grenzwert
Wie verhalten sich die Funktionswerte für x gegen $x_0 = 0$?
a)

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \qquad \text{(Vorzeichenfunktion)}$$

b) $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = \frac{1}{x}$

Lösung zu 19.4

a) Wenn wir der Stelle 0 mit dem Argument x von links beliebig nahe kommen, so sind die Funktionswerte immer -1, der linksseitige Grenzwert ist also

$$\lim_{x\to 0-} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x\to 0-} (-1) = -1.$$

Wenn wir von rechts gegen 0 gehen, so sind dabei die Funktionswerte immer 1, d.h. der rechtsseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x\to 0+} \operatorname{sign}(x) = \lim_{x\to 0+} (1) = 1.$$

Linksseitiger Grenzwert und rechtsseitiger Grenzwert existieren zwar, sind aber ungleich. Graphisch bedeutet das: Die Funktion hat einen Sprung (siehe Abbildung 19.3; beachten Sie, dass der Computer bei Sprungstellen meist links- und rechtsseitigen Grenzwert verbindet).

b) Abbildung 19.3 zeigt, dass $f(x)$ für x gegen $x_0 = 0$ immer stärker oszilliert. Wir vermuten deshalb, dass für x gegen 0 gar kein Grenzwert existiert. Wählen wir zum Beispiel die Nullfolge $x_n = \frac{1}{n\pi}$. Hätte die Funktion für x gegen 0 einen Grenzwert, so müsste die Folge $f(x_n)$ gegen diesen Grenzwert konvergieren. Die Werte $f(x_n) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ springen aber immer zwischen -1 und 1 hin und her. Von einem Grenzwert der Funktion für x gegen 0 kann also keine Rede sein.

c) Für x gegen 0 (egal, ob von links oder von rechts) wachsen die Funktionswerte über jede Schranke (siehe Abbildung 19.3):

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

d) Abbildung 19.3 zeigt, dass das Verhalten links und rechts von 0 unterschiedlich ist: Für x gegen $0+$ wachsen die Funktionswerte über jede Schranke, für x gegen $0-$ fallen sie unter jede Schranke. Also:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

■

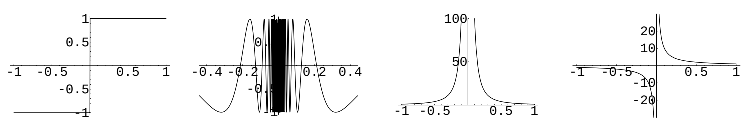

Abbildung 19.3. Die Funktionen $\operatorname{sign}(x)$, $\cos(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$ aus Beispiel 19.4

Bisher haben wir mit der Stelle x_0, der wir uns nähern, immer irgendeine reelle Zahl gemeint. Oft interessiert man sich für das **Verhalten einer Funktion für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$**, das so genannte **asymptotische Verhalten**.

Beispiel 19.5 Asymptotisches Verhalten
Wie verhalten sich die Funktionen
a) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \to \pm\infty$, b) $f(x) = \frac{3x+1}{4x-2}$ für $x \to \pm\infty$?

Lösung zu 19.5

a) Für eine beliebige Folge $x_n \to \infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Also ist $\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}) = 0$. Analog ist $\lim_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}) = 0$.

b) In Abbildung 19.4 sehen wir, dass sich die Funktionswerte für $x \to \pm\infty$ immer mehr dem Wert $\frac{3}{4}$ nähern. Diesen Grenzwert finden wir rechnerisch mithilfe einer einfachen Umformung (analog zur Vorgehensweise bei Folgen, vergleichen Sie Abschnitt „Folgen" in Band 1). Wir dividieren dazu Zähler und Nenner von $f(x)$ durch die höchste vorkommende Potenz von x (das ändert ja nichts an der

Funktion) und erhalten nun aber eine Form, von der man den Grenzwert ablesen kann:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3+\frac{1}{x}}{4-\frac{2}{x}}\right) = \frac{3+0}{4-0} = \frac{3}{4}.$$

Analog argumentieren wir für $x \to -\infty$.

Alternativ hätten wir auch die Polynomdivision zu Hilfe nehmen können:

$$f(x) = \frac{3x+1}{4x-2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{2(4x-2)}.$$

Da der Grenzwert von $\frac{5}{2(4x-2)}$ für $x \to \pm\infty$ gleich 0 ist, bleibt asymptotisch nur mehr $\frac{3}{4}$. ■

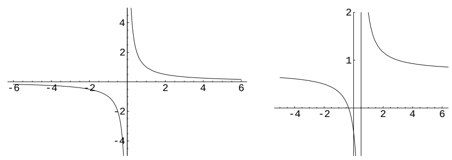

Abbildung 19.4. Die Funktionen $\frac{1}{x}$ und $\frac{3x+1}{4x-2}$ aus Beispiel 19.5

Halten wir die Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ von einigen elementaren Funktionen fest:

Satz 19.6 (Asymptotik elementarer Funktionen)

- $\lim_{x\to\infty} x^a = \infty$ für beliebiges $a > 0$; Beispiele: x^3 oder $\sqrt{x}$.
- $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0$ für beliebiges $a > 0$; Beispiel: $\frac{1}{\sqrt{x}}$.
- $\lim_{x\to-\infty} x^n = (-1)^n\infty$ für $n \in \mathbb{N}$; Beispiele: x^2 oder x^3.
- $\lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^{a\,x} = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{ax} = 0$ für $a > 0$.
- $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

Zusammen mit den Grenzwertregeln kann nun eine Vielzahl von Beispielen gelöst werden.

Beispiel 19.7 Logistisches Wachstum
Beim (kontinuierlichen) logistischen Wachstumsmodell ist die Größe einer Population zur Zeit t gegeben durch

$$L(t) = \frac{S}{1-(1-\frac{S}{P_0})\mathrm{e}^{-at}}, \qquad S, P_0, a > 0.$$

Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} L(t)$.

Lösung zu 19.7 Nach den Rechenregeln für Grenzwerte, zusammen mit dem Wissen, dass $\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-at} = 0$ (falls $a > 0$), folgt

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = \frac{S}{1-(1-\frac{S}{P_0})\cdot 0} = S.$$

■

Wenn eine Funktion sowohl einen Funktionswert $f(x_0)$ als auch einen Grenzwert für $x \to x_0$ besitzt, dann wünschen wir uns natürlich, dass die beiden übereinstimmen. Anschaulich bedeutet das, dass kleine Abweichungen des Arguments von x_0 auch nur kleine Abweichungen der Funktionswerte von $f(x_0)$ nach sich ziehen.

Mit anderen Worten: Wenn die x in der Nähe von x_0 bleiben, so bleiben die $f(x)$ in der Nähe von $f(x_0)$: „Kleine Fehler im Input bewirken kleine Fehler im Output".

Diese Eigenschaft einer Funktion hat einen eigenen Namen:

Definition 19.8 Eine Funktion f heißt **stetig an der Stelle** x_0, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist. Das heißt, dass für jede Folge x_n mit $x_n \to x_0$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$$

gilt. Ist die Funktion f *an jeder* Stelle ihres Definitionsbereiches D stetig, so sagt man, f **ist stetig (auf** D**)**.

Bei stetigen Funktionen können also Grenzwerte ins Argument hineingezogen werden.

Die Menge der auf D definierten stetigen Funktionen wird mit $C(D)$ oder auch $C^0(D)$ bezeichnet („stetig" heißt auf Englisch *continuous*).

Beispiel 19.9 Stetigkeit
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Stetigkeit:
a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \text{sign}(x)$

Lösung zu 19.9

a) Für jede beliebige Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{x\to x_0}(2x+1) = 2x_0 + 1 = f(x_0)$. Also ist f stetig (auf $\mathbb{R}$).
b) Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\lim_{x\to x_0} |x| = |x_0|$, daher ist die Funktion stetig.
c) Die Funktion $\text{sign}(x)$ ist stetig an jeder Stelle $x_0 \neq 0$. Für $x_0 = 0$ existiert aber kein Grenzwert, $\text{sign}(x)$ ist hier also auch nicht stetig. ■

Grob gesagt ist eine Funktion stetig, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen. Ein Knick schadet der Stetigkeit also nicht, ein Sprung bedeutet aber eine Unstetigkeitsstelle!

Insbesondere muss der Funktionsgraph einer stetigen Funktion auf dem Weg von $f(a)$ nach $f(b)$ jeden Wert, der zwischen diesen beiden liegt, annehmen. Das sagt der

Satz 19.10 (Zwischenwertsatz) Ist eine Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig, so nimmt sie jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Daraus folgt, dass es in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle geben muss, falls $f(a)$ und $f(b)$ verschiedene Vorzeichen haben.

