Proseminar Partielle Differentialgleichungen 1

Gerald Teschl

SS2012

Bemerkung: Die meisten Beispiel sind aus dem Buch von L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., 1998 bzw. aus der VO von Michael Kunzinger aus dem WS03/04.

1. Bestimme für jede der folgenden PDEs den Typ (linear, semilinear, quasilinear, voll nichtlinear) und die Ordnung.

   a) $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$ (*Laplacegleichung*).
   b) $u_t + \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} = 0$ (*Transportgleichung*).
   c) $u_t - \Delta u = 0$ (*Wärmeleitungsgleichung*).
   d) $u_{tt} - \Delta u = 0$ (*Wellengleichung*).
   e) $u_t + u u_x = 0$ (*Burgersgleichung*).
   f) $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$ (*Korteweg-deVries Gleichung*).
   g) $\det(D^2 u) = 0$ (*Monge-Ampére Gleichung*).

2. Beweise die Leibnizformel
$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta u D^{\alpha-\beta} v\,,$$
wobei $u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt sind, $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ und $\beta \le \alpha$ heißen soll: $\beta_i \le \alpha_i$ für $1 \le i \le n$.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei N mal stetig differenzierbar. Zeige die Taylorsche Formel
$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le N-1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0)(x - x_0)^\alpha + R_N(x)\,,$$
wobei
$$R_N(x) = \sum_{|\alpha| = N} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^\alpha \qquad (\theta \in [0,1])$$
die Abschätzung $|R_N(x)| = O(|x - x_0|^N)$ $(x \to x_0)$ erfüllt.
Hinweis: Betrachte die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(x_0 + t(x - x_0))$.

4. Finde eine explizite Lösungsformel für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + b \cdot Du + cu = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

   Dabei sind $c \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ konstant.

5. Zeige, dass die Laplacegleichung

$$\Delta u(x) = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

   rotationsinvariant ist. Damit ist gemeint, dass für jede Lösung u der Laplacegleichung und jede orthogonale $n \times n$-Matrix O auch die Funktion $v(x) := u(Ox)$ eine Lösung ist.

6. Untersuche, welche der folgenden Gleichungen Lösungen in Form einer fortschreitenden Welle $u(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ besitzt (x, $t \in \mathbb{R}$, c, k, ω reelle Konstante).

   a) $u_t + cu_x = 0$.
   b) $u_t - c^2 u_{xx} = 0$.
   c) $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.
   d) $u_t + c^3 u_{xxx} = 0$.

   Welche Bedeutung hat gegebenenfalls die Größe $\frac{\omega}{k}$?

7. a) Zeige, dass die Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$
   unendlich oft differenzierbar ist.

   b) Folgere daraus, dass die Funktion $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,
$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}$$
   unendlich oft differenzierbar ist.

8. Sei u eine Lösung des Randwertproblems
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } B^0(0,r) \\ u = g & \text{auf } \partial B(0,r) \end{cases}$$
   (f, g stetig, $B^0(0,r)$ die offene Kugel mit Radius r um 0).

   Zeige, dass für $n \ge 3$ gilt:
$$u(0) = \fint_{\partial B(0,r)} g(x)\, dS(x) + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}} \right) f(x)\, dx$$
   Hinweis: Modifiziere den Beweis der Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

9. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ offen. Zeige

   a) Real- und Imaginärteil einer in U holomorphen Funktion sind harmonisch.

   b) Ist umgekehrt $u \in C^2(U)$, $\Delta u = 0$ und ist U einfach zusammenhängend, dann ist u Realteil einer in U holomorphen Funktion; d.h. es existiert eine sog. *harmonisch konjugierte* Funktion v, sodass $f = u + iv$ holomorph ist. *Tipp:* Betrachte das Vektorfeld $(-u_y, u_x)$.

10. $v \in C^2(\overline{U})$ heißt subharmonisch, wenn

$$-\Delta v \leq 0 \qquad \text{in } U\,.$$

Zeige:

   (a) Falls v subharmonisch ist, dann gilt:

$$v(x) \leq \fint_{B(x,r)} v(y)\,dy$$

   für alle $B(x,r) \subseteq U$.

   (b) Folgere daraus, dass

$$\max_{\overline{U}} v = \max_{\partial U} v\,.$$

   (c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und konvex. Sei u harmonisch und $v := \phi(u)$. Dann ist v subharmonisch.

   (d) Sei u harmonisch. Dann ist $v := |Du|^2$ subharmonisch.

