IV. Stetige Funktionen.

Grenzwerte von Funktionen

Definition. *Seien X und Y metrische Räume und $E \subset X$ sowie $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung und p ein Häufungspunkt von E. Wir schreiben*

$$\lim_{x \to p} f(x) = q,$$

falls es ein $q \in Y$ gibt mit folgender Eigenschaft: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $d_Y(f(x), q) < \epsilon\ \forall x \in E$ mit $0 < d_X(x, p) < \delta$.
(Dabei muss p nicht notwendigerweise zu E gehören.)

Satz. *Es gilt $\lim_{x \to p} f(x) = q$ dann und nur dann, wenn $\lim_{n \to \infty} f(p_n) = q$ für jede Folge $\{p_n\}$ in E mit $p_n \neq p$ und $\lim_{n \to \infty} p_n = p$.*

Durch diesen Satz wird der Grenzwert von Funktionen auf Grenzwerte von Folgen zurückgeführt.

Satz. *Sind $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ Abbildungen, p ein Häufungspunkt von $E \subset X$ und gilt $\lim_{x \to p} f(x) = A$, sowie $\lim_{x \to p} g(x) = B$, dann folgt $\lim_{x \to p}(f + g)(x) = A + B$, $\lim_{x \to p} fg(x) = AB$, $\lim_{x \to p}(f/g)(x) = A/B$, falls $B \neq 0$ und $g(x) \neq 0$.*

Stetige Funktionen

Definition. *Seien X, Y metrische Räume, $E \subset X$ und $p \in E$ weiters $f : E \longrightarrow Y$. f heißt stetig an der Stelle p, falls für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit $d_Y(f(x), f(p)) < \epsilon$, für alle $x \in E$ mit $d_X(x, p) < \delta$, d.h.*

$$f(U_\delta(x) \cap E) \subseteq U_\epsilon(f(x)).$$

Ist f stetig in allen Punkten von E, so heißt f stetig auf E.

Satz. *Sei p ein Häufungspunkt von E. f ist genau dann stetig in p, wenn $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.*

Die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig.

Satz. *Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig auf X, wenn $f^{-1}(V)$ offen in X ist für jedes offene $V \subset Y$. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig auf X, wenn $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X ist für jedes abgeschlossene $C \subset Y$.*

Satz. *Seien* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetige Funktionen. Dann sind* $f + g, fg$ *stetig auf* X *und* f/g *ist stetig auf* X, *falls* $g(x) \neq 0 = \ \forall x \in X$.

Satz. *(a) Seien* $f_1, \ldots f_k : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *und sei* $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$. *Dann gilt:* $\mathbf{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *ist genau dann stetig auf* X, *wenn alle Funktionen* $f_1, \ldots, f_k$ *auf* X *stetig sind.*
(b) Sind $\mathbf{f}, \mathbf{g} : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *stetige Funktionen, dann sind* $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ *und* $\mathbf{f}.\mathbf{g}$ *stetig auf* X.

Beispiel. *Sei* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. *Die Koordinatenfunktionen* $\phi_j(\mathbf{x}) = x_j$ *sind stetig auf* $\mathbb{R}^k$ *für* $j = 1, \ldots, k$.
Die Abbildung $\mathbf{x} \mapsto |\mathbf{x}|$ *ist eine stetige Abbildung von* $\mathbb{R}^k$ *nach* $\mathbb{R}$.

Stetigkeit und Kompaktheit

Definition. *Eine Funktion* $\mathbf{f} : E \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *heißt beschränkt, falls ein* $M > 0$ *existiert mit* $|\mathbf{f}(x)| \leq M \ \forall x \in E$.

Aus der ursprünglichen Definition der Kompaktheit (mit offenen Überdeckungen) folgt nun

Satz. *Sei* f *eine stetige Abbildung eines kompakten metrischen Raumes* X *in einen metrischen Raum* Y. *Dann ist* $f(X)$ *kompakt.*

Zusammen mit dem Satz von Heine-Borel ergibt sich daraus

Satz. *Sei* $\mathbf{f} : X \longrightarrow \mathbb{R}^k$ *stetig und* X *ein kompakter metrischer Raum. Dann ist* $\mathbf{f}(X)$ *abgeschlossen und beschränkt und* $\mathbf{f}$ *ist beschränkt.*

Insbesondere folgt nun

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetig und* X *ein kompakter metrischer Raum, sei* $M = \sup_{x \in X} f(x)$ *und* $m = \inf_{x \in X} f(x)$. *Dann existieren* $p, q \in X$ *mit* $f(p) = M$ *und* $f(q) = m$.