Möchte man in der Praxis wissen, ob eine Funktion stetig ist, so verwendet man (wie bei der Berechnung von Grenzwerten) nicht die Definition selbst, sondern folgende Regeln, die aus den analogen Regeln für Grenzwerte (Satz 19.2) folgen:

Satz 19.11 Sind $f(x)$ und $g(x)$ stetig an der Stelle x_0, so sind auch Summe $f(x) + g(x)$, Produkt $f(x)g(x)$, Quotient $f(x)/g(x)$ (falls $g(x_0) \neq 0$), Verkettung $f(g(x))$ (falls definiert) und Umkehrabbildung $f^{-1}(x)$ (falls f streng monoton) stetig an der Stelle x_0.

Daraus folgt zum Beispiel, dass alle Polynome und sogar rationale Funktionen in ihrem Definitionsbereich stetig sind.

Insbesondere ist also die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ stetig. Das verwundert Sie vielleicht, da diese Funktion ja bei Annäherung an $x = 0$ unbeschränkt ist. Aber da die Funktion für $x = 0$ gar nicht definiert ist, macht es auch keinen Sinn, nach der Stetigkeit bei 0 zu fragen! Oft sagt man aber trotzdem, dass $f(x) = \frac{1}{x}$ unstetig bei $x = 0$ ist und meint damit, dass $\frac{1}{x}$ auch durch geeignete Wahl eines Funktionswertes an der Stelle $x = 0$ nicht zu einer stetigen Funktion gemacht werden kann.

Alle Funktionen, die wir in den vorherigen Abschnitten kennen gelernt haben, sind stetig:

Satz 19.12 Die Polynomfunktion, die Potenzfunktion, die Exponentialfunktion, die Logarithmusfunktion sowie die trigonometrischen Funktionen sind in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.

Mit diesem Rüstzeug im Gepäck können wir folgende Funktionen auf Stetigkeit untersuchen.

Beispiel 19.13 Stetigkeit elementarer Funktionen
Sind die Funktionen stetig?
a) $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$ b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x + \sin(x)$ c) $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$

Lösung zu 19.13

a) Jedes Polynom ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, so auch $f(x) = 5x^2 - 2x + 1$.
b) $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x + \sin(x)$ ist als Produkt bzw. Summe von stetigen Funktionen wieder stetig.
c) $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ ist als Verkettung von $\cos(x)$ und $\frac{1}{x}$ stetig für $x \neq 0$ (an der Stelle $x = 0$ ist die Funktion nicht definiert). ■

Zum Schluss wollen wir noch festhalten, dass stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum und Minimum annehmen:

Satz 19.14 (Weierstraß) Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetige reelle Funktion f nimmt auf diesem Intervall ihr Maximum und Minimum an. Insbesondere ist f auf $[a, b]$ beschränkt.

Abgeschlossenheit ist wichtig für diesen Satz! Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ ist auf $(0, 1)$ stetig, sie hat aber weder ein Minimum noch ein Maximum und ist sogar unbeschränkt.

19.2 Die Ableitung einer Funktion

In der Praxis treten oft komplizierte Funktionen auf, die nur schwer zu untersuchen sind. Die Strategie in der Mathematik ist, diese komplizierten Funktionen durch einfachere zu approximieren und dann Eigenschaften der komplizierten Funktion von der Approximation abzulesen. Ein wesentliches Hilfsmittel ist dabei die Differentialrechnung, die versucht, eine Funktion durch eine Gerade, die Tangente, zu approximieren.

Angenommen, wir möchten eine gegebene Funktion $f(x)$ in der Nähe eines bestimmten Punktes $(x_0, f(x_0))$ möglichst gut approximieren. Die einfachste Möglichkeit wäre natürlich, $f(x)$ durch die konstante Funktion $f(x) = f(x_0)$ zu ersetzen. Etwas besser wollen wir es aber schon haben und deshalb versuchen wir, $f(x)$ durch eine Gerade anzunähern, die durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ geht, also

$$f(x) \approx f(x_0) + k(x - x_0).$$

Die Frage ist nun, wie dabei die Steigung k gewählt werden soll, damit eine möglichst gute Approximation erreicht wird. Wählen wir zum Beispiel eine zweite Stelle x_1 in der Nähe von x_0, so können wir die Steigung so wählen, dass die Gerade durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ geht:

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Man nennt eine derartige Gerade durch zwei Punkte des Graphen von f eine **Sekante** (siehe Abbildung 19.5). Es ist klar, dass die Approximation im Punkt $(x_0, f(x_0))$

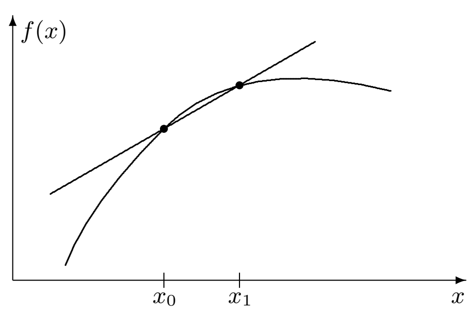

Abbildung 19.5. Sekante

um so besser wird, je näher x_1 bei x_0 liegt. Die optimale Steigung ist also gegeben durch

$$k_0 = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

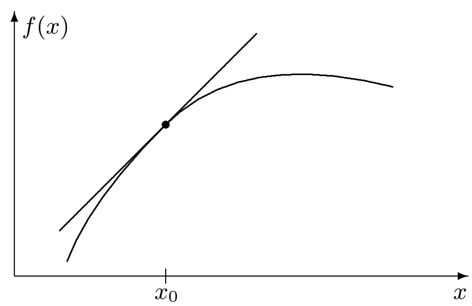

Abbildung 19.6. Tangente

vorausgesetzt, dieser Grenzwert existiert. Diese optimale Gerade hat die Eigenschaft, dass sie den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ gerade berührt und wird deshalb **Tangente** genannt (siehe Abbildung 19.6).

Definition 19.15 Die Funktion f heißt **differenzierbar** an der Stelle x_0 ihres Definitionsbereiches, wenn der Grenzwert der Sekantensteigungen

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ und heißt **Ableitung** oder **Differential** von f in x_0. Man schreibt auch $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$. Die Gleichung der Tangente durch $(x_0, f(x_0))$ lautet dann:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Wenn f in *jedem* Punkt ihres Definitionsbereiches D differenzierbar ist, dann ist die **Ableitung** f' ebenfalls eine Funktion, nämlich jene, die jedem x die Ableitung $f'(x)$ an der Stelle x zuordnet. Ist f' stetig, so nennt man f **stetig differenzierbar** auf D.

Die Menge aller auf D stetig differenzierbaren Funktionen wird mit $C^1(D)$ bezeichnet.

Aus der Definition der Ableitung als Grenzwert von $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ ist ersichtlich, dass die Ableitung auch als **lokale Änderungsrate** der Funktion aufgefasst werden kann:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \approx f'(x_0) \quad \text{für } x_1 \text{ nahe bei } x_0.$$

Hier haben wir die Steigung der Sekante durch zwei (nahe beinander liegende) Punkte durch die Steigung der Tangente in einem der beiden Punkte angenähert. Wenn sich also x um $\Delta x = x_1 - x_0$ ändert, dann ändert sich $f(x)$ um $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Insbesondere ist $f(x)$ in der Nähe von x_0 streng monoton wachsend, wenn $f'(x_0) > 0$ ist und streng monoton fallend, wenn $f'(x_0) < 0$.

Wenn t als Zeit interpretiert wird, so schreibt man meistens $\dot{f}(t)$ anstelle von $f'(t)$ bzw. $\frac{df}{dt}$. Wenn zum Beispiel $s(t)$ den zurückgelegten Weg eines Fahrzeuges zum Zeitpunkt t beschreibt, so ist $\dot{s}(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t.

Die Schreibweise $\frac{df}{dx}$ geht auf den deutschen Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) und die Schreibweise $\dot{f}$ auf den englischen Physiker und Mathematiker Isaac Newton (1643–1727) zurück. Leibniz und Newton haben die Grundlagen der Differentialrechnung etwa zur gleichen Zeit, aber unabhängig voneinander, gelegt.

Beispiel 19.16 Differenzierbare Funktionen
Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar?
a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = |x|$ c) $f(x) = \operatorname{sign}(x)$

Lösung zu 19.16

a) Wir müssen untersuchen, für welche x_0 des Definitionsbereiches der Grenzwert $f'(x_0)$ existiert. Für eine beliebige Stelle x_0 ist

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{(2x+1) - (2x_0+1)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{2(x - x_0)}{x - x_0} = 2.$$

Die Funktion $f(x)$ ist also überall differenzierbar (x_0 war ja eine *beliebige* Stelle) und ihre Ableitung ist überall gleich 2. Die gleiche Rechnung zeigt allgemein, dass die Funktion $f(x) = k\,x + d$ überall differenzierbar ist und dass $f'(x) = k$ gilt.

b) Für $x_0 \neq 0$ ist die Funktion

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

differenzierbar (analog wie a)):

$$f'(x_0) = \begin{cases} -1, & x_0 < 0 \\ 1, & x_0 > 0 \end{cases} .$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ist sie aber nicht differenzierbar, denn der Grenzwert der Sekantensteigungen durch Punkte rechts von $x_0 = 0$ ist 1, der Grenzwert von links ist hingegen -1.

