Zusammenfassung der Vorlesung Einführung in die Analysis

Hier werden die wichtigsten Definitionen und Sätze aus der Vorlesung dargestellt, zusammen mit Beweisideen und Querverbindungen.
Ziel ist es, die Zusammenhänge der einzelnen Gundbegriffe zu erkennen und dem "roten Faden" der Vorlesung folgen zu können.

I. Reelle und komplexe Zahlen.

Definition. *Sei M eine geordnete Menge und $E \subset M$. Gibt es ein $\beta \in M$ mit $x \leq \beta$ für alle $x \in E$, so heißt E nach oben beschränkt und β eine obere Schranke für E. Analog werden untere Schranken und nach unten beschränkte Mengen eingeführt.*
Ist $E \subset M$ nach oben beschränkt und existiert ein $\alpha \in M$ mit den Eigenschaften:
(i) α ist obere Schranke für E,
(ii) ist $\gamma < \alpha$, so ist γ keine obere Schranke von E, d.h. $\exists x \in E$ mit $\gamma < x$,
so nennt man α die kleinste obere Schranke oder das Supremum von E, wir schreiben $\alpha = \sup E$ (nach (ii) gibt es höchstens ein solches α).
Ist $E \subset M$ nach unten beschränkt und existiert ein $\alpha \in M$ mit den Eigenschaften:
(i) α ist untere Schranke für E,
(ii) ist $\gamma > \alpha$, so ist γ keine untere Schranke von E, d.h. $\exists x \in E$ mit $\gamma > x$,
so nennt man α die größte untere Schranke oder das Infimum von E, wir schreiben $\alpha = \inf E$ (nach (ii) gibt es höchstens ein solches α).
Gehört das Supremum zu E, so nennt man es auch das Maximum, gehört das Infimum zu E, so nennt man es das Minimum.

Beispiel. *Sei $M = \mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen und*

$$A = \{p \in \mathbb{Q}^+ \ : \ p^2 < 2\} \quad , \quad B = \{p \in \mathbb{Q}^+ \ : \ 2 < p^2\}.$$

A ist nach oben beschränkt, die oberen Schranken von A sind genau die Elemente von B.
Man kann zeigen, dass die Menge B kein kleinstes Element enthält, d.h.$\forall p \in B, \exists q \in B$ mit $q < p$ (Grundmenge ist $\mathbb{Q}$!). Also hat A keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$. Analog hat B keine größte untere Schranke in $\mathbb{Q}$.

Definition. *Eine geordnete Menge M hat die Supremumseigenschaft, wenn gilt:*

ist $E \subset M$ nichtleer und nach oben beschränkt, so existiert das Supremum von E in M.
Analog führt man die Infimumseigenschaft ein.

Bemerkung. *Aus dem obigen Beispiel folgt, dass $\mathbb{Q}$ die Supremumseigenschaft nicht besitzt.*

Der nächste Satz besagt, dass eine geordnete Menge mit der Supremumseigenschaft auch die Infimumseigenschaft besitzt.

Satz. *Sei M eine geordnete Menge mit der Supremumseigenschaft und sei $B \subset M$ eine nichtleere nach unten beschränkte Menge. Sei U die Menge aller unteren Schranken von B. Dann gilt : es existiert $\alpha = \sup U$ in M und $\alpha = \inf B$.*

Die reellen Zahlen kann man nun ausgehend von den rationalen Zahlen als geordneten Körper mit der Supremumseigenschaft einführen:

Theorem. *Es gibt einen geordneten Körper $\mathbb{R}$, der die Supremumseigenschaft hat und den Körper $\mathbb{Q}$ als Teilkörper enthält.*

Die Element von $\mathbb{R}$ werden als gewisse Teilmengen von $\mathbb{Q}$ definiert (Dedekind'sche Schnitte): ein Schnitt ist dabei eine Menge $\alpha \subset \mathbb{Q}$ mit den folgenden Eigenschaften: (i) α ist nicht leer und $\alpha \neq \mathbb{Q}$, (ii) sind $p \in \alpha,\ q \in \mathbb{Q}$ und gilt $q < p$, so folgt $q \in \alpha$, (iii) ist $p \in \alpha$, so existiert $r \in \alpha$ mit $p < r$.
Ein Beispiel für einen solchen Schnitt liefert die Menge $A = \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$ von oben, wenn man sie noch mit den negativen rationalen Zahlen erweitert, also

$$\alpha = \{q \in \mathbb{Q} \ : \ q \leq 0\} \cup A.$$

Auf der Menge der Schnitte kann man nun eine Ordnung einführen, indem man $\alpha < \beta$ durch $\alpha \subset \beta$ definiert. Außerdem lässt sich auf der Menge aller Schnitte eine Addition und eine Multiplikation einführen, sodass ein geordnter Körper entsteht, von dem man verhälltnismäßig leicht zeigen kann, dass er die Supremumseigenschaft besitzt und $\mathbb{Q}$ als Teilkörper enthält.
Eine weitere Möglichkeit, die reellen Zahlen einzuführen, ergibt sich bei der Begriffsbildung von Cauchy-Folgen und der sogenannten Vervollständigung metrischer Räume (siehe Kapitel III.).

Aus der Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ lassen sich die folgenden wichtigen Eigenschaften reeller Zahlen ableiten:

Satz. *(a) Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$. (Archimedische Eigenschaft)*
(b) Sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, so $\exists p \in \mathbb{Q}$ mit $x < p < y$. ($\mathbb{Q}$ liegt "dicht" in $\mathbb{R}$).

