FUNKTIONALANALYSIS I, II

Skriptum zur Vorlesung

Studienjahr 2006/2007

Friedrich Haslinger

Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Hilberträume **2**
Übungen 15

2 Banach - und Frécheträume **18**
Übungen 22

3 Der Satz von Hahn-Banach **24**
Übungen 27

4 Dualräume **29**
Übungen 31

5 Open mapping - closed graph **32**
Übungen 37

6 Gleichgradige Stetigkeit - Der Satz von Banach-Steinhaus **39**
Übungen 48

7 Kompakte Operatoren **50**
7.1 Definition, Beispiele und wichtigste Eigenschaften 50
7.2 Spektrum und Resolvente eines stetigen linearen Operators 53
7.3 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum 55
7.4 Die kanonische Darstellung eines kompakten Operators 59
Übungen 65

8 Hilbert-Schmidt und nukleare Operatoren **66**

9 Sobolevräume **73**

10 Unbeschränkte Operatoren **87**

11 Sesquilinearformen und halbbeschränkte Operatoren **98**

12 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren und Folgerungen **103**

Literatur **127**

Index **128**

1 Hilberträume

Definition 1.1.
Ein Vekktorraum H über $\mathbb{C}$ heißt innerer Produktraum , wenn eine Abbildung

$$(\, . \, , \, . \,) : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$$

existiert mit folgenden Eigenschaften

1. $(y,x) = \overline{(x,y)}$, $x,y \in H$,
2. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$, $x,y,z \in H$,
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x,y)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $x,y \in H$,
4. $(x,x) \geq 0 \ \forall x \in H$,
5. $\|x\|^2 = (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bemerkung 1.2. Aus (2) und (3) folgt: $x \mapsto (x,y)$ ist für jedes fixe $y \in H$ ein lineares Funktional auf H.

Satz 1.3. *Sei H ein innerer Produktraum. Es gilt die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung:*

$$|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| \ , \ \forall x,y \in H.$$

Beweis. Sei $A = \|x\|^2$, $B = |(x,y)|$, $C = \|y\|^2$. Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha(y,x) = B$. Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq (x - r\alpha y, x - r\alpha y) = (x,x) - r\alpha(y,x) - r\overline{\alpha}(x,y) + r^2(y,y).$$

Daraus folgt

$$0 \leq A - 2Br + Cr^2 \ , \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Ist $C = 0$, dann ist auch $B = 0$. Ist $C > 0$, dann gilt für $r = B/C$:

$$0 \leq A - 2B^2/C + B^2/C.$$

Nach Multiplikation der letzten Ungleichung mit C folgt daher

$$0 \leq AC - B^2.$$

□

Aus diesem Satz folgt sofort die Dreiecksungleichung

Satz 1.4.

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad , \forall x,y \in H.$$

Definition 1.5. Durch $d(x,y) = \|x-y\|$ ist eine Metrik auf H definiert. Eine Folge $(x_n)_n$ von Elementen in H konvergiert gegen $x \in H$, wenn $\|x_n - x\| \to 0$ bei $n \to \infty$.
H heißt Hilbertraum , wenn H vollständig ist bezüglich der oben definierten Metrik, d.h. wenn jede Cauchyfolge $(x_n)_n$ in H konvergent ist: also existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| < \epsilon$ für alle $n, m > N_\epsilon$, so gibt es ein $x \in H$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Beispiele 1.6. (a) $z, w \in \mathbb{C}^N$ mit $(z,w) = \sum_{k=1}^N z_k \overline{w_k}$ als innerem Produkt. $\mathbb{C}^N$ ist ein Hilbertraum.

(b)

$$l^2 = \{\xi = (x_n)_n \ : \ x_n \in \mathbb{C} \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$$

mit

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

als innerem Produkt.
l^2 ist ein Hilbertraum (Vollständigkeit siehe Übungen).

(c) Sei (X, μ) ein Maßraum mit positivem Maß μ.

$$L^2(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ messbar } : \int_X |f|^2 \, d\mu < \infty\}$$

mit innerem Produkt

$$(f,g) = \int_X f \, \overline{g} \, d\mu.$$

$L^2(\mu)$ ist ein Hilbertraum (siehe [R1]). $L^2(\mu)$ ist dabei ein Raum von Äquivalenzklassen von messbaren Funktionen.
Ein wichtiger Spezialfall ist

$$L^2(\mathbb{T}) = \{f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ messbar } : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta < \infty\}$$

mit innerem Produkt

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \, \overline{g(e^{i\theta})} \, d\theta.$$

(d) Der Hardyraum H^2 : sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ und f eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{D}$ mit Taylorentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

$$H^2 = \{f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph } : \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \ , \ \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

Für $f, g \in H^2$ mit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ setzt man für das innere Produkt

$$(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Man sieht sofort, dass $H^2 \cong l^2$. Außerdem kann H^2 als abgeschlossener Teilraum von $L^2(\mathbb{T})$ aufgefasst werden (siehe [R1]).

(e) Der Bergmanraum $A^2(\Omega)$: sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ ein Gebiet und

$$A^2(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph } : \int_\Omega |f(z)|^2 \, d\lambda(z) < \infty\},$$

dabei ist λ das Lebesguemaß auf $\mathbb{C}^n$. Das innere Produkt ist gegeben durch

$$(f, g) = \int_\Omega f(z) \, \overline{g(z)} \, d\lambda(z),$$

für $f, g \in A^2(\Omega)$. Die Vollständigkeit des Bergmanraumes beruht auf dem Cauchy'schen Integralsatz (siehe Übungen). $A^2(\Omega)$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\Omega)$.

(f) Sei

$$\mathcal{C}([0,1]) = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C} \text{ stetig}\}$$

mit innerem Produkt

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) \, \overline{g(t)} \, dt,$$

für $f, g \in \mathcal{C}([0,1])$.
Wir zeigen: $\mathcal{C}([0,1])$ ist nicht vollständig: sei dazu $0 < c < 1$; für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $0 < c - \frac{1}{n}$ definiere

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq c - \frac{1}{n} \\ nt - nc + 1 & c - \frac{1}{n} \leq t \leq c \\ 1 & c \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|f_n - f_m\|^2 \leq \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2},$$

also ist $(f_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{C}([0,1])$. Sei $f \in \mathcal{C}([0,1])$. Dann gilt

$$\|f_n - f\|^2 = \int_0^{c-\frac{1}{n}} |f(t)|^2 \, dt + \int_{c-\frac{1}{n}}^c |f_n(t) - f(t)|^2 \, dt + \int_c^1 |1 - f(t)|^2 \, dt.$$

Wenn $\|f_n - f\|^2 \to 0$ bei $n \to \infty$, dann müsste $f(t) = 0$ für $t \in [0, c)$ und $f(t) = 1$ für $t \in (c, 1]$. Somit wäre f unstetig. Widerspruch!

Satz 1.7.
Sei H ein Hilbertraum, $y \in H$ fix. Die Abbildungen $x \mapsto (x, y)$, $x \mapsto (y, x)$, $x \mapsto \|x\|$ sind stetige Abbildungen von H nach $\mathbb{C}$.
Ein linearer Operator $T : H_1 \longrightarrow H_2$ zwischen Hilberträumen H_1 und H_2 ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $\|Tx\| \leq C\|x\|$, $\forall x \in H_1$.

Beweis. Für $x_1, x_2 \in H$ gilt

$$|(x_1, y) - (x_2, y)| = |(x_1 - x_2, y)| \leq \|x_1 - x_2\| \, \|y\|,$$

weiters ist $| \, \|x_1\| - \|x_2\| \, | \leq \|x_1 - x_2\|$, also sind die Abbildungen sogar gleichmäßig stetig. Charakterisierung der Stetigkeit von T : siehe Übungen. □

Definition 1.8. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Teilmenge $E \subseteq V$ heißt konvex , wenn mit $x, y \in E$ auch $tx + (1-t)y \in E$, für jedes $0 \leq t \leq 1$.

Bemerkung 1.9. Jeder Teilraum von V ist konvex. Ist $E \subseteq V$ konvex, so ist auch $x + E = \{x + e \ : \ e \in E\}$ konvex.

Definition 1.10. Sei H ein Hilbertraum. $x \in H$ heißt orthogonal zu $y \in H$, wenn $(x, y) = 0$, wir schreiben $x \perp y$.
Für $x \in H$ definieren wir

$$x^{\perp} = \{y \in H \ : \ (x, y) = 0\}.$$

Ist $M \subseteq H$, so definieren wir

$$M^{\perp} = \{y \in H \ : \ (x, y) = 0 \ , \forall x \in M\}.$$

Bemerkung 1.11. $x^{\perp}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H, daher selbst ein Hilbertraum.
Da $M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} x^{\perp}$, ist auch $M^{\perp}$ ein Hilbertraum.

Beispiele 1.12. (a) Sei $e_n = (0, \ldots, 0, \underset{n}{1}, 0, \ldots)$, es gilt $(e_n, e_m) = \delta_{n,m}$ und in l^2 gilt

$$e_n^{\perp} = \{(x_k)_k \in l^2 \ : \ x_n = 0\}.$$

(b) Im $L^2(\mathbb{T})$ gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \, e^{-imt} \, dt = \delta_{n,m}.$$

(c) $zH^2 = \{f \ : \ f(z) = zg(z) \ , \ g \in H^2\}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von H^2. Weiters ist

$$(zH^2)^{\perp} = \{c \ : \ c \in \mathbb{C}\} \ , \ (z^n H^2)^{\perp} = \{p \ : \ p \text{ Polynom vom Grad } \leq n-1\}.$$

Für die weitere Theorie fundamental ist der folgende

Satz 1.13.
Jede nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge E in einem Hilbertraum H enthält ein eindeutig bestimmtes Element mit kleinster Norm.

Beweis. Es gilt, wie man leicht nachrechnet, die sogenannte Parallelogrammregel

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ , \ x, y \in H.$$

Sei $\delta = \inf\{\|x\| \ : \ x \in E\}$ Für $x, y \in E$ ist $\frac{1}{2}(x + y) \in E$ und daher folgt aus

$$1/4 \|x - y\|^2 = 1/2 \|x\|^2 + 1/2 \|y\|^2 - \|1/2(x + y)\|^2,$$

dass für $x, y \in E$ die Abschätzung

$$\|x - y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2$$

gilt. Wenn also $\|x\| = \|y\| = \delta$ ist, dann ist $x = y$ (Eindeutigkeit).

Nach Definition von δ existiert eine Folge $(y_n)_n$ in E mit $\|y_n\| \to \delta$ bei $n \to \infty$. Wegen der Abschätzung

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\,\|y_n\|^2 + 2\,\|y_m\|^2 - 4\delta^2$$

erkennt man leicht, dass $(y_n)_n$ eine Cauchyfolge in H ist. Da H vollständig ist, existiert ein $x_0 \in H$ mit $\|y_n - x_0\| \to 0$ bei $n \to \infty$. Weil E abgeschlossen ist, ist $x_0 \in E$; die Abbildung $x \mapsto \|x\|$ ist nach 1.7 stetig und somit ist $\|x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = \delta$. □

Theorem 1.14.
Sei M ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes H. Dann existieren eindeutig bestimmte Abbildungen

$$P : H \longrightarrow M \ , \ Q : H \longrightarrow M^{\perp}$$

mit folgenden Eigenschaften

1. $x = Px + Qx \ , \ \forall x \in H$
2. *für $x \in M$ gilt $Px = x$, also $P^2 = P$ und $Qx = 0$; für $x \in M^{\perp}$ gilt $Px = 0$, $Qx = x$, also $Q^2 = Q$.*
3. *Der Abstand von $x \in H$ zu M ist*
$$\inf\{\|x - y\| \ : \ y \in M\} = \|x - Px\|.$$
4. *Für jedes $x \in H$ gilt*
$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2.$$
5. *P und Q sind stetige, lineare, selbstadjungierte Operatoren.*

P und Q sind die orthogonalen Projektionen von H auf M bzw. $M^{\perp}$.

Beweis. Für jedes $x \in H$ ist die Menge $x + M = \{x + y \ : \ y \in M\}$ konvex. Daher existiert nach 1.13 ein eindeutig bestimmtes Element von kleinster Norm in $x + M$, welches wir mit Qx bezeichnen. Wir setzen $Px = x - Qx$ und erkennen, dass $Px \in M$, weil $Qx \in x + M$ ist.
Nun behaupten wir, dass $Qx \in M^{\perp}$. Dazu zeigen wir $(Qx, y) = 0$, $\forall y \in M$: o.B.d.A. können wir voraussetzen, dass $\|y\| = 1$, dann gilt

$$(Qx, Qx) = \|Qx\|^2 \leq \|Qx - \alpha y\|^2 = (Qx - \alpha y, Qx - \alpha y) \ , \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

wegen der Minimalität von Qx. Daraus ergibt sich die Ungleichung

$$0 \leq -\alpha(y, Qx) - \overline{\alpha}(Qx, y) + |\alpha|^2,$$

setze nun für $\alpha = (Qx, y)$, dann folgt $0 \leq -|(Qx, y)|^2$ und $(Qx, y) = 0$; somit ist $Q : H \longrightarrow M^{\perp}$.
Wenn $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in M$ und $x_1 \in M^{\perp}$, dann folgt $x_0 - Px = Qx - x_1$, und weil $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ ist, erhält man $x_0 = Px$ und $x_1 = Qx$, daher sind P und Q eindeutig bestimmt. Auf ähnliche Weise sieht man, dass

$$P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py = \alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y).$$

Die linke Seite gehört zu M, die rechte Seite zu $M^\perp$, daher sind beide Seiten 0, was die Linearität von P und Q impliziert.
Eigenschaft 3 folgt nach Definition von Q, Eigenschaft 4 wegen $(Px, Qx) = 0 \;,\; \forall x \in H$.
Weiters gilt

$$\|Q(x-y)\| = \inf\{\|x-y+m\| \;:\; m \in M\} \leq \|x-y\|,$$

daher sind Q und $P = I - Q$ stetig.
Für beliebiges $x, y \in H$ gilt

$$(Px, y) = (Px, Py + Qy) = (Px, Py) \text{ und } (x, Py) = (Px + Qx, Py) = (Px, Py)$$

daher ist $(Px, y) = (x, Py)$ und P selbstadjungiert. $\square$

Korollar 1.15.
Ist $M \neq H$ ein echter abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes H, dann existiert ein $y \neq 0$ mit $y \perp M$.

Beweis. Sei $x \in H$ mit $x \notin M$. Setze $y = Qx$: da $x \neq Px$ folgt $y \neq 0$. $\square$

Satz 1.16.
Sei L ein stetiges lineares Funktional auf dem Hilbertraum H. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $y \in H$ mit $Lx = (x, y)$ $\forall x \in H$.

Beweis. Wenn $L(x) = 0 \; \forall x \in H$, dann setze $y = 0$. Sonst definiere $M = \{x \;:\; Lx = 0\}$. Dann ist M wegen der Stetigkeit von L ein abgeschlossener Teilraum von H Wegen 1.15 ist $M^\perp \neq 0$. Sei $z \in M^\perp$ mit $z \neq 0$. Dann ist $Lz \neq 0$. Setze nun $y = \alpha z$, wo $\overline{\alpha} = \frac{Lz}{\|z\|^2}$.
Dann ist $y \in M^\perp$ und

$$Ly = L(\alpha z) = \frac{\overline{Lz}}{\|z\|^2} Lz = \frac{|Lz|^2}{\|z\|^2} = (y, y) = |\alpha|^2 (z, z).$$

Für $x \in H$ definiere nun

$$x' = x - \frac{Lx}{(y, y)} y \text{ und } x'' = \frac{Lx}{(y, y)} y.$$

Aus der obigen Gleichung folgt dann $Lx' = 0$ und $x' \in M$, daher ist $(x', y) = 0$ und

$$(x, y) = (x'', y) = (\frac{Lx}{(y, y)} y, y) = Lx.$$

Ist $(x, y) = (x, y')\; \forall x \in H$, dann folgt $(x, y - y') = 0 \; \forall x \in H$, insbesondere $(y - y', y - y') = 0$. Daher ist $y = y'$, und es folgt die Eindeutigkeit. $\square$

Der Dualraum H' eines Hilbertraumes H kann daher mit dem ursprünglichen Raum identifiziert werden.