Satz. *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine stetige bijektive Abbildung und* X *ein kompakter metrischer Raum. Dann ist die inverse Abbildung* $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ *ebenfalls stetig.*

Definition. *Eine Funktion* $f : X \longrightarrow Y$ *heißt gleichmäßig stetig auf* X, *wenn für jedes* $\epsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *existiert mit* $d_Y(f(p), f(q)) < \epsilon$ *für alle* $p, q \in X$ *mit* $d_X(p, q) < \delta$. *(Hier hängt* δ *nur von* ϵ *ab und nicht von der jeweiligen Stelle* $p \in X$.*)*

Satz. *Sei* X *ein kompakter metrischer Raum und* $f : X \longrightarrow Y$ *eine stetige Funktion. Dann ist* f *gleichmäßig stetig auf* X.

Läßt man in den vorigen Sätzen die Voraussetzung der Kompaktheit fallen, so verlieren sie ihre Gültigkeit:

Satz. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht kompakte Menge. Dann gilt:*
(a) es gibt eine stetige Funktion auf E, die nicht beschränkt ist;
(b) es gibt eine beschränkte, stetige Funktion auf E, die kein Maximum hat;
(c) ist E zusätzlich beschränkt, so gibt es eine stetige Funktion auf E, die nicht gleichmäßig stetig ist.

Zusammenhang und Stetigkeit

Definition. *Sei X ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Die Mengen A und B heißen getrennt, wenn $A \cap \overline{B} = \emptyset$ und $\overline{A} \cap B = \emptyset$. Eine Teilmenge $E \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn E nicht Vereinigungsmenge von zwei nicht leeren getrennten Mengen ist.*

Es gilt: $E \subseteq X$ ist genau dann zusammenhängend, wenn zwei nichtleere, disjunkte, relativ E offene Mengen G und H existieren mit $E = G \cup H$, d.h. $G = U \cap E$ und $H = V \cap E$, wobei U und V offen in X sind.

Mit Hilfe der Supremumseigenschaft der reellen Zahlen zeigt man

Satz. *Eine Teilmenge E von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn für je zwei Punkte $x, y \in E$ und $x < z < y$ gilt: $z \in E$. Insbesondere sind alle Intervalle zusammenhängend.*

Satz. *Sei $f : X \longrightarrow Y$ stetig und $E \subseteq X$ zusammenhängend. Dann ist $f(E)$ zusammenhängend.*

Aus den beiden letzten Sätzen folgt sofort

Satz (Zwischenwertsatz)**.** *Ist $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(a) < f(b)$, dann existiert zu jeder Zahl c mit $f(a) < c < f(b)$ ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = c$. Analoges gilt für den Fall, dass $f(a) > f(b)$ ist.*

Unstetigkeitsstellen

Definition. *Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \leq x < b$. Der rechtsseitge Limes $f(x+)$ an der Stelle x existiert und ist gleich q, falls für jede Folge $\{t_n\}$ aus dem Intervall (x, b) mit $t_n \to x$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(t_n) = q$. Für $a < x \leq b$ erhält man die Definition des linksseitigen Limes $f(x-)$ auf analoge Weise, indem man sich auf Folgen im Intervall (a, x) beschränkt.*

Ist $x \in (a, b)$, so existiert $\lim_{t\to x} f(t)$ genau dann, wenn gilt: $f(x+) = f(x-) = \lim_{t\to x} f(t)$.