Die Archimedische Eigenschaft ist dann besonders aussagekräftig, wenn x sehr klein und y sehr großist.

Weiters kann man auch aus der Supremumseigenschaft die Existenz von n-ten Wurzeln positiver reeller Zahlen ableiten:

Satz. *Für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert ein eindeutig bestimmtes $y \in \mathbb{R},\ y > 0$ mit $y^n = x$. Wir schreiben $y = x^{1/n}$.*

Dezimalbruchentwicklung reeller Zahlen: sei $x \in \mathbb{R}^+$ und n_0 die größte ganze Zahl mit $n_0 \leq x$, im nächsten Schritt sei n_1 die größte ganze Zahl mit $n_1 \leq 10(x - n_0)$, was äquivalent zu $n_0 + \frac{n_1}{10} \leq x$ ist. Sind $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$ gewählt, so sei n_k die größte ganze Zahl mit

$$n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \cdots + \frac{n_k}{10^k} \leq x.$$

Auf diese Weise ergibt sich die sogenannte Dezimalbruchentwicklung von $x = n_0, n_1 n_2 n_3 \ldots$.

Bemerkung. *Ist E eine nichtleere nach oben nicht beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$, so schreibt man $\sup E = +\infty$, und analog für eine nach unten nicht beschränkte Teilmenge $\inf E = -\infty$ (erweiterte Zahlengerade).*

Achtung: $+\infty$ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen.

Satz. *Sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl mit Realteil $\Re z = a$ und Imaginärteil $\Im z = b$, sei ferner $\overline{z} = a - ib$ und $|z|^2 = z\overline{z} = a^2 + b^2$ und sei $w = c + id$ eine weitere komplexe Zahl. Dann gilt: $|z| > 0\ \forall z \neq 0$, $|\overline{z}| = |z|$, $|\Re z| \leq |z|$, $|\Im z| \leq |z|$, $|zw| = |z|\,|w|$ und $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung).*

Satz (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)**.** *Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Dann gilt:*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j \right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2.$$

Zum Beweis berechne man den Ausdruck

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} |Ba_j - Cb_j|^2,$$

wobei $A = \sum_{j=1}^{n} |a_j|^2$, $B = \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2$ und $C = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j$ ist.

Definition. *Für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_k] \in \mathbb{R}^k$ sei*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)\ ,\ \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k)\ ,\ \alpha \in \mathbb{R}$$

und

$$\mathbf{x}.\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{k} x_j y_j$$

das innere Produkt der Vektoren $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$, *sowie*

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}.\mathbf{x})^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{k} x_j^2\right)^{1/2}$$

die Norm von $\mathbf{x}$.

Satz. *Für* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt:*
$|\mathbf{x}| \geq 0$; $|\mathbf{x}| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$; $|\alpha\mathbf{x}| = |\alpha|\,|\mathbf{x}|$; $|\mathbf{x}+\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|$; $|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \leq |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + |\mathbf{y}-\mathbf{z}|$.

II. Topologische Begriffe.

Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen.

Definition. *Zwei Mengen* A *und* B *heißen gleichmächtig (haben dieselbe Kardinalzahl, sind äquivalent* $A \sim B$*), wenn es eine bijektive Abbildung zwischen* A *und* B *gibt.*
Sei $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. *Eine Menge* A *heißt endlich, falls ein* $n \in \mathbb{N}$ *existiert mit* $A \sim \mathbb{N}_n$; *die Menge* A *heißt unendlich, falls* A *nicht endlich ist. Die Menge* A *heißt abzählbar, falls* $A \sim \mathbb{N}$. *Die Menge* A *heißt überabzählbar, falls* A *weder endlich noch abzählbar ist.*

Bemerkung. *Eine endliche Menge ist zu keiner echten Teilmenge äquivalent, unendliche Mengen schon.*

Definition. *Sei* A *eine Menge . Unter einer Folge in* A *versteht man eine Funktion* $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$. *Man schreibt* $f(n) = a_n \in A$, $n \in \mathbb{N}$ *oder auch* $\{a_n\}$.

Bemerkung. *Elemente einer Folge sind nicht notwendigerweise verschieden. Jede abzählbare Menge kann in einer Folge angeordnet werden.*

Mit Hilfe der letzten Bemerkung kann man die folgende Aussage beweisen

Satz. *Jede unendliche Teilmenge* E *einer abzählbaren Menge* A *ist abzählbar.*

Definition. *Seien* A *und* Ω *Mengen. Jedem* $\alpha \in A$ *sei eine Teilmenge* E_α *von* Ω *zugeordnet. Mit* $\{E_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ *bezeichnet man eine Familie (System) von Teilmengen von* Ω.

$$x \in \bigcup_{\alpha \in A} E_\alpha \ \Leftrightarrow \ \exists \alpha \in A \text{ mit } x \in E_\alpha.$$

$$x \in \bigcap_{\alpha \in A} E_\alpha \;\Leftrightarrow\; x \in E_\alpha \;\forall \alpha \in A.$$

Satz. *Sei $\{E_n\}$ $n \in \mathbb{N}$ eine Folge abzählbarer Mengen und sei $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dann ist M abzählbar.*

Für den Beweis ordnet man jede der Mengen $E_n = \{x_{nk}\}_k$ als Folge an und zählt die Elemente der Menge M wie folgt ab:

$$x_{11}; x_{21}, x_{12}; x_{31}, x_{22}, x_{13}; x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}; \dots .$$

Satz. *Sei A eine abzählbare Menge und*

$$B_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \;:\; a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$$

die Menge aller n-Tupel aus Elementen von A.
(In einem n-Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ sind die a_j nicht notwendigerweise verschieden). Dann gilt : B_n ist abzählbar.