Denn der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1,$$

und der rechtsseitige ist

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1.$$

Am Knickpunkt ist die Funktion also nicht differenzierbar.

c) (Vergleiche Beispiel 19.4 a).) Interessant ist wieder nur $x_0 = 0$ (an allen anderen Stellen $x_0 \neq 0$ ist die Funktion differenzierbar mit Ableitung $f'(x_0) = 0$). Bei $x_0 = 0$ besitzt die Funktion keine Ableitung. Denn für Punkte rechts von $x_0 = 0$ ist der Grenzwert der Sekantensteigungen gleich 0. Und für Punkte links von $x_0 = 0$ wachsen die zugehörigen Sekantensteigungen über alle Grenzen (im Grenzwert wäre die Tangente, wenn man von links kommt, senkrecht).

Denn der linksseitige Grenzwert ist

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-1-1}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2}{x} = \infty,$$

und der rechtsseitige ist

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{1-1}{x-0} = 0.$$

■

Grob gesagt hat eine differenzierbare Funktion keine Knicke, und schon gar keine Sprünge, denn weder in einem Knickpunkt noch an einer Sprungstelle ist es sinnvoll, von einer Tangente zu sprechen. Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft als Stetigkeit:

Satz 19.17 Jede differenzierbare Funktion ist stetig (aber nicht umgekehrt).

Beispiel: $|x|$ ist an $x_0 = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar. Hier hat die Funktion einen Knick.

Die Approximation einer Funktion durch ihre Tangente wird auch als **Linearisierung** bezeichnet. Dabei wird durch $(x_0, f(x_0))$ eine Tangente gelegt und die Funktionswerte $f(x)$ für x nahe bei x_0 durch die Tangentenfunktionswerte $t(x)$ angenähert:

$$f(x) \approx t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Diese Näherungsformel kann wie folgt verwendet werden: Angenommen, wir benötigen $\sin(x)$ und wissen, dass nur kleine Winkel x auftreten können. So eine Situation tritt zum Beispiel bei Berechnungen in der Computergrafik oft auf. Muss diese Berechnung häufig ausgeführt werden (z. B. innerhalb einer Schleife), so kann man die Rechenzeit verkürzen, indem man $\sin(x)$ durch einen einfacheren Ausdruck ersetzt. Betrachten wir also Abbildung 19.7 und approximieren wir die Funktion

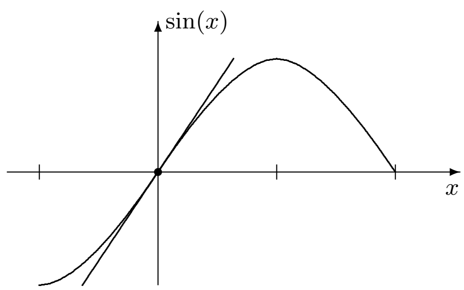

Abbildung 19.7. Tangente an die Kurve $y = \sin(x)$ an der Stelle $x = 0$.

$f(x) = \sin(x)$ durch die Tangente an die Kurve im Punkt $(0, 0)$. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Steigung der Tangente gleich $f'(0) = \cos(0) = 1$

ist. Unsere Näherung ist demnach $\sin(x) \approx x$. Für $x = 0.2$ erhalten wir zum Beispiel $\sin(0.2) \approx 0.2$. Der exakte Wert wäre $\sin(0.2) = 0.198669$. Wir haben also eine für viele Zwecke sicher ausreichende Näherung bekommen. Wie aus Abbildung 19.7 ersichtlich, wird die Güte der Approximation allerdings umso schlechter, je weiter x von 0 entfernt ist. Denn dann wird der Unterschied zwischen exaktem Wert und Näherungswert immer größer. Die Linearisierung einer Funktion gibt also eine **lokale** Näherung der Funktion.

Zum Abschluss geben wir noch einen zentralen Satz der Differentialrechnung mit vielen nützlichen Konsequenzen an:

Satz 19.18 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Die Funktion f sei auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Anschaulich bedeutet der Mittelwertsatz, dass es zwischen a und b eine Stelle x_0

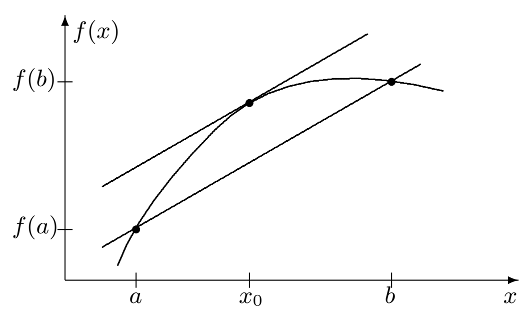

Abbildung 19.8. Mittelwertsatz der Differentialrechnung

gibt, an der die Steigung von f gleich der Steigung der Geraden durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist (siehe Abbildung 19.8).

Der Spezialfall $f(a) = f(b)$ ist als **Satz von Rolle** bekannt: Sind an zwei Punkten die Funktionswerte gleich, so gibt es dazwischen einen Punkt, an dem die Ableitung verschwindet.

19.2.1 Anwendung: Ableitungen in der Wirtschaftsmathematik

In der Wirtschaftsmathematik sind nicht nur die Ableitung, also die Änderungsrate einer Kenngröße f (Nachfrage, Kosten, Gewinn, ...), sondern auch weitere verwandte Begriffe in Gebrauch: Der Ausdruck

$$r = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_0)} = \frac{f(x_1)}{f(x_0)} - 1$$

wird als **relative** oder **prozentuelle Änderung** von f zwischen x_0 und x_1 bezeichnet. Das ist genau der Prozentsatz, um den sich $f(x_0)$ verändert, wenn sich x von x_0 auf x_1 ändert: $f(x_1) = f(x_0) + r\, f(x_0) = (1+r)f(x_0)$.

Für differenzierbares f gilt $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ in der Nähe von x_0 (Näherung durch die Tangente). Man kann die relative Änderung daher näherungsweise mithilfe der **relativen Änderungsrate**

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

berechnen:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{f(x_0)} \approx \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}(x_1 - x_0).$$

Die relative Änderungsrate ist also jener Faktor, mit dem man (kleine) absolute Änderungen von x näherungsweise in die entsprechenden relativen (prozentuellen) Änderungen von f umrechnen kann.

Die relative Änderungsrate kann auch als **logarithmische Ableitung** interpretiert werden, da $(\ln(f(x))' = f'(x)/f(x)$ gilt. Das folgt sofort aus der Kettenregel, die wir im nächsten Abschnitt lernen werden.

Betrachtet man die relative Änderung der Funktionswerte $f(x)$ im Verhältnis zur relativen Änderung der Variablenwerte x,

$$\frac{\frac{f(x_1)-f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{x_1-x_0}{x_0}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,\frac{x_0}{f(x_0)},$$

so erhält man im Grenzwert $x_1 \to x_0$ die so genannte **Elastizität**

$$\frac{f'(x_0)}{f(x_0)}x_0$$

von f an der Stelle x_0. Sie gibt den Faktor an, mit dem man eine (kleine) relative Änderung von x multiplizieren muss, um (näherungsweise) die entsprechende relative Änderung von $f(x)$ zu erhalten.

Es sei $D(p)$ die Nachfragefunktion (engl. *demand*) eines Produktes, also die Menge des Produktes, die abgesetzt werden kann, wenn man den Preis p festlegt. Ihre Elastizität

$$E(p) = \frac{D'(p)}{D(p)}p$$

wird als **Preiselastizität** der Nachfrage bezeichnet. Sie ist immer negativ, da in einem vernünftigen ökonomischen Modell die Nachfrage sinkt, wenn der Preis steigt. Ist der Betrag $|E(p)| > 1$, so spricht man von **elastischer Nachfrage** und bei $|E(p)| < 1$ von **unelastischer Nachfrage**.

Der Erlös $R(p)$ (engl. *revenue*) ergibt sich aus der abgesetzten Produktmenge multipliziert mit dem Preis

$$R(p) = p\, D(p).$$

Wann kann nun der Erlös durch eine Preiserhöhung gesteigert werden? Dazu berechnen wir die Änderungsrate (Ableitung) der Erlösfunktion, die auch **Grenzerlös** genannt wird,

$$R'(p) = D(p) + pD'(p) = D(p)\left(1 + p\frac{D'(p)}{D(p)}\right) = D(p)(1 - |E(p)|).$$

Hier wurde die Ableitung mithilfe der Produktregel $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ aus dem nächsten Abschnitt berechnet. Weiters haben wir $E(p) < 0$ und damit $E(p) = -|E(p)|$ verwendet.