Beispiele 1.17.
(a) Sei $L \in (l^2)'$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Folge $l = (l_n)_n \in l^2$ mit

$$L(x) = (x, l) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{l_n} \;,\; x = (x_n)_n \in l^2.$$

(b) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir betrachten den Bergmanraum $A^2(\Omega)$ und spezielle stetige lineare Funktionale: die Punktevaluationen. Sei dazu $z \in \Omega$ fix. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz [Has1] gilt

$$f(z) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{D(z,r)} f(w)\, d\lambda(w),$$

dabei ist $f \in A^2(\Omega)$ und $D(z,r) = \{w \ : \ |w-z| < r\} \subset \Omega$, sowie λ das Lebesguemaß in $\mathbb{C}$. Die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung ergibt dann

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \tfrac{1}{\pi r^2} \ \int_{D(z,r)} 1 \ . \ |f(w)|\, d\lambda(w) \\ &\leq \tfrac{1}{\pi r^2} \ \left(\int_{D(z,r)} 1^2\, d\lambda(w)\right)^{1/2} \ \left(\int_{D(z,r)} |f(w)|^2\, d\lambda(w)\right)^{1/2} \\ &\leq \tfrac{1}{\pi^{1/2} r} \ \left(\int_\Omega |f(w)|^2\, d\lambda(w)\right)^{1/2} \\ &\leq \tfrac{1}{\pi^{1/2} r} \ \|f\|. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass die Abbildung $f \mapsto f(z)$ ein stetiges lineares Funktional auf $A^2(\Omega)$ ist, daher gibt es nach 1.16 eine eindeutig bestimmte Funktion $k_z \in A^2(\Omega)$ mit

$$f(z) = (f, k_z) = \int_\Omega f(w)\, \overline{k_z(w)}\, d\lambda(w).$$

Setze $K(z,w) = \overline{k_z(w)}$. Dann gilt nach Definition: $w \mapsto \overline{K(z,w)} = k_z(w)$ ist eine holomorphe Funktion, ein Element von $A^2(\Omega)$, also ist die Funktion $w \mapsto K(z,w)$ antiholomorph auf Ω. Es gilt

$$f(z) = \int_\Omega K(z,w) f(w)\, d\lambda(w) \ , \ f \in A^2(\Omega).$$

Die Funktion zweier komplexer Veränderlicher $(z,w) \mapsto K(z,w)$ heißt Bergmankern von Ω und die obige Identität die reproduzierende Eigenschaft des Bergmankerns .
Wir verwenden die reproduzierende Eigenschaft für die holomorphe Funktion $z \mapsto k_u(z)$, wobei $u \in \Omega$ fix ist:

$$\begin{aligned} k_u(z) &= \int_\Omega K(z,w) k_u(w)\, d\lambda(w) = \int_\Omega \overline{k_z(w)}\, \overline{K(u,w)}\, d\lambda(w) \\ &= \left(\int_\Omega K(u,w) k_z(w)\, d\lambda(w)\right)^{-} = \overline{k_z(u)}, \end{aligned}$$

daher ist $k_u(z) = \overline{k_z(u)}$, oder $K(z,u) = \overline{K(u,z)}$.
Daraus folgt insbesondere, dass der Bergmankern in der ersten Veränderlichen holomorph und in der zweiten Veränderlichen antiholomorph ist.
Sei nun $\varphi \in L^2(\Omega)$. Da $A^2(\Omega)$ ein abgeschlossener Teilraum von $L^2(\Omega)$ ist, existiert nach 1.14 eine eindeutig bestimmte orthogonale Projektion $P : L^2(\Omega) \longrightarrow A^2(\Omega)$. Wir verwenden für die Funktion $P\varphi \in A^2(\Omega)$ die reproduzierende Eigenschaft und erhalten

$$P\varphi(z) = \int_\Omega K(z,w) P\varphi(w)\, d\lambda(w) = (P\varphi, k_z) = (\varphi, Pk_z) = (\varphi, k_z);$$

dabei haben wir noch verwendet, dass P selbstadjungiert ist und dass $Pk_z = k_z$ gilt, weil $k_z \in A^2(\Omega)$. Daher folgt

$$P\varphi(z) = \int_\Omega K(z,w)\varphi(w)\, d\lambda(w).$$

Der Operator P wird in diesem Zusammenhang auch als Bergmanprojektion bezeichnet.

Definition 1.18. Ein System $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ von Vektoren in einem Hilbertraum H heißt Orthonormalsystem , wenn $(u_\alpha, u_\beta) = 0 \ \forall \alpha \neq \beta$ und $\|u_\alpha\| = 1 \ \forall \alpha \in A$. Für $x \in H$ setzen wir $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$, $\alpha \in A$.

Beispiele 1.19. (a) Die Funktionen $t \mapsto e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$ bilden ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T})$.

(b) Die Funktionen $z \mapsto z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ bilden ein Orthonormalsystem in H^2.

(c) Die Funktionen $z \mapsto \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ eines in $A^2(\mathbb{D})$, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$.

(d) Seien $u_1, \ldots, u_k$ orthonormal und $x = \sum_{j=1}^k c_j u_j$. Dann ist $c_j = (x, u_j)$, $1 \leq j \leq k$ und $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^k |c_j|^2$.

Als Anwendungsbeispiel lösen wir nun das Problem der besten Approximation in einem Hilbertraum H : seien dazu $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in H und $x \in H$ gegeben. Gesucht sind $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$, sodass $\|x - \sum_{j=1}^k c_j v_j\|$ minimal wird.
Dazu benötigen wir das folgende

Lemma 1.20. *Wenn V ein abgeschlossener Teilraum des Hilbertraumes H ist, weiters $y \in H$ mit $y \notin V$, sowie $V^* = \langle V, y\rangle$ das lineare Erzeugnis von V und y ist, dann ist V^* ebenfalls abgeschlossen.*

Beweis. Sei $z = \lim_{n\to\infty}(x_n + \lambda_n y)$, $x_n \in V$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann exixtiert ein $\eta > 0$ mit $\|x_n + \lambda_n y\| < \eta$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Angenommen die Folge $(\lambda_n)_n$ ist unbeschränkt, dann existiert eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_k$ mit $|\lambda_{n_k}| \to \infty$ bei $k \to \infty$. Dann folgt aber

$$\|\lambda_{n_k}^{-1} x_{n_k} + y\| < \frac{\eta}{|\lambda_{n_k}|} \to 0 \ , \ k \to \infty$$

und $y \in V$, weil V abgeschlossen ist. Widerspruch!
Daher existiert eine Konstante $C > 0$ mit $|\lambda_n| \leq C \ \forall n$ und somit eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_k$, welche eine Cauchyfolge ist. Sei $\lambda = \lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k}$. Es folgt, dass auch $(x_{n_k})_k$ eine Cauchyfolge ist und weil V abgeschlossen ist, existiert $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in V$. Daher ist $z = x + \lambda y \in V^*$. □

Um das Problem der besten Approximation zu lösen, setzen wir $a_{i,j} = (v_j, v_i)$ und $b_i = (x, v_i)$ für $i = 1, \ldots, k$. Nach dem vorigen Lemma ist $M = \langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ ein abgeschlossener Teilraum, somit existiert nach 1.13 ein eindeutig bestimmtes Element $x_0 = \sum_{j=1}^k c_j\, v_j$, sodass $\|x-\sum_{j=1}^k c_j\, v_j\|$ minimal ist, außerdem ist $x-x_0\in M^\perp$, d.h. $(x-x_0,v_i)=0$, für $i=1,\ldots,k$. Dies entspricht in unserer Notation dem System von k Gleichungen

$$\sum_{j=1}^k a_{i,j}\, c_j = b_i\ ,\ 1\le i\le k.$$

Da x_0 eindeutig bestimmt ist, ist die Determinante der Matrix $(a_{i,j})$ ungleich Null, und die Koeffizienten c_j können berechnet werden.
Sei $\delta=\min\|x-\sum_{j=1}^k c_j\, v_j\| = \|x-x_0\|$. Da $(x-x_0,v_i)=0$ für $i=1,\ldots,k$, folgt $(x-x_0,x_0)=0$, und daher ist

$$\delta^2=(x-x_0,x-x_0)=(x,x-x_0)=(x,x-\sum_{j=1}^k c_j\, v_j),$$

somit folgt

$$\delta^2=\|x\|^2-\sum_{j=1}^k \overline{c_j}\, b_j$$

und das Problem der besten Approximation ist gelöst.
Spezialfall: wird $\{v_1,\ldots,v_k\}$ durch ein orthonormales System $\{u_1,\ldots,u_k\}$ ersetzt, so folgt $a_{i,j}=\delta_{i,j}$ (Einheitsmatrix) und $c_i=b_i$ für $i=1,\ldots,k$ sowie

$$\delta^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^k |(x,u_i)|^2,$$

also haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1.21.
Sei $\{u_1,\ldots,u_k\}$ ein orthonormales System in einem Hilbertraum H und $x\in H$. Dann gilt

$$\|x-\sum_{j=1}^k (x,u_j)u_j\|\le\|x-\sum_{j=1}^k \lambda_j\, u_j\|\ ,\ \forall\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $\lambda_j=(x,u_j)\ ,\ 1\le j\le k$. Der Ausdruck $\sum_{j=1}^k (x,u_j)u_j$ ist die orthogonale Projektion von x auf $M=\langle u_1,\ldots,u_k\rangle$. Ist $\delta=dist(x,M)$, so gilt

$$\sum_{j=1}^k |(x,u_j)|^2=\|x\|^2-\delta^2.$$

Definition 1.22. Sei A eine Indexmenge (sie kann überabzählbar sein) und μ das Zählmaß auf A, d.h. $\mu(F)=|F|$, falls $F\subseteq A$ eine endliche Teilmenge ist, sonst wird $\mu(F)=\infty$ gesetzt. Wir definieren $l^2(A)=L^2(\mu)$, wobei

$$L^2(\mu)=\{\varphi:A\longrightarrow\mathbb{C}\ :\ \int_A|\varphi(\alpha)|^2\,d\mu=\sum_{\alpha\in A}|\varphi(\alpha)|^2<\infty\},$$

hier ist $\sum_{\alpha\in A}|\varphi(\alpha)|^2=\sup\{\sum_{\alpha\in F}|\varphi(\alpha)|^2\ :\ F \text{ endlich }\ ,\ F\subseteq A\}$.

Korollar 1.23.
Wenn $\{u_\alpha \;:\; \alpha \in A\}$ *eine orthonormale Menge in* H *ist und* $x \in H$*, sowie* $\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha)$*, dann gilt die Bessel'sche Ungleichung*

$$\sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2,$$

und die Menge $\{\alpha \in A \;:\; \hat{x}(\alpha) \neq 0\}$ *ist höchstens abzählbar.*

Beweis. Die Bessel'sche Ungleichung folgt sofort aus Satz 1.21. Wäre die Menge $\{\alpha \in A \;:\; \hat{x}(\alpha) \neq 0\}$ überabzählbar, so müsste eine der Mengen $B_n = \{\alpha \;:\; \frac{1}{n+1} < |\hat{x}(\alpha)| < \frac{1}{n}\}$ unendlich sein, was einen Widerspruch zur Bessel'schen Ungleichung ergibt. $\square$

Satz 1.24.
Sei $\{u_\alpha \;:\; \alpha \in A\}$ *eine orthonormale Menge im Hilbertraum* H*. Sei* $F : H \longrightarrow l^2(A)$ *gegeben durch* $F(x) = ((x, u_\alpha))_{\alpha \in A}$*. Dann ist* F *eine stetige, surjektive, lineare Abbildung.*

Beweis. Die Linearität von F folgt sofort aus der Definition. Es gilt nach 1.21

$$\|F(x-y)\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x-y, u_\alpha)|^2 \leq \|x-y\|^2,$$

somit ist F stetig. Wir haben noch zu zeigen, dass F surjektiv ist. Sei dazu $\varphi \in l^2(A)$ und $A_n = \{\alpha \;:\; |\varphi(\alpha)| > \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen A_n sind endlich, sie haben höchstens $n^2\|\varphi\|^2$ Elemente. Nun setzen wir $x_n = \sum_{\alpha \in A_n} \varphi(\alpha) u_\alpha$ und erhalten $\hat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha)\chi_{A_n}(\alpha)$, wobei χ_{A_n} die charakteristische Funktion der Funktion A_n ist. Es gilt $\hat{x}_n(\alpha) \to \varphi(\alpha)$ bei $n \to \infty$, $\forall \alpha \in A$. Wir zeigen nun, dass $(\hat{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in $l^2(A)$ ist. Es gilt

$$\sum_{\alpha \in A} |\varphi(\alpha) - \hat{x}_n(\alpha)|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\varphi(\alpha)|^2 < \infty,$$

daher gibt es höchstens abzählbar viele $\alpha_i \in A$ mit $\varphi(\alpha) - \hat{x}_n(\alpha) \neq 0$, also ist

$$\sum_{\alpha \in A} |\varphi(\alpha) - \hat{x}_n(\alpha)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi(\alpha_i) - \hat{x}_n(\alpha_i)|^2,$$

und zu einem vorgegebenen $\epsilon > 0$ existiert ein $N = N_\epsilon > 0$, sodass $\sum_{i=N+1}^{\infty} |\varphi(\alpha_i)|^2 < \frac{\epsilon}{2}$; wähle ferner n so groß, dass $|\varphi(\alpha_i) - \hat{x}_n(\alpha_i)|^2 < \frac{\epsilon}{2N}$ für $i = 1, \ldots, N$ gilt, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in A} |\varphi(\alpha) - \hat{x}_n(\alpha)|^2 &= \sum_{i=1}^{N} |\varphi(\alpha_i) - \hat{x}_n(\alpha_i)|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\varphi(\alpha_i) - \hat{x}_n(\alpha_i)|^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} |\varphi(\alpha_i) - \hat{x}_n(\alpha_i)|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\varphi(\alpha_i)|^2 \leq N\,\frac{\epsilon}{2N} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

d.h. $\|\varphi - \hat{x}_n\| \to 0$ bei $n \to \infty$ und $(\hat{x}_n)_n$ ist eine Cauchyfolge in $l^2(A)$. Nach Definition ist $\|x_n - x_m\| = \|\hat{x}_n - \hat{x}_m\|$ und daher ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in H. Also existiert ein $x \in H$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\forall \alpha \in A$ gilt

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha) = \lim_{n\to\infty} (x_n, u_\alpha) = \lim_{n\to\infty} \hat{x}_n(\alpha) = \varphi(\alpha).$$

$\square$

Definition 1.25. Ein Orthonormalsystem $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ in H heißt vollständig , wenn $x = \sum_{\alpha \in A}(x, u_\alpha)u_\alpha$, $\forall x \in H$.

Bemerkung 1.26. Gilt die obige Formel, so ist die Darstellung von x eindeutig.