Der Beweis wird durch Induktion nach der Länge der n-Tupel geführt und im Induktionsschritt auf den vorigen Satz zurückgeführt.
Als Korollar erhält man die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$.

Satz. *Sei A die Menge aller Folgen, deren Glieder entweder* 0 *oder* 1 *sind. Dann ist A überabzählbar.*

Mit Hilfe des Cantor'schen Diagonalisierungsverfahrens konstruiert man zu jeder abzählbaren Teilmenge E von A eine Folge von Nullen und Einsen, die nicht zu E gehört und erschließt daraus die Überabzählbarkeit von A.
Betrachtet man die dyadische Entwicklung der reellen Zahlen, so folgt aus dem letzten Satz auch die Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$.

Metrische Räume.

Definition. *Sei X eine Menge. X heißt metrischer Raum, wenn eine sogenannte Distanzfunktion d auf X existiert, das ist eine Funktion $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $d(p, q) > 0$, falls $p, q \in X$ und $p \neq q$, weiters $d(p, p) = 0$ und $d(p, q) = d(q, p)$ und $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ $\forall r \in X$ (Dreiecksungleichung).*

$\mathbb{R}^k$, $k \geq 1$ mit $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ ist ein metrischer Raum.
Jede Teilmenge eines metrischen Raumes ist wieder ein metrischer Raum.

Definition. *Sei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Menge $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a < x < b\}$ heißt offenes Intervall, die Menge $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \;:\; a \leq x \leq b\}$ heißt abgeschlossenes Intervall, eine Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ der Gestalt $\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \;:\; a_j \leq x_j \leq b_j \; j = 1, \dots, k\}$ heißt k-Zelle und die Menge*

$U_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \ : \ |\mathbf{y} - \mathbf{x}| < r\}$ heißt offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$.
Eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^k$ heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ auch die gesamte Verbindungsstrecke $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ zu E gehört.

Offene Kugeln, abgeschlossene Kugeln und k-Zellen sind konvex.

Definition. *Sei (X, d) ein metrischer Raum.*
(a) Eine Umgebung eines Punktes $p \in X$ ist dei Menge $U_r(p) = \{q \in X \ : \ d(p, q) < r\}$.
(b) Sei $E \subset X$. Ein Punkt p heißt Häufungspunkt von E, wenn in jeder Umgebung von p ein Punkt $q \in E$ liegt mit $q \neq p$.
(c) Ist $p \in E$ und ist p kein Häufungspunkt von E, dann wird p ein isolierter Punkt von E genannt.
(d) E heißt abgeschlossen, wenn jeder Häufungspunkt von E zu E gehört.
(e) p heißt innerer Punkt von E, wenn es eine Umgebung U von p gibt mit $U \subset E$.
(f) E heißt offen, wenn jeder Punkt von E ein innerer Punkt von E ist.
(g) E heißt beschränkt, wenn $\exists M > 0$ und $\exists q \in X$ mit $d(p, q) < M$, $\forall p \in E$; d.h. $E \subset U_M(q)$.
(h) E heißt dichte Teilmenge von X, wenn jeder Punkt von X ein Häufungspunkt von E oder ein Punkt von E ist.

Beispiele: siehe Vorlesung.
In den folgenden Aussagen werden einfache Eigenschaften der obigen Begriffe beschrieben:

Satz. *Jede Umgebung ist eine offene Menge.*

Satz. *Ist p ein Häufungspunkt einer Menge E, so gibt es in jeder Umgebung von p unendlich viele Punkte von E.*

Satz. *Eine endliche Menge hat keine Häufungspunkte.*

Satz. *Eine Menge E ist genau dann offen, wenn ihr Komplement E^c abgeschlossen ist. Eine Menge F ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement F^c offen ist.*

Satz. *(a) Für jede Familie $\{G_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ offener Mengen ist $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ offen;*
(b) Für jede Familie $\{F_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ abgeschlossener Mengen ist $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ abgeschlossen;
(c) Für jede endliche Familie $G_1, \ldots, G_n$ offener Mengen ist $\bigcap_{j=1}^n G_j$ offen;
(d) Für jede endliche Familie $F_1, \ldots, F_n$ abgeschlossener Mengen ist $\bigcup_{j=1}^n F_j$ abgeschlossen.

Um die Zusammenhänge zwischen Häufungspunkten, abgeschlossenen Mengen und dichten Mengen besser darstellen zu können, wird der folgende Begriff eingeführt:

Definition. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $E \subset X$. *Mit* E' *bezeichnet man die Menge aller Häufungspunkte von* E *in* X. *Die Menge* $\overline{E} := E \cup E'$ *heißt abgeschlossenen Hülle von* E *oder Abschluss von* E.

Satz. *(a)*$\overline{E}$ *ist abgeschlossen;*
(b) $E = \overline{E} \Leftrightarrow E$ *ist abgeschlossen;*
(c) für jede abgeschlossene Menge $F \subset X$ *mit* $E \subset F$ *gilt* $\overline{E} \subset F$.

Die Aussagen (a) und (c) des letzten Satzes ergeben: $\overline{E}$ ist die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die E enthält.
Außerdem folgt : $E \subset X$ ist dicht in $X \Leftrightarrow \overline{E} = X$.