Da der Erlös steigt, wenn die Änderungsrate $R'(p) > 0$ ist (positive Ableitung bedeutet ja Wachstum), erhalten wir folgende ökonomische Regel: Bei unelastischer Nachfrage steigt der Erlös bei einer Preiserhöhung, bei elastischer Nachfrage sinkt er.

19.3 Berechnung von Ableitungen

Wie Sie sicher schon erraten haben, werden wir zur Berechnung einer Ableitung nicht die Definition direkt verwenden, sondern einige wenige Ableitungsregeln:

Satz 19.19 (Ableitungsregeln) Die Funktionen f und g seien an der Stelle x differenzierbar. Dann sind auch $f + g$ und $c \cdot f$ (c ist eine Konstante) differenzierbar und es gilt (**Linearität**):

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= f'(x) + g'(x), \\ (c \cdot f)'(x) &= c \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Weiters sind auch $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ und $f \circ g$ differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x) &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad \textbf{„Produktregel“}, \\ (\frac{f}{g})'(x) &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}, \quad g(x) \neq 0, \quad \textbf{„Quotientenregel“}, \\ (f \circ g)'(x) &= f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \textbf{„Kettenregel“}. \end{aligned}$$

Die Ableitungsregeln folgen aus den Rechenregeln für Grenzwerte. Zum Beispiel folgt die Produktregel aus

$$\begin{aligned} f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)) \end{aligned}$$

womit sich

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} g(x) + f(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \end{aligned}$$

ergibt.

Damit können wir bereits die Ableitung beliebiger Polynome und rationaler Funktionen berechnen. Da $x' = 1$ gilt, folgt $(x^2)' = (x \cdot x)' = 2x$ und analog $(x^3)' = 3x^2$. Nun ist es nicht schwer, $(x^n)' = nx^{n-1}$ zu erraten.

Um die Ableitungen von komplizierteren Funktionen berechnen zu können, benötigen wir nun noch die Ableitung elementarer Funktionen.

Satz 19.20 (Ableitung elementarer Funktionen)

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	
c (Konstante)	0	
x^n	$n\,x^{n-1}$	$n \in \mathbb{Z}$
x^a	$a\,x^{a-1}$	$x > 0, a \in \mathbb{R}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$	$a \neq 1, a > 0$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln(a)$	$a > 0$
e^x	e^x	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	

Eine Tabelle mit weiteren nützlichen Ableitungen finden Sie in Abschnitt A.1.

Für die Berechnung dieser Ableitungen muss man ein wenig in die mathematische Trickkiste greifen. Zunächst verwenden wir

$$\log_a'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\log_a(x) - \log_a(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a(x_0)}{h}.$$

Daraus folgt

$$\log_a'(x_0) = \frac{1}{x_0} \lim_{h\to 0} \frac{x_0}{h} \log_a\left(1 + \frac{h}{x_0}\right) = \frac{1}{x_0} \log_a \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{x_0/h},$$

wobei wir im ersten Schritt die Rechenregeln für $\log_a(x)$ und im zweiten die Stetigkeit von $\log_a(x)$ verwendet haben. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

(vergleiche dazu das Beispiel zur Eulerschen Zahl im Abschnitt „Folgen“ in Band 1) folgt $\log_a'(x) = \frac{1}{x}\log_a(\mathrm{e}) = \frac{1}{x\ln(a)}$. Die Ableitung von a^x ergibt sich dann aus Satz 19.22. Ähnlich folgt die Ableitung von $\sin(x)$ aus den Additionstheoremen und $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ bzw. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+\cos(x)} \frac{\sin(x)^2}{x^2} = 0$. Die Ableitung von x^a folgt aus $x^a = \exp(a\ln(x))$ mit der Kettenregel.

Beispiel 19.21 Berechnung von Ableitungen
Berechnen Sie die Ableitung von:
a) $p(x) = 2x^3 + \sqrt{x} - 1$ b) $q(x) = \frac{x}{x^2-1}$ c) $h(x) = x^2\mathrm{e}^x$ d) $k(x) = \sqrt{3x^5 - x}$

Lösung zu 19.21

a) $p(x) = 2x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 1$, daher ist $p'(x) = 6x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
b) Mit der Quotientenregel erhalten wir $q'(x) = \frac{1\cdot(x^2-1) - x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$.
c) Mit der Produktregel berechnen wir $h'(x) = 2x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x(2+x)$.
d) Die Funktion $k(x) = k_1(k_2(x))$ ist eine Verkettung der Funktionen $k_1(x) = \sqrt{x}$ und $k_2(x) = 3x^5 - x$. Mit der Kettenregel folgt mit $k_1'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $k_2'(x) = 15x^4 - 1$, dass $k'(x) = k_1'(k_2(x))\,k_2'(x) = \frac{15x^4-1}{2\sqrt{3x^5-x}}$. ■

Für die Exponentialfunktion e^x gilt also, dass die Ableitung an jeder Stelle x gleich dem Funktionswert an dieser Stelle ist. (Das gilt *ausschließlich* für Funktionen der Form $c \cdot \mathrm{e}^x$, wobei c eine

Konstante ist.) Aus diesem Grund spricht man hier von „natürlichem Wachstum“ und dadurch erklärt sich die besondere Stellung der Zahl e.

Erinnern Sie sich daran, dass f genau dann umkehrbar ist, wenn f streng monoton ist. Insbesondere ist eine differenzierbare Funktion streng monoton wachsend, falls $f'(x) > 0$ und streng monoton fallend, falls $f'(x) < 0$ ist. Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

Satz 19.22 (Ableitung der Umkehrfunktion) Ist f differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$, so ist f streng monoton und die Ableitung der Umkehrfunktion ist gegeben durch

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Warum? Differenzieren wir beide Seiten von $f(f^{-1}(x)) = x$: Wir erhalten (links mit der Kettenregel) $f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$. Nun brauchen wir nur nach $(f^{-1})'(x)$ aufzulösen, und schon steht die Formel da. Zum Beispiel ergibt sich die Ableitung von $y = a^x$ aus $\log_a'(y) = 1/(y\ln(a))$ durch Differenzieren beider Seiten der Gleichung $\log_a(a^x) = x$ unter Verwendung der Kettenregel:

$$\frac{1}{a^x \ln(a)}(a^x)' = 1.$$

Beispiel 19.23 Ableitung der Umkehrfunktion
Berechnen Sie die Ableitung von $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$.

Lösung zu 19.23 $\arcsin(x)$ ist die Umkehrfunktion von $f(x) = \sin(x)$, die für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton ist. Die Ableitung $f'(x) = \cos(x)$ ist daher für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ungleich 0. Wir verwenden die Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion und $f'(x) = \cos(x) = \sqrt{1 - \sin(x)^2}$ und erhalten

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Analog bekommen wir

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

■

Natürlich können Ableitungen auch direkt mit dem Computer berechnet werden und deshalb macht es auch wenig Sinn, alle Ableitungsregeln aus diesem Abschnitt auswendig zu lernen! Warum habe ich Ihnen dann das alles überhaupt erzählt, fragen Sie sich jetzt sicherlich? Ich hätte Ihnen ja auch einfach sagen können, die Ableitung von f ist eine Funktion, die mit dem Computer *so* ausgerechnet wird. Damit wären Sie nach weniger als einer Minute in der Lage gewesen, die Ableitung von

$$\frac{\sqrt{x^7 + \log_5(x^2)}}{\sin(x^3 + 27) + 8^{x^3}}$$

zu berechnen. Aber Sie hätten nicht gewusst, was die Ableitung anschaulich bedeutet und wozu sie deshalb verwendet werden kann. Außerdem wissen Sie nun, wie der

Computer diese Ableitung ausrechnet: Er kennt einfach alle Ableitungsregeln, die die Mathematiker im Laufe der Zeit zusammengetragen haben, und wendet diese der Reihe nach an.

Eine praktische Anwendung der Ableitung sind folgende Grenzwertregeln von **de l'Hospital** (benannt nach dem französischen Mathematiker Guillaume François Antoine Marquis de l'Hospital, 1661–1704):

Satz 19.24 (Regel von de l'Hospital) Es seien f und g differenzierbare Funktionen. Wenn

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to x_0} |f(x)| = \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty,$$

so ist

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls letzterer Grenzwert existiert. Dabei sind die Fälle $x_0 = \pm\infty$ zugelassen und auch der Grenzwert der Ableitungen kann $\pm\infty$ sein.

Achtung: Der Bruch wird also *nicht* nach der Quotientenregel differenziert, sondern es werden Zähler und Nenner getrennt differenziert!