Satz 1.27.
Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:

1. $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ *ist ein vollständiges Orthonormalsystem;*
2. *ist* $(x, u_\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in A$, *dann ist* $x = 0$;
3. *die Menge* S *aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus* $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ *ist dicht in* H;
4. $\forall x \in H$ *gilt* $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$ *(Parseval'sche Gleichung) ;*
5. $\forall x, y \in H$ *gilt* $(x, y) = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}(\alpha)\overline{\hat{y}(\alpha)}$.

Beweis. 1. $\Rightarrow$ 2. : ist $(x, u_\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in A$, dann ist $x = \sum_{\alpha \in A}(x, u_\alpha)u_\alpha = 0$.
2. $\Rightarrow$ 3. : Sei $M = \overline{S}$. Dann ist M ein abgeschlossener Teilraum von H. Angenommen $M \neq H$, dann ist nach 1.15 $M^\perp \neq \{0\}$, d.h. $\exists x \neq 0$ mit $(x, u_\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in A$ Widerspruch!
3. $\Rightarrow$ 4. : Sei $x \in H$ fix und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existieren $u_{\alpha_1}, \dots, u_{\alpha_n}$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k u_{\alpha_k}\| < \epsilon.$$

Nach 1.21 gilt für $z = \sum_{k=1}^{n}(x, u_{\alpha_k})u_{\alpha_k}$ die Ungleichung $\|x - z\| < \epsilon$ und daher $\|x\| < \|z\| + \epsilon$. Daraus folgt

$$(\|x\| - \epsilon)^2 < \|z\|^2 = |\hat{x}(\alpha_1)|^2 + \cdots + |\hat{x}(\alpha_n)|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, erhalten wir somit $\|x\|^2 \leq \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}(\alpha)|^2$ und zusammen mit der Bessel'schen Ungleichung 1.23 die Aussage 4.
4. $\Rightarrow$ 5. : Aussage 4. kann auch in der Form $(x, x) = (\hat{x}, \hat{x})$ geschrieben werden. Sind $x, y \in H$ fest und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig, dann folgt aus $(x + \lambda y, x + \lambda y) = (\hat{x} + \lambda \hat{y}, \hat{x} + \lambda \hat{y})$ die Gleichung

$$\overline{\lambda}(x, y) + \lambda(y, x) = \overline{\lambda}(\hat{x}, \hat{y}) + \lambda(\hat{y}, \hat{x});$$

setzt man nun für $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = i$ so ergibt sich $2\Re(x, y) = 2\Re(\hat{x}, \hat{y})$ bzw. $2\Im(x, y) = 2\Im(\hat{x}, \hat{y})$, und daraus folgt 5.
5. $\Rightarrow$ 1. : Angenommen es gibt ein $x \in H$ mit $x \neq \sum_{\alpha \in A}(x, u_\alpha)u_\alpha$, dann ist

$$y = x - \sum_{\alpha \in A}(x, u_\alpha)u_\alpha \neq 0,$$

daraus folgt jedoch $(y, u_\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in A$ und Aussage 5. würde ergeben, dass $0 \neq (y, y) = \|y\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(y, u_\alpha)|^2 = 0$ Widerspruch! □

Definition 1.28. Seien H_1, H_2 Hilberträume und $\Lambda : H_1 \longrightarrow H_2$ ein Isomorphismus. Λ heißt Hilbertraumisomorphismus, wenn $(\Lambda x, \Lambda y) = (x, y)$, $\forall x, y \in H_1$ ist.

Satz 1.29.
Wenn $\{u_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem des Hilbertraumes H ist, dann ist die Abbildung $F : x \mapsto \hat{x}$ ein Hilbertraumisomorphismus zwischen H und $l^2(A)$.

Beweis. Nach 1.24 ist F surjektiv; ist $\hat{x}(\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in A$, dann ist nach 1.27 4. $x = 0$ und F injektiv, weiters ergibt 1.27 5., dass $(Fx, Fy) = (x, y)$. □

Definition 1.30. Ein Hilbertraum H heißt separabel , wenn eine abzählbare, dichte Teilmenge von H existiert.

Satz 1.31. *Der Hilbertraum H ist genau dann separabel, wenn H eine abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem besitzt.*

Beweis. Ist $\mathcal{A} = \{x_1, x_2, \dots\}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von H, dann kann man darauf das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren anwenden, und erhält dann nach 1.27 3. ein abzählbares, vollständiges Orthonormalsystem. Die Umkehrung ist klar. □

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Hilbertraum ein vollständiges Orthonormalsystem besitzt. Dazu benötigen wir eine Aussage über partiell geordnete Mengen, die zum Auswahlaxiom und zum Zorn'schen Lemma äquivalent ist.

Definition 1.32. Eine Menge P heißt partiell geordnet , wenn auf P eine Relation $\leq$ existiert mit: $a \leq a$, $\forall a \in P$; $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$; $a \leq b$, $b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
Eine Teilmenge Q einer partiell geordneten Menge P heißt total geordnet , wenn für alle $a, b \in Q$ gilt: $a \leq b$ oder $b \leq a$.
Q heißt maximale totalgeordnete Teilmenge von P, wenn für alle Teilmengen $Q' \subseteq P$ mit $Q \subset Q'$ gilt: Q' ist nicht mehr totalgeordnet.

Satz 1.33. *Jede nichtleere partiell geordnete Menge enthält eine maximale totalgeordnete Teilmenge.*

Satz 1.34.
Jedes Orthonormalsystem B in einem Hilbertraum H ist in einem vollständigen Orthonormalsystem von H enthalten.

Beweis. Sei $\mathcal{P}$ die Klasse aller Orthonormalsysteme in H, welche B enthalten. $\mathcal{P}$ ist durch $\subseteq$ partiell geordnet. Da $B \in \mathcal{P}$, ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Daher enthält $\mathcal{P}$ nach dem vorigen Satz eine maximale totalgeordnete Teilklasse $\mathcal{Q}$. Sei

$$S = \bigcup_{A \in \mathcal{Q}} A.$$

Dann ist $B \subseteq S$ und wir behaupten, dass S ein vollständiges Orthonormalsystem ist. Seien dazu $u_1, u_2 \in S$. Dann existieren $A_1, A_2 \in \mathcal{Q}$ mit $u_1 \in A_1$ und $u_2 \in A_2$. Da $\mathcal{Q}$ totalgeordnet ist, folgt $A_1 \subseteq A_2$ oder $A_2 \subseteq A_1$. In beiden Fällen erhalten wir daher $(u_1, u_2) = 0$, weil A_1, A_2 Orthonormalsysteme sind. Also ist S ein Orthonormalsystem. Angenommen S ist nicht vollständig. Dann würde ein $x \neq 0$ in H existieren mit $(x, s) = 0$, $\forall s \in S$. Sei $S^* = S \cup \{x\}$. Dann gilt: $S \subset S^*$ und $S^* \notin \mathcal{Q}$, weiters enthält S^* alle $A \in \mathcal{Q}$, somit ist $\mathcal{Q} \cup \{S^*\}$ eine totalgeordnete Menge: Widerspruch! □

Beispiele 1.35.
(a) Die Folgen $e_k = (\delta_{n,k})_n$, $k \in \mathbb{N}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in l^2; für jedes $\xi \in l^2$ gilt

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi, e_n) e_n.$$

(b) Im Hardyraum H^2 bilden die Monome $\{1, z, z^2, \dots\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem, dabei folgt die Vollständigkeit des Systems aus der Eindeutigkeit der Taylorentwicklung einer holomorphen Funktion in H^2.

(c) Auch im Bergmanraum $A^2(\mathbb{D})$ sind die Monome $\{1, z, z^2, \dots\}$ ein vollständiges Orthogonalsystem:

$$\int_{\mathbb{D}} z^n \, \overline{z^m} \, d\lambda(z) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^n e^{in\theta} \, r^m e^{im\theta} \, r \, dr \, d\theta = \frac{2\pi}{n+m+2} \, \delta_{n,m}.$$

Daraus folgt, dass die Funktionen

$$\varphi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \, z^n \ , \ n = 0, 1, 2, \dots$$

ein Orthonormalsystem bilden. Zur Vollständigkeit des Systems genügt es nach 1.27 4. zu zeigen, dass für jedes $f \in A^2(\mathbb{D})$ gilt

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2,$$

was zur Aussage

$$\|f\|^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} \ , \ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

äquivalent ist; diese Aussage folgt leicht aus den obigen Orthogonalitätsrelationen.
Es ist also jedes $f \in A^2(\mathbb{D})$ eindeutig darstellbar in der Form $f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n$, wobei die Summe im Sinne der Norm von $A^2(\mathbb{D})$ konvergiert. Aus 1.17 (b) folgt, dass dann auch

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n(z),$$

im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$ gilt. Für die Koeffizienten c_n gilt : $c_n = (f, \varphi_n)$.
Wir berechnen nun den Bergmankern $K(z, w)$ von $\mathbb{D}$. Die Funktion $z \mapsto K(z, w)$ gehört bei fixem $w \in \mathbb{D}$ zum Bergmanraum $A^2(\mathbb{D})$. Setzt man diese Funktion in der obigen Formel für f ein, so erhält man

$$K(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, \varphi_n(z),$$

dabei ist $c_n = (K(., w), \varphi_n)$, oder, anders geschrieben

$$\overline{c_n} = (\varphi_n, K(., w)) = \int_{\mathbb{D}} \varphi_n(z) K(w, z) \, d\lambda(z) = \varphi_n(w),$$

nach der reproduzierenden Eigenschaft des Bergmankernes. Somit lässt sich der Bergmankern in der Form

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(w)}\, \varphi_n(z)$$

schreiben, wobei die Summe in der Variablen z gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von $\mathbb{D}$ konvergiert. (Diese Formel gilt auch für jedes andere vollständige Orthonormalsystem.) Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\varphi_n(w)}\, \varphi_n(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z\overline{w})^n = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1-z\overline{w})^2}.$$

Für beliebiges $f \in A^2(\mathbb{D})$ gilt daher

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{(1-z\overline{w})^2} f(w)\, d\lambda(w),$$

setzt man bei fixem $z \in \mathbb{D}$ in dieser Formel für $f(w) = 1/(1-w\overline{z})^2$, so erhält man

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^4}\, d\lambda(w) = \frac{1}{(1-|z|^2)^2}.$$

(d) Im Raum $L^2([0,1])$ über $\mathbb{R}$ bilden die Legendrepolynome ein vollständiges Orthonormalsystem; in $L^2(\mathbb{R})$ die Hermitefunktionen (siehe Übungen).

(e) In $L^2(\mathbb{T})$ (über $\mathbb{C}$) bilden die Funktionen $\{e^{int} \;:\; n \in \mathbb{Z}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem: für jedes $f \in L^2(\mathbb{T})$ gilt $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (f, e^{int})\, e^{int}$. Wir schreiben auch

$$\hat{f}(n) = (f, e^{int}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$$

$\hat{f}(n)$ sind die Fourierkoeffizienten von f . Nach 1.29 gibt es für jede Folge $(c_n)_n$ mit $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$ eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{T})$ mit $\hat{f}(n) = c_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Parseval'sche Gleichung 1.27 4. ergibt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

(Details siehe Übungen)

Übungen

1. Sei H ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit innerem Produkt. Man beweise: für $x, y \in H$ gilt die Polarisierungsidentität

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 \;, x, y \in H.$$

2. Man finde eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung Gleichheit gilt.

3. Sei H ein Hilbertraum, M eine abgeschlossene, konvexe Menge in H. M heißt strikt konvex , wenn der Rand von M keine Strecke enthält. Man zeige: die abgeschlossene Einheitskugel $B = \{x \in H \ : \|x\| \leq 1\}$ in H ist strikt konvex.

4. Man beweise die Vollständigkeit von l^2.

5. Man beweise die Vollständigkeit von $A^2(\Omega)$. (Verwende 1.17 (b)).

6. Man beweise: ein linearer Operator $T : H_1 \longrightarrow H_2$ zwischen Hilberträumen H_1 und H_2 ist genau dann stetig, wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, sodass $\|Tx\| \leq C\|x\| \ , \ \forall x \in H_1$.

7. Sei H ein Hilbertraum, M ein abgeschlossener Teilraum von H. Man zeige: $(M^\perp)^\perp = M$. Was geschieht, wenn M nicht abgeschlossen ist?

8. Für $f \in H^2$ bestimme man ein Polynom p vom Grad kleiner gleich n, sodass $\|f - p\|_2$ minimal wird.

9. Man wende das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren auf das System $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ in $L^2[-1, 1]$.

10. Man berechne
    (a) $\min_{a,b,c} \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$,
    (b) $\min_{a,b,c} \int_0^\infty |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, e^{-x} \, dx$.

11. Sei H ein Hilbertraum, $x_0 \in H$ und M ein abgeschlossener Teilraum von H. Man beweise:
$$\min\{\|x - x_0\| \ : \ x \in M\} = \max\{|(x_0, y)| \ : \ y \in M^\perp \, , \ \|y\| = 1\}.$$

12. Sei H ein Hilbertraum. Man zeige: $x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gram'sche Determinante
$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \neq 0.$$

13. Sei H ein Hilbertraum, $y, x_1, x_2, \dots, x_n \in H$ linear unabhängig und M die lineare Hülle von $x_1, x_2, \dots, x_n$. Man zeige:
$$(\mathrm{dist}(y, M))^2 = \frac{G(y, x_1, x_2, \dots, x_n)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

14. Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien
$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \exp^{(n)}(-x^2) \ \text{ Hermite Polynome.}$$

Man bestimme H_0, H_1, H_2 und H_3. Ferner zeige man, dass die Hermite Funktionen

$$\varphi_n(x) = \exp(-x^2/2)\ H_n(x)$$

ein Orthogonalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ bilden.

Anleitung: man zeige zunächst $\varphi_n''(x) = (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x)$ und $\varphi_n''\varphi_m - \varphi_n\varphi_m'' = 2(m-n)\varphi_n\varphi_m$.

15. Man berechne $\|\varphi_n\|_2$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

    Anleitung: man beweise zunächst $H_n' = 2nH_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$, anschließend verwende man partielle Integration.

16. Man zeige, dass die normalisierten Hermite Funktionen eine vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ bilden.

    Anleitung: sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $(f, \varphi_n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$; man definiere

    $$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-izx - x^2/2)\,\overline{f(x)}\,dx\ ,\ z \in \mathbb{C}$$

    und zeige: F ist eine ganze Funktion. Man berechne $F^{(n)}(0)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und verwende den Eindeutigkeitssatz für Fouriertransformierte.

17. Sei $f \in L^2(\mathbb{T})$. Man beweise:

    $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|^2 = \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt.$$

18. Sei $K(z,w)$ der Bergmankern von $A^2(\mathbb{D})$. Man zeige:

    $$K(z,z) = \sup\{|f(z)|^2\ :\ f \in A^2(\mathbb{D})\,, \|f\| = 1\}.$$

2 Banach - und Frécheträume

Definition 2.1. Ein Vektorraum X über $\mathbb{C}$ (oder $\mathbb{R}$) heißt normiert , wenn eine Abbildung $\|.\| \;:\longrightarrow \mathbb{R}_+$ existiert mit (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \;\forall x \in X \;,\; \forall \lambda \in \mathbb{C}$; (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \;,\; \forall x, y \in X$.
$d(x, y) = \|x - y\|$ ist eine Metrik auf X. Wir betrachten X zusammen mit dieser Metrik als topologischen Raum.
Ein normierter Vektorraum heißt Banachraum , wenn er bezüglich der oben definierten Metrik vollständig ist.