Der folgende Satz bringt den Begriff des Supremums in Verbindung mit den eben eingeführten topologischen Begriffen:

Satz. *Sei* E *eine nicht leere Menge reeller Zahlen, die nach oben beschränkt ist. Sei* $y = \sup E$. *Dann gilt* $y \in \overline{E}$. *Insbesondere gilt : ist* E *zusätzlich abgeschlossen, dann ist* $y \in E$.

Bemerkung. *Das Intervall* (a, b) *ist als Teilmenge des* $\mathbb{R}^2$ *nicht offen, hingegen als Teilmenge von* $\mathbb{R}$ *schon. Diese Tatsache führt zu folgender Begriffsbildung, die später nützlich sein wird.*

Definition. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $E \subset Y \subset X$. *Wir nennen* E *relativ* Y *offen, wenn für jedes* $p \in E$ *eine Umgebung* $U_r(p)$ *existiert mit* $U_r(p) \cap Y \subset E$.

Das Intervall (a, b) ist relativ $\mathbb{R}$ offen in $\mathbb{R}^2$.
Der folgende Satz charakterisiert relativ Y offene Mengen:

Satz. *Sei* (X, d) *ein metrischer Raum und* $E \subset Y \subset X$. *Dann gilt :* E *ist genau dann relativ* Y *offen, wenn es eine in* X *offene Menge* G *gibt mit* $E = Y \cap G$.

III. Folgen und Reihen.

Konvergente Folgen.

Definition. *Sei* (x, d) *ein metrischer Raum. Eine Folge* $\{p_n\}$ *in* X *konvergiert in* X, *wenn ein* $p \in X$ *existiert mit folgender Eigenschaft: für jedes* $\epsilon > 0$ *existiert ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $d(p_n, p) < \epsilon$ *für alle* $n \geq N$. *Wir sagen dann :* $\{p_n\}$ *konvergiert gegen* p, *schreiben* $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ *und nennen* p *den Grenzwert von* $\{p_n\}$.

Konvergiert die Folge $\{p_n\}$ *nicht, so sagt man, sie divergiert.*
Die Folge $\{p_n\}$ *heißt beschränkt, wenn ihr Bildbereich eine beschränkte Menge ist. (Der Bildbereich einer Folge kann eine endliche Menge sein, z.B. bei einer konstanten Folge.)*

Bemerkung. *Die Definition der Konvergenz einer Folge hängt nicht nur von ihr selbst ab, sondern auch vom "Grundraum" X. So konvergiert* $\{1/n\}$ *gegen* 0 *in* $\mathbb{R}$, *aber* $\{1/n\}$ *konvergiert nicht in* $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 0\}$.

Beispiele : siehe Vorlesung.

Satz. *(a) Sei* $\{p_n\}$ *eine Folge in einem metrischen Raum* X. $\{p_n\}$ *konvergiert genau dann gegen* $p \in X$, *wenn in jeder Umgebung von* p *fast alle Glieder der Folge liegen (d.h. alle bis auf höchstens endlich viele).*
(b) Ist $p, p' \in X$ *und konvergiert* $\{p_n\}$ *gegen* p *und* p', *dann gilt* $p = p'$ *(Grenzwerte sind eindeutig).*
(c) Wenn $\{p_n\}$ *konvergiert, dann ist* $\{p_n\}$ *beschr"ankt.*
(d) Ist $E \subset X$ *und ist* p *ein Häufungspunkt von* E, *dann existiert eine Folge* $\{p_n\}$ *in* E, *so dass* $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ *gilt.*

Durch Aussage (d) wird die Verbindung zwischen den topologischen Begriffen des vorigen Abschnittes mit dem Grenzwertbegriff hergestellt.

Satz. *Seien* $\{s_n\}$ *und* $\{t_n\}$ *konvergente Folgen in* $\mathbb{C}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ *und* $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. *Dann gilt :*
(a) $\lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = s + t$;
(b) $\lim_{n\to\infty} cs_n = c \lim_{n\to\infty} s_n = cs$ *und*
$\lim_{n\to\infty}(c + s_n) = c + \lim_{n\to\infty} s_n = c + s$ *für jedes* $c \in \mathbb{C}$;
(c) $\lim_{n\to\infty} s_n t_n = (\lim_{n\to\infty} s_n)(\lim_{n\to\infty} t_n) = st$;
(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{s}$, *falls* $s_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $s \neq 0$.

Man achte darauf, dass im letzten Satz die Existenz der Grenzwerte der Folgen $\{s_n\}$ und $\{t_n\}$ vorausgesetzt wird, ansonsten würde man die Aussagen des Satzes nicht erhalten (Beispiele : siehe bungen).

Im folgenden Satz werden die Begriffe Supremum bzw. Infimum mit dem Grenzwertbegriff in Verbindung gestellt, dies geschieht mittels monotoner Folgen:

Definition. *Eine Folge* $\{s_n\}$ *heißt monoton wachsend, wenn* $s_n \leq s_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, und monoton fallend, falls* $s_n \geq s_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Die Klasse der monotonen Folgen besteht aus den monton wachsenden Folgen und den monton fallenden Folgen.*

Satz. *Sei* $\{s_n\}$ *eine montone Folge in* $\mathbb{R}$. *Die Folge* $\{s_n\}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.*

Dabei ist das Supremum bzw. Infimum der Grenzwert, die Existenz ergibt sich aus der Supremumseigenschaft der reellen Zahlen.
Eine weitere wichtige Bemerkung ist : gilt $0 \leq x_n \leq s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$, dann ist auch $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Diese Tatsache verwendet man beim Beweis des folgenden Satzes

Satz. *(a) Für* $p > 0$ *ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$;
(b) Für $p > 0$ *ist* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$;
(c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
(d) Ist $p > 0$ *und ist* $\alpha \in \mathbb{R}$, *dann gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$;
(e) Für $|x| < 1$ *ist* $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$.