Merkregel: De l'Hospital hilft, wenn der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ für x gegen x_0 gesucht ist und wenn

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \qquad \text{oder} \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

In diesem Fall ist der Grenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ gleich jenem von $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ (falls dieser existiert).

Beispiel 19.25 Regel von de l'Hospital
Berechnen Sie folgende Grenzwerte:
a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ b) $\lim_{x\to 0+} (x\ln(x))$ c) $\lim_{x\to\infty} \left(x^2 \mathrm{e}^{-x}\right)$

Lösung zu 19.25

a) Es ist $\frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{0}{0}$ und daher kann de l'Hospital angewendet werden: Wir differenzieren Zähler und Nenner getrennt und berechnen den Grenzwert des Quotienten der Ableitungen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \frac{\frac{1}{1+0}}{1} = 1.$$

b) Auf den ersten Blick scheint hier die Regel von de l'Hospital nicht anwendbar, denn es liegt keiner der Fälle $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ vor. Machen wir aber eine kleine Umformung

$$x\ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}},$$

so haben wir einen Quotienten mit $\frac{\ln(0)}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty}$ und damit ist de l'Hospital just what the doctor ordered:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

c) Hier müssen wir die Regel zweimal anwenden, um zum Ziel zu kommen:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\mathrm{e}^x} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

■

Definition 19.26 Die **höheren Ableitungen** einer Funktion werden rekursiv definiert:

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'' = (f')', \quad f^{(3)} = f''' = (f^{(2)})', \quad \dots, \quad f^{(n)} = (f^{(n-1)})'.$$

Man nennt $f^{(n)}$ die **n-te Ableitung** von f. Die Funktion selbst wird auch als 0-te Ableitung bezeichnet, $f = f^{(0)}$.

Beispiel 19.27 (→CAS) Höhere Ableitungen

a) $g(x) = \ln(x)$. Berechnen Sie $g''(5)$.
b) $h(x) = 2\mathrm{e}^x$. Geben Sie $h^{(n)}(0)$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ an.
c) $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$. Was ist $f''(2)$?
d) Wie lautet die erste, zweite, dritte und vierte Ableitung von $f(x) = \sin(x)$?

Lösung zu 19.27

a) Es ist $g'(x) = \frac{1}{x}$ und $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$, daher $g''(5) = -\frac{1}{25}$.
b) Wegen $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ gilt $h^{(n)}(x) = 2\mathrm{e}^x$, also ist $h^{(n)}(0) = 2$.
c) Es ist $f'(x) = 6x^2 - 4$ und $f''(x) = 12x$, daher ist $f''(2) = 24$.
d) $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$, $f''(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x)$ und $f^{(4)}(x) = (-\cos(x))' = \sin(x)$.

■

Die Menge der auf $D \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen f, die k-mal stetig differenzierbar sind (d.h., für die $f^{(k)}$ existiert und stetig ist), wird mit $C^k(D)$ bezeichnet. Die Menge der Funktionen, die so wie zum Beispiel Sinus oder Kosinus *beliebig oft* stetig differenzierbar sind, bezeichnet man mit $C^\infty(D)$.

Manchmal ist es auch notwendig, Funktionen von mehreren Variablen zu differenzieren. In diesem Fall differenziert man nach einer Variablen und betrachtet alle anderen Variablen als Konstante. Man spricht von **partiellen Ableitungen** und schreibt $\frac{\partial}{\partial x}$ anstelle von $\frac{d}{dx}$.

Das Symbol ∂ für die partielle Ableitung ist ungleich dem griechischen Buchstaben δ.

Zum Beispiel gilt für $f(x, y) = 3xy^2 + \cos(x)$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 3y^2 - \sin(x), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 6xy.$$

Im ersten Fall wurde nach x differenziert und y wurde dabei als Konstante betrachtet. Im zweiten Fall wurde nach y differenziert und x wurde konstant angesehen. Mehr dazu in Kapitel 23.

19.3.1 Anwendung: Splines

Erinnern wir uns (Abschnitt 18.1.1), dass wir zu vorgegebenen Stützpunkten (x_j, y_j), $0 \le j \le n$, ein eindeutiges Interpolationspolynom $P_n(x)$ vom Grad n finden können, dass dieses Polynom aber am Rand unter Umständen stark oszilliert und daher zur Interpolation zwischen den Stützpunkten nur bedingt geeignet ist. Besser sind sogenannte Splines, die auch in diesen Situationen einsetzbar sind, wie Abbildung 19.9 für die Funktion $f(x) = (1 + 25x^2)^{-1}$ aus Abschnitt 18.1.1 zeigt.

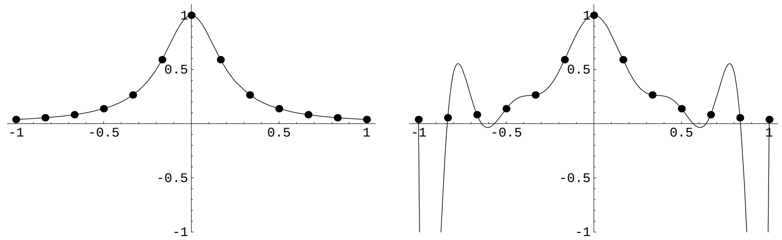

Abbildung 19.9. Spline und Interpolationspolynom

Die Idee ist es, stückweise Polynome von kleinem Grad zu verwenden. Im einfachsten Fall verwenden wir Geradenstücke und erhalten den Ansatz

$$P_j(x) = y_j + k_j(x - x_j), \qquad x \in [x_j, x_{j+1}),$$

für das j-te Teilintervall. Das Polynom $P_j(x)$ gilt nur in diesem Intervall $[x_j, x_{j+1})$ und wir verlangen, dass je zwei benachbarte Polynome stetig zusammenpassen

$$P_j(x_{j+1}) = P_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1}.$$

Daraus ergibt sich

$$P_j(x) = y_j + \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j}(x - x_j), \qquad x \in [x_j, x_{j+1}).$$

Damit haben wir auch schon die Definition eines **linearen Splines**. Das ist zwar eine recht einfache Formel, sie hat aber den Nachteil, dass sich die Teilpolynome an den Stützpunkten nicht glatt zusammenfügen, sondern im Allgemeinen dort Knicke aufweisen. Das kann vermieden werden, indem anstelle von Geraden Polynome höheren Grades verwendet werden. Legt man sich auf den Grad k fest, so kann man fordern, dass an den Stützpunkten nicht nur die Funktionswerte, sondern auch die Ableitungen bis zum Grad $k - 1$ übereinstimmen. Man spricht in diesem Fall von einem **Spline k-ter Ordnung**.

In der Praxis sind kubische Splines (also Ordnung 3) am verbreitetsten. Dabei können also die Ableitungen bis zum Grad 2 zur Übereinstimmung gebracht werden. Wie findet man nun aber so ein kubisches Spline zu vorgegebenen Stützpunkten?

Zunächst einmal muss $P_j(x)$ ein Polynom von Grad 3 sein und an den Randpunkten $P_j(x_j) = y_j$ bzw. $P_j(x_{j+1}) = y_{j+1}$ erfüllen. Deshalb machen wir den Ansatz

$$P_j(x) = y_j + k_j(x - x_j) + a_j(x - x_j)(x - x_{j+1})^2 + b_j(x - x_j)^2(x - x_{j+1}).$$

Wählen wir

$$k_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{x_{j+1} - x_j},$$

so sind auf jeden Fall einmal die Werte an den Rändern richtig (das wird ja gerade durch die Form unseres Ansatzes sicher gestellt). Für die erste Ableitung kann man (mit dem Computer) nachrechnen, dass

$$\begin{aligned} P_j'(x_j) &= k_j + a_j(x_j - x_{j+1})^2, \\ P_j'(x_{j+1}) &= k_j + b_j(x_{j+1} - x_j)^2 \end{aligned}$$

gilt und für die zweite

$$\begin{aligned} P_j''(x_j) &= 2(2a_j + b_j)(x_j - x_{j+1}), \\ P_j''(x_{j+1}) &= 2(a_j + 2b_j)(x_{j+1} - x_j). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Ableitung am Stützpunkt x_j mit z_j, so folgt aus der Bedingung, dass die ersten Ableitungen benachbarter Polynome übereinstimmen sollen,

$$P_j'(x_j) = z_j, \qquad P_j'(x_{j+1}) = P_{j+1}'(x_{j+1}) = z_{j+1},$$

sofort

$$a_j = \frac{z_j - k_j}{(x_{j+1} - x_j)^2} \quad \text{und} \quad b_j = \frac{z_{j+1} - k_j}{(x_{j+1} - x_j)^2}.$$