Bemerkung 2.2. (a) Die Menge $U_\epsilon = \{x \;:\; \|x\| < \epsilon\}$ nennt man eine ϵ-Umgebung der 0. Die Mengen $\{U_{1/n} \;:\; n \in \mathbb{N}\}$ bilden eine abzählbare Nullumgebungsbasis für die Topologie eines normierten Vektorraumes.
Für ein $y \in X$ ist $y + U_\epsilon = \{y + x \;:\; x \in U_\epsilon\}$ eine ϵ-Umgebung von y. Zur Beschreibung der Topologie in X genügt es daher eine Nullumgebungsbasis heranzuziehen.

(b) Die Abbildung $(x, y) \mapsto x + y$ ist eine stetige Abbildung von $X \times X$ nach X.
Die Abbildung $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ist eine stetige Abbildung von $\mathbb{C} \times X$ nach X.

(c) Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt beschränkt , wenn $\sup\{\|x\| \;:\; x \in B\} < \infty$; z.B: die Einheitskugel $\{x \;: \|x\| < 1\}$.
Ein normierter Vektorraum besitzt eine Nullumgebungsbasis aus beschränkten Mengen.

Beispiele 2.3. (a) Ist K ein kompakter topologischer Raum, so ist der Raum $\mathcal{C}(K)$ aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf K mit der Supremumsnorm ein Banachraum.

(b) Der Raum c aller konvergenten Folgen mit der Supremumsnorm bildet einen Banachraum, desgleichen der Raum c_0 aller Nullfolgen.
Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$l^p = \{\xi = (x_n)_n \;:\; x_n \in \mathbb{C} \;,\; \|\xi\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} < \infty\},$$

l^∞ ist der Raum aller beschränkten Folgen mit der Supremumsnorm. Auch diese Räume sind Banachräume.
Sei (X, μ) ein Maßraum mit positivem Maß μ. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$L^p(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \text{ messbar } \;:\; \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty\},$$

$L^\infty(\mu)$ ist der Raum der im wesentlichen beschränkten, messbaren Funktionen auf X. Auch dies sind Beispiele für Banachräume (nähere Details siehe [R1]).

(c) $H^\infty = \{f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ holomorph } \;:\; \|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)| < \infty\}$ ist ein Banachraum holomorpher Funktionen (siehe auch Übungen).

(d) Sei $\mathcal{M}$ der Vektorraum aller Folgen ξ komplexer Zahlen, die nur endlich viele Glieder $\neq 0$ besitzen mit der Supremumsnorm $\|\xi\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$. Der Raum $\mathcal{M}$ ist kein Banachraum: $\xi_k = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/k, 0, \ldots)$ ist eine Cauchyfolge ohne Limes in $\mathcal{M}$.

Definition 2.4. Seien X, Y normierte Räume und $A : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. A heißt beschränkt , wenn die Norm des Operators $\|A\| = \sup\{\|Ax\| \ : \ \|x\| \leq 1\} < \infty$.

Satz 2.5. *Ein linearer Operator $A : X \longrightarrow Y$ zwischen normierten Räumen X und Y, der in $x = 0$ stetig ist, ist überall stetig und beschränkt. Umgekehrt ist jeder beschränkter linearer Operator auch stetig.*

Beweis siehe Übungen.

Beispiele 2.6. (a) Jeder linearer Operator zwischen endlichdimensionalen normierten Vektorräumen ($\mathbb{C}^n$) ist stetig.

(b) Sei $L : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $L(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dann ist L ein lineares Funktional auf $\mathcal{M}$; weil für die Folgen

$$\xi_k = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, 0, \dots)$$

gilt: $\|\xi_k\| = 1$ und $L(\xi_k) = k$, ist L unbeschränkt und daher nicht stetig.

(c) Sei $f \in H^\infty$ fix und $A_f(g) = fg$ für $g \in H^\infty$ der Multiplikationsoperator. Dann ist $A_f : H^\infty \longrightarrow H^\infty$ ein beschränkter linearer Operator und es gilt $\|A_f\| = \|f\|_\infty$.

(d) Der Shift-Operator $S : H^2 \longrightarrow H^2$ ist definiert durch $S(f)(z) = zf(z)$ für $f \in H^2$. Es gilt $(Sf, Sf) = (f, f)$ und daher ist S beschränkt, sogar eine Isometrie: $\|Sf\|_2 = \|f\|_2$.

(e) Sei $K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy$ ein Integraloperator mit Kern K. Dann ist $A : \mathcal{C}[a, b] \longrightarrow \mathcal{C}[a, b]$ ein beschränkter, linearer Operator, ein wichtiges Beispiel für einen kompakten Operator .

Definition 2.7. Ein topologischer Vektorraum X ist ein Vektorraum, versehen mit einer Topologie, für welche die Addition $+ : X \times X \longrightarrow X$ und die skalare Multiplikation $. : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$ stetig sind.
Ein lokalkonvexer Raum X ist ein topologischer Vektorraum, in welchem jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt.
Eine Teilmenge M eines Vektorraumes X heißt absolutkonvex , wenn für alle $x, y \in M$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ gilt $\lambda x + \mu y \in M$.
Eine Abbildung $p : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heißt Halbnorm auf X, falls die Eigenschaften (ii) und (iii) von 2.1 erfüllt sind.

Bemerkung 2.8.

(a) Jeder normierte Raum ist lokalkonvex.

(b) Für einen topologischen Vektorraum X sind äquivalent: (i) X ist ein lokalkonvexer Raum; (ii) X besitzt eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen; (iii) X besitzt eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.

Ist X ein lokalkonvexer Raum, so gilt für jede absolutkonvexe Nullumgebung U in X : das Minkowski-Funktional $\|.\|_U \ : \ x \mapsto \inf\{t > 0 \ : \ x \in tU\}$ von U ist eine stetige Halbnorm auf X.
(Details siehe Übungen und [MV])

(c) Eine Menge $\mathcal{U}$ von Nullumgebungen in einem lokalkonvexen Raum X heißt Fundamentalsystem von Nullumgebungen , falls es zu jeder Nullumgebung U ein $V \in \mathcal{U}$ und ein $\epsilon > 0$ gibt mit $\epsilon V \subset U$.

Eine Familie $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ stetiger Halbnormen auf X heißt ein Fundamentalsystem von Halbnormen, falls die Mengen $U_\alpha = \{x \in X \ : \ \|x\|_\alpha < 1\}$, $\alpha \in A$, ein Fundamentalsystem von Nullumgebungen bilden.

Es gilt: Jeder lokalkonvexe Raum X besitzt eine Fundamentalsystem von Halbnormen. Jedes Fundamentalsystem von Halbnormen $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ hat die folgenden Eigenschaften: (i) zu jedem $x \in X$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\|x\|_\alpha > 0$; (ii) zu $\alpha, \beta \in A$ existieren $\gamma \in A$ und $C > 0$ mit $\max(\|.\|_\alpha\,, \|.\|_\beta) \le C\,\|.\|_\gamma$.

Ist umgekehrt X ein Vektorraum und $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Halbnormen auf X mit den obigen Eigenschaften (i) und (ii), dann gibt es genau eine lokalkonvexe Topologie auf X, für welche $(\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen ist.

Die letzte Aussage wird häufig dazu benutzt, lokalkonvexe Räume durch Angabe einer Familie von Halbnormen mit (i) und (ii) einzuführen , wir schreiben dann $(X, (\|.\|_\alpha)_{\alpha \in A})$.

Seien X und Y lokalkonvexe Räume mit den Fundamentalsystemen von Halbnormen $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ bzw. $(q_\beta)_{\beta \in B}$. Für jede lineare Abbildung $A : X \longrightarrow Y$ sind äquivalent: (i) A ist stetig; (ii) A ist stetig in 0; (iii) zu jedem $\beta \in B$ existieren $\alpha \in A$ und $C > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt $q_\beta(Ax) \le C p_\alpha(x)$.

Insbesondere ist ein lineares Funktional x' auf X genau dann stetig, wenn $\alpha \in A$ und $C > 0$ existieren mit $|x'(x)| \le C p_\alpha(x)$ für alle $x \in X$.
(Details siehe Übungen und [MV])

Beispiele 2.9.

(a) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Mit $\mathcal{E}^m(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Ableitungen

$$\partial^p f = \frac{\partial^{p_1}}{\partial x_1^{p_1}} \cdots \frac{\partial^{p_n}}{\partial x_n^{p_n}} f$$

bis zur Ordnung m existieren und stetig sind.
Die Familie der Halbnormen $q_{K,p}(f) = \max_{x \in K} |\partial^p f(x)|$ mit $K \subset \Omega$ kompakt, beschreibt die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω und bezüglich aller Ableitungen.

(b) Der Raum $\mathcal{S}$ der schnell fallenden Funktionen besteht aus all jenen $\mathcal{C}^\infty$-Funktionen auf $\mathbb{R}^n$, für die die Halbnormen

$$q_{k,p}(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (1 + |x|^2)^k \, \partial^p f(x) \right| < \infty,$$

für alle $p = (p_1, \ldots, p_n)$ und alle $k \in \mathbb{N}$.

(c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und $(K_m)_m$ eine kompakte Ausschöpfung von Ω, d.i. eine Familie kompakter ineinandergeschachtelter Teilmengen $K_m \subset K_{m+1}$ mit

$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \Omega$. Auf dem Raum $\mathcal{H}(\Omega)$ aller holomorphen Funktionen auf Ω wird durch das System von Normen $\|f\|_m = \max_{z \in K_m} |f(z)|$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von Ω beschrieben.

(d) $\omega (= \mathbb{C}^\infty)$ ist der Raum aller Folgen $\xi = (x_n)_n$ komplexer Zahlen mit dem System $(p_k)_k$ von Halbnormen $p_k(\xi) = \max_{1 \le n \le k} |x_n|$.

(e) Sei $P \subseteq \omega$ mit folgenden Eigenschaften: (i) für jedes $p = (p_n)_n \in P$ ist $p_n \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$; (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists p \in P$ mit $p_n \neq 0$; (iii) $\forall p, q \in P$ $\exists C > 0$ und $r \in P$ mit $p + q \le Cr$, d.h. $p_n + q_n \le C r_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Der Köthe-Folgenraum $\Lambda(P)$ besteht aus allen Folgen ξ, für die die Halbnormen $\|\xi\|_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| p_n < \infty$ $\forall p \in P$.
Ein Spezialfall ist der Raum s der stark fallenden Folgen ξ, wobei die Halbnormen $\|\xi\|_m = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| n^m < \infty$ $\forall m \in \mathbb{N}$ erfüllen.

(f) Sei $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ ein lokalkonvexer Raum. Eine Teilmenge $B \subset X$ heißt beschränkt , wenn für jedes $\alpha \in A$ gilt $\sup_{x \in B} p_\alpha(x) < \infty$.
In einem normierten Raum $(X, \|.\|)$ ist jede Menge B der Gestalt $B = \{x \in X \ : \ \|x\| \le C\}$ beschränkt.
Sei nun X' der Dualraum von X , d.i. der Raum aller stetigen linearen Funktionale auf X. Wir betrachten die folgenden lokalkonvexen Topologien :
1.) die schwache Topologie auf X : $(X, (p_{x'})_{x' \in X'})$ wobei $p_{x'}(x) = |x'(x)|$,
2.) die schwache Topologie auf X' : $(X', (p_{x''})_{x'' \in X''})$ wobei $p_{x''}(x') = |x''(x')|$,
3.) die schwach - * Toplogie auf X' : $(X', (p_x)_{x \in X})$ wobei $p_x(x') = |x'(x)|$,
4.) die starke Topologie auf X' : $(X', (p_B)_{B \in \mathcal{B}})$ wobei $p_B(x') = \sup\{|x'(x)| \ : \ x \in B\}$ und $\mathcal{B}$ die Familie der beschränkten Mengen von $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ ist.
Im Falle eines normierten Raumes $(X, \|.\|)$ ist die starke Topologie auf X' durch die Norm $\|x'\| = \sup\{|x'(x)| \ : \ \|x\| \le 1\}$ definiert.

Satz 2.10.
Sei $(X, (p_n)_{n \in \mathbb{N}})$ ein lokalkonvexer Raum. Dann existiert eine translationsinvariante Metrik $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mit $(X, (p_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (X, d)$.

Beweis. Sei $r_n(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$. Dann gilt $r_1(x) \le r_2(x) \le \ldots$ und durch

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{r_n(x - y)}{1 + r_n(x - y)}$$

ist eine translationsinvariante Metrik $d(x + a, y + a) = d(x, y)$ $\forall a, x, y \in X$ gegeben, welche die ursprüngliche Topologie von X erzeugt (Details siehe Übungen) □

Definition 2.11.
Ein metrischer, lokalkonvexer Vektorraum (X, d) (im Sinne von 2.10), der bezüglich der Metrik d vollständig ist, heißt Fréchetraum .

Beispiele 2.12. Die Räume $\mathcal{S}, s, \mathcal{H}(\Omega)$ sind Fréchetträume.

Definition 2.13.
Sei $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ ein lokalkonvexer Raum und Y ein Teilraum von X. Wir versehen Y

mit der von X induzierten Topologie. Die Topologie auf Y wird dann durch die Familie von Halbnormen $(p_\alpha|_Y)_{\alpha\in A}$ beschrieben.
Um auf dem Quotientenraum X/Y eine Topologie einzuführen, betrachtet man die Quotientenhalbnormen

$$\hat{p}_\alpha(\hat{x}) = \inf_{\xi\in q^{-1}(\hat{x})} p_\alpha(\xi) = \inf\{p_\alpha(x+y) \ : \ y \in Y\},$$

dabei ist $q : X \longrightarrow X/Y$ die Quotientenabbildung.

Bemerkung 2.14. Ist $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum und Y ein Teilraum, so hat das System der Halbnormen $(\hat{p}_\alpha)_{\alpha\in A})$ genau dann die Eigenschaften (i) und (ii) von 2.8 (c), wenn Y in X abgeschlossen ist.

Definition 2.15. Sei $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum, Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann bezeichnen wir mit $(X/Y, \hat{p}_\alpha)_{\alpha\in A})$ als den Quotientenraum von X modulo Y.

Satz 2.16.
Seien $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann ist die Quotientenabbildung $q : X \longrightarrow X/Y$ stetig und offen.

Übungen

19. Sei H^∞ der Raum aller beschränkten, holomorphen Funktionen auf $\mathbb{D}$ mit der Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \ , \ f \in H^\infty.$$

Man zeige: $(H^\infty, \|.\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

20. Sei

$$X = \{\xi = (x_n)_{n\geq 1} \ : \ \|\xi\| = |x_1| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| < \infty\}.$$

Man zeige: $(X, \|.\|)$ ist ein Banachraum.

21. Sei $P[0,1]$ der Vektorraum aller Polynome $p(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ mit der Norm $\|p\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$. Man zeige: $(P[0,1], \|.\|)$ ist kein Banachraum.

22. Sei $(X, \|.\|)$ ein normierter Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ von Elementen aus X heißt summierbar mit Summe $x \in X$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{k=1}^{n} x_k\| = 0.$$

Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ heißt absolut summierbar, wenn $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. Man zeige: $(X, \|.\|)$ ist genau dann ein Banachraum, wenn jede absolut summierbare Folge summierbar ist.

23. Sei U eine absolutkonvexe Nullumgebung in einem lokalkonvexen Raum X. Man zeige: das Minkowski-Funktional

$$\|x\|_U = \inf\{t > 0 \,:\, x \in tU\}$$

ist eine stetige Halbnorm auf X.