Definition. *Sei f wie oben. Ist f unstetig an der Stelle x und existieren $f(x+)$ und $f(x-)$, dann heißt x Unstetigkeitsstelle 1. Art oder eine einfache Unstetigkeitsstelle. Sonst heißt x eine Unstetigkeitsstelle 2. Art.*

Monotone Funktionen

Definition. *Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. f heißt monoton wachsend auf (a, b), wenn für $a < x < y < b$ folgt $f(x) \leq f(y)$. Analog wird monoton fallend definiert.*

Satz. *Sei $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann existieren $f(x+)$ und $f(x-)$ für alle $x \in (a, b)$. Es gilt*

$$\sup_{a<t<x} f(t) = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = \inf_{x<t<b} f(t).$$

Weiters gilt für $a < x < y < b$ stets : $f(x+) \leq f(y-)$.
Analoges gilt für monoton fallende Funktionen.

Daraus ergibt sich sofort

Satz. *Monotone Funktionen haben keine Unstetigkeitsstellen 2.Art und die Menge der Unstetigkeitsstellen ist höchstens abzählbar.*

Unendliche Grenzwerte und Grenzwerte im Unendlichen

Definition. *Sei $c \in \mathbb{R}$. Die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x > c\}$ heißt Umgebung von $+\infty$. Analog heißt die Menge $\{x \in \mathbb{R} : x < c\}$ Umgebung von $-\infty$.*

Definition. *Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen $f(t) \to A$ bei $t \to x$, wobei A und x zur erweiterten Zahlengerade gehören, falls es zu jeder Umgebung U von A eine Umgebung V von x gibt, sodass $V \cap E \neq \emptyset$ und $f(t) \in U$ gilt für alle $t \in V \cap E,\ t \neq x$.*

Im Endlichen stimmt diese Definition mit der ursprünglichen von früher überein. Wie im Endlichen erhält man

Satz. *Seien $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Weiters sei $f(t) \to A$ und $g(t) \to B$ bei $t \to x$. Dann gilt: $(f + g)(t) \to A + B$, $(fg)(t) \to AB$, $(f/g)(t) \to A/B$ bei $t \to x$, vorausgesetzt die rechten Seiten sind definiert (nicht definiert sind : $\infty - \infty, 0.\infty, \infty/\infty$ und $A/0$).*

V. Differentiation

Definition. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Für jedes $x \in [a,b]$ bilde man*

$$\phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad a < t < x,\ t \neq x$$

und definiere

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \phi(t),$$

vorausgesetzt dieser Grenzwert existiert.
Dadurch wird der Funktion f eine Funktion f' zugeordnet, deren Definitionsbereich die Menge aller Punkte ist, für die der obige Grenzwert existiert. Die Funktion f' heißt Ableitung von f.
Ist f' an der Stelle x definiert, so sagt man, f ist differenzierbar an der Stelle x. Ist f' für jedes x in einer Menge $E \subseteq [a,b]$ definiert, so sagt man f ist auf E differenzierbar.

Satz. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist f differenzierbar an einer Stelle $x \in [a,b]$, dann ist f an der Stelle x stetig.*

Die Umkehrung des obigen Satzes ist falsch, wie das Beispiel $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ zeigt.(Es gibt sogar Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, jedoch in keinem Punkt differenzierbar.)

Satz. *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ in $x \in [a,b]$ differenzierbar. Dann ist $f + g, fg$ und f/g (wo $g(x) \neq 0$) in x differenzierbar und es gilt:*
(a) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, $(cf)'(x) = cf'(x)$ (c konstant);
(b) $(fg)(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;
(c) $\frac{f}{g}(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, wo $g(x) \neq 0$.

Man erhält daraus : $(x^n)' = nx^{n-1}$, für $n \in \mathbb{Z}$ und dass jedes Polynom differenzierbar ist, sowie jede rationale Funktion $r(x) = p(x)/q(x)$ differenzierbar ist, wo $q(x) \neq 0$.

Satz (Kettenregel)**.** *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und es existiere $f'(x)$ an der Stelle $x \in [a,b]$, ferner sei g auf einem Intervall I definiert, das den Bildbereich von f enthält, und g sei an der Stelle $f(x)$ differenzierbar. Setzt man $h(t) = g(f(t))$ $a \leq t \leq b$ (man schreibt auch $h = g \circ f$), dann ist h an der Stelle x differenzierbar und es gilt*

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Beispiel. *(a) Sei $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$. Dann ist f für $x \neq 0$ differenzierbar, es gilt $f'(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, an der Stelle 0 existiert f' jedoch nicht.*
(b) Sei $g(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $g(0) = 0$. Dann ist g für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ und $g'(0) = 0$, die Ableitungsfunktion g' ist jedoch an der Stelle $x = 0$ unstetig.