Aus der Bedingung, dass auch die zweiten Ableitung zusammenpassen müssen,

$$P_j''(x_{j+1}) = P_{j+1}''(x_{j+1}),$$

erhält man

$$\Delta_{j+1} z_j + 2(\Delta_j + \Delta_{j+1}) z_{j+1} + \Delta_j z_{j+2} = 3(k_j \Delta_{j+1} + k_{j+1} \Delta_j), \quad \Delta_j = x_{j+1} - x_j,$$

also eine inhomogene lineare Rekursion zweiter Ordnung für die Ableitungen z_j an den Stützstellen. Wir wissen, dass die Lösung von zwei freien Parametern abhängt. Meistens verlangt man, dass die zweiten Ableitungen am Anfang und am Ende verschwinden,

$$P_0''(x_0) = P_{n-1}''(x_n) = 0,$$

und spricht dann von einem **natürlichen Spline**. In diesem Fall ergibt sich aus der Bedingung $P_0''(x_0) = 0$

$$z_1 = 3k_0 - 2z_0$$

und wenn u_j die Lösung unserer inhomogenen Rekursion zur Anfangsbedingung $u_0 = 0$, $u_1 = 3k_0$ und v_j die Lösung unserer homogenen Rekursion zur Anfangsbedingung $v_0 = 1$, $v_1 = -2$ ist, so ist die Lösung der inhomogenen Rekursion zur Anfangsbedingung z_0, $z_1 = 3k_0 - 2z_0$ gegeben durch

$$z_j = u_j + z_0 v_j.$$

Aus der Bedingung $P_{n-1}''(x_n) = 0$ folgt

$$z_n = \frac{1}{2}(3k_{n-1} - z_{n-1})$$

und Einsetzen von $z_j = u_j + z_0 v_j$ ergibt

$$z_0 = \frac{3k_{n-1} - u_{n-1} - 2u_n}{2v_n + v_{n-1}}.$$

19.4 Mit dem digitalen Rechenmeister

Grenzwerte

Grenzwerte erhalten wir wie bei Folgen mit dem Befehl `Limit`:

In[1]:= $\texttt{Limit}[\frac{x^2-1}{x-1}, x \to 1]$

Out[1]= 2

Ableitungen

Ableitungen werden mit dem Befehl `D` berechnet:

In[2]:= $\texttt{D}[2x^3 - 4x + 1, x]$

Out[2]= $-4 + 6x^2$

Die n-te Ableitung nach x bekommen wir mit `D[f(x), {x, n}]`:

In[3]:= $\texttt{D}[2x^3 - 4x + 1, \{x, 2\}]$

Out[3]= $12x$

Eine Ableitung kann in `Mathematica` auch einfach als `f'[x]` anstelle von `D[f[x],x]` eingegeben werden

In[4]:= $f[x\_] := 2x^3 - 4x + 1;\ f'[x]$

Out[4]= $-4 + 6x^2$

Splines

`Mathematica` stellt leider keinen Befehl zur Berechnung von Splinefunktionen zur Verfügung, man muss also selbst zur Tat schreiten und den Algorithmus aus Abschnitt 19.3.1 implementieren. (Im Paket `NumericalMath‘SplineFit‘` gibt es allerdings eine Funktion `SplineFit`, die aus gegebenen Stützpunkten eine Splinekurve berechnet.)

19.5 Kontrollfragen

Fragen zu Abschnitt 19.1: Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion

Erklären Sie folgende Begriffe: Grenzwert, links-/rechtsseitiger Grenzwert, stetig, Zwischenwertsatz, Satz von Weierstraß.

1. Richtig oder falsch?
   a) Wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ ist, dann nennt man die Funktion stetig an der Stelle x_0.
   b) Eine Funktion ist genau dann stetig bei x_0, wenn hier der links- und der rechtsseitige Grenzwert existieren.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von
   a) $f(x) = 2x^2 + 1$ für $x \to 0$, b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ für $x \to 2$.

3. Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle x_0:
   a) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x<3 \\ -x+1 & x>3 \end{cases}$, $x_0 = 3$
   b) $f(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ x^2+2 & x>0 \end{cases}$, $x_0 = 0$
   c) $f(x) = \text{sign}(x) + 3$, $x_0 = 0$
4. Wie verhält sich die Funktion $f(x) = \frac{3x^2-5}{2x^2+1}$ für $x \to \infty$?
5. Welche Funktionen sind in ihrem gesamten Definitionsbereich stetig?
   a) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ c) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$
   d) $f(x) = \mathrm{e}^x + \sin(x)$ e) $f(x) = x^2\cos(x)$ f) $f(x) = \text{sign}(x)$

Fragen zu Abschnitt 19.2: Die Ableitung einer Funktion

Erklären Sie folgende Begriffe: Sekante, Tangente, differenzierbar, Ableitung, stetig differenzierbar.

1. Richtig oder falsch?
   a) Jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.
   b) Wenn der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existiert, dann nennt man die Funktion differenzierbar an der Stelle x_0.
   c) Die Ableitung von f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$.
2. Ist $f(x) = \text{sign}(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?
3. Was trifft zu? Die lineare Approximation von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist gegeben durch:
   a) $g(x) = 1 + 2x$ b) $h(x) = 1 + 2(x-1)$ c) $k(x) = 2x - 1$

Fragen zu Abschnitt 19.3: Berechnung von Ableitungen

Erklären Sie folgende Begriffe: Linearität der Ableitung, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Ableitung der Umkehrfunktion, de l'Hospital, höhere Ableitungen, partielle Ableitung.

1. An welcher Stelle x_0 ist die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ gleich $\frac{1}{2}$?
2. Was ist die Gleichung der Tangente von $h(x) = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x_0 = 0$:
   a) $t(x) = x + 1$ b) $t(x) = x - 1$ c) $t(x) = 1 - x$
3. Geben Sie die zweite Ableitung an:
   a) $f(x) = 2x + 1$ b) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ c) $f(x) = \sin(x)$
4. Was ist die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x} xy$?
   a) x b) y c) 1

Lösungen zu den Kontrollfragen

Lösungen zu Abschnitt 19.1

1. a) richtig
   b) Falsch: Es müssen zusätzlich noch beide Grenzwerte gleich sein.

2. a) $\lim_{x\to 0}(2x^2+1) = 2\cdot 0^2+1 = 1$.
   b) Für $x \neq 2$ ist $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$, daher ist der Grenzwert $\lim_{x\to 2} f(x)$ $= \lim_{x\to 2}(2+2)= 4$.
3. a) Für $x < 3$ ist $f(x) = 2x-1$, daher ist $\lim_{x\to 3-} f(x) = 2\cdot 3-1 = 5$; für $x > 3$ ist $f(x) = -x+1$, daher ist $\lim_{x\to 3+} f(x) = -3+1 = -2$.
   b) Für $x < 0$ ist $f(x) = 0$, daher ist $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$; für $x > 0$ ist $f(x) = x^2+2$, daher ist $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0^2+2 = 2$.
   c) Für $x < 0$ ist $f(x) = -1+3 = 2$, daher ist $\lim_{x\to 0-} f(x) = 2$; für $x > 0$ ist $f(x) = 1+3 = 4$, daher ist $\lim_{x\to 0+} f(x) = 4$.
4. Wir dividieren zur Berechnung des Grenzwertes durch die höchste vorkommende Potenz von x: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-5}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{5}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}} = \frac{3-0}{2+0} = \frac{3}{2}$. Die Funktionswerte kommen also für $x \to \infty$ dem Wert $\frac{3}{2}$ beliebig nahe.
5. a) $f(x) = x^3-2x+1$ ist stetig, weil jedes Polynom stetig ist.
   b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ist stetig, weil jede rationale Funktion stetig ist.
   c) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$ ist als Verkettung der stetigen Funktionen $g(x) = \mathrm{e}^x$ und $h(x) = -3x$ stetig.
   d) $f(x) = \mathrm{e}^x + \sin(x)$ ist als Summe von stetigen Funktionen stetig.
   e) $f(x) = x^2\cos(x)$ ist als Produkt von stetigen Funktionen stetig.
   f) $f(x) = \mathrm{sign}(x)$ ist stetig für alle $x \neq 0$. An der Stelle $x = 0$ hat die Funktion keinen Grenzwert, also kann sie hier auch nicht stetig sein.

Lösungen zu Abschnitt 19.2

1. a) Falsch: Zum Beispiel ist $f(x) = |x|$ zwar stetig an der Stelle $x = 0$, aber nicht differenzierbar.
   b) richtig
   c) richtig
2. Nein! f ist an der Stelle $x_0 = 0$ nicht stetig, daher also erst recht nicht differenzierbar.
3. Die lineare Approximation von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ ist gegeben durch $f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 1+2(x-1) = 2x-1$. Somit ist a) falsch und b), c) richtig.

