Übungen zu Einführung in die Analysis

WS 2007/2008

F. Haslinger

1. Man bestimme das Supremum und Infimum der folgenden Mengen :
$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2 \leq x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \ : \ -1 < x \leq 5\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x-1| < 2\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0, x^3 < 5\}$.

2. Man bestimme das Supremum und Infimum der folgenden Mengen :
$A = \{\frac{3n+1}{7n-5} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{(-1)^n \frac{n+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

3. Seien A und B nichtleere Mengen reeller Zahlen und

$$A + B := \{a + b \ : \ a \in A, b \in B\}.$$

Man zeige : sind A und B nach oben beschränkt, so gilt

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

(Wie lautet die entsprechende Aussage für nach unten beschränkte Mengen?)

4. Sei A eine nach oben beschränkte, nichtleere Teilmenge in $\mathbb{R}$, und sei $rA = \{ra \ : \ a \in A\}$ für $r \geq 0$. Man zeige :

$$\sup(rA) = r \sup A.$$

(Wie lautet die entsprechende Aussage für nach unten beschränkte Mengen?)

5. Seien A und B nach oben beschränkte nichtleere Mengen reeller Zahlen und

$$AB := \{ab \ : \ a \in A, b \in B\}.$$

Man zeige :

$$\sup AB = \sup A \sup B.$$

(Wie lautet die entsprechende Aussage für nach unten beschränkte Mengen?)

6. Man beweise : besitzt eine nichtleere Teilmenge in $\mathbb{R}$ zwar ein Supremum, jedoch kein Maximum, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ unendlich viele Elemente von A, die zwischen $\sup A - \epsilon$ und $\sup A$ liegen, d.h. : $\sup A - \epsilon < a < \sup A$ für unendlich viele $a \in A$.

7. Beweise die folgenden Aussagen unter geeigneten Beschränktheitsvoraussetzungen (welchen?) für A und B:
$\sup(rA) = r \inf A$, falls $r \leq 0$;
$\sup(AB) = \inf A \inf B$, falls alle Elemente von A und B nichtpositiv sind.

8. Gilt $a \neq 0$, für alle $a \in A$, so sei

$$\frac{1}{A} := \{\frac{1}{a} \ : \ a \in A\}.$$

Man zeige : ist $\inf A > 0$, so ist

$$\sup \frac{1}{A} = \frac{1}{\inf A}.$$

9. Sei $A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $B := \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ und $C := \{a_n b_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Die Elemente von A und B seien alle nichtnegativ, ferner seien A und B nach oben beschränkt. Man zeige:

$$\sup C \leq \sup A \sup B$$

und konstruiere Mengen A, B, so dass tatsächlich $<$ gilt. Worin besteht der Unterschied zu Aufgabe **5**.

10. Sei $z \in \mathbb{C}$. Man beweise : es existieren $r \geq 0$ und $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ derart, dass $z = rw$ gilt. Sind w und r immer eindeutig durch z bestimmt?

11. Seien $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Man zeige :

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

12. Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Man beweise :

$$||z| - |w|| \leq |z - w|.$$

13. Man beweise :

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2,$$

für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ und deute dies geometrisch als eine Aussage über Parallelogramme.

14. Ist die Menge der irrationalen Zahlen abzählbar?

15. Man beweise : eine Menge paarweise disjunkter Intervalle ist höchstens abzählbar.

16. Man zeige : zwei Intervalle $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$ sind stets äquivalent.

17. Man konstruiere eine beschränkte Menge reeller Zahlen mit genau drei Häufungspunkten.

18. Sei X eine unendliche Menge. Für $p, q \in X$ definiere

$$d(p,q) = \begin{cases} 1 & : \quad p \neq q \\ 0 & : \quad p = q \end{cases}$$

Man beweise, dass dies eine Metrik ist. Welche Teilmengen des resultierenden metrischen Raumes sind offen? Welche abgeschlossen?

19. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiere:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \ , \ d_2(x,y) = |x-y|^{1/2} \ , \ d_3(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Man entscheide in jedem Fall, ob eine Metrik vorliegt oder nicht.

20. Man zeige : jeder Punkt $x \in [0,1]$ ist Häufungspunkt des offenen Intervalls $(0,1)$.

21. Man bestimme die Häufungspunkte der Menge

$$A = \{(-1)^n \, \frac{4n+1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

22. Welche der folgenden Mengen sind offen bzw. abgeschlossen:

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \ : \ 2 < x < 3\},$$

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\},$$

$$\{x \in \mathbb{R} \ : \ x \geq 0\} \ , \ \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 0\},$$

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 2\}.$$

23. Find all accumulation points and the closure of the sets in exercise 22.

24. Man beweise, dass aus der Konvergenz der Folge $\{s_n\}$ die Konvergenz von $\{|s_n|\}$ folgt. Gilt auch die Umkehrung?

25. Man berechne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{5n^3} \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-n^2}{n} \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}.$$

26. Man berechne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+3^n}{7+3^n} \ , \ \lim_{n\to\infty} \frac{1+3^n}{7+4^n}.$$

27. Man berechne :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-n\right).$$

28. Man bestimme :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{4n+3}, \frac{(-1)^n}{5n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{\sqrt{n}}, \frac{n}{1+n^2}, -2+\frac{3n^3}{1+4n^3}\right).$$

29. Welche der folgenden Mengen sind kompakt?

$$[1,2]\cup[3,4] \ , \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 3x^2+4y^2=1\},$$

$$\{x\in\mathbb{R} \ : \ x\geq 1\} \ , \ \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ : \ 3x+4y=1\}.$$

30. Man betrachte den metrischen Raum von Aufgabe 18. Welche Teilmengen von X sind kompakt?

31. Determine an open covering of the intervall $(0,1)$ which has no finite subcovering.

32. Seien K_1 und K_2 kompakte, disjunkte Teilmengen das $\mathbb{R}^n$. Man zeige : es gibt offene Mengen U_1 und U_2 mit $K_1\subset U_1, K_2\subset U_2$ und $U_1\cap U_2=\emptyset$. Hinweis: man behandle zunächst den Fall einer einpunktigen Menge $K_2=\{\mathbf{x}\}$.

33. Sei $s_1 = \sqrt{2}$ und

$$s_{n+1} = \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}\ , n \in \mathbb{N}.$$

Man beweise, dass $\{s_n\}$ konvergiert und dass $s_n < 2$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

34. Man bestimme $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$, sup und inf von

$$\{(-1)^n \frac{n^2}{2n^2-1}\}\ ,\ \{(-1)^n + \frac{n^2}{2n^2-1}\}.$$

35. Man bestimme $\limsup_{n\to\infty}$, $\liminf_{n\to\infty}$ der Folgen:

$$a_n = \begin{cases} 1/n & : \quad n \equiv 0 \bmod 2 \\ 1 & : \quad n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$$b_n = \begin{cases} (1+1/n)^n & : \quad n \equiv 0 \bmod 2 \\ (1+1/n)^{n+1} & : \quad n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}$$

$$c_n = \begin{cases} 1 + 1/2^n & : \quad n \equiv 0 \bmod 3 \\ 2 + (n+1)/n & : \quad n \equiv 1 \bmod 3 \\ 2 & : \quad n \equiv 2 \bmod 3 \end{cases}$$

36. Man bestimme alle Häufungspunkte der Menge $\{i^n \frac{n}{n+1}\}$ in $\mathbb{C}$ und gebe Teilfolgen an, die gegen die einzelnen Häufungspunkte konvergieren.

