Übungen zu Analysis , SS 2008

F. Haslinger

1.) Man berechne:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} - \cos x}{\sin^2(x/2)}.$$

2.) Man berechne:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos ax} - \sqrt{\cos bx}}{x^2} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0}((\sin x)/x)^{3/x^2}.$$

3.) Let $ab(a-b) \neq 0$ and consider the expression

$$\frac{x^a - x^b}{x^{1/b} - x^{1/a}}$$

which is defined for all $x > 0$ except for $x = 1$. Determine

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a - x^b}{x^{1/b} - x^{1/a}}.$$

4.) Es sei $ab \neq 0$ und

$$h(x) = \frac{\log\cosh ax}{\log\cosh bx}.$$

Man berechne : $\lim_{x\to 0} h(x)$ und $\lim_{x\to\infty} h(x)$.

5.) Man berechne :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x} \qquad , \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{\tan x - x}.$$

6.) Man berechne :

$$\int \sqrt{5x-1}\, dx \ , \ \int \cos(2x-1)\, dx \ , \ \int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}.$$

7.)

$$\int x^2 \sin 2x \, dx =$$

8.)

$$\int (x^2+1)e^{2x-3} \, dx =$$

9.)

$$\int (x^2+2x) \sinh x \, dx =$$

10.) Durch geeignete Substitutionen berechne man :

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} =$$

11.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$

12.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} =$$

13.)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

14.)

$$\int \sqrt{a^2-x^2} \, dx =$$

15.)

$$\int \sqrt{x^2-a^2} \, dx =$$

16.)

$$\int \sqrt{x^2+a^2} \, dx =$$

17.)

$$\int \sqrt{x^2-6x+8} \, dx =$$

18.)

$$\int x^2\sqrt{1-x^2}\,dx =$$

19.)

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx =$$

20.)

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

21.)

$$\int \frac{dx}{\cosh x} =$$

22.)

$$\int \frac{dx}{\cos x} =$$

23.)

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} =$$

24.) Mittels Partialbruchzerlegung berechne man

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}\,dx =$$

25.)

$$\int \frac{3x^2+x+1}{(x^2-5x+6)(x-1)}\,dx =$$

26.)

$$\int \frac{dx}{(2x-3)(4x+1)} =$$

27.)

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x-1)^2(2x+3)}\,dx =$$

28.)

$$\int \frac{x^2+x+2}{(x-1)^3(2x+3)}\,dx =$$

29.)

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} =$$

30.)

$$\int \frac{x^2-2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\,dx =$$

31.)

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} =$$

Anleitung : man verwende den Ansatz

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = (Ax+B)\sqrt{x^2+2x+5} + C\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$$

32.)

$$\int x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx =$$

Anleitung : es gilt $x\sqrt{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{2x+x^2}{\sqrt{4-x^2}}$, weiters verwende man den Ansatz in Aufgabe 31.

33.) Sei α monoton wachsend auf $[a,b]$ und stetig an der Stelle $x_0 \in [a,b]$. Ferner sei $f(x_0) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \neq x_0$. Man beweise, dass $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ ist und dass $\int f\,d\alpha = 0$ gilt.

34.) Let f be a continuous function on $[a,b]$ and suppose that $f \geq 0$ on $[a,b]$ and that $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Show that $f(x) = 0$ for all $x \in [a,b]$. Compare this result with exercise 33.

35.) Man berechne :

$$\int_0^1 x\,dx^2 \qquad , \qquad \int_0^\pi e^x\,d\sin x$$

36.)

$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x-1}+1}\,dx =$$

37.)

$$\int_0^\pi x^2 \cos x \, dx =$$

38.)

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 16x + 25}} =$$

39.) Man berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(a-x)}} =$$

40.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1} =$$

41.)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\cosh x} =$$

42.) Welche der angegebenen Integrale konvergieren

$$\int_{0+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}} \ , \quad \int_{0+}^{1-} \frac{\log x \, dx}{(1-x)\sqrt{x}} \ , \quad \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp(-2\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \, dx \ , \quad \int_{0+}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\cosh x - 1}}$$

43.) Welche der angegebenen Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k^2} \ , \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\log k)^{\log k}} \ , \qquad \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(\log k)^2}{k^{\log \log k}}$$