Lösungen zu Abschnitt 19.3

1. Die Ableitung an einer beliebigen Stelle $x > 0$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$, daher ist $f'(2) = \frac{1}{2}$.
2. a) ist richtig
3. a) $f'(x) = 2$, daher $f''(x) = 0$
   b) $f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, $f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$
   c) $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$
4. b) y

19.6 Übungen

Aufwärmübungen

1. Berechnen Sie: a) $\lim_{x\to 0}(x^2+1)$ b) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$
2. Bestimmen Sie den Grenzwert:
$$\text{a)}\ \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-9x}{2x^2-3} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+5x-7}{2x^3-1} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0+}\frac{4x^3-7x}{2x^5-3x^2}$$
(Tipp: Heben Sie im Zähler und Nenner die höchste Potenz heraus.)
3. Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0=0$ von
$$\text{a)}\quad f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\ge 0\\ 1\ , & x<0\end{cases}, \qquad \text{b)}\quad f(x)=\begin{cases} 5\mathrm{e}^{-x}\ , & x\ge 0\\ -x+1, & x<0\end{cases}.$$
Ist f an der Stelle $x=0$ stetig? Skizzieren Sie die Funktion!
4. Welcher Wert muss für c gewählt werden, damit die Funktion
$$\text{a)}\quad f(x)=\begin{cases} x+c, & x\ge 0\\ 3\mathrm{e}^{x}\ , & x<0\end{cases} \qquad \text{b)}\quad f(x)=\begin{cases} x^2+c, & x\ge 0\\ x+1\ , & x<0\end{cases}$$
stetig ist? Skizzieren Sie die Funktion!
5. Berechnen Sie die Ableitung von $f(x)=\tan(x)$.
6. Berechnen Sie die Ableitung:
a) $f(x)=\cos(x)\mathrm{e}^x$ b) $f(x)=\sqrt{3x}$ c) $f(x)=(x-1)^2+\frac{1}{x}$
d) $f(x)=4\mathrm{e}^x\cdot\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}$ e) $f(x)=\frac{3x^2-1}{x^3+4x}$ f) $f(x)=\frac{\ln(x)}{x^3+7x}$
7. Berechnen Sie die Ableitung:
a) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ b) $f(x)=\ln(7x+12)$ c) $f(x)=\mathrm{e}^{-3x+4}$
8. Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Sinusfunktion bei $x=0$ die x-Achse?
9. Berechnen Sie die Ableitung (a,b sind konstante reelle Zahlen):
a) $f(x)=\sin(a\,x+b)$ b) $f(t)=a(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}})$
10. Wenn eine **Weibull-Verteilung** (nach dem Schweden Waloddi Weibull, 1887–1979) vorliegt, dann wird durch $R(t)=\mathrm{e}^{-(\frac{t}{T})^b}$ der erwartete Anteil von gleichartigen Bauelementen angegeben, der die Nutzungsdauer t überlebt. Berechnen Sie in diesem Fall die so genannte Ausfallrate $\lambda(t)=-\frac{1}{R(t)}\cdot\frac{dR}{dt}$.
11. Zeigen Sie für die so genannten Hyperbelfunktionen $\sinh(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$ bzw. $\cosh(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$, dass $\sinh'(x)=\cosh(x)$ bzw. $\cosh'(x)=\sinh(x)$.
12. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{2\ln(x)}{x-1} \qquad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x} \qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{1+x-\mathrm{e}^x}{x^2}$$
13. Berechnen Sie die zweite Ableitung:
a) $f(x)=x\sin(x)$ b) $f(x)=x^3+\ln(x)$ c) $f(x)=\cos(x^2)$
14. Berechnen Sie folgende partielle Ableitungen:
a) $\frac{\partial}{\partial x}x\sin(y)$ b) $\frac{\partial}{\partial y}(x+y)$ c) $\frac{\partial}{\partial x}(x^2+x\,y)$

Weiterführende Aufgaben

1. Bestimmen Sie den links- und rechtsseitigen Grenzwert an der Stelle $x_0 = 2$ von
$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \geq 2 \\ 5 \quad , & x < 2 \end{cases} .$$
Ist f an der Stelle $x = 2$ stetig? Skizzieren Sie die Funktion!
2. Ist $f(x) = |x|x$ an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar? Skizzieren Sie die Funktion! Tipp: Verwenden Sie Definition 19.15.
3. Berechnen Sie die Ableitung:
a) $f(x) = \sin(3x-1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$ b) $f(x) = (5\mathrm{e}^{-3x+4}+1)\sqrt{x^2-1}$
c) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$
4. Geben Sie durch geeignete Linearisierung von $f(x) = \mathrm{e}^x$ einen Näherungswert für $\mathrm{e}^{-0.01}$ an.
5. Durch $f(t) = a(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}})$, $t \geq 0$, wird ein exponentielles Wachstum mit Sättigungsgrenze a beschrieben.
a) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an der Stelle $t = 0$.
b) Zu welchem Zeitpunkt schneidet die Tangente die Gerade $g(t) = a$?
c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
d) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f sowie die Tangente an der Stelle $t = 0$ für den konkreten Fall $a = 5$ und $b = 3$.
6. Polynome 3. Grades werden oft zur Modellierung von Kosten verwendet: Dabei ist x die produzierte Warenmenge (in Stückzahlen, Liter, usw.) und $C(x)$ sind die Kosten, die bei der Produktion der Warenmenge x anfallen. Man nennt $C(x)$ daher auch die **Kostenfunktion**.
a) Approximieren Sie $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 60x + 50$ an der Stelle $x = 15$ durch die Tangente.
b) Geben Sie mithilfe der Tangente den Näherungswert für $C(16)$ an. Um wie viel erhöhen sich die Kosten näherungsweise im Vergleich zu $C(15)$?

   Allgemein steigen die Kosten für $x+1$ Stück näherungsweise um $C'(x)$ gegenüber jenen für x Stück. Man nennt die erste Ableitung der Kostenfunktion auch **Grenzkostenfunktion**.
7. Eine Firma stellt Kuckucksuhren her. Vom Modell „De Luxe“ werden monatlich 400 Stück zum Preis von 200 € verkauft. Eine Marktanalyse kam zu dem Ergebnis, dass eine Preisreduktion um 1 € die Nachfrage um 5 Stück steigert.
a) Wie lautet die Nachfragefunktion $D(p)$?
b) In welchem Preisbereich erhöht eine Preisreduktion den Erlös $R(p) = p\,D(p)$?
8. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
$$\text{a)} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 1} \frac{4x^2+4x-8}{x^2+2x-3} \qquad \text{c)} \lim_{x\to 0+} \frac{2x^3+3x}{2x^4-x^2}$$

Lösungen zu den Aufwärmübungen

1. a) $\lim_{x\to 0}(x^2+1) = 1$.
b) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6$.