Bei der Aussage (b) setzt man $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$ und verwendet den binomischen Lehrsatz zur Abschätzung $(1 + nx_n) \leq (1 + x_n)^n = p$, woraus man schnell das Gewünschte ableiten kann, analog verfährt man in (c).

Satz. *(a) Eine Folge* $\{\mathbf{x_n}\}$ *in* $\mathbb{R}^k$ *mit Komponenten* $\mathbf{x_n} = (\alpha_{1,n}, \ldots, \alpha_{k,n})$ *konvergiert genau dann gegen* $\mathbf{x} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, *wenn gilt :*
$\lim_{n\to\infty} \alpha_{j,n} = \alpha_j$ *für* $1 \leq j \leq k$.
(b) Seien $\{\mathbf{x_n}\}$ *und* $\{\mathbf{y_n}\}$ *Folgen in* $\mathbb{R}^k$ *und sei* $\{\beta_n\}$ *eine Folge in* $\mathbb{R}$. *Es gelte* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x}$ *und* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{y_n} = \mathbf{y}$ *sowie* $\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta$. *Dann gilt :*

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{x_n} + \mathbf{y_n}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}\ ,\ \lim_{n\to\infty} (\mathbf{x_n}.\mathbf{y_n}) = \mathbf{x}.\mathbf{y}\ ,\ \lim_{n\to\infty} (\beta_n \mathbf{x_n}) = \beta \mathbf{x}.$$

Teilfolgen und kompakte Mengen.

Definition. *Sei* $\{p_n\}$ *eine Folge in einem metrischen Raum. Man betrachte eine Folge* $\{n_k\}_k$ *natürlicher Zahlen mit* $n_1 < n_2 < \ldots$. *Die Folge* $\{p_{n_k}\}_k$ *heißt Teilfolge von* $\{p_n\}$.

Satz. *Die Folge* $\{p_n\}$ *ist genau dann konvergent, wenn jede Teilfolge von* $\{p_n\}$ *konvergent ist.*

Wir wollen nun die Frage behandeln, unter welchen Bedingungen eine vorgegebene Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Dies führt uns auf den topologischen Begriff der Kompaktheit.

Definition. *Unter einer offenen berdeckung einer Menge* E *in einem metrischen Raum* X *versteht man eine Familie* $\{G_\alpha\}$ *offener Teilmengen von* X, *so dass* $E \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$ *gilt.*

Definition. *Eine Teilmenge* K *eines metrischen Raumes* X *heißt kompakt, wenn jede offene berdeckung von* K *eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. ist* $\{G_\alpha\}$ *eine beliebige offene berdeckung von* K *so existieren* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *mit* $K \subset G_{\alpha_1} \cup \cdots \cup G_{\alpha_n}$.

Endliche Mengen sind kompakt.
Wir werden zeigen : die kompakten Mengen in $\mathbb{R}^k$ sind genau die abgeschlossenen und beschränkten Mengen.

Beispiel. *Die offene berdeckung* $\bigcup_{n\geq 3}(1/n, 1-1/n) \supset (0,1)$ *des offenen Intervalls* $(0,1)$ *hat keine endliche Teilüberdeckung, also ist das offene Intervall* $(0,1)$ *nicht kompakt.*

Gilt $E \subset Y \subset X$, so ist eine relativ Y offene Menge E nicht notwendigerweise offen in X. Dise Schwierigkeit tritt bei kompakten Mengen nicht auf, wie der folgende Satz zeigt.

Satz. *Es gelte* $K \subset Y \subset X$. *Die Menge* K *ist relativ* Y *kompakt (das bezieht sich auf die offenen Mengen bei der berdeckung) dann und nur dann wenn sie relativ* X *kompakt ist.*

In den folgenden Sätzen werden Eigenschaften kompakter Mengen bewiesen, die später Verwendung finden.

Satz. *Kompakte Teilmengen metrischer Räume sind abgeschlossen.*

Beweisidee: man zeigt jeder Punkt $p \in K^c$ ist ein innerer Punkt von K^c, wobei man dann die endliche berdeckungseigenschaft von K verwendet.

Satz. *Abgeschlossene Teilmengen von kompakten Mengen sind kompakt.*

Satz. *Ist* F *abgeschlossen und* K *kompakt, dann ist* $F \cap K$ *kompakt.*

Der folgende Satz ist fundamental für die weiteren Konstruktionen und beschreibt die sogenannte endliche Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen:

Satz. *Ist* $\{K_\alpha\}$ *eine Familie von kompakten Mengen eines metrischen Raumes* X *derart, dass der Durchschnitt jeder endlichen Teilfamilie von* $\{K_\alpha\}$ *nicht leer ist, dann ist* $\bigcap_\alpha K_\alpha$ *nicht leer.*

Beweis: Indirekt!
Daraus ergibt sich unmittelbar

Satz. *Sei* $\{K_n\}$ *eine Folge nichtleerer kompakter Mengen mit* $K_n \supset K_{n+1}$ *für jedes* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$.

Das folgende Resultat bringt die Begriffe Häufungspunkt und kompakt miteinander in Beziehung.