44.) Seien $p, q > 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Man zeige : für $u, v \geq 0$ ist $uv \geq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$ (man halte einmal u fest und dann v). Weiters zeige man : ist $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ und $f, g \geq 0$, und ist

$$\int_a^b f^p \, d\alpha = 1 = \int_a^b g^q \, d\alpha,$$

dann folgt

$$\int_a^b fg\,d\alpha \leq 1.$$

Daraus folgere man : für $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ gilt

$$\left|\int_a^b fg\,d\alpha\right| \leq \left(\int_a^b |f|^p\,d\alpha\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\,d\alpha\right)^{1/q}.$$

(Hölder'sche Ungleichung)

45.) Man berechne die Bogenlänge einer Schraubenlinie

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t, ht)\ ,\ 0 \leq t \leq 4\pi,\ h > 0.$$

46.) Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\gamma(t) = (t, f(t))\ ,\ t \in [a, b]$. (Weg von $y = f(x), a \leq x \leq b$.) Man zeige : γ ist rektifizierbar und für die Bogenlänge $\Lambda(\gamma)$ gilt

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

47.) Unter dem Weg von $r = f(\varphi), a \leq \varphi \leq b$ in Polarkoordinaten versteht man die Kurve $\gamma(\varphi) = (f(\varphi)\cos\varphi, f(\varphi)\sin\varphi)\ ,\ \varphi \in [a, b]$ und $f \geq 0$. Man zeige : Ist f stetig differenzierbar, so gilt für die Bogenlänge

$$\Lambda(\gamma) = \int_a^b \sqrt{(f(\varphi))^2 + (f'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

48.) Mit Hilfe der vorigen Aufgaben berechne man die Längen der folgenden Wege:
a) $y = a\cosh\frac{x}{a}\ ,\ 0 \leq x \leq x_0,\ a > 0$ (Stück einer Kettenlinie)
b) $r = a\varphi\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ a > 0$ (Stück einer Archimedischen Spirale)
c) $r = a(1 + \cos\varphi)\ ,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ a > 0$ (Kardioide, Herzkurve).

49.) Let $\{c_n\}$ be a sequence converging to 0 and satisfying $|f_n(x) - f(x)| \leq c_n$ for all $n \geq N$ and for all $x \in E$. Show that $\{f_n\}$ converges uniformly on E.

50.) Welche der nachstehenden Funktionenfolgen konvergieren auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Grenzfunktion $f(x) \equiv 1$?

(a) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2$,
(b) $f_n(x) = 1 + x^n(1-x)^n$,
(c) $f_n(x) = 1 - x^n(1-x^n)$.

51.) Man zeige : $\sum_{k=0}^{\infty} x^k(1-x)$ konvergiert auf $(-1,1]$, aber nicht gleichmäßig.

52.) Es sei $g_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$. Man bestimme $\lim_{n\to\infty} g_n(x)$, und zeige, dass $\{g_n\}$ nicht auf ganz $\mathbb{R}$, wohl aber auf jeder Menge der Gestalt $\{x : |x| \leq q < 1\}$ und $\{x : |x| \geq a > 1\}$ gleichmäßig konvergiert.

53.) Man zeige : die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha}$ konvergiert für jedes $\alpha > 1$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$.

54.) Man zeige, dass die nachstehenden Folgen und Reihen auf den angegebenen Intervallen gleichmäßig konvergieren:
(a) $f_n(x) = (1-x)x^n$, $[0,1]$;
(b) $g_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2}$, $\mathbb{R}$;
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{x}{n}$, $[-c,c]$;
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^2}{n^3+x^3}$, $[0,c]$.

55.) Sei $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Man zeige, dass f_n gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert und dass die Gleichung $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ für $x \neq 0$ richtig, für $x = 0$ jedoch falsch ist.

56.) Man betrachte die Doppelfolge $a_{i,j}$ definiert durch

$$a_{i,j} = \begin{cases} 0 & : \quad i < j \\ -1 & : \quad i = j \\ 2^{j-i} & : \quad i > j \end{cases}$$

und beweise

$$\sum_i \sum_j a_{ij} = -2 \ , \qquad \sum_j \sum_i a_{ij} = 0.$$

(Vergleiche dieses Resultat mit den Sätzen aus der Vorlesung!)

57.) Man entwickle die Funktion $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$. Wo konvergiert diese Reihe gleichmäßig und absolut?
Anleitung: entwickle zunächst $\sqrt{1+x^2}$ und differenziere die entstehende Potenzreihe gliedweise. (Zitiere alle in diesem Zusammenhng relevanten Sätze!)