11. Sei u eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{auf } U \\ \quad\;\; u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Zeige, dass u die folgende a-priori-Abschätzung erfüllt:

$$\max_{\overline{U}} |u| \leq C(\max_{\partial U} |g| + \max_{\overline{U}} |f|)$$

Tipp: Verwende die Darstellungsformel von u mittels Green'scher Funktion für U.

12. Bestimme für $x \in \mathbb{R}^3$, $|x| \neq R$ das Integral
$$\omega_R(x) := \int_{\partial B(0,R)} \frac{1}{|x-y|}\, dS(y)\,.$$
Hinweise:
   - Benütze für $|x| > R$ die Mittelwerteigenschaft.
   - Für $|x| < R$ zeige zunächst, dass ω_R nur von $|x|$ abhängt. Verwende dann das Maximumprinzip um zu zeigen, dass ω_R auf jedem $B(0, R')$ mit $R' < R$ konstant ist.

13. Sei $u : \mathbb{R}^2 \supseteq B(0,R) \to \mathbb{R}$ stetig und harmonisch auf $B^0(0,R)$. Sei $u\,|_{\partial B(0,R)} = h$. Zeige, dass dann gilt:
$$u(r,\varphi) = \frac{R^2-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(\theta)}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi-\theta) + r^2}\, d\theta\,.$$
Wähle $R = 2$ und $h(\theta) = 3\sin\theta + 1$ $(0 \le \theta \le 2\pi)$.
   a) Bestimme Maximum und Minimum von u auf $B(0,2)$.
   b) Bestimme $u(0)$.
   c) Gib eine explizite Formel für u an (z.B. mittels `Mathematica`).

14. Sei u harmonisch und positiv auf $B^0(0,r)$. Folgere aus der Poissonformel für die Kugel, dass
$$r^{n-2}\frac{r-|x|}{(r+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le r^{n-2}\frac{r+|x|}{(r-|x|)^{n-1}}u(0)$$
(Explizite Form der Harnackschen Ungleichung).

15. Löse das folgende Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = e^{-x} & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

16. Löse das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

wobei

$$g(x) = \begin{cases} c_1 & \text{für } x < 0 \\ c_2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Gilt $u(x,t) \to u(x,0)$ für $t \downarrow 0$?

17. Finde eine explizite Lösungsformel für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + cu = f & \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

18. Sei u eine glatte Lösung der Wärmeleitungsgleichung auf $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$.

    a) Zeige dass $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

    b) Verwende a) um zu zeigen, dass $v(x,t) := x \cdot Du(x,t) + 2tu_t(x,t)$ die Wärmeleitungsgleichung erfüllt.

19. Gegeben sei $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$. Leite die Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} g(s) ds$$

des Anfangs-/Randwertproblems

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{on } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ u = g & \text{on } \{x = 0\} \times [0, \infty). \end{cases}$$

her.
Hinweis: Setze $v(x,t) = u(x,t) - g(t)$ und erweitere $v(x,t)$ für $x < 0$ zu einer ungeraden Funktion.

20. $v \in C_1^2(U_T)$ heißt *Sublösung* der Wärmeleitungsgleichung, falls

$$v_t - \Delta v \leq 0 \qquad \text{in } U_T$$

Zeige:

   a) Für jede Sublösung v gilt

$$v(x,t) \leq \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;r)} v(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2} \, dy \, ds$$

   für alle $E(x,t;r) \subseteq U_T$. (Analysiere den Beweis von Theorem 2.3.3).

   b) Daher ist $\max_{\bar{U}_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.

   c) Sei $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt und konvex. Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung und $v := \phi \circ u$. Dann ist v eine Sublösung.

   d) $v := |Du|^2 + u_t^2$ ist eine Sublösung falls u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

21. a) Zeige, dass die allgemeine Lösung der PDE $u_{xy} = 0$ im $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$u(x, y) = F(x) + G(y)$$

wobei F und G beliebige differenzierbare Funktionen sind.

b) Verwende die Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= x + t \\ \eta &= x - t \end{aligned}$$

um zu zeigen, dass $u_{tt} - u_{xx} = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $u_{\xi\eta} = 0$.

c) Leite mittels a) und b) erneut die d'Alembertsche Formel her.

22. Löse mittels d'Alembertformel das Anfangswertproblem für die Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei

a)

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad h(x) = 0$$

b)

$$g(x) = 0 \qquad h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Skizziere jeweils $u(x, t_0)$ für $t_0 = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.

23. Sei $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems für die eindimensionale Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = g, \ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Dabei sollen g und h kompakten Träger haben. Dann definiert man die kinetische Energie von u als

$$k(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_t^2(x, t)\, dx$$

und die potentielle Energie von u als

$$p(t) := \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x, t)\, dx\,.$$

Zeige:

a) $k(t) + p(t)$ ist konstant in t. Die Gesamtenergie des Systems bleibt also erhalten.

b) $k(t) = p(t)$ für t hinreichend groß.

24. Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ eine Lösung des Anfangswertproblems für die dreidimensionale Wellengleichung:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases},$$

wobei g und h kompakten Träger haben sollen. Zeige, dass es dann eine Konstante C gibt, sodass

$$|u(x,t)| \le \frac{C}{t} \qquad (x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0)\,.$$

25. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimme für gegebenes g und h eine Lösung u des folgenden Anfangswertproblems:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} - \alpha(u_t - u_x) = 0 & \text{auf } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = g,\ u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

26. Es lösen $\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3)$, $\mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3)$ die Maxwell-Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t = \operatorname{curl} \mathbf{B}, \\ \mathbf{B}_t = -\operatorname{curl} \mathbf{E}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0. \end{cases}$$

Dann lösen alle Komponenten E^j und B^j, $j = 1,2,3$ die Wellengleichung.

27. a) Bestimme das System der charakteristischen Gleichungen für die inhomogene Transportgleichung

$$u_t + b \cdot Du = f \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

wobei $b \in \mathbb{R}^n$, $f = f(x,t)$.

b) Verwende die Methode der Charakteristiken, um die Transportgleichung in a) unter der Anfangsbedingung

$$u = g \qquad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

zu lösen.

28. Löse mit Hilfe der Methode der Charakteristiken die folgenden Randwertprobleme:

a)

$$\begin{aligned} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} &= 2u \\ u(x_1, 1) &= g(x_1) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u u_{x_1} + u_{x_2} &= 1 \\ u(x_1, x_1) &= \tfrac{1}{2} x_1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 u_{x_1} + 2x_2 u_{x_2} + u_{x_3} &= 3u \\ u(x_1, x_2, 0) &= g(x_1, x_2) \end{aligned}$$

29. Zeige, dass für $u_l < u_r$ die folgende *Verdünnungswelle*

$$u(t) := \begin{cases} u_l\,, & x \leq u_l t \\ \frac{x}{t}\,, & u_l t < x < u_r t \\ u_r\,, & x \geq u_r t \end{cases}$$

eine Integrallösung der Burgersgleichung

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$$

ist.

30. Es sei u eine C^1 Lösung der Erhaltungsgleichung

$$\begin{cases} u_t + F(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x,0) = g(x) & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit kompakten Träger. Zeige

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx.$$

31. Ermittle eine C^2-Lösung der *Burgersgleichung mit Viskosität*

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = \mu u_{xx}$$

(mit $\mu > 0$) der Form $u(x,t) = v(x - ct)$, eine sogenannte *solitäre Welle*.
Wie verhält sich die Lösung $u(x,t)$ für $\mu \to 0$?
Hinweis: Setze $v(x) = c + w(x)$ um die gew. DGL für v zu lösen.

32. Löse das folgende Anfangs-Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mittels Trennung der Variablen:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{für } x \in (0, L),\ t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) & \text{für } x \in (0, L) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 & \text{für } t \geq 0\,. \end{cases}$$

33. Bestimme die Lösung des Anfangs-Randwertproblems:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0 & \text{für } x \in (0, 3),\ t > 0 \\ u(x, 0) = 5 \sin 4\pi x - 3 \sin 8\pi x & \text{für } x \in (0, 3) \\ u(0, t) = u(3, t) = 0 & \text{für } t \geq 0\,. \end{cases}$$

34. Finde mittels Separationsansatz die folgenden Lösungen der zweidimensionalen Laplacegleichung:
    a) Die harmonischen Funktionen $e^{-\lambda y} \cos \lambda x$, $e^{-\lambda y} \sin \lambda x$, $(\lambda \geq 0)$.
    b) Die homogenen harmonischen Polynome $r^k \cos k\varphi$, $r^k \sin k\varphi$ $(k \in \mathbb{N})$. Dabei sind (r, φ) Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$.

35. Berechne die Fouriertransformierte folgender Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a)
$$u(x) := \begin{cases} 1\,, & |x| < a, \\ 0\,, & |x| > a. \end{cases}$$

b)
$$u(x) := \frac{1}{x^2 + k^2}, \qquad k > 0.$$

c)
$$u(x) := \frac{x}{(x^2 + k^2)^2}, \qquad k > 0.$$

36. a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ und $g(x) := f(x + h)$. Zeige:

$$\hat{g}(y) = e^{ihy} \hat{f}(y)\,.$$

b) Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass für $h(x) := f(ax)$ gilt:

$$\hat{h}(y) = \frac{1}{a^n} \hat{f}(\frac{y}{a})\,.$$