24. Man zeige: Jeder lokalkonvexe Raum X besitzt eine Fundamentalsystem von Halbnormen. Jedes Fundamentalsystem von Halbnormen $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ hat die folgenden Eigenschaften: (i) zu jedem $x \in X$ mit $x \neq 0$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\|x\|_\alpha > 0$; (ii) zu $\alpha, \beta \in A$ existieren $\gamma \in A$ und $C > 0$ mit $\max(\|.\|_\alpha\,,\,\|.\|_\beta) \leq C\,\|.\|_\gamma$.
Ist umgekehrt X ein Vektorraum und $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von Halbnormen auf X mit den obigen Eigenschaften (i) und (ii), dann gibt es genau eine lokalkonvexe Topologie auf X, für welche $(\|.\|_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen ist.

25. Seien X und Y lokalkonvexe Räume mit den Fundamentalsystemen von Halbnormen $(p_\alpha)_\alpha \in A$ bzw. $(q_\beta)_{\beta\in B}$. Man zeige: für jede lineare Abbildung $A : X \longrightarrow Y$ sind äquivalent: (i) A ist stetig; (ii) A ist stetig in 0; (iii) zu jedem $\beta \in B$ existieren $\alpha \in A$ und $C > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt $q_\beta(Ax) \leq Cp_\alpha(x)$.
Insbesondere ist ein lineares Funktional x' auf X genau dann stetig, wenn $\alpha \in A$ und $C > 0$ existieren mit $|x'(x)| \leq Cp_\alpha(x)$ für alle $x \in X$.

26. Man beweise: der Raum $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ ist topologisch isomorph zum Köthe-Folgenraum

$$\Lambda_1(\mathbb{N}) = \{\xi = (x_k)_{k\geq 0} \,:\, \|\xi\|_r = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| r^k < \infty \,\forall r < 1\}.$$

Anleitung: ordne jeder holomorphen Funktion aus $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ die Folge ihrer Taylorkoeffizienten zu und verwende die Cauchy'schen Abschätzungen für die Taylorkoeffizienten (siehe [Has1]).

27. Man beweise Satz 2.10.

28. Man beweise: der Raum $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ ist ein Fréchetraum, der nicht normierbar ist, d.h. dessen Topologie nicht von einer einzelnen Norm beschrieben werden kann.

29. Sei H ein separabler Hilbertraum und $\{u_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem. Man beweise: $(u_n)_{n\geq 1}$ ist eine schwach (*) konvergente Folge.

3 Der Satz von Hahn-Banach

Für viele theoretische und praktische Belange der Analysis ist der folgende Satz von fundamentaler Bedeutung.

Satz 3.1. *(Helly 1912, 1921; Hahn 1926; Banach 1929)*
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $\|.\|$ eine Halbnorm auf X. Ferner sei Y ein Teilraum von X und l ein lineares Funktional auf Y mit $l(y) \leq C\|y\|$,$\forall y \in Y$, dabei ist $C > 0$ eine Konstante. Dann besitzt l eine auf ganz X definierte, lineare Fortsetzung L (d.h. $L|_Y = l$) mit $L(x) \leq C\|x\|$,$\forall x \in X$.

Beweis. Sei $x_0 \notin Y$ und $Z = \langle Y, x_0\rangle$ das lineare Erzeugnis von Y und x_0. Ist $x \in Z$, dann folgt $x = y + cx_0$, $y \in Y$, $c \in \mathbb{R}$ und die Darstellung von x ist auch eindeutig.
Wir setzen $\phi(x) = l(y) + ca_0$ für ein $a_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist ϕ eine Fortsetzung von l auf Z.
Nun zeigen wir, a_0 kann so gewählt kann, dass $\phi(x) \leq C\|x\|$, $\forall\ x \in Z$, d.h.

$$ca_0 \leq C\|y + cx_0\| - l(y). \tag{3.1}$$

Für $c = 0$ ist (3.1) immer erfüllt. Ist $c > 0$, so ist (3.1) äquivalent zu $a_0 \leq C\|\frac{y}{c}+x_0\|-l(\frac{y}{c})$; ist $c < 0$, so ist (3.1) äquivalent zu $a_0 \geq -C\| - \frac{y}{c} - x_0\| - l(\frac{y}{c})$. Wir müssen also zeigen, es existiert ein a_0 mit

$$-C\| - y - x_0\| - l(y) \leq a_0 \leq C\|y + x_0\| - l(y)\ ,\ \forall\ y \in Y. \tag{3.2}$$

Seien dazu $y_1, y_2 \in Y$. Dann gilt

$$l(y_2) - l(y_1) = l(y_2 - y_1) \leq C\|(y_2 + x_0) + (-y_1 - x_0)\| \leq C(\|y_2 + x_0\| + \| - y_1 - x_0\|),$$

und daraus folgt

$$-C\| - y_1 - x_0\| - l(y_1) \leq C\|y_2 + x_0\| - l(y_2)\ ,\ \forall\ y_1, y_2 \in Y,$$

somit existiert ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit (3.2). Wir haben daher eine lineare Fortsetzung ϕ von l auf Z gefunden derart, dass

$$\phi(x) \leq C\|x\|\ ,\ \forall\ x \in Z.$$

Sei nun $\mathcal{E}$ die Menge aller linearen Fortsetzungen λ von l, die auf ihrem Definitionsbereich $\mathrm{dom}(\lambda)$ von $C\|\cdot\|$ dominiert werden.
Auf $\mathcal{E}$ definieren wir nun eine partielle Ordnung : für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{E}$ sei

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_2 \text{ ist eine Fortsetzung von } \lambda_1\ ,\ \mathrm{dom}(\lambda_1) \subseteq \mathrm{dom}(\lambda_2).$$

Es gilt : ist $\lambda_1 \leq \lambda_2$ und $\lambda_2 \leq \lambda_3$, dann ist $\lambda_1 \leq \lambda_3$; für jedes $\lambda \in \mathcal{E}$ gilt $\lambda \leq \lambda$. Ist ferner $\lambda_1 \leq \lambda_2$ und $\lambda_2 \leq \lambda_1$, dann ist $\lambda_1 = \lambda_2$.
Sei nun $\mathcal{F}$ eine total geordnete Teilmenge von $\mathcal{E}$, d.h. für jedes Paar $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{F}$ gilt $\lambda_1 \leq \lambda_2$ oder $\lambda_2 \leq \lambda_1$.
Wir definieren jetzt ein lineares Funktional

$$U : \bigcup_{\lambda \in \mathcal{F}} \mathrm{dom}(\lambda) \longrightarrow \mathbb{R}$$

durch $U(x) = \lambda(x)$, wenn $x \in \mathrm{dom}(\lambda)$. U ist wohldefiniert, da $\mathcal{F}$ total geordnet ist. U ist auch eine Fortsetzung von l und es gilt

$$U(x) \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in \mathrm{dom}(U).$$

Also ist $U \in \mathcal{E}$ und U ist eine obere Schranke von $\mathcal{F}$.

Lemma von Zorn: Sei $\mathcal{E}$ eine nichtleere partiell geordnete Menge, in welcher jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt. Dann enthält $\mathcal{E}$ mindestens ein maximales Element.
Das Zorn'sche Lemma ist äquivalent zum Auswahlaxiom.

Die Voraussetzungen des Zorn'schen Lemmas sind in unserem Fall erfüllt, also existiert ein maximales Element L in $\mathcal{E}$.
Angenommen $\mathrm{dom}(L) = M \neq X$, dann existiert ein $x_0 \in X \setminus M$ und eine Fortsetzung von L auf $\langle M, x_0 \rangle$ mit den erforderlichen Eigenschaften, was ein Widerspruch zur Maximalität von L ist. ☐

Satz 3.2.
Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ und $\|.\|$ eine Halbnorm auf X, sowie Y ein Teilraum von X. Weiters sei $l : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional auf Y mit

$$|l(x)| \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in Y,$$

dabei ist $C > 0$ eine Konstante.
Dann existiert eine lineare Fortsetzung L von l auf ganz X, d.h. $L|_Y = l$, mit

$$|L(x)| \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in X.$$

Beweis. Sei $l_1(x) = \Re l(x)$. l ist nun komplex linear. Es gilt $il(x) = l(ix) = l_1(ix) + i\Im l(ix)$ und andererseits $il(x) = i(l_1(x) + i\Im l(x)) = -\Im l(x) + il_1(x)$, somit ist $\Im l(x) = -l_1(ix)$. l_1 ist ein reell lineares Funktional auf Y und es folgt aus der Voraussetzung

$$|l_1(y)| \leq C\|y\| \ , \ \forall\, y \in Y.$$

Daher existiert nach 3.1 eine reell lineare Fortsetzung L_1 von l_1 auf ganz X mit $|L_1(x)| \leq C\|x\| \ , \ \forall\, x \in X$.
Die Überlegungen zu Beginn des Beweises legen nun den folgenden Ansatz nahe :

$$L(x) = L_1(x) - iL_1(ix) \ , \ x \in X.$$

L ist zunächst reell linear und es gilt

$$L(ix) = L_1(ix) - iL_1(-x) = i[L_1(x) - iL_1(ix)] = iL(x),$$

also ist L auch komplex linear. Weiters gilt für $y \in Y$

$$L(y) = L_1(y) - iL_1(iy) = l_1(y) - il_1(iy) = l(y),$$

daher ist L eine Fortsetzung von l.
Sei nun $L(x) = |L(x)|e^{i\theta}$. Dann ist

$$|L(x)| = e^{-i\theta}L(x) = L(e^{-i\theta}x) = L_1(e^{-i\theta}x) \leq C\|e^{-i\theta}x\| = C\|x\|.$$

☐

Satz 3.3.
Sei $(X,(p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum, Y ein Teilraum von X und l ein stetiges lineares Funktional auf Y. Dann existiert eine stetige Fortsetzung L von l auf ganz X.

Beweis. Da l stetig ist existiert nach 2.8 (c) ein $\alpha \in A$ und eine Konstante $M_\alpha > 0$ mit $|l(y)| \leq M_\alpha\, p_\alpha(y)$, $\forall y \in Y$. Daher existiert nach 3.2 eine Fortsetzung L von l auf ganz X mit $|L(x)| \leq M_\alpha\, p_\alpha(x)$, $\forall x \in X$. Daher ist L auch stetig auf ganz X. □

Satz 3.4.
Sei $(X,(p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum, $x_0 \in X$ ein vorgegebener Vektor und p eine stetige Halbnorm auf X. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional L auf X mit $L(x_0) = p(x_0)$ und $|L(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

Beweis. Sei $l(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ für $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist l linear auf $\langle x_0\rangle$ und $|l(y)| \leq p(y)$, $\forall y \in \langle x_0\rangle$. Daher existiert nach 3.2 eine Fortsetzung L von l auf ganz X mit $|L(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$. Da p stetig ist, folgt, dass auch L stetig ist. □

Bemerkung 3.5. Ein topologischer Vektorraum X besitzt genau dann ein nichttriviales, stetiges, lineares Funktional $L \neq 0$, wenn X eine konvexe Nullumgebung $U \neq X$ besitzt. Ist $L \neq 0$ und stetig, dann ist $\{x \ : \ |L(x)| \leq 1\}$ eine konvexe Nullumgebung, die nicht mit X übereinstimmt.
Ist umgekehrt $U \neq X$ eine konvexe Nullumgebung, dann ist das Minkowski Funktional p von U (siehe 2.8 (b)) stetig und es existiert ein $x_0 \in X$ mit $p(x_0) \neq 0$. Nach 3.4 gibt es daher ein nichttriviales, stetiges, lineares Funktional L auf X.

Satz 3.6.
Sei $(X,(p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum, Y ein abgeschlossener Teilraum von X und $z \in X$ mit $z \notin Y$. Dann existiert ein $L \in X'$ mit $L(z) = 1$ und $L(y) = 0$, $\forall y \in Y$.

Beweis. Sei $q : X \longrightarrow X/Y$ die Quotientenabbildung und $\hat{z} = q(z)$. Dann ist $\hat{z} \neq \hat{0}$ und weil X/Y ein Hausdorff-Raum ist, existiert eine Halbnorm $\hat{p}_\alpha$ mit $\hat{p}_\alpha(\hat{z}) \neq 0$. Auf dem eindimensionalen Teilraum $\langle\hat{z}\rangle$ von X/Y ist durch $\hat{l}(\lambda\hat{z}) = \lambda$ ein lineares Funktional definiert mit

$$|\hat{l}(\lambda\hat{z})| = |\lambda| = \frac{\hat{p}_\alpha(\lambda\hat{z})}{\hat{p}_\alpha(\hat{z})}.$$

Nach 3.2 existiert eine Fortsetzung $\hat{L}$ von $\hat{l}$ auf ganz X/Y mit

$$|\hat{L}(\hat{x})| \leq \frac{1}{\hat{p}_\alpha(\hat{z})}\,\hat{p}_\alpha(\hat{x}) \ , \forall \hat{x} \in X/Y.$$

$\hat{L}$ ist also stetig auf X/Y (siehe 2.13). Es gilt $\hat{L}(\hat{z}) = 1$ und das lineare Funktional $L = \hat{L} \circ q$ ist stetig und erfüllt $L(y) = 0$, $\forall y \in Y$ und $L(z) = \hat{L}(\hat{z}) = 1$. □

Satz 3.7.
Sei $(X,(p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum und Y ein Teilraum von X. Der Teilraum Y ist genau dann dicht in X (d.h. $\overline{Y} = X$), wenn die folgende Eigenschaft erfüllt ist: jedes $L \in X'$ mit $L(y) = 0$, $\forall y \in Y$ ist das Nullfunktional auf ganz X.

Beweis. Ist Y dicht in X, dann folgt für ein $L \in X'$ mit $L(y) = 0\ ,\forall y \in Y$, dass $L = 0$ auf ganz X, weil L stetig ist.
Angenommen $\overline{Y} \neq X$ und $x_0 \notin \overline{Y}$, dann existiert nach 3.6 ein $L \in X'$ mit $L(y) = 0\ ,\forall y \in Y$ und $L(x_0) = 1$. Widerspruch! □

Satz 3.8.
Sei X ein normierter Vektorraum und Y ein Teilraum von X. Sei l ein stetiges, lineares Funktional auf Y, d.h. $\|l\| = \sup\{|l(y)|\ :\ y \in Y\ ,\ \|y\| \leq 1\} < \infty$. Dann existiert eine stetige, lineare Fortsetzung L von l mit $\|L\| = \sup\{|L(x)|\ :\ x \in X\ ,\ \|x\| \leq 1\} = \|l\|$.