58.) Man entwickle $\arctan x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$. Wo konvergiert diese Reihe gleichmäßig und absolut? Mit Hilfe des Abel'schen Grenzwertsatzes beweise man anschließend:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Anleitung: entwickle zunächst $\frac{1}{1+x^2}$ und integriere die entstehende Potenzreihe gliedweise.

59.) Man entwickle $\arcsin x$ in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$.
Anleitung: betrachte die Taylorentwicklung von $(1 - x^2)^{-1/2}$.

60.) Man beweise : für $x \in (-1, 1)$ und $\alpha > 0$ gilt:

$$(1 - x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n! \, \Gamma(\alpha)} \, x^n.$$

61.) Man zeige: für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-1}^{1} (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dt = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \sqrt{\pi}$$

62.) Berechne die Norm der linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Matrix

$$[L] = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Hinweis: Bestimme $\max |L\mathbf{x}|^2$ auf der Menge der Einheitsvektoren $\mathbf{x} = (\cos \phi, \sin \phi)$.

63.) Sei $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathbf{f}(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2 y - y^3).$$

Man berechne $[\mathbf{f}'(x, y)]$ in Bezug auf die Standardbasis.

64.) Sei $\mathbf{f}(x, y, z) = (1 + \log x, x\sqrt{y} + \sqrt{z})$ für $x, y, z > 0$. Man berechne $[\mathbf{f}'(x, y, z)]$ in Bezug auf die Standardbasis.

65.) Sei $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar auf $\mathbb{R}^p$ und homogen vom Grad α, d.h. es gilt $f(t\mathbf{x}) = t^\alpha f(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ und für alle $t > 0$. Man beweise :

$$(\nabla f)(\mathbf{x}).\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} x_k = \alpha f(\mathbf{x}).$$

Hinweis: Sei $g(t) = f(t\mathbf{x})$ für $t > 0$ und festes $\mathbf{x}$. Untersuche $g'(1)$.

66.) Man bestimme die Richtungsableitungen der folgenden Funktionen an den angegebenen Stellen ξ in den angegebenen Richtungen $\mathbf{u}$:
(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $\xi = (1,1)$, $\mathbf{u} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
(b) $g(x,y) = \sin(xy)$, $\xi = (1,0)$, $\mathbf{u} = (1/2, \sqrt{3}/2)$

67.) Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & : \quad , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : \quad , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Man zeige, dass f im Nullpunkt unstetig, also auch nicht differenzierbar ist, und doch Ableitungen in allen Richtungen besitzt.

68.) Es seien $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen und $f(x,y) = xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Man betrachte die Zusammensetzung $F(t) = f(u(t), v(t))$ für $t \in \mathbb{R}$ und berechne $F'(t)$ auf zwei Arten.

69.) Let $u(t) = v(t) = t$ for $t \in \mathbb{R}$ and $f(x,y) = x^y$ for $x, y \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Consider the function $F(t) = f(u(t), v(t))$ and determine $F'(t)$ in two ways.

70.) Für die Funktion $f(x,y) = e^x \sin y$ berechne man

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!} (h_1 D_1 + h_2 D_2)^k f(x_0, y_0).$$

71.) Man bestimme das Taylorpolynom 2.Ordnung im Punkt $(0,0)$ für die Funktion

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x - y + xy}.$$

72.) Es sei $f(x,y) = 2x^4 - 3x^2y + y^2$. Besitzt f im Ursprung ein lokales Minimum? Ferner zeige man, dass f auf jeder Geraden durch $(0,0)$ in diesem Punkt ein lokales Minimum annimmt.

73.) Man bestimme Lage, Art und Größe der lokalen Extrema der folgenden Funktionen:
(a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1\ ,\ \ x, y \in \mathbb{R}$;
(b) $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)\ ,\ \ 0 < x, y < \pi/2$.

74.) Es seien f und g zweimal stetig differenzierbare Funktionen einer Variablen, und es sei a eine Konstante. Zeige : die Funktion

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

genügt der partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}.$$

75.) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3).$$

Man berechne $f(1/2, \sqrt{3}/2)$ und $f'(1/2, \sqrt{3}/2)$ und zeige, dass $f'(1/2, \sqrt{3}/2)$ invertierbar ist. Ferner berechne man die Ableitung der lokalen Umkehrabbildung an der Stelle $f(1/2, \sqrt{3}/2)$.