Satz. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig und sei f^{-1} die inverse Funktion von f, die auf dem Intervall $f([a,b])$ definiert und stetig ist. Ist f an der Stelle $x \in [a,b]$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} an der Stelle $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beispiel. *Die Funktion $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend und die inverse Funktion $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ ist für $y \neq 0$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3}y^{-2/3},$$

an der Stelle $y = 0$ ist f^{-1} nicht differenzierbar, wie der folgende Satz zeigt

Satz. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ streng monoton und stetig und in $x \in [a,b]$ differenzierbar. Ist auch f^{-1} in $y = f(x)$ differenzierbar, so ist $f'(x) \neq 0$.*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f(x) = x^n \ , \ x > 0$. Dann gilt für die inverse Funktion $f^{-1}(y) = y^{1/n}$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{n}\, y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Mittelwertsätze

Definition. *Sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. f hat ein lokales Maximum in einem Punkt $p \in X$, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(q) \leq f(p)$ für alle $q \in X$ mit $d(p,q) < \delta$. Analog wird ein lokales Minimum definiert.*

Satz. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Hat f ein lokales Maximum (Minimum) an einer Stelle $x \in (a,b)$ und existiert $f'(x)$, dann ist $f'(x) = 0$.*

Der letzte Satz gibt eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Extremwertes an, jedoch keine hinreichende, wie das Beispiel $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 0$ zeigt.

Satz (2.Mittelwertsatz)**.** *Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x \in (a,b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x).$$

Als Spezialfall des letzten Satzes erhält man

Satz (1.Mittelwertsatz)**.** *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert ein $x \in (a,b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x).$$

Eine wichtige Folgerung aus dem Mittelwertsatz ist

Satz. *Sei $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b).*
(a) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f monoton wachsend.
(b) Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f konstant.
(c) Ist $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f monoton fallend.

Die Stetigkeit von Ableitungen

Satz. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ auf $[a,b]$ differenzierbar und sei $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Dann existiert ein $x \in (a,b)$ mit $f'(x) = \lambda$. Analoges gilt für den Fall $f'(a) > f'(b)$. (f' braucht nicht stetig zu sein, nimmt aber Zwischenwerte an.)*

Korollar. *Ist f differenzierbar auf $[a,b]$, dann kann f' keine einfachen Unstetigkeitsstellen auf $[a,b]$ haben.*

Exponentialfunktion und Logarithmus

Sei $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Diese Reihe konvergiert absolut nach dem Quotientenkriterium für alle $z \in \mathbb{C}$. Durch die Zuordnung

$$z \mapsto \exp(z)$$

ist eine stetige (und auch in $\mathbb{C}$ differenzierbare) Funktion auf $\mathbb{C}$ definiert, die Exponentialfunktion (Beweis später: gleichmäßige Konvergenz der obigen Reihe!).
Aus einem Satz über das Cauchyprodukt von Reihen erhält man die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion:

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)\ ,\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Es folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z),$$

also $\exp(z)' = \exp(z)$, man sagt auch exp ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Insbesondere ist $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\exp(x)' = \exp(x)$.
Aus der Funktionalgleichung folgt: $\exp(n/m) = e^{n/m}$ für $n, m \in \mathbb{N}$ und $\exp(-n/m) = e^{-n/m}$.
Wir schreiben auch $\exp(z) = e^z$.

Satz. *Die Exponentialfunktion ist auf* $\mathbb{R}$ *streng monoton wachsend, es gilt* $\exp(x) > 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$, *weiters ist* $e^x \to +\infty$ *bei* $x \to +\infty$ *und* $e^x \to 0$ *bei* $x \to -\infty$.
Ferner gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\lim_{x\to+\infty} x^n\, e^{-x} = 0$.