Beweis. Es gilt $|l(y)| \leq \|l\|\,\|y\|\ \forall y \in Y$. Setze $p(y) = \|l\|\,\|y\|$ für $y \in Y$. Dann ist p eine Halbnorm und nach 3.2 existiert eine Fortsetzung L von l mit $|L(x)| \leq \|l\|\,\|x\|\ \forall x \in X$. Dann ist auch

$$\|L\| = \sup\{|L(x)|\ :\ x \in X\ ,\ \|x\| \leq 1\} \leq \|l\|$$

und

$$\|l\| = \sup\{|L(x)|\ :\ x \in Y\ ,\ \|x\| \leq 1\} \leq \|L\|.$$

□

Satz 3.9. *Sei H ein Hilbertraum und M ein Teilraum von H. Sei l ein stetiges, lineares Funktional auf M. Dann existiert eine eindeutig bestimmte, normbewahrende Fortsetzung L von l auf ganz H mit $L|_{M^\perp} = 0$.*

Beweis. l lässt sich stetig auf $\overline{M}$ fortsetzen. Nach 1.16 existiert ein eindeutig bestimmtes $z \in \overline{M}$ mit $l(x) = (x, z)\ ,\forall x \in M$. Nach 3.3 existiert eine stetige Fortsetzung L von l auf ganz H. Es gilt wieder nach 1.16: $\exists y \in H$ mit $L(x) = (x, y)\ ,\forall x \in H$. Sei $y = y_1 + y_2$ mit $y_1 \in \overline{M}$ und $y_2 \in M^\perp$. Für $m \in M$ ist $(m, y) = L(m) = l(m) = (m, z)$. Nun ist aber $(m, y) = (m, y_1)$, weil $y_2 \in M^\perp$. Daraus folgt, dass $y_1 = z$, da z eindeutig bestimmt ist. Also gilt

$$L(x) = (x, z + y_2) = (x, z) + (x, y_2)$$

und

$$\|L\|^2 = \|z + y_2\|^2 = \|z\|^2 + \|y_2\|^2 = \|l\|^2 + \|y_2\|^2.$$

Daher ist $\|L\| = \|l\| \Leftrightarrow y_2 = 0$. □

Übungen

30. Man beweise: für jede beschränkte Folge reeller Zahlen $(x_n)_{n\geq 1}$ existiert eine reelle Zahl $\mathrm{Lim} x_n$ mit folgenden Eigenschaften:
(a) $\mathrm{Lim} x_{n+1} = \mathrm{Lim} x_n$;
(b) $\mathrm{Lim}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \mathrm{Lim} x_n + \beta \mathrm{Lim} y_n\ ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
(c) ist $x_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$, dann ist auch $\mathrm{Lim} x_n \geq 0$;
(d) $\mathrm{liminf}_n x_n \leq \mathrm{Lim} x_n \leq \mathrm{limsup}_n x_n$;
(e) wenn $(x_n)_{n\geq 1} \in c$, so ist $\mathrm{Lim} x_n = \lim_n x_n$.

Anleitung: sei M der Teilraum aller Folgen $\xi = (x_n)_{n\geq 1}$ in l^∞, für welche

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

existiert. Man betrachte das lineare Funktional

$$f(\xi) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

auf M und verwende den Satz von Hahn-Banach.

31. Man beweise: Sei M ein abgeschlossener Teilraum eines normierten Raumes X und $x_0 \notin M$. Dann existiert ein stetiges lineares Funktional f auf X mit $\|f\| = 1$, $f(x) = 0$ für alle $x \in M$ und $f(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, M)$.

4 Dualräume

Ist H ein Hilbertraum und $L \in H'$, dann existiert ein eindeutig bestimmtes Element $y_L \in H$ mit $L(x) = (x, y_L)$ und es gilt $\|L\| = \sup\{|(x, y_L)| \ : \ \|x\| \leq 1\} = \|y_L\|$. Die Zuordnung $L \mapsto y_L$ liefert daher eine konjugiert lineare Isometrie zwischen H und H'.

Beispiele 4.1. **(a)** $(l^p)' = l^q$, isometrisch isomorph, wobei $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Weiters gilt $(c_0)' = l^1$ isometrisch isomorph bzw. $c' = l^1$ und $(l^1)' = l^\infty$ (siehe Übungen).

(b) $(L^p(\mu))' = L^q(\mu)$, isometrisch isomorph, wobei $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$. Weiters gilt $(L^1(\mu))' = L^\infty(\mu)$ (siehe [R1]).

(c) Sei $K \subset \mathbb{C}^n$ eine kompakte Teilmenge. Jedem stetigen, linearen Funktional $\Phi \in (\mathcal{C}(K))'$ entspricht ein eindeutig bestimmtes komplexes, reguläres Borelmaß μ mit

$$\Phi(f) = \int_K f \, d\mu \ , f \in \mathcal{C}(K)$$

und $\|\Phi\| = |\mu|(K)$ (Totalvariation des Maßes μ, siehe [R1]).

Satz 4.2.
Sei X ein normierter Raum. X'' der Bidualraum von X mit der Norm $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(l)| \ : \ l \in X' \ , \|l\| \leq 1\}$ für $\varphi \in X''$. Sei $x \in X$ fix und $\varphi_x(x') := x'(x)$ für $x' \in X'$. Durch $\iota(x) = \varphi_x$ ist eine lineare Abbildung $\iota : X \longrightarrow X''$ definiert und es ist X isometrisch isomorph zu $\iota(X)$.

Beweis. Es gilt

$$|\varphi_x(x')| = |x'(x)| \leq \|x'\| \, \|x\|$$

und daher ist $\|\iota(x)\| = \|\varphi_x\| \leq \|x\|$, also ist ι linear, stetig und injektiv. Nach 3.8 existiert ein $y' \in X'$ mit $y'(x) = \|x\|$ und $\|y'\| = 1$. Dann erhalten wir

$$\|\varphi_x\| = \sup\{|\varphi_x(x')| \ : \ \|x'\| \leq 1\} \geq |\varphi_x(y')| = |y'(x)| = \|x\|,$$

also insgesamt $\|\varphi_x\| = \|x\|$. □

Definition 4.3. Ein Banachraum X heißt reflexiv , wenn die Abbildung $\iota : X \longrightarrow X''$ surjektiv ist, d.h. $\iota(X) = X''$.

Beispiele 4.4. **(a)** Die Räume l^p und $L^p(\mu)$ sind reflexiv, wenn $1 < p < \infty$.

(b) c_0 ist nicht reflexiv, es gilt $(c_0)'' = l^\infty$.
Es gibt Banachräume, die zu ihrem Bidualraum isometrisch isomorph sind, für die jedoch die Abbildung ι nicht surjektiv ist.

Nun geben wir noch einige Beispiele von Dualräumen von nicht normierten Räumen.

Beispiele 4.5. (a) Der Dualraum $(\Lambda(P))'$ des Köthe-Folgenraumes $\Lambda(P)$ (siehe 2.9 (e)) kann mit dem Folgenraum

$$M(P) = \{\eta = (y_n)_n \ : \ \exists p \in P \text{ mit } \sup_n \frac{|y_n|}{p_n} < \infty\}$$

identifiziert werden (siehe Übungen).
So ist der Dualraum s' der stark fallenden Folgen der Raum

$$s' = \{\eta = (y_n)_n \ : \ \exists m \in \mathbb{N} \text{ mit } \sup_n \frac{|y_n|}{n^m} < \infty\}$$

der schwach wachsenden Folgen. Setzen wir $\|\xi\|_k = \sup_n |x_n| n^k$ für $\xi = (x_n)_n \in s$, so gilt $\|.\|_1 \leq \|.\|_2 \leq \ldots$, setzen wir $\|\eta\|'_k = \sup_n |y_n|/n^k$ für $\eta = (y_n)_n \in s'$, so gilt $\|.\|'_1 \geq \|.\|'_2 \geq \cdots$.

(b) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $\mathcal{H}(G)$ der Fréchetraum aller holomorphen Funktionen auf G versehen mit der Tolopologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den kompakten Teilmengen von G (siehe 2.9 (c)). Sei $A = \overline{\mathbb{C}} \backslash G$ und $H(A)$ der Raum aller Funktionen F mit $F(\infty) = 0$, für die eine offene Menge $U \supset A$ existiert, sodass F auf U holomorph ist. Dann existiert für jedes stetige lineare Funktional $L \in (\mathcal{H}(G))'$ ein eindeutig bestimmtes Element $F \in H(A)$, sodass

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \ , \ f \in \mathcal{H}(G),$$

dabei ist γ ein negativ orientierter, geschlossener Pfad in $G \cap U$; für $\lambda \in A$ setzt man $f_\lambda(z) = 1/(z-\lambda)$ und $F(\lambda) = L(f_\lambda)$ (siehe auch [Has2] IV). Ist $\eta = (w_n)_n$ eine Folge in A, die in jeder Zusammenhangskomponente von A einen Häufungspunkt besitzt, dann ist die lineare Hülle R_η der Funktionen $r_n(z) = 1/(z - w_n)$ für $n \in \mathbb{N}$ dicht in $\mathcal{H}(G)$.
Dies ist eine Version des Runge'schen Approximationssatzes (vgl. auch [Has2]). Zum Beweis dieser Aussage verwendet man die oben beschriebene Dualität und den Satz von Hahn-Banach: Nach 3.7 hat man zu zeigen: ist $L \in (\mathcal{H}(G))'$ mit $L(r_n) = 0$ für alle $n \in N$, dann ist $L = 0$. Zu $L \in (\mathcal{H}(G))'$ existiert ein $F \in H(A)$ mit

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \ , \ f \in \mathcal{H}(G),$$

insbesondere folgt für $f = r_n$, dass

$$L(r_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - w_n}\, d\zeta = F(w_n) = 0.$$

Aus dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen ([Has1]) folgt nun $F \equiv 0$ und daher $L = 0$. (Details siehe [LR]).

Übungen

32. Man beweise : $(l^p)' = l^q$ isometrisch isomorph, wobei $1 < p < \infty$ und $1/p + 1/q = 1$, ferner zeige man: $(l^1)' = l^\infty$ isometrisch isomorph.

33. Man beweise: ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Banachraumes ist reflexiv.

34. Man zeige: der Dualraum s' des Raumes s der stark fallenden Folgen besteht aus allen Folgen $\eta = (y_n)_{n \geq 1}$ mit

$$\sup_n \frac{|y_n|}{n^m} < \infty$$

für ein $m \in \mathbb{N}$.

5 Open mapping - closed graph

Bei den folgenden Sätzen spielt wieder der Begriff der Vollständigkeit eine zentrale Rolle. Daher noch einige diesbezügliche Vorbereitungen:

Satz 5.1. *Sei $(X, (p_n)_{n\in\mathbb{N}})$ ein Fréchetraum (siehe 2.10 und 2.11) und Y ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann ist Y ein Fréchetraum und auch der Quotientenraum X/Y mit der Quotiententoplogie (2.13).*

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Sei d die translationsinvariante Metrik auf X (siehe 2.10) und $(\hat{x}_n)_n$ eine Cauchyfolge in X/Y. Dann existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit $(\hat{x}_n)_n$ bezeichnen, so dass $\hat{d}(\hat{x}_{n+1}-\hat{x}_n, 0) < 2^{-n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, dabei ist $\hat{d} = \inf d$. Also existieren Repräsentanten $y_{n+1} \in \hat{x}_{n+1} - \hat{x}_n$ mit $d(y_{n+1}, 0) < 2^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $x_1 \in \hat{x}_1$ beliebig gewählt. Dann ist $x_n = x_1 + \sum_{k=2}^{n} y_k \in \hat{x}_n$, $\forall n \geq 2$ und es gilt

$$d(x_n, x_m) = d(x_n - x_m, 0) = d(\sum_{k=m+1}^{n} y_k, 0) < \sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k},$$

weil $d(x+y, 0) \leq d(x+y, y)+d(y, 0) = d(x, 0)+d(y, 0)$. Somit ist $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X und weil X vollständig ist, existiert ein $x \in X$ mit $x_n \to x$. Sei $\hat{x} = q(x)$. Weil nach 2.16 die Quotientenabbildung q stetig ist, folgt $\hat{x}_n \to \hat{x}$ in X/Y. ☐

Satz 5.2.
Sei X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnen wir den Raum aller stetigen, linearen Abbildungen $A : X \longrightarrow Y$ mit der Norm $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$. Dann ist $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum. Insbesondere ist X' ein Banachraum.

Beweis. Sei $(A_n)_n$ eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist für jedes $x \in X$ die Folge $(A_n x)_n$ eine Cauchyfolge in Y, und weil Y vollständig ist, existiert ein $y \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} A_n x = y$. Der so definierte Operator A ist linear. Weiters gilt nach Voraussetzung:

$$\|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \, \|x\| < \epsilon\|x\| \ , \forall n, m \geq N(\epsilon).$$

Daraus folgt

$$\|Ax - A_m x\| = \lim_{n\to\infty} \|A_n x - A_m x\| \leq \epsilon\|x\| \ , \forall x \in X \text{ und } \forall m \geq N_\epsilon.$$

Für $\epsilon = 1$ gilt daher

$$\|Ax\| \leq \|Ax - A_m x\| + \|A_m x\| \leq (1 + \|A_m\|)\|x\| \ , \forall x \in X \text{ und } m \geq N(1).$$

Also ist $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $(A_n)_n$ konvergiert in $\mathcal{L}(X, Y)$ gegen A. ☐

Definition 5.3. Seien X, Y lokalkonvexe Räume, $A : X \longrightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator. A heißt offen , wenn $A(G)$ offen in Y ist, für jedes offene $G \subset X$.
A ist ein topologischer Homöomorphismus, wenn A stetig und offen ist.
Ist $q : X \longrightarrow X/\ker A$ die Quotientenabbildung und $\psi : A(X) \longrightarrow Y$ die Einbettung, weiters $A_0(\hat{x}) = A(x)$ für $x \in \hat{x} \in X/\ker A$, dann ist A_0 bijektiv und $A = \psi \circ A_0 \circ q$.
A ist stetig (offen) $\Leftrightarrow$ A_0 ist stetig (offen).

Daraus folgt insbesondere:

Satz 5.4. *Sei $(X, (p_\alpha)_\alpha \in A)$ ein lokalkonvexer Raum, Y ein endlichdimensionaler Raum und $A : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent: (i) A ist stetig: (ii) ker$A$ ist abgeschlossen: (iii) A ist ein topologischer Homöomorphismus.*

Korollar 5.5. *Sei $(X, (p_\alpha)_\alpha \in A)$ ein lokalkonvexer Raum. Dann ist jedes $L \in X'$ ein topologischer Homöomorphismus.*

Für das open mapping Theorem benötigen wir noch die folgenden Hilfssätze, wobei nur die Vollständigkeit der Räume wichtig ist und nicht die Eigenschaft, ein Vektorraum zu sein.

Lemma 5.6. *(Satz von Baire) Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Ist X die Vereinigung von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen M_n, so enthält eine der Mengen M_n einen inneren Punkt.*

Beweis. Angenommen es gilt $M_n^\circ = \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $U_\epsilon(x) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$:

$$U_\epsilon(x) \cap (X \setminus M_n) \neq \emptyset \ , \ \forall x \in X \ , \ \forall \epsilon > 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sind $x_0 \in X$ und $\epsilon_0 > 0$ beliebig vorgegeben, dann ist $U_{\epsilon_0}(x_0) \cap (X \setminus M_1)$ offen und nichtleer. Es gibt daher ein $x_1 \in X$ und $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0/2$ mit

$$U_{2\epsilon_1}(x_1) \subset U_{\epsilon_0}(x_0) \cap (X \setminus M_1).$$

Wendet man dieses Argument induktiv an, so erhält man eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in X und eine Folge $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ positiver Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$U_{2\epsilon_{n+1}}(x_{n+1}) \subset U_{\epsilon_n}(x_n) \cap (X \setminus M_{n+1}) \ , \ 0 < \epsilon_{n+1} < \epsilon_n/2.$$

Für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $m > n$ folgt daher

$$d(x_n, x_m) < \epsilon_n < \epsilon_0/2^n.$$

Also ist $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in X. Da X vollständig ist, existiert ein $\xi \in X$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$. Es folgt

$$d(\xi, x_n) = \lim_{m\to\infty} d(x_m, x_n) \leq \epsilon_n < 2\epsilon_n.$$

Daher ist $\xi \in U_{2\epsilon_n}(x_n) \subset X \setminus M_n$, und da $n \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt $\xi \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ und $X \neq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$. Widerspruch! □

Definition 5.7. Seien X ein metrischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge. M heißt nirgends dicht in X , wenn $\overline{M}$ keine inneren Punkte hat. M heißt von erster Kategorie in X, falls M Vereinigung von abzählbar vielen, nirgends dichten Mengen ist. M heißt von zweiter Kategorie in X , falls M nicht von erster Kategorie ist.