Satz. *Ist* E *eine unendliche Teilmenge einer kompakten Menge* K, *dann hat* E *einen Häufungspunkt in* K.

Beweis: indirekt.

Nun wird die Supremumseigenschaft von $\mathbb{R}$ dazu verwendet, um den folgenden Satz zu zeigen.

Satz. *Ist $\{I_n\}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen in $\mathbb{R}$ mit $I_n \supset I_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.*

Satz. *Ist $\{I_n\}$ eine Folge von k-Zellen mit $I_n \supset I_{n+1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.*

Im indirekten Beweis des nächsten Satzes wird eine Folge von k-Zellen konstruiert, welche ineinander geschachtelt sind und nach dem vorigen Satz einen nichtleeren Durchschnitt haben, was dann zu einem Widerspruch führt.

Satz. *Jede k-Zelle ist kompakt.*

Nun sind alle Hilfsmittel bereitgestellt, um kompakte Mengen in $\mathbb{R}^k$ zu charakterisieren:

Theorem. *Sei $E \subset \mathbb{R}^k$. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*
(a) E ist abgeschlossen und beschränkt;
(b) E ist kompakt;
(c) Jede unendliche Teilmenge von E hat einen Häufungspunkt in E.

Die quivalenz von (a) und (b) ist Inhalt des Satzes von Heine-Borel.

Satz. *Jede beschränkte unendliche Teilmenge E von $\mathbb{R}^k$ hat einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^k$.*

Wir können nun auch die Frage nach der Existenz von konvergenten Teilfolgen einer gegebenen Folge beantworten:

Satz. *(a) Ist $\{p_n\}$ eine Folge in einem kompakten metrischen Raum X, dann gibt es eine Teilfolge von $\{p_n\}$, die gegen einen Punkt von X konvergiert.*
(b) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^k$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Für spätere Anwendungen beweist man nun

Satz. *Die Grenzwerte von Teilfolgen einer Folge $\{p_n\}$ in einem metrischen Raum X bilden eine abgeschlossene Teilmenge von X.*

Cauchy-Folgen.

Definition. *Eine Folge $\{p_n\}$ in einem metrischen Raum heißt Cauchy-Folge, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $d(p_n, p_m) < \epsilon$.*

Bei Cauchy-Folgen wird nicht die Existenz eines ausgezeichneten Punktes (Grenzwertes) verlangt, sondern nur, dass die Glieder der Folge mit genügend großen Indizes nahe beisammenliegen.
Wir werden zeigen, dass in $\mathbb{R}^k$ alle Cauchy-Folgen konvergent sind.

Beispiel. *Sei* $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$. *Dann gilt*

$$a_{2m} - a_m > \frac{1}{2}\ , \forall m \in \mathbb{N},$$

somit ist die Folge $\{a_m\}$ *keine Cauchy-Folge.*

Bei der Untersuchung von Cauchy-Folgen erweist sich der folgende Begriff als nützlich:

Definition. *Sei* $E \subset X$ *und* $diamE := \sup\{d(p,q) \ : \ p,q \in E\}$ *der Durchmesser von* E.

Bemerkung. *Sei* $\{p_n\}$ *eine Folge und* $E_N = \{p_N, p_{N+1}, \dots\}$. *Dann gilt:* $\{p_n\}$ *ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn* $\lim_{N\to\infty} diamE_N = 0$.

Der folgende Satz beruht auf der endlichen Durchschnittseigenschaft kompakter Mengen.

Satz. *(a) Ist* E *eine beschränkte Menge in einem metrischen Raum, dann ist* $diam\overline{E} = diamE$.
(b) Ist $\{K_n\}$ *eine Folge von nichtleeren, kompakten Mengen in* X *mit* $K_n \supset K_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und gilt* $\lim_{n\to\infty} diamK_n = 0$, *dann besteht* $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ *aus genau einem Punkt.*

Dieser Satz ergibt die für die weiteren Anwendungen (siehe Reihen) wichtigen Aussagen:

Theorem. *(a) In einem metrischen Raum* X *ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.*
(b) Ist X *ein kompakter metrischer Raum und ist* $\{p_n\}$ *eine Cauchy-Folge in* X, *dann konvergiert* $\{p_n\}$ *gegen einen Punkt von* X.
(c) In $\mathbb{R}^k$ *konvergiert jede Cauchy-Folge (Cauchy'sches Konvergenzkriterium).*

Definition. *Ein metrischer Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, heißt vollständig.*

Bemerkung. *Das obige Theorem ergibt :* $\mathbb{R}^k$ *ist vollständig, natürlich auch* $\mathbb{C}^k$. *Hingegen ist* $\mathbb{Q}$ *nicht vollständig.*
In einer allgemeinen Konstruktion kann man zu jedem metrischen Raum X *einen vollständigen metrischen Raum* $\hat{X}$ *angeben derart, dass der ursprüngliche Raum* X *dicht in* $\hat{X}$ *liegt.*
Man nennt $\hat{X}$ *die Vervollständigung von* X, *die Elemente von* $\hat{X}$ *bestehen aus gewissen quivalenzklassen von Cauchy-Folgen in* X. *Auf diese Art und Weise kann man die reellen Zahlen als Vervollständigung der rationalen Zahlen einführen.*

Limes superior und Limes inferior.