37. Berechne :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1/n}}{1+1/n}\ ,\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{2^n\, n^5}{3^n} \right).$$

38. Man zeige : die Teleskopreihen $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1})$ und $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k+1})$ sind genau dann konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n$ existiert. In diesem Falle ist

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1}) = \lim_{n\to\infty} x_n - x_0 \quad \text{und} \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k+1}) = x_1 - \lim_{n\to\infty} x_n.$$

39. Man zeige, dass die folgenden Reihen die angegebenen Werte haben.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} = \frac{2}{3}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \frac{1}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{4^k} = 1,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{4^k} = \frac{4}{7}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

40. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $\{\alpha_k\}$ eine beschränkte Folge, so braucht $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a_k$ nicht mehr konvergent zu sein (Beispiel?). Man zeige : ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ sogar absolut konvergent, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k a_k$ auch absolut konvergent.

41. Welche der folgenden Reihen sind konvergent, welche divergent?

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^{1/k}}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^p},\ p \in \mathbb{N}.$$

42. Wie 41 für :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\log k)^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^{1/k}}{k}.$$

43. Wie 41 für :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} k^4\, e^{-k^2}.$$

44. Show : the series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ is absolutely convergent, if and only if the a_k's can be written in the form $a_k = b_k - c_k$, where $b_k, c_k \geq 0$ and the series $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ and $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ are convergent.

45. Man zeige : ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent und $\{\alpha_k\}$ eine Nullfolge, so strebt $a_k\alpha_0 + a_{k-1}\alpha_1 + \ldots + a_0\alpha_k \to 0$. Hinweis : Cauchy-Produkt!

46. Man untersuche das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$:

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}, \qquad a_n = (n^{1/n} - 1)^n.$$

47. Welche der folgenden Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sind absolut, welche bedingt konvergent?

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n \log n}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}, \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

48. Man bestimme den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)}.$$

49. Wie Aufgabe 48 für :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} z^n.$$

50. Man zeige direkt (aus der Definition), dass die Folge $\{(-1)^n \frac{n}{n+1}\}$ keine Cauchyfolge ist.

51. Suppose that $\{p_n\}$ is a Cauchy sequence in a metric space X and that a suitable subsequence $\{p_{n_k}\}$ converges to a point $p \in X$. Show that the sequence $\{p_n\}$ converges to p.

52. $\{p_n\}$ und $\{q_n\}$ seien Cauchyfolgen in einem metrischen Raum X. Man zeige, dass die Folge $\{d(p_n, q_n)\}$ konvergiert.

53. Man schreibe die folgenden reellen Funktionen h als Komposita $f \circ g$ und gebe ihre maximalen Definitionsbereiche an:

$$h(x) = (2x+1)^3 \ , \ h(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

54. Wie Aufgabe 53 für

$$h(x) = \sqrt{(x-1)(x-2)} \ , \ h(x) = ((x+1)(x-1)(x+3))^{-1/2}.$$

55. Berechne folgende Grenzwerte (falls sie existieren):

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} \ , \ \lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}.$$

56. Wie Aufgabe 55 für

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}\ ,\ n\in\mathbb{N}.$$

57. Wie Aufgabe 55 für

$$\lim_{x\to 0}|x|^3\ ,\ \lim_{x\to 0}\mathrm{sgn}x.$$

58. Wie Aufgabe 55 für

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^3-1}{x}\ ,\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}.$$

59. Wie Aufgabe 55 für

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{|x|}.$$

60. Man beweise die Stetigkeit der Funktion $f(x)=2x^2-3$ in den Punkten $x=2$ und $x=a$. ($\epsilon-\delta$ Methode!)

61. In welchen Punkten sind folgende Funkionen stetig:

$$f(x)=x^3-3x+1\ ,\ g(x)=\frac{x^2}{(x-2)^2}\ ,\ h(x)=\frac{3x-4}{x^2+x+1}.$$

62. Wie Aufgabe 61 für

$$f(x)=\max\{x^2-1,1\}\ ,\ g(x)=\mathrm{sgn}(x^2+1).$$

63. Wie Aufgabe 61 für

$$f(x)=\sqrt{x+1}\ ,\ g(x)=\sqrt{x^2+1}\ ,\ h(x)=(x+1)^{2/3}.$$

64. Sei

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1} & : \quad x\neq -1\\ -2 & : \quad x=-1\end{cases}$$