$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \;:\; x > 0\}$ ist streng monton wachsend und bijektiv und die Umkehrfunktion, der Logarithmus,

$$\log : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist ebenfalls streng monoton wachsend und differenzierbar, es gilt

$$\exp(\log(y)) = y \ , \ y > 0$$

und

$$\log(\exp(x)) = x \ , \ x \in \mathbb{R};$$

weiters ist

$$\log(y)' = \frac{1}{y} \ , y > 0.$$

Es gilt $\log(1) = 0$ und aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v) \ , \ u, v > 0.$$

Für $p \in \mathbb{Q}$ gilt $x^p = \exp(p \log x)$, $x > 0$, man definiert daher für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ die allgemeine Potenz x^α durch

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log x) \ , \ x > 0.$$

Dann gilt

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Für $\alpha > 0$ gilt

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\alpha} \log x = 0,$$

d.h. der Logarithmus von x wächst schwächer als jede positive Potenz von x.

Trigonometrische Funktionen

Mit Hilfe der Exponentialfunktion definieren wir für $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x := \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

und

$$\sin x := \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Es gilt $\exp(ix)^- = \exp(-ix)$ und daher ist $\cos x$ der Realteil von $\exp(ix)$ und $\sin x$ der Imaginärteil von $\exp(ix)$, also

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x.$$

Weiters ist $\cos(-x) = \cos x$ und $\sin(-x) = -\sin x$ und weil

$$|\exp(ix)| = 1$$

ist, folgt

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]\ ,\ \sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1].$$

$\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.
Eine wichtige Eigenschaft des Sinus ist: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$ ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Man definiert die Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ indem $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ in den Real- und Imaginärteil zerlegt, dann sind die Funktionen f_1, f_2 reellwertig und man erhält für die Ableitung

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x),$$

daher ist f genau dann differenzierbar, wenn f_1 und f_2 differenzierbar sind. Man beachte, dass der Mittelwertsatz für komplexwertige Funktionen nicht gilt, wie die Funktion $x \mapsto \exp(ix)$ zeigt.
Also folgt nun

$$\exp(ix)' = i\exp(ix) = i(\cos x + i \sin x) = (\cos x + i \sin x)'$$

und daher $(\cos x)' = -\sin x$ und $(\sin x)' = \cos x$.
Man zeigt, es gibt ein $x > 0$ mit $\cos x = 0$ und bezeichnet dann mit x_0 die kleinste positive Zahl, sodass $\cos x_0 = 0$. Wir definieren nun π durch $\pi := 2x_0$.
Dann ist $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, und daher $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
Aus der Funktionalgleichnung der Exponentialfunktion folgt nun

$$e^{\pi i} = -1 \text{ und } e^{2\pi i} = 1,$$

sowie für $z \in \mathbb{C}$

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z),$$

es gilt daher

Satz. *(a)* $\exp$ *ist periodisch mit Periode* $2\pi i$;
(b) $\cos$ *und* $\sin$ *sind periodisch mit Periode* 2π;
(c) $\cos(k + \frac{1}{2})\pi = 0$ *und* $\sin k\pi = 0$ *für alle* $k \in \mathbb{Z}$;
(d) für $0 < t < 2\pi$ *folgt* $\exp(it) \neq 1$.

Satz (Additionstheorem). *Für* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$$

und

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2.$$

Definition.
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ , \ x \neq k + \frac{1}{2}\pi \ , \ k \in \mathbb{Z},$$
$$\cot z = \frac{\cos x}{\sin x} \ , \ x \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}.$$
Es gilt
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \ , \ (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$
Die Funktionen
$$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1] \ , \ \cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1],$$
$$\tan : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ \cot : (0, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}$$
sind bijektiv und ihre Umkehrfunktionen
$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \ , \ \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],$$
$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) \ , \ \mathrm{arccot} : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \pi)$$
erfüllen:
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \ , \ x \in (-1, 1) \ , \ \arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$
und
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2} \ , \ \mathrm{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

Hyperbelfunktionen

Definition. *Der cosinus hyperbolicus und sinus hyperbolicus sind definiert durch*
$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$
Und
$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Es gilt $\sinh(-x) = -\sinh x$ und $\cosh(-x) = \cosh x$, weiters
$$(\sinh x)' = \cosh x \ , \ (\cosh x)' = \sinh x.$$
Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion, der area sinus hyperbolicus, hat die Gestalt
$$\mathrm{arsinh} y = \log(y + \sqrt{1 + y^2}) \ , \ y \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion $\cosh : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \{y : y \geq 1\}$ ist bijektiv und ihre Umkehrfunktion, der area cosinus hyperbolicus, hat die Gestalt

$$\mathrm{arcosh} y = \log(y + \sqrt{y^2 - 1}) \ , \ y \geq 1.$$

Die l'Hospital'sche Regel

Satz. *Seien $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ($-\infty \leq a < b \leq +\infty$). Sei ferner $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Es gelte*