76.) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

(a) Was ist der Bildbereich von f?
(b) Man zeige, dass die Jacobi-Determinante von f in keinem Punkt von $\mathbb{R}^2$ Null ist. Somit hat jeder Punkt von $\mathbb{R}^2$ eine Umgebung, in der f injektiv ist. Dennoch ist f nicht injektiv auf $\mathbb{R}^2$.
(c) Man setze $\mathbf{a} = (0, \pi/3)$ und $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ und definiere g als die stetige Inverse von f, definiert in einer Umgebung von $\mathbf{b}$, so dass $g(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$ gilt. Man finde eine explizite Formel für g, berechne $f'(\mathbf{a})$ und $g'(\mathbf{b})$.
(d) Welches sind die Bilder unter f von Geraden, die parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen?

77.) Man beantworte analoge Fragen für die Abbildung, die durch

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

definiert ist.

78.) Man zeige, dass die Stetigkeit von f' in einem Punkt **a** im Satz von der Umkehrabbildung notwendig ist, selbst im Fall $n = 1$. Ist

$$f(t) = t + 2t^2 \sin \frac{1}{t}$$

für $t \neq 0$ und $f(0) = 0$, dann ist $f'(0) = 1$ und f' ist in $(-1, 1)$ beschränkt, f ist jedoch in keiner Umgebung von 0 injektiv.

79.) Es sei $G = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 \neq -1\}$, und die Funktion $f : G \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1/(1+x_1+x_2+x_3), x_2/(1+x_1+x_2+x_3), x_3/(1+x_1+x_2+x_3)).$$

(a) Berechne $f'(x_1, x_2, x_3)$.
(b) Zeige, dass f auf G injektiv ist, bestimme $f(G)$ und gib die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(G) \longrightarrow G$ explizit an.
(c) Zeige, dass die Umkehrabbildung f^{-1} auf $f(G)$ differenzierbar ist und berechne ihre Ableitung.

80.) Man zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x + y - z + u^2 &= 0 \\ x - y + 2z + u &= 0 \\ 2x + 2y - 3z + 2u &= 0 \end{aligned}$$

nach x, y, u abhängig von z aufgelöst werden kann, ebenso nach x, z, u abhängig von y und nach y, z, u abhängig von x, jedoch nicht nach x, y, z abhängig von u.

81.) Man zeige : für hinreichend kleine x, y kann man

$$e^{\sin xy} + x^2 - 2y - 1 = 0$$

nach y auflösen.

82.) Man zeige : für genügend nahe bei 1 liegende x, y, z kann man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x^2 + y^2 + z^2 &= 0 \\ x^2 + e^{y-1} - 2y &= 0 \end{aligned}$$

durch stetige Funktionen $y = f(x)$ und $z = g(x)$ befriedigen.

83.) Sei $f(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y + \sin z$. Zeige, dass für hinreichned kleine x, y, z die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach z aufgelöst werden kann und berechne $\partial z/\partial x$ und $\partial z/\partial y$.

84.) Zeige, dass das Gleichungssystem $u + \cos uv = vx + 1$, $\sin u = y + v$ in einer Umgebung von $(x, y, u, v) = (0, -1, 0, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ aufgelöst werden kann und berechne $\partial u/\partial y$ und $\partial y/\partial y$ an der Stelle $(0, -1)$.

85.) Berechne die Extremwerte der Funktion $f(x, y) = xy$ unter der Nebenbedingung $x + y = 1$.

86.) Welcher Punkt der Fläche $z = x^2 + y^2$ liegt dem Punkt $(1, 1, 1/2)$ am nächsten?

87.) Man bestimme die Extremwerte der Funktion $x^2 + y^2 + z$ auf der Menge

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 = 5, y = z\}.$$

88.) Man bestimme das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ auf dem Schnitt der Ebene $x + y + z = 0$ mit der Kugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

89.) Berechne $\max\{x + y : x^4 + y^4 = 1\}$.

90.) Es soll unter den rechtwinkeligen Dreiecken mit gegebener Hypotenuse c jenes von größtem Flächeninhalt ausgesucht werden.

91.) Die Zahl 12 soll so in drei Summanden zerlegt werden, dass deren Produkt möglichst groß wird.

92.) Man berechne

$$\frac{d}{dx} \int_0^1 (x^3 + t^3)\, dt \ , \qquad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} t^3\, dt.$$

93.) Man berechne

$$\frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 + t^2)\, dt \ , \qquad \frac{d}{dx} \int_x^{x^2} \sin(xt)\, dt.$$