Man zeige f ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

65. Welche der folgenden Funktionen ist gleichmäßig stetig?
$f(x) = 1/x$ auf $(0, \infty)$; $g(x) = 1/x$ auf $[1, \infty)$; $h(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}$; $k(x) = x^2$ auf $[-2, 2]$.

66. Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6} & : \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man zeige, dass f auf $\mathbb{R}^2$ beschränkt ist, dass g in jeder Umgebung von $(0,0)$ unbeschränkt ist und dass f an der Stelle $(0,0)$ unstetig ist. Die Einschränkungen von f und g auf jede beliebige Gerade in $\mathbb{R}^2$ sind jedoch stetig.

67. Man zeige : $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $E \subseteq X$ mit $\mathrm{diam} E < \delta$ gilt: $\mathrm{diam} f(E) < \epsilon$.

68. Sei f eine gleichmäßig stetige Abbildung eines metrischen Raumes X in einen metrischen Raum Y. Man zeige : für jede Cauchyfolge $\{x_n\}$ in X ist die Folge $\{f(x_n)\}$ eine Cauchyfolge in Y.

69. Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend?

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ : \ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ : \ x_1^2 + x_2^2 < 1/4\};$$

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ : \ (x_1 - 1)^2 + x_2^2 < 1\} \cup \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ : \ (x_1 - 5)^2 + x_2^2 < 1/4\};$$

$$\{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ : \ |x_2| \leq 2 \ , \ x_1 \in \mathbb{R}\} \ , \ \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \ : \ |x_2| > 2 \ , \ x_1 \in \mathbb{R}\}.$$

70. Show that the function $f(x) = x^3 - x - 1$ has a zero in the intervall $[1, 2]$.

71. Man zeige : die Funktion $g(x) = x^3 - 10x^2 + 2$ nimmt jeden reellen Wert an.

72. Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige : die Funktion $x \mapsto x^n$ ist bei geradem n auf $(-\infty, 0]$ monoton fallend und auf $[0, +\infty)$ monoton wachsend, bei ungeradem n aber auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.

73. Mit $[x]$ sei die größte ganze Zahl bezeichnet, die nicht größer ist als x, d.h. $[x]$ ist diejenige Zahl, für die $x-1 < [x] \leq x$ gilt. Setze $(x) = x - [x]$. Was sind die Unstetigkeitsstellen der Funktionen $[x]$ und (x).

74. Man berechne folgende Grenzwerte, falls sie existieren:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1} \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4x}{5x^2+1} \ , \ \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right).$$

75. Wie Aufgabe 74 für :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x} \ , \ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right).$$

76. Sei $\epsilon > 0$. Man bestimme $N(\epsilon) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x > N(\epsilon)$ gilt

$$\left|\frac{x^4-x^2}{(x^2+1)^2} - 1\right| < \epsilon.$$

77. In welchen Punkten sind folgende Funktionen differenzierbar? Man gebe jeweils die Ableitungen an :

$$f(x) = (ax+b)^3 \ , \ g(x) = \operatorname{sgn} x \ , \ h(x) = |x|^2.$$

78. Man bestimme die 1. und 2. Ableitung folgender Funktionen:

$$f(x) = \frac{(2x+4)^2}{3x+1} \ , \ g(x) = (x^2+x+1)^{1/2} \ , \ h(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2-1)}.$$

79. Man bestimme jeweils die lokalen und globalen Maxima und Minima von :

$$f(x) = x(-x^2+10x+1) \ , \ x \in [3,9] \ ; \ g(x) = (x-2)^2(x+1) \ , \ x \in \mathbb{R}.$$

80. Seien $r_1, r_2, \ldots, r_n$ vorgegebene reelle Zahlen. Man bestimme x so, dass $(r_1-x)^2 + (r_2-x)^2 + \ldots + (r_n-x)^2$ ein Minimum wird.