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Gilt $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ bei $x \to a$, oder $g(x) \to +\infty$ bei $x \to a$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Die analoge Aussage gilt auch bei $x \to b$ oder für $g(x) \to -\infty$. Die Grenzwerte sind hier im eweiterten Sinne aufzufassen. Der obige Satz ist im allgemeinen falsch für komplexwertige Funktionen.

Beispiel.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$$

Der Taylor'sche Satz

Definition. *Hat f eine Ableitung f' auf einem Intervall und ist f' selbst differenzierbar, so bezeichnen wir die Ableitung von f' mit f'' (2.Ableitung von f) . Setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man die Funktionen*

$$f, f', f'', f^{(3)}, \ldots, f^{(n)},$$

$f^{(n)}$ heißt n-te Ableitung von f.

Um die Existenz von $f^{(n)}(x)$ in einem Punkt x zu gewährleisten, muss $f^{(n-1)}(t)$ in einer Umgebung von x existieren und muss in x differenzierbar sein. Da $f^{(n-1)}$ in einer Umgebung von x existieren muss, muss $f^{(n-2)}$ in dieser Umgebung differenzierbar sein.

Satz. *Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei $f^{(n-1)}$ stetig auf $[a,b]$ und $f^{(n)}(t)$ existiere für jedes $t \in (a,b)$. Seien ferner $x_0, x \in [a,b]$ zwei verschiedene Punkte. Man definiere*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(t - x_0)^k.$$

Dann existiert ein Punkt ξ zwischen x_0 und x, so dass gilt

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,(x - x_0)^n.$$

In der letzten Formel

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

heißt der Term $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$ Restglied in der Taylorentwicklung von f um den Punkt x_0.

Beispiel. *(1) Für $a \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$ sei $f(x) = (1+x)^a$. Für die Taylorentwicklung der Funktion f um den Punkt $x_0 = 0$ führt man die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten*

$$\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$$

ein und erhält

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{a}{k}\,x^k + \binom{a}{n}(1+\xi)^{a-n}\,x^n,$$

wobei für $x > 0$ und $\xi \in (0,x)$, das Restglied gegen Null konvergiert bei $n \to \infty$.
(2) Sei $g(x) = \log(1+x)$, $|x| < 1$. In diesem Fall ergibt die Taylorentwicklung von g um 0 :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k},$$

wobei die obige Reihe für $-1 < x \le 1$ konvergiert. Insbesondere ist

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Extremwerte

Die folgende Sätze geben hinreichende Bedingungen für lokale Extrema.

Satz. *Sei* $f : U_\delta(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *differenzierbar, wobei* $U_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$, *sei ferner* $U' = (x_0 - \delta, x_0)$ *und* $U'' = (x_0, x_0 + \delta)$. *Wenn* $f'(x) \le 0$ *in* U' *ist und* $f'(x) \ge 0$ *in* U'' *ist, dann hat* f *in* x_0 *ein lokales Minimum ; gilt* $f'(x) \ge 0$ *in* U' *und* $f'(x) \le 0$ *in* U'', *dann hat* f *in* x_0 *ein lokales Maximum.*

Satz. *Es sei* $f : U_\delta(x_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *in* x_0 n*-mal differenzierbar. Weiters sei* $f^{(k)}(x_0) = 0$, *für* $k = 1, \ldots, n-1$ *und* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. *Außerdem sei* $f^{(n)}$ *in* $U_\delta(x_0)$ *stetig. Falls dann* n *ungerade ist, dann hat* f *kein lokales Extremum an der Stelle* x_0. *Ist* n *gerade, dann hat* f *an der Stelle* x_0 *im Falle* $f^{(n)}(x_0) > 0$ *ein lokales Minimum, und im Falle* $f^{(n)}(x_0) < 0$ *ein lokales Maximum.*