Wir haben also gezeigt: ein vollständiger metrischer Raum ist von zweiter Kategorie in sich.

Lemma 5.8.
Seien X und Y metrische Räume; X sei vollständig. Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ sei stetig, und es gelte $\forall \epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$\overline{f(U_\epsilon(x))} \supset U_\delta(f(x)).\ (*)$$

Dann ist die Abbildung offen.

Beweis. Es genügt zu zeigen: $\forall \epsilon > 0$ existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$f(U_\epsilon(x)) \supset U_{\delta_1}(f(x)).$$

Sei dazu $\epsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\epsilon_n = \epsilon/2^n$ für $n \in \mathbb{N}$ und wählen unter Verwendung der Voraussetzung zu ϵ_n ein $\delta_n \leq 1/n$. Ist dann $x \in X$ fixiert und $y \in U_{\delta_1}(f(x))$ beliebig gegeben, so wählen wir induktiv eine Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ in X mit $x = x_0$ und

$$d(f(x_n), y) < \delta_{n+1} \leq 1/(n+1) \text{ und } d(x_n, x_{n-1}) < \epsilon_n = \epsilon/2^n\ ,\ \forall n \geq 1.\ (**)$$

Dazu verwenden wir folgende Schlussweise: sei x_n gewählt mit $d(f(x_n), y) < \delta_{n+1}$, so folgt aus $(*)$ und $(**)$

$$y \in U_{\delta_{n+1}}(f(x_n)) \subset \overline{f(U_{\epsilon_{n+1}}(x_n))} \subset \bigcup_{\xi \in U_{\epsilon_{n+1}}(x_n)} U_{\delta_{n+2}}(f(\xi)).$$

Daher gibt es ein $x_{n+1} \in U_{\epsilon_{n+1}}(x_n)$ mit $y \in U_{\delta_{n+2}}(f(x_{n+1}))$, d.h.

$$d(f(x_{n+1}), y) < \delta_{n+2} \text{ und } d(x_{n+1}, x_n) < \epsilon_{n+1}.$$

Aus $(**)$ folgt, dass $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in X ist. Also existiert $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$ und es gilt nach $(**)$

$$d(x, \xi) = d(x_0, \xi) = \lim_{k\to\infty} d(x_0, x_k) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} d(x_n, x_{n-1}) < \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon\, 2^{-n} = \epsilon,$$

d.h. $\xi \in U_\epsilon(x)$. Da f stetig ist, folgt aus $(**)$: $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi)$. Also gilt $f(U_\epsilon(x)) \supset U_{\delta_1}(f(x))$. □

Theorem 5.9. *(Open mapping)*
Seien X und Y Frécheträume. $A : X \longrightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator mit $(A(X))^- = Y$. Dann ist $A(X)$ von erster Kategorie in Y oder $A(X) = Y$ und A ist ein topologischer Homöomorphismus (also zusätzlich offen).

Beweis. Angenommen $A(X)$ ist nicht von erster Kategorie (man sagt auch nicht mager) in Y. Sei $r > 0$ fix, $U = \{x \in X\ :\ d(x, 0) < r\}$. Weil die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto x_1 - x_2$ stetig ist, existiert eine Nullumgebung V mit $V - V \subset U$. Es gilt

$$A(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA(V).$$

Ist $B \subseteq A(X)$, so bezeichnen wir mit $[B]^-$ den Abschluss von B in $A(X)$. Da $A(X)$ nicht mager ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $[nA(V)]^-$ einen inneren Punkt besitzt, und weil $y \mapsto ny$ ein Homöomorphismus auf Y ist, besitzt auch $[A(V)]^-$ einen inneren Punkt z. Dann erhalten wir

$$[A(V)]^- - z = [A(V) - z]^- \subset [A(V) - A(V)]^- = [A(V - V)]^- \subset [A(U)]^-,$$

daher ist $0 = z - z$ innerer Punkt von $[A(V)]^- - z \subset [A(U)]^-$. Somit existiert ein $\rho > 0$ mit $A(X) \cap K_\rho \subset [A(U)]^-$, wobei $K_\rho = \{y \in Y \ : \ d(y, 0) < \rho\}$. Wir können daher Lemma 5.8 für $Y = A(X)$ anwenden und erhalten, dass A offen ist. Daher ist $A_0 : X/\mathrm{ker}A \longrightarrow A(X)$ ein topologischer Isomorphismus, es ist $X/\mathrm{ker}A$ vollständig und daher ist auch $A(X)$ vollständig, da $A(X)$ dicht in Y ist, folgt $A(X) = Y$. □

Korollar 5.10.
Seien X, Y Fréchetträume und $A : X \longrightarrow Y$ ein stetiger, linearer Operator. A ist genau dann ein topologischer Homöomorphismus, wenn $A(X)$ abgeschlossen in Y ist. Ist A insbesondere surjektiv, dann ist A offen.

Beweis. Ist A ein topologischer Homöomorphismus, so ist $X/\mathrm{ker}A \cong A(X)$ und weil $X/\mathrm{ker}A$ vollständig ist, ist auch $A(X)$ vollständig und somit abgeschlossen. Ist umgekehrt $A(X)$ abgeschlossen in Y, dann ist $A(X)$ selbst ein Fréchetraum und wir können 5.6 und 5.9 anwenden. □

Korollar 5.11. *(a) Sei X ein Fréchetraum, X_1, X_2 abgeschlossene Teilräume von X mit $X = X_1 \bigoplus X_2$ algebraisch. Dann gilt $X = X_1 \bigoplus X_2$ auch topologisch.*
(b) Sei X ein Fréchetraum bezüglich beider Topologien τ_1 und τ_2. Ist τ_1 feiner als τ_2, dann gilt $\tau_1 = \tau_2$.

Beweis. (a) Wir haben zu zeigen, dass die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ als Abbildung von $X_1 \times X_2$ nach X ein topologischer Isomorphismus ist. Diese Abbildung ist nach Voraussetzung stetig und bijektiv, also nach 5.9 ein topologischer Isomorphismus.
(b) Die identische Abbildung ist stetig von (X, τ_1) nach (X, τ_2) und nach 5.9 daher auch offen. □

Theorem 5.12. *(closed graph)*
Seien X und Y Fréchetträume und $A : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. Der Graph G von A

$$G = \{(x, Ax) \ : \ x \in X\} \subseteq X \times Y$$

ist genau dann abgeschlossen in $X \times Y$, wenn A stetig ist.

Beweis. Ist A stetig, so folgt sofort, dass G abgeschlossen in $X \times Y$ ist (ist $(x, y) \in \overline{G}$, dann existiert eine Folge $(x_n)_n$ in X mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$, und weil A stetig ist, gilt $Ax = y$, d.h. $(x, y) = (x, Ax) \in G$.)
Ist umgekehrt G abgeschlossen in $X \times Y$, dann ist G vollständig und die Abbildung $(x, Ax) \mapsto x$ ist linear, bijektiv und stetig, daher nach 5.10 ein topologischer Isomorphismus, und die Abbildung $x \mapsto (x, Ax)$ ist genau dann stetig , wenn $x \mapsto Ax$ stetig ist. □

Beispiele 5.13.
(a) Sei $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ eine unendliche Matrix mit folgender Eigenschaft: $\forall \xi = (x_k)_{k\geq 1} \in l^\infty$ sei $y_n = \sum_{k\geq 1} a_{nk}x_k$ konvergent und $\eta = (y_n)_{n\geq 1} \in l^\infty$.
Dann ist durch $A(\xi) = \eta$ eine stetige lineare Abbildung $A \in \mathcal{L}(l^\infty, l^\infty)$ definiert. Diese Aussage können wir mit Hilfe des closed-graph-Theorems beweisen: da $\sum_{k\geq 1} a_{nk}x_k$ für alle $\xi = (x_k)_{k\geq 1} \in l^\infty$ konvergiert, ist

$$\sum_{k\geq 1} |a_{nk}| < \infty,$$

setze dazu $x_k = \overline{a_{nk}}/|a_{nk}|$. Sei nun

$$A_n(\xi) = \sum_{k\geq 1} a_{nk}x_k.$$

Dann ist $A_n \in (l^\infty)'$ ein stetiges lineares Funktional auf l^∞.
Wir zeigen nun $G = \{(\xi, A\xi) \;:\; \xi \in l^\infty\}$ ist abgeschlossen: sei dazu $(\xi, \eta) \in \overline{G}$. Dann gibt es eine Folge $(\xi_l)_{l\geq 1}$ in l^∞ mit $\lim_{l\to\infty} \xi_l = \xi$ und $\lim_{l\to\infty} A(\xi_l) = \eta = (y_n)_{n\geq 1}$, d.h. $\lim_{l\to\infty} A_n(\xi_l) = y_n$. Weil die Funktionale A_n stetig sind, gilt $\lim_{l\to\infty} A_n(\xi_l) = A_n(\xi)$ und $y_n = A_n(\xi)$ für alle $n \geq 1$, d.h. $\eta = A(\xi)$ und $(\xi, \eta) \in G$, daher ist A stetig.

(b) Interpolation in H^∞ : eine Folge $(z_k)_{k\geq 1}$ in $\mathbb{D}$ heißt interpolierend , wenn für jede Folge $(w_k)_{k\geq 1}$ in l^∞ eine Funktion $f \in H^\infty$ existiert mit $f(z_k) = w_k$, für alle $k \geq 1$.
Wir leiten eine notwendige Bedingung dafür ab, dass $(z_k)_{k\geq 1}$ eine interpolierende Folge ist: sei dazu

$$R : H^\infty \longrightarrow l^\infty \text{ gegeben durch } R(f) = (f(z_k))_{k\geq 1}.$$

Es gilt $\|R\| = \sup\{\|R(f)\| \;:\; \|f\|_\infty \leq 1\} \leq 1$. Also ist R stetig. Setzen wir voraus, dass R surjektiv ist, dann ist

$$R_0 : H^\infty/I \longrightarrow l^\infty$$

bijektiv und stetig, dabei ist $I = \{f \in H^\infty \;:\; f(z_k) = 0 \;\forall k \geq 1\}$ ein abgeschlossener Teilraum, $q : H^\infty \longrightarrow H^\infty/I$ die Quotientenabbildung und $R_0(f + I) = R(f)$, $f \in H^\infty$.
Nach 5.9 ist R_0^{-1} stetig, d.h. es existiert eine Konstante $M > 0$ derart, dass

$$\|R_0^{-1}(\eta)\| = \inf_{g\in I} \|f + g\|_\infty \leq M\|\eta\|_\infty,$$

dabei ist $R_0(f + I) = \eta$. Ist also $\eta \in l^\infty$ mit $\|\eta\|_\infty \leq 1$, so gibt es ein $f \in H^\infty$ mit $f(z_k) = w_k$, $\forall k \geq 1$ und $\|f\|_\infty \leq M$. Insbesondere existieren für die Folgen $(\delta_{jk})_{k\geq 1}$ in l^∞ Funktionen $f_j \in H^\infty$ mit $f_j(z_k) = \delta_{jk}$, $\forall j, k \geq 1$ und $\|f_j\|_\infty \leq M$, $\forall j \geq 1$. Für $j \geq 1$ betrachten wir das Blaschkeprodukt

$$B_j(z) = \prod_{k=1,k\neq j}^{\infty} \frac{z_k - z}{1 - \overline{z_k}z}\,\frac{z_k}{|z_k|}.$$

Dann gilt $f_j/B_j \in H^\infty$ und $\|f_j\|_\infty = \|f_j/B_j\|_\infty \leq M$, insbesondere daher

$$\left|\frac{f_j(z_j)}{B_j(z_j)}\right| = \frac{1}{|B_j(z_j)|} \leq M \;,\; \forall j \geq 1,$$

und somit gilt

$$\prod_{k=1,k\neq j}^{\infty} \left| \frac{z_k - z_j}{1 - \overline{z_k} z_j} \right| \geq \frac{1}{M} > 0 \ , \ \forall j \geq 1.$$

(Carleson-Bedingung). Diese Bedingung ist auch hinreichend (siehe [G]).

(c) Schauder-Basen : Sei $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ ein lokalkonvexer Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in X heißt Schauder-Basis für X, wenn für jedes $x \in X$ eine eindeutig bestimmte Folge von Skalaren $(c_n)_{n\geq 1}$ existiert mit

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n,$$

wobei die Summe in $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ konvergiert.
So bildet das System $(e_n)_{n\geq 1}$ eine Schauder-Basis in l^p für $1 \leq p < \infty$.
Die Monome $\{z^n \ : \ n \geq 0\}$ bilden eine Schauder-Basis in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ und in $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.
Ist nun $(X, (\|.\|_m)_{m\geq 1})$ ein Fréchetraum mit Schauder-Basis $(x_n)_{n\geq 1}$, dann sind die Koeffizientenfunktionale $x_n'(x) = c_n$ für $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ gleichgradig stetig, ja es sind sogar die Partialsummen-Operatoren

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n$$

gleichgradig stetig, d.h. für jedes $m \in \mathbb{N}$ existiert ein $l \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\|P_N(x)\|_m \leq M \|x\|_l \ , \ \forall x \in X \ , \ \forall N \in \mathbb{N}.$$

Um das zu zeigen, betrachtet man zunächst den Raum

$$X_1 = \{\eta = (c_k)_{k\geq 1} \ : \ \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \text{ konvergiert in } X\}$$

versehen mit den Halbnormen

$$\|\eta\|_m^* = \sup_n \| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k \|_m$$

und zeigt, dass $(X_1, (\|.\|_m^*)_{m\geq 1})$ ein Fréchetraum ist (siehe Übungen).
Die Abbildung $A : X_1 \longrightarrow X$ definiert durch $A(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ ist dann linear, bijektiv und stetig (nach Konstruktion von X_1), daher ergibt das open-mapping Theorem 5.8 die gewünschte Behauptung (Details siehe Übungen).

Das letzte Beispiel leitet über zum nächsten Abschnitt

Übungen

36. Seien X und Y Banachräume, $D(T) \subseteq X$, und

$$T : D(T) \longrightarrow Y$$

ein linearer Operator mit Definitionsbereich $D(T)$. T heißt abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in $D(T)$ mit $\lim_n x_n = x$ und $\lim_n T(x_n) = y$ folgt: $x \in D(T)$ und $y = Tx$. Man zeige: Wenn $D(T)$ abgeschlossen in X und T stetig ist, dann ist T abgeschlossen.

37. Man zeige: T ist genau dann abgeschlossen, wenn der Graph

$$G(T) = \{(x, Tx) \,:\, x \in D(T)\}$$

abgeschlossen in $X \times Y$ ist (Voraussetzungen wie in 35.).

38. Man zeige: Ist $D(T)$ und $G(T)$ abgeschlossen, dann ist T stetig (Voraussetzungen wie in 35.).

39. Man zeige: Der Differentialoperator $(Tf)(t) = f'(t)$ auf $\mathcal{C}[0,1]$ ist abgeschlossen, aber nicht stetig (dabei ist $D(T)$ der Raum aller stetig differenzierbaren Funktionen auf $[0,1]$).

40. Man beweise die Behauptungen in Beispiel 5.13 (c).

6 Gleichgradige Stetigkeit - Der Satz von Banach-Steinhaus

Satz 6.1.
Seien $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A_1})$ und $(Y, (q_\beta)_{\beta \in A_2})$ lokalkonvexe Räume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, B eine beschränkte Teilmenge von X. Dann ist $T(B)$ beschränkt in Y.