81. Man verifiziere den Mittelwertsatz für $f(x) = 2x^2 - 4$ auf dem Intervall $[-1,1]$.

82. Berechne :

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}\ ,\ \lim_{x\to+\infty}[(x+1)^\alpha - x^\alpha]\ ,\ \alpha\in\mathbb{Q}.$$

83. Warum führt die folgende Anwendung der Regel von de l'Hospital zu einem falschen Ergebnis?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-1}{2x} = \lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{2} = 4.$$

(Der wahre Grenzwert ist 2.)

84. Man entwickle $f(x) = \sqrt{1+x}$ in eine Taylorreihe um $x = 0$, und gebe eine Formel für das Restglied an.

85. Wie Aufgabe 84 für $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

86. Es sei $f(x) = |x|^3$. Man berechne $f'(x), f''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und zeige , dass $f^{(3)}(0)$ nicht existiert.

87. Eine Funktion $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt konvex auf (a,b), wenn für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in (a,b)$ und für alle $\lambda \in (0,1)$ stets $f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \leq (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2)$ ist. Sei nun f eine differenzierbare reelle Funktion, definiert auf (a,b). Man beweise : f ist genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist. (Verwende den Mittelwertsatz!) Für jedes $x \in (a,b)$ existiere ferner $f''(x)$. Man beweise, dass f genau dann konvex ist, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$ gilt.

88. Sei $f : (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar, und seien M_0, M_1, bzw.M_2 die kleinsten oberen Schranken von $|f(x)|, |f'(x)|$, bzw. $|f''(x)|$ auf (a,∞). Man zeige :

$$M_1^2 \leq 4M_0M_2.$$

Hinweis : Ist $h > 0$, so folgt aus dem Taylorschen Satz, dass

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\,[f(x+2h) - f(x)] - hf''(\xi)$$

für ein $\xi \in (x, x+2h)$ gilt. Also folgt

$$|f'(x)| \leq hM_2 + \frac{M_0}{h}.$$

89. Um in Aufgabe 88 zu zeigen, dass $M_1^2 = 4M_0M_2$ tatsächlich vorkommen kann, wähle man $a = -1$, definiere

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & : \quad -1 < x < 0 \\ \frac{x^2-1}{x^2+1} & : \quad 0 \le x < \infty \end{cases}$$

und zeige, dass $M_0 = 1, M_1 = 4$ und $M_2 = 4$ ist.

90. (Newton'sches Näherungsverfahren) Sei f zweimal differenzierbar auf $[a, b]$, seien ferner $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) \ge \delta > 0$ und $0 \le f''(x) \le M$ für alle $x \in [a, b]$. Sei schließlich ξ der einzige Punkt in (a, b), für welchen $f(\xi) = 0$ ist.
Man ergänze die Details in der folgenden Skizze der Newton'schen Methode zur Berechnung von ξ.
(a) Man wähle $x_1 \in (\xi, b)$ und definiere $\{x_n\}$ durch

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Man interpretiere dies geometrisch mit Hilfe der Tangente am Graphen von f. (Skizze!)
(b) Man zeige : $x_{n+1} < x_n$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$.
(c) Unter Anwendung des Taylorschen Satzes zeige man, dass

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)} (x_n - \xi)^2$$

für geeignete $t_n \in (\xi, x_n)$ gilt.
(d) Für $A = M/2\delta$ folgere man

$$0 \le x_{n+1} - \xi \le \frac{1}{A} [A(x_1 - \xi)]^{2^n},$$

was bedeutet, dass das Newton'sche Näherungsverfahren sehr schnell konvergiert, falls $A(x_1 - \xi) < 1$ ist.