2. a) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-9x}{2x^2-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5-\frac{9}{x}}{2-\frac{3}{x^2}} = \frac{5}{2}$.
   b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+5x-7}{2x^3-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{7}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{2} = 0$.
   c) $\lim_{x\to 0+} \frac{4x^3-7x}{2x^5-3x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-7+4x^2}{x(-3+2x^3)} = \infty$.
3. a) Es gilt $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x^2+1) = 1$ und $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} 1 = 1$. Da rechts- und linksseitiger Grenzwert gleich sind, ist $f(x)$ an $x=0$ stetig.
   b) Es gilt $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} 5\mathrm{e}^{-x} = 5$ und $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(-x+1) = 0+1 = 1$. Also sind rechts- und linksseitiger Grenzwert nicht gleich. Damit ist $f(x)$ an $x=0$ nicht stetig.
4. a) Die Funktion ist an der Stelle $x=0$ stetig, wenn der Funktionswert $f(0)$ gleich dem Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ ist. Wir berechnen c aus der Bedingung, dass an der Stelle 0 gelten muss: linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert (= Funktionswert): Es ist $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x+c) = c$ und $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(3\mathrm{e}^x) = 3$. Also muss $c=3$ sein.
   b) Wir berechnen c aus der Bedingung, dass an der Stelle 0 gelten muss: linksseitiger Grenzwert = rechtsseitiger Grenzwert (= Funktionswert): es ist $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x^2+c) = c$ und $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x+1) = 1$. Also muss $c=1$ sein.
5. Mit der Quotientenregel erhalten wir $\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$.
6. a) $f'(x) = \mathrm{e}^x(\cos(x)-\sin(x))$ b) $f'(x) = \frac{3}{2}(3x)^{-\frac{1}{2}}$
   c) $f'(x) = 2(x-1) - \frac{1}{x^2}$ d) $f'(x) = 4\mathrm{e}^x\sqrt{x} + 2\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$
   e) $f'(x) = \frac{-3x^4+15x^2+4}{(x^3+4x)^2}$ f) $f'(x) = \frac{-\ln(x)(3x^2+7)+x^2+7}{(x^3+7x)^2}$
7. Wir wenden die Kettenregel an: a) $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ b) $\frac{7}{7x+12}$ c) $-3\mathrm{e}^{-3x+4}$
8. Die Tangente an der Stelle 0 ist $t(x) = x$. Diese Gerade hat die Steigung 1 und schließt somit mit der x-Achse den Winkel von $\frac{\pi}{4}$ ein.
9. a) $f'(x) = a\cos(a\,x+b)$ b) $f'(t) = \frac{a}{b}\mathrm{e}^{-\frac{t}{b}}$
10. Die Funktion $R(t) = f(g(t))$ ist eine Verkettung der Funktionen $f(t) = \mathrm{e}^t$ und $g(t) = -(\frac{t}{T})^b$. Mit der Kettenregel folgt wegen $f'(t) = \mathrm{e}^t$ und $g'(t) = -\frac{b}{T}(\frac{t}{T})^{b-1}$, dass $R'(t) = f'(g(t))g'(t) = \mathrm{e}^{-(\frac{t}{T})^b}(-\frac{b}{T}(\frac{t}{T})^{b-1})$. Also gilt $\lambda(t) = \frac{b}{T}(\frac{t}{T})^{b-1}$.
11. Es gilt $\cosh'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x)' + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x})' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = \sinh(x)$. Analog $\sinh'(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x)' - \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-x})' = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x} = \cosh(x)$.
12. Wir verwenden de l'Hospital:
    a) $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$, daher folgt: $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x}{1} = \frac{\mathrm{e}^0}{1} = 1$.
    b) $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1} = \frac{0}{0}$, daher folgt: $\lim_{x\to 1} \frac{2\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2\frac{1}{x}}{1} = \frac{2\frac{1}{1}}{1} = 2$.
    c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \frac{0}{0}$, daher folgt: $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{1} = \frac{0}{1} = 0$.
    d) $\lim_{x\to 0} \frac{1+x-\mathrm{e}^x}{x^2} = \frac{0}{0}$, daher folgt (zweimal de l'Hospital): $\lim_{x\to 0} \frac{1+x-\mathrm{e}^x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\mathrm{e}^x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{e}^x}{2} = \frac{-1}{2}$.
13. a) $f''(x) = (x\cos(x)+\sin(x))' = 2\cos(x) - x\sin(x)$, b) $f''(x) = (3x^2+\frac{1}{x})' = 6x - \frac{1}{x^2}$, c) $f''(x) = (-2x\sin(x^2))' = -4x^2\cos(x^2) - 2\sin(x^2)$.
14. a) $\sin(y)$, b) 1, c) $2x+y$.

(Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben finden Sie in Abschnitt B.19)

B

Lösungen zu den weiterführenden Aufgaben

B.18 Differentialrechnung I

1. Ja.
2. Ja: $f'(0) = 0$.
3. a) $\mathrm{e}^{-x}(3\cos(3x-1) - \sin(3x-1))$ b) $-15\mathrm{e}^{-3x+4}\sqrt{x^2-1} + \frac{x(5\mathrm{e}^{-3x+4}+1)}{\sqrt{x^2-1}}$
   c) $-\frac{2(1+\frac{1}{x})}{x^2}$
4. Tipp: Nähern Sie durch die Tangente an der Stelle $x_0 = 0$. Es ergibt sich der Näherungswert: $\mathrm{e}^{-0.01} \approx 0.99$.
5. a) Tangente: $h(t) = \frac{a}{b}t$ b) zum Zeitpunkt b c) a
6. a) $t(x) = -512.5 + 60x$ b) $C(16) \approx 447.5$
7. a) $D(p) = 1400 - 5p$, $0 \leq p \leq 280$ b) $p > 140$
8. a) 0 b) 3 c) $-\infty$

Literatur

Mathematische Vorkenntnisse

1. A. Adams et al., *Mathematik zum Studieneinstieg*, 4. Auflage, Springer, Berlin, 2002.
2. A. Kemnitz, *Mathematik zum Studienbeginn*, 5. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2002.
3. W. Purkert, *Brückenkurs Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, 4. Auflage, Teubner, Stuttgart, 2001.
4. W. Timischl und G. Kaiser, *Ingenieur-Mathematik I-IV*, E. Dorner, Wien, 1997–2001.

Mathematik für Informatiker

5. M. Brill, *Mathematik für Informatiker*, Carl Hanser, München, 2001.
6. W. Dörfler und W. Peschek, *Einführung in die Mathematik für Informatiker*, Carl Hanser, München, 1988.
7. D. Hachenberger, *Mathematik für Informatiker*, München, Pearson, 2005.
8. P. Hartmann, *Mathematik für Informatiker*, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 2002.

Mathematik für Technik oder Wirtschaft

9. W. Böhm und H. Strasser, *Mathematik für Wirtschaft und Management*, Skriptum, Wirtschaftsuniversität Wien, 2003.
10. M. Fulmek, *Finanzmathematik*, Skriptum, Universität Wien, 2005.
11. E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 8. Auflage, John Wiley, New York, 1999.
12. P. Stingl, *Mathematik für Fachhochschulen: Technik und Informatik*, 6. Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 1999.
13. K. Sydsæter und P. Hammond, *Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler*, Pearson, 2004.
14. J. Tietze, *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik*, 10. Auflage, Vieweg, Braunschweig, 2002.

Analysis

15. K. Fritzsche, *Mathematik für Einsteiger*, Spektrum, Heidelberg, 2001.

16. M. Oberguggenberger und A. Ostermann, *Analysis für Informatiker*, Springer, Berlin, 2005.

Statistik

17. L. Fahrmeir et al., *Statistik*, 5. Auflage, Springer, Berlin, 2004.
18. K. Mosler und F. Schmid, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik*, 2. Auflage, Springer, Berlin, 2006.
19. L. Sachs, *Angewandte Statistik*, 10. Auflage, Springer, Berlin, 2002.
20. M. Sachs, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Ingenieurstudenten an Fachhochschulen*, Fachbuchverlag Leipzig, München, 2003.
21. J. Schira, *Statistische Methoden der VWL und BWL*, Pearson, München, 2003.
22. W. Timischl, *Qualitätssicherung*, 3. überarbeitete Auflage, Hanser, München, 2002.

Mathematica

23. R.E. Maeder, *Computer Science with Mathematica*, Cambridge UP, Cambridge, 2000.
24. S. Wolfram, *The Mathematica Book*, 5th edition, Wolfram Media, 2003.

Ressourcen im Internet

25. mathe online, http://www.mathe-online.at/
26. Eric W. Weisstein et al., *MathWorld–A Wolfram Web Resource*, http://mathworld.wolfram.com/
27. Wikipedia Mathematik, http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik

Verzeichnis der Symbole

$C(D)$	... Menge der auf D stetigen Funktionen, 55
$C^1(D)$	... Menge der auf D stetig differenzierbaren Funktionen, 58
$C^k(D)$	... Menge der auf D k-mal stetig differenzierbaren Funktionen, 67
$\chi^2_{m;p}$	... p-Quantil der χ^2-Verteilung, 319
$F_{m_1;m_2;p}$	... p-Quantil der F-Verteilung, 322
$F_n(x)$	... Fourierpolynom, 136
$\Gamma(x)$	... Gammafunktion, 124
grad	... Gradient, 161
i	$= \sqrt{-1}$ Imaginäre Einheit
Im	... Imaginärteil
inf	... Infimum
$\int$	... Integral, 117
e	... Euler'sche Zahl
$\mathrm{E}(X)$	... Erwartungswert einer Zufallsvariable X, 262
ln	$= \log_e$ natürlicher Logarithmus, 19
$\log_a$	... Logarithmus zur Basis a, 19
lim	... Grenzwert, 50
max	... Maximum
min	... Minimum
$\mathbb{N}$	$= \{1, 2, \ldots\}$ Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
$o(f)$	... Landausymbol
$O(f)$	... Landausymbol
∂	... partielle Ableitung, 155
$\prod$	... Produktzeichen
Φ	... Standardnormalverteilung, 310
$\mathbb{R}$	... Menge der reellen Zahlen
Re	... Realteil
sign	... Vorzeichenfunktion, 52
sin	... Sinus, 23
sinh	... Sinus hyperbolicus, 21
$\sum$	... Summenzeichen
sup	... Supremum
$t_{m;p}$	... p-Quantil der t-Verteilung, 321
tan	... Tangens, 27
tanh	... Tangens hyperbolicus, 23
$T_n(x)$	... Taylorpolynom, 78
$\mathrm{Var}(X)$	... Varianz einer Zufallsvariable X, 266
$\mathbb{Z}$	$= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen
z_p	... p-Quantil der Standardnormalverteilung, 310

Index