VII. Folgen und Reihen von Funktionen
(Vertauschung von Grenzprozessen)

Definition. *Sei $\{f_n\}$ eine Folge von Funktionen, die auf einer Menge E definiert sind. Die Folgen der Funktionswerte $\{f_n(x)\}$ seien für jedes $x \in E$ konvergent. Dann ist durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in E$ eine neue Funktion f auf E definiert. Man sagt: $\{f_n\}$ konvergiert punktweise auf E gegen die Funktion f.*
Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für jedes $x \in E$, so definiert man analog $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ für $x \in E$.

Es stellt sich die Frage, ob Stetigkeit, Differenzierbarkeit oder Integrierbarkeit bei diesen Genzprozessen erhalten bleibt. Die Antwort ist im allgemeinen NEIN (siehe Beispiele in der Vorlesung).
So ist etwa die Stetigkeit der Grenzfunktion f in einem Häufungspunkt x von E gleichbedeutend mit $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$. Sind alle f_n stetig an der Stelle x, so ist die Grenzfunktion f genau dann stetig an der Stelle x, wenn

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t).$$

Es kommt hier also darauf an, ob man die beiden Limiten miteinander vertauschen kann.
Um positive Resultate in dieser Richtung erhalten zu können, führt man den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz ein.

Gleichmäßige Konvergenz

Definition. *Eine Folge von Funktionen $\{f_n\}$ konvergiert gleichmäßig auf E gegen eine Funktion f, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ und für alle $x \in E$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.*
Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig auf E, wenn die Folge $\{s_n\}$ der Partialsummen $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ gleichmäßig auf E konvergiert.

Satz (Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz)**.** *Die Folge von Funktionen $\{f_n\}$ definiert auf E konvergiert genau dann gleichmäßig auf E, wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für jedes $m, n \geq N$ und für jedes $x \in E$ stets $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$ gilt.*

Für die Anwendungen von besonderer Bedeutung sind die beiden folgenden Sätze:

Satz. *Es sei $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für $x \in E$. Weiters sei $M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Dann erfolgt die Konvergenz von f_n gegen f genau dann gleichmäßig auf E, wenn $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.*

Satz. *Für die Folge* $\{f_n\}$ *von Funktionen auf* E *gelte :* $|f_n(x)| \leq M_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *und für jedes* $x \in E$. *Wenn* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *konvergiert, dann konvergiert die Summe* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *gleichmäßig auf* E.

Gleichmäßige Konvergenz und Stetigkeit

Satz. *Die Funktionenfolge* $\{f_n\}$ *konvergiere gegen* f *gleichmäßig auf einer Menge* E *in einem metrischen Raum. Sei* x *ein Häufungspunkt von* E *und sei* $\lim_{t\to x} f_n(t) = A_n$ *für* $n \in \mathbb{N}$. *Dann konvergiert die Folge* $\{A_n\}$ *und es gilt* $\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n$.
Anders formuliert: dann gilt

$$\lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t).$$

Daraus ergibt sich nun sofort:

Satz. *Ist* $\{f_n\}$ *eine Folge von stetigen Funktionen auf* E *und konvergiert* $\{f_n\}$ *gleichmäßig auf* E *gegen eine Funktion* f, *dann ist* f *stetig auf* E.

Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen falsch, sie gilt jedoch im folgenden Fall:

Satz. *Sei* K *eine kompakte Menge und* $\{f_n\}$ *eine Folge stetiger Funktionen auf* K. $\{f_n\}$ *konvergiere punktweise gegen eine stetige Funktion* f *auf* K, *ferner sei* $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ *für jedes* $x \in K$ *und für jedes* $n \in \mathbb{N}$.
Dann konvergiert $\{f_n\}$ *gleichmäßig auf* K *gegen* f.

Definition. *Sei* X *ein metrischer Raum und* $\mathcal{C}(X)$ *die Menge aller komplexwertiegen, stetigen, beschränkten Funktionen mit Definitionsbereich* X. *(Ist* X *kompakt, so besteht* $\mathcal{C}(X)$ *aus allen stetigen Funktionen auf* X.*)*
Für $f \in \mathcal{C}(X)$ *definieren wir* $\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. *Dann ist* $\|.\|$ *eine Norm auf* $\mathcal{C}(X)$ *und* $d(f,g) = \|f-g\|$ *eine Metrik auf* $\mathcal{C}(X)$.

$\mathcal{C}(X)$ ist ein normierter Vektorraum. Eine Folge $\{f_n\}$ aus $\mathcal{C}(X)$ konvergiert bezüglich der Metrik auf $\mathcal{C}(X)$ genau dann gegen f, wenn $\{f_n\}$ gleichmäßig auf X gegen f konvergiert.
Aus dem Cauchy-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz erhalten wir

Satz. $\mathcal{C}(X)$ *ist mit der obigen Norm ein vollständiger, normierter Vektorraum (Banachraum).*

Gleichmäßige Konvergenz und Integration

Satz. *Sei α monoton auf $[a,b]$. Sei ferner $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a,b]$ für $n \in \mathbb{N}$, weiters konvergiere $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion f. Dann ist $f \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a,b]$ und es gilt*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha.$$

Korollar. *Ist $f_n \in \mathcal{R}(\alpha)$ auf $[a,b]$ und ist $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, wobei die Reihe gleichmäßig auf $[a,b]$ konvergiert, dann gilt*

$$\int_a^b f\,d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n\,d\alpha$$

(d.h. die Reihe kann gliedweise integriert werden).