Wir führen folgende Schreibweise ein:

Definition. *Sei $\{s_n\}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft: $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $s_n \geq M\ \forall n \geq N$. Wir schreiben : $s_n \to +\infty$. Analog schreiben wir $s_n \to -\infty$, wenn $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $s_n \leq M\ \forall n \geq N$.*

Definition. *Sei $\{s_n\}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Sei ferner S die Menge aller Zahlen x (in der erweiterten Zahlengerade), so dass $s_{n_k} \to x$ für eine Teilfolge $\{s_{n_k}\}$. Die Menge S enthält alle Grenzwerte von Teilfolgen der ursprünglichen Folge $\{s_n\}$ und möglicherweise $+\infty$ und $-\infty$. Setze $s^* = \sup S$ und $s_* = \inf S$.*
Wir nennen $s^* = \limsup_{n\to\infty} s_n$ den Limes superior und
$s_* = \liminf_{n\to\infty} s_n$ den Limes inferior.

Charakterisierende Eigenschaften des Limes superior und des Limes inferior:

Satz. *Sei $\{s_n\}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann gilt: (a) $s^* \in S$; (b) ist $x > s^*$, dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $s_n < x\ \forall n \geq N$. Ferner ist s^* die einzige Zahl, die die Eigenschaften (a) und (b) besitzt.*
Analog gilt für s_* : (a) $s_* \in S$; (b) ist $x < s_*$ dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $x < s_n\ \forall n \geq N$.

Aussage (a) besagt, dass s^* selbst Limes einer Teilfolge ist und Aussage (b), dass fast alle Glieder der Folge unter $s^* + \epsilon$ liegen, analoges für s_*.

Beispiel. *(a) Ist $\{s_n\}$ eine Folge, die alle rationalen Zahlen enthält, dann ist jede reelle Zahl Limes einer Teilfolge und $\limsup_{n\to\infty} s_n = +\infty$ und $\liminf_{n\to\infty} s_n = -\infty$.*
(b) Ist $s_n = (-1)^n + 1/n$, dann ist $\limsup_{n\to\infty} s_n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty} s_n = -1$.
(c) Ist $\{s_n\}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} s_n = s \Leftrightarrow \limsup_{n\to\infty} s_n = \liminf_{n\to\infty} s_n = s$.

Satz. *Gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $s_n \leq t_n\ \forall n \geq N$, dann gilt $\liminf_{n\to\infty} s_n \leq \liminf_{n\to\infty} t_n$ und $\limsup_{n\to\infty} s_n \leq \limsup_{n\to\infty} t_n$.*

Reihen.

Wir betrachten hier Reihen in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

Definition. *Sei $\{a_n\}$ eine Folge und $s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Die Folge $\{s_n\}$ ist die Folge der Partialsummen von $\{a_n\}$. Für $\{s_n\}$ verwenden wir* *auch das Symbol* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *(unendliche Reihe). Konvergiert* $\{s_n\}$ *gegen* s*, so sagt man die Reihe konvergiert und man schreibt* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = s$*. Divergiert* $\{s_n\}$*, so sagt man die Reihe divergiert.*

Aus der Tatsache, dass jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ konvergent ist. folgt das wichtige Cauchy'sche Konvergenzkriterium für Reihen:

Satz. $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *konvergiert* $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ *mit*

$$\left| \sum_{j=n}^{m} a_j \right| \le \epsilon\ ,\ \forall m \ge n \ge n \ge N.$$

Hieraus ergibt sich sofort die folgende notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe:

Satz. *Konvergiert* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$*, dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Die Umkehrung dieses Satzes ist falsch, wie z.B. die harmonische Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ zeigt (hier wissen wir bereits, dass $s_{2m} - s_m > \frac{1}{2}$, daher ist die Folge der Partialsummen keine Cauchy-Folge und somit nicht konvergent).
Die Charakterisierung der Konvergenz von monoton wachsenden Folgen ergibt:

Satz. *Eine Reihe mit nicht negativen Gliedern konvergiert genau dann, wenn ihre Partialsummen eine beschränkte Folge bilden.*

Satz (Majorantenkriterium)**.** *(a) Sei* $|a_n| \le c_n\ \forall n \ge N_0$*, wobei* N_0 *eine feste natürliche Zahl ist. Dann gilt : ist* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergent, dann ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.*
(b) Gilt $a_n \ge d_n \ge 0$ *für* $n \ge N_0$ *und divergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$*, dann divergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*.*

Reihen mit nicht negativen Gliedern.

Satz. *Für* $0 \le x < 1$ *gilt* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *(geometrische Reihe). Für* $x \ge 1$ *divergiert die obige Reihe.*

Der folgende Satz von Cauchy zeigt, dass eine "dünne" Teilfolge von $\{a_n\}$ die Konvergenz bzw. Divergenz von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ bestimmt.

Satz. *Es gelte* $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \dots \ge 0$*. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ *genau dann, wenn*

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$$

konvergiert.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die Frage nach der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ auf eine geometrische Reihe zurückführen.

Satz. $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ *konvergiert für* $p > 1$ *und divergiert für* $p \leq 1$.

Mit Hilfe des Satzes von Cauchy kann man die Frage der Konvergenz der nächsten Reihe auf die Reihe aus dem letzten Satz zurückführen.

Satz. *Für* $p > 1$ *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p};$$

ist $p \leq 1$, *dann divergiert die Reihe.*

Die Zahl e.

Definition.

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Für die Folge der Partialsummen gilt

$$s_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

daher konvergiert die obige Reihe. Setzt man $t_n = (1 + 1/n)^n$, so folgt

$$\limsup_{n\to\infty} t_n \leq e \leq \liminf_{n\to\infty} t_n,$$

und somit

Satz.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Es gilt $0 < e - s_n < \frac{1}{n!n}$, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert also "sehr schnell" gegen e. Außerdem erhält man daraus

Satz. e *ist irrational.*

Das Wurzel- und das Quotientenkriterium.