Gleichmäßige Konvergenz und Differentiation

Satz. *Sei $\{f_n\}$ eine Folge von auf $[a,b]$ differenzierbaren Funktionen, so dass $\{f_n(x_0)\}$ für einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ konvergiert. Konvergiert $\{f_n'\}$ gleichmäßig auf $[a,b]$, dann konvergiert auch $\{f_n\}$ gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen eine Funktion f, und es gilt*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)\ ,\ x \in [a,b].$$

Bemerkung. *Mit den nun entwickelten Methoden kann man eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ konstruieren, die an keiner Stelle differenzierbar ist.*

Die in diesem Abschnitt erzielten Resultate lassen sich besonders gewinnbringend auf Potenzreihen anwenden.

VIII. Potenzreihen

Wir beschränken uns nun auf reelle Funktionen.

Definition. *Konvergiert die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

für $|x-x_0| < R\ ,\ R > 0$, so nennt man die Funktion f reell analytisch auf $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Satz. *Konvergiert die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *für* $|x| < R$, *so ist* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *auf jeder kompakten Teilmenge von* $(-R, R)$ *gleichmäßig konvergent, weiters ist* f *stetig und differenzierbar auf* $(-R, R)$ *und es gilt*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \ , \ |x| < R,$$

man kann die Potenzreihe gliedwiese differenzieren.
Die Funktion f *hat auf* $(-R, R)$ *Ableitungen beliebiger Ordnung und es gilt*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n x^{n-k},$$

insbesondere ist $f^{(k)}(0) = k! c_k$ *für* $k = 0, 1, 2, \dots$.
Ist $0 < x < R$, *so gilt*

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

man kann die Potenzreihe gliedweise integrieren.

Bemerkung. *Die Funktion* $f(x) = e^{-1/x}$ *für* $x > 0$ *und* $f(x) = 0$ *für* $x \leq 0$ *besitzt an der Stelle* $x = 0$ *Ableitungen beliebiger Ordnung und es gilt* $f^{(k)}(0) = 0$ *für* $k = 0, 1, 2, \dots$. *Die Funktion* f *hat keine Taylorentwicklung um* $x = 0$, *sie ist zwar eine* $\mathcal{C}^{\infty}$ *-Funktion auf* $\mathbb{R}$, *d.h. besitzt auf ganz* $\mathbb{R}$ *Ableitungen beliebiger Ordnung, ist jedoch auf keinem offenen Intervall, das den Nullpunkt enthält, reell analytisch.*

Satz (Abel'scher Grenzwertsatz)**.** *Konvergiert die reelle Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *und setzt man* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *für* $|x| < 1$, *so gilt*

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Als Anwendung dieses Satzes erhält man aus der Taylorentwicklung

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \ , \ |x| < 1$$

die Formel

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots.$$

Satz. *Gegeben sei eine Doppelfolge* $\{a_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$. *Gilt* $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| = b_i$ *für* $i = 1, 2, \dots$ *und konvergiert die Reihe* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, *so folgt:*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Als Anwendung dieser Summenvertauschung erhält man

Satz. *Die Potenzreihe* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *sei konvergent auf* $(-R, R)$. *Ist* $a \in (-R, R)$, *dann kann* f *in eine Taylorreihe um den Punkt* a *entwickelt werden und es gilt für* $|x-a| < R - |a|$ *:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

Von großer theoretischer Bedeutung ist der folgende

Satz (Identitätssatz für Potenzreihen)**.**
Angenommen die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *konvergieren auf* $S = (-R, R)$. *Sei* E *die Menge aller* $x \in S$, *für die* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *gilt. Hat die Menge* E *einen Häufungspunkt in* S, *dann folgt* $a_n = b_n$ *für alle* $n = 0, 1, 2, \ldots$. *Also gilt dann* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *für alle* $x \in S$.

Die Gammafunktion

Satz (Hölder'sche Ungleichung)**.** *Seien* $p, q > 1$ *mit* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *und seien* $f, g \in \mathcal{R}(\alpha)$ *auf* $[a, b]$. *Dann gilt*

$$\left| \int_a^b f\, g\, d\alpha \right| \leq \left(\int_a^b |f|^p \, d\alpha \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q \, d\alpha \right)^{1/q}.$$

Definition. *Sei* $0 < x < \infty$:

$$\Gamma(x) =: \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt.$$

Das obige Integral ist an beiden Grenzen uneigentlich, aber konvergent.

Satz. *(a) Für* $0 < x < \infty$ *gilt* $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(b) $\Gamma(n+1) = n!$ *für* $n \in \mathbb{N}$ *(die Gammafunktion ist eine Fortsetzung von* $n \to n!$ *auf* $\mathbb{R}^+$*).*
(c) $\log \Gamma$ *ist eine konvexe Funktion auf* $(0, \infty)$, *d.h. für* $x, y \in (0, \infty)$ *und* $\lambda \in (0, 1)$ *gilt*

$$\log \Gamma(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda \log \Gamma(x) + (1-\lambda) \log \Gamma(y).$$

Die obigen drei Eigenschaften charakterisieren die Gammafunktion vollständig:

Satz (Bohr-Mollerup)**.** *Ist* f *eine positive Funktion auf* $(0, \infty)$ *und gilt: (a)* $f(x+1) = x f(x)$, *(b)* $f(1) = 1$, *(c)* $\log f$ *ist eine konvexe Funktion, dann ist* $f(x) = \Gamma(x)$.

Satz. *Für* $x > 0$ *gilt*

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)...(x+n)}.$$

Für $x, y > 0$ gilt

$$\int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y),$$

die Funktion B heißt Betafunktion.

Daraus ergeben sich die folgenden Formeln :

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\ ,\ \ \Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Das Verhalten der Gammafunktion bei $x \to \infty$ beschreibt die Stirling'sche Formel:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x}} = 1.$$