Satz (Wurzelkriterium)**.** *Sei* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine Reihe in* $\mathbb{C}$ *und sei* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Dann gilt:*
(a) Ist $\alpha < 1$, *dann konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(b) Ist $\alpha > 1$, dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(c) Im Fall $\alpha = 1$ erlaubt das Kriterium keine Divergenz- oder Konvergenzaussage.

Mit Hilfe des Majorantenkriteriums führt man den letzten Satz leicht auf eine Aussage über eine geometrische Reihe zurück.

Satz (Quotientenkriterium). *(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, wenn* $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$,
(b) die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, wenn es eine natürliche Zahl n_0 gibt mit $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle $n \geq n_0$.

Beispiel. *Für die Reihe $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots$ gilt $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, daher ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar; da $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ folgt aus dem Wurzelkriterium die Konvergenz.*

Potenzreihen.

Definition. *Sei $\{c_n\}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, für $z \in \mathbb{C}$, heißt Potenzreihe (mit Variabler z). Die c_n sind die Koeffizienten der Potenzreihe.*

Satz. *Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ eine Potenzreihe und $\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, sowie $R = 1/\alpha$. (Für $\alpha = 0$ sei $R = \infty$, für $\alpha = \infty$ sei $R = 0$) Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ für $|z| < R$ und divergiert für $|z| > R$.*
R heißt Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$.

Beispiel. *(a) $\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \quad R = 0$.*
(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad R = \infty$. (Quotientenkriterium!)
(c) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad R = 1$, für $|z| = 1$ divergiert die Reihe.
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad R = 1$, für $z = 1$ divergiert die Reihe, für alle anderen z mit $|z| = 1$ ist sie konvergent (siehe nächster Abschnitt).
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} \quad R = 1$, für alle z mit $|z| = 1$ konvergiert die Reihe.

Alternierende Reihen.

Seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ zwei Folgen, sei $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ für $n \geq 0$ und $A_{-1} = 0$. Dann gilt für $0 \leq p \leq q$:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n b_n = \sum_{n=p}^{q-1} A_n(b_n - b_{n+1}) + A_q b_q - A_{p-1} b_p.$$

Diese Formel lässt sich gut auf Reihen der Gestalt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ anwenden.

Satz. *Es gelte (a) die Partialsummen A_n von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bilden eine beschränkte Folge; (b) $b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \ldots$; (c) $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.*

Setzt man hier für $a_n = (-1)^n$ und für $b_n = |c_n|$ so erhält man

Satz (Satz von Leibniz über alternierende Reihen)**.**
Es gelte (a) $|c_1| \geq |c_2| \geq \ldots$; (b) $c_{2m-1} \geq 0$, $c_{2m} \leq 0$ für $m = 1, 2, \ldots$; (c) $\lim_{n\to\infty} = 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$.

Setzt man für $a_n = z^n$ und für $b_n = c_n$ so erhält man

Satz. *Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ sei 1. Ferner gelte $c_0 \geq c_1 \geq c_2 \geq \ldots$ und $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ für jeden Punkt mit $|z| = 1$ außer möglicherweise für $z = 1$.*

Absolute Konvergenz.

Definition. *Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.*

Satz. *Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Bemerkung. *$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.*
Das Wurzel- und das Quotientenkriterium sind Aussagen über absolute Konvergenz der Reihen. Potenzreihen konvergieren absolut im Innern des Konvergenzkreises. Mit absolut konvergenten Reihen kann man ähnlich wie mit endlichen Summen umgehen, mit nur konvergenten Reihen hingegen nicht!

Satz. *Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, dann folgt $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$ und $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = cA$ für $c \in \mathbb{C}$.*

Multipliziert man zwei Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ und ordnet nach den Potenzen von z, so erhält man

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots)$$

$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

wobei

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k};$$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt Cauchy-Produkt der beiden ursprünglichen Reihen.
Es stellt sich die Frage, ob das Cauchy-Produkt zweier konvergenter Reihen wieder konvergent ist.

Beispiel. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ *ist konvergent (Satz von Leibniz), aber das Cauchy-Produkt mit sich selbst ist nicht konvergent.*

Setzt man jedoch voraus, dass eine der beiden Reihen absolut konvergent ist, so erhält man

Satz. *Es gelte (a)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ist absolut konvergent; (b)* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$; *(c)* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$; *(d)* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Dann ist* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = AB$.

Unbedingte Konvergenz.

Definition. *Sei* $\{k_n\}$ *eine Folge, in der jede natürliche Zahl genau einmal vorkommt. Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe und* $a'_n = a_{k_n}$, *so sagt man* $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ *ist eine Umordnung von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Wann konvergieren Umordnungen?
Riemann hat gezeigt: ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe reeller Zahlen, die konvergent, jedoch nicht absolut konvergent ist, und ist $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, dann existiert eine Umordnung $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ mit Partialsummen s'_n derart, dass $\liminf_{n\to\infty} s'_n = \alpha$ und $\limsup_{n\to\infty} s'_n = \beta$ gilt.
Ist die ursprüngliche Reihe absolut konvergent so gilt

Satz. *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen. Dann konvergiert jede Umordnung von* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und alle Umordnungen konvergieren gegen dieselbe Summe (solche Reihen heißen unbedingt konvergent).*