Beweis. Weil T stetig ist, existiert für jedes $\beta \in A_2$ ein $\alpha \in A_1$ und eine Konstante $M > 0$, so dass $q_\beta(T(x)) \leq M p_\alpha(x)$, $\forall x \in X$. Es gilt nach 2.9 (f):

$$\sup\{p_\alpha(x) \,:\, x \in B\} = M_\alpha < \infty$$

und daher ist

$$\sup\{q_\beta(T(x)) \,:\, x \in B\} \leq M\, M_\alpha.$$

□

Definition 6.2. Seien $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A_1})$ und $(Y, (q_\beta)_{\beta \in A_2})$ lokalkonvexe Räume. Wir betrachten $\mathcal{L}(X, Y)$ und führen darauf die folgenden Topologien ein:
$\mathcal{L}_s(X, Y)$: Topologie der einfachen (punktweisen) Konvergenz, erzeugt von den Halbnormen

$$p_{F,\beta}(T) = \sup_{x \in F} q_\beta(T(x)) \ , \ F \subset X \text{ endlich.}$$

$\mathcal{L}_c(X, Y)$: Topologie der kompakten Konvergenz, erzeugt von den Halbnormen

$$p_{K,\beta}(T) = \sup_{x \in K} q_\beta(T(x)) \ , \ K \subset X \text{ kompakt.}$$

$\mathcal{L}_b(X, Y)$: Topologie der beschränkten Konvergenz, erzeugt von den Halbnormen

$$p_{B,\beta}(T) = \sup_{x \in B} q_\beta(T(x)) \ , \ B \subset X \text{ beschränkt.}$$

Bemerkung 6.3. Jede kompakte Menge in einem lokalkonvexen Raum ist auch beschränkt (siehe Übungen). Daher existieren nach 6.1 alle Halbnormen der obigen Definition.

Beispiele 6.4. Sind X und Y normiert, so beschreibt die Norm

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \,:\, \|x\| \leq 1\}$$

die Topologie $\mathcal{L}_b(X, Y)$ der beschränkten Konvergenz.

Wie sehen die beschränkten Mengen $H \subset \mathcal{L}(X, Y)$ in den obigen Topologien aus?

Satz 6.5.
Sei $H \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt:
H ist beschränkt in $\mathcal{L}_s(X, Y) \Leftrightarrow \bigcup_{T \in H} T(F)$ ist beschränkt in Y , $\forall F \subset X$ endlich.
H ist beschränkt in $\mathcal{L}_c(X, Y) \Leftrightarrow \bigcup_{T \in H} T(K)$ ist beschränkt in Y , $\forall K \subset X$ kompakt.
H ist beschränkt in $\mathcal{L}_b(X, Y) \Leftrightarrow \bigcup_{T \in H} T(B)$ ist beschränkt in Y , $\forall B \subset X$ beschränkt.

Beweis. Es gilt:

$$\sup\{q_\beta(y) \,:\, y \in \bigcup_{T\in H} T(F)\} = \sup\{q_\beta(T(x)) \,:\, x\in F\,,\, T\in H\} = \sup\{p_{F,\beta}(T) \,:\, T\in H\}.$$

□

Eine Verschärfung der Beschränktheit in $\mathcal{L}(X,Y)$ liefert der folgenden Begriff:

Definition 6.6. Eine Teilmenge $H \subset \mathcal{L}(X,Y)$ heißt gleichgradig stetig, wenn für jedes $\beta \in A_2$ ein $\alpha \in A_1$ und eine Konstante $M > 0$ existiert mit

$$q_\beta(T(x)) \le M p_\alpha(x)\ ,\ \forall x \in X \text{ und } \forall T \in H.$$

Äquivalent dazu ist die Aussage: für jede Nullumgebung V in Y gibt es eine Nullumgebung U mit $T(U) \subseteq V$ für alle $T \in H$.

Satz 6.7. *Jede gleichgradig stetige Teilmenge $H \subset \mathcal{L}(X,Y)$ ist beschränkt in $\mathcal{L}_s(X,Y)$, $\mathcal{L}_c(X,Y), \mathcal{L}_b(X,Y)$.*

Beweis. Nach 6.5 haben wir zu zeigen, dass

$$\sup\{q_\beta(T(x)) \,:\, x\in F\,,\, T\in H\} < \infty\ ,\ \forall \beta\in A_2 \text{ und } \forall F \subset X \text{ endlich}\ .$$

Dies folgt sofort, weil $q_\beta(T(x)) \le M p_\alpha(x)$ gilt. □

Die Umkehrung ist i.a. falsch; es gilt jedoch der folgende

Satz 6.8.
Sei $(X,(p_n)_{n\ge 1})$ ein Fréchetraum und $(Y,(q_\beta)_{\beta\in A_2})$ ein lokalkonvexer Raum. Sei $H \subset \mathcal{L}_s(X,Y)$ eine beschränkte Menge von Operatoren. Dann ist H gleichgradig stetig.

Beweis. Sei $\beta \in A_2$, $\epsilon > 0$ und

$$V_{\beta,\epsilon} = \{y \in Y \,:\, q_\beta(y) < \epsilon\}.$$

Dann gilt $\overline{V_{\beta,\epsilon/3}} + \overline{V_{\beta,\epsilon/3}} \subseteq V_{\beta,\epsilon}$. Sei

$$W = \bigcap_{T\in H} T^{-1}(\overline{V_{\beta,\epsilon/3}}).$$

W ist abgeschlossen in X. Sei $x \in X$ beliebig; nach 6.5 ist $\bigcup_{T\in H} T(\{x\})$ beschränkt in Y. Also gilt

$$q_\beta(T(x)) \le M_{\beta,x} < \infty\ ,\ \forall T \in H.$$

D.h. $T(x) \in M_{\beta,x}\,\frac{3}{\epsilon}\,\overline{V_{\beta,\epsilon/3}}$, $\forall T \in H$. Daher folgt

$$x \in M_{\beta,x}\,\frac{3}{\epsilon} \bigcap_{T\in H} T^{-1}(\overline{V_{\beta,\epsilon/3}}) = M_{\beta,x}\,\frac{3}{\epsilon}\,W.$$

Somit gilt $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nW$, und weil X insbesondere ein Baire'scher Raum ist (siehe 5.6), gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass nW und daher auch W einen inneren Punkt besitzt. Die Menge $U = W + W$ ist daher eine Nullumgebung in X. Nach Definition von W gilt: $T(W) \subseteq \overline{V_{\beta,\epsilon/3}}$ und nun auch

$$T(U) = T(W+W) \subseteq \overline{V_{\beta,\epsilon/3}} + \overline{V_{\beta,\epsilon/3}} \subseteq V_{\beta,\epsilon}\ ,\ \forall T \in H.$$

□

Theorem 6.9. *(Satz von Banach-Steinhaus, Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit)*
Seien X, Y normierte Räume, $H \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ und sei $M \subseteq X$ von zweiter Kategorie in X. Ferner sei

$$\sup\{\|T(x)\| \,:\, T \in H\} = M_x < \infty \ , \ \forall x \in M.$$

Dann gilt $\sup\{\|T\| \,:\, T \in H\} < \infty$.

Beweis. Sei $X_M = \langle M \rangle$ das lineare Erzeugnis von M. Weil $[\overline{M}]^\circ \neq \emptyset$, enthält $\overline{M}$ eine ganze Kugel von X. Also ist $\overline{X_M} = X$. Ferner gilt $\overline{M} \subseteq \overline{X_M}$, und somit ist auch X_M von zweiter Kategorie. Sei $H_0 = \{T|_{X_M} \,:\, T \in H\}$ die Menge der Einschränkungen der Operatoren T auf X_M. Nach Voraussetzung ist H_0 beschränkt in $\mathcal{L}_s(X_M, Y)$ und daher nach 6.8 und 5.6 gleichgradig stetig. Weil $\overline{X_M} = X$ gilt, ist $T \mapsto T|_{X_M}$ ein Normisomorphismus und H ist in der Operatornorm beschränkt. □

Korollar 6.10.
Sei X ein normierter Raum, $M \subseteq X$ von zweiter Kategorie in X. Ist $(f_n)_n$ eine Folge in X' mit $\sup_n |f_n(x)| < \infty \ , \ \forall x \in M$, *dann gilt* $\sup_n \|f_n\| < \infty$.

Korollar 6.11.
Sei X ein normierter Raum und $(x_n)_n$ eine Folge in X mit

$$\sup_n |f(x_n)| < \infty \ , \ \forall f \in X'.$$

Dann gilt $\sup_n \|x_n\| < \infty$.

Beweis. Sei $F_{x_n} \in X''$ definiert durch $F_{x_n}(f) = f(x_n)$ für $f \in X'$. Es gilt

$$\sup_n |F_{x_n}(f)| = \sup_n |f(x_n)| < \infty \ , \ \forall f \in X'.$$

X' ist ein Banachraum und daher können wir 6.9 anwenden und erhalten $\sup_n \|F_{x_n}\| < \infty$. Aus 4.2 folgt $\|F_{x_n}\| = \|x_n\|$. □

Korollar 6.12.
Seien X, Y Banachräume und $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $\sup_n \|T_n x\| < \infty \ , \ \forall x \in X$. *Ferner existiere* $\lim_{n\to\infty} T_n x$ *für alle $x \in E$, wobei $E \subseteq X$ eine dichte Teilmenge von X ist. Dann existiert* $\lim_{n\to\infty} T_n x$ *für alle $x \in X$ und* $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ *ist ein stetiger linearer Operator.*

Beweis. Nach 6.9 gilt $\sup_n \|T_n\| < \infty$. Somit existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ mit $\|x\| < \delta$ gilt $\|T_n x\| < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Sei $x_0 \in X$ beliebig. Dann existiert ein $x \in E$ mit $\|x_0 - x\| < \delta$. Also folgt

$$\|T_n x_0 - T_m x_0\| \leq \|T_n(x_0 - x)\| + \|T_n x - T_m x\| + \|T_m(x - x_0)\| < 3\epsilon,$$

für alle genügend großen n und m. Somit ist $(T_n x_0)_n$ eine Cauchyfolge in Y und es existiert $\lim_{n\to\infty} T_n x_0 = T x_0$; weiters ist

$$\|T x_0\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x_0\| \leq \sup_n \|T_n\| \, \|x_0\|,$$

und daraus folgt $\|T\| < \infty$.

□

Beispiele 6.13. (a) Als Anwendungsbeispiel betrachten wir die sogenannten regulären Summationsmethoden: sei $\xi = (x_n)_{n\geq 1} \in c$ und $A = (a_{jk})_{j,k\geq 1}$ eine unendliche Matrix. Wir setzen

$$A_j(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k \ , \ \xi \in c,$$

und nennen A regulär , falls $\lim_{j\to\infty} A_j(\xi) = A(\xi)$ existiert und falls für die Folge $A(\xi) = (y_n)_{n\geq 1}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

A ist genau dann regulär, wenn die drei folgeden Bedindungen erfüllt sind:
(i)$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq M \ , \ \forall j \in \mathbb{N} \ , \ M > 0;$
(ii) $\lim_j a_{jk} = 0 \ , \ \forall k \in \mathbb{N}$; (iii) $\lim_j \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 1$.
Wenn A regulär ist, dann konvergiert die Folge $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k)_{j\geq 1}$ für jedes $\xi = (x_k)_{k\geq 1} \in c$. Sei $f_{n,j}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k$. Dann ist $f_{n,j} \in c'$ und nach 6.12 ist $\lim_{n\to\infty} f_{n,j} = A_j \in c'$, und weil $\lim_{j\to\infty} A_j(\xi) = A(\xi)$, folgt noch einmal aus 6.12, dass $\sup_j \|A_j\| \leq M < \infty$. Sei nun $x_k = \operatorname{sgn}(a_{jk})$ für $k = 1, \dots, N$ und $x_k = 0$ für $k > N$. Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{N} |a_{jk}| \leq \|A_j\| \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq M \ \forall j \in \mathbb{N},$$

also Eigenschaft (i).
Ferner gilt $A_j(e_k) = a_{jk}$; daher folgt aus der Regularität von A, dass $\lim_{j\to\infty} a_{jk} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, d.i. (ii). Setzt man die konstante Folge $e_0 = (1, 1, \dots)$ ein, so ergibt sich

$$A_j(e_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \to 1, \text{wenn } j \to \infty,$$

also Eigenschaft (iii).
Seien umgekehrt (i), (ii) und (iii) erfüllt. Für $j \in \mathbb{N}$ fix sei

$$B_{N.j}(\xi) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}x_k \ , \ N \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $B_{N,j} \in c'$ und

$$\|B_{N,j}\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq M.$$

Ferner konvergiert $B_{N,j}(e_0) = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}$ bei $N \to \infty$ gegen $A_j(e_0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}$ und $B_{N,j}(e_n) = a_{jn}$ gegen $A_j(e_n) = a_{jn}$.
Nun liegt das lineare Erzeugnis $\langle e_0, e_1, e_2, \dots \rangle$ dicht in c (ist $\xi \in c$ beliebig, mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dann liegt die Folge $\xi - xe_0$ in c_0 und die Folgen $e_1, e_2, \dots$ spannen ganz c_0 auf). Daher gilt nach 6.12, dass $B_{N,j}(\xi)$ gegen $A_j(\xi)$ für alle $\xi \in c$ konvergiert, und dass $A_j \in c'$.
Ferner ist

$$\|A_j\| = \sup\{|\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}x_k| \ : \ \|\xi\| \leq 1\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_{jk}| \leq M,$$

für jedes $j \in \mathbb{N}$. Nun verwenden wir noch einmal 6.12 für die Funktionale A_j und erhalten: $\exists \lim_{j\to\infty} A_j(\xi)$ für alle $\xi \in c$. Weil

$$\lim_{j\to\infty} A_j(e_0) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} = 1$$

und für $n \geq 1$

$$\lim_{j\to\infty} A_j(e_n) = \lim_{j\to\infty} a_{jn} = 0,$$

gilt $\lim_{j\to\infty} A_j(\xi) = \lim_{n\to\infty} x_n$ für jedes $\xi = (x_n)_{n\geq 1} \in c$, weil ja $\xi - xe_0 \in c_0$. Somit ist $A = (a_{jk})_{j,k\geq 1}$ regulär. Weitere Details siehe [Ma].

(b) Mit Hilfe des Satzes von Banach Steinhaus kann gezeigt werden, dass eine stetige Funktion mit Periode 2π existiert, deren Fourierreihe im Punkt 0 divergiert (Details siehe Übungen).

Zum Abschluss dieses Kapitels wird noch ein wichtiger Zusammenhang zwischen gleichgradiger Stetigkeit und Kompaktheit untersucht.
Seien $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ und $(Y, (q_\beta)_{\beta\in B})$ lokalkonvexe Räume und $L(X,Y)$ die Menge aller linearen Abbildungen von X nach Y. Wir betrachten den Raum Y^X, das sind X Kopien von Y versehen mit der Produkttopologie, jede Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ kann als Element in Y^X aufgefasst werden: $(f(x))_{x\in X} \in Y^X$. Die Produkttopologie auf Y^X entspricht der Topologie der einfachen Konvergenz: ein Netz $(f_\iota)_\iota$ konvergiert gegen f genau dann, wenn die Projektionen $p_x(f_\iota) = f_\iota(x)$ gegen $f(x)$ für jedes $x \in X$ konvergieren. Weil die Abbildung $f \mapsto f(x)$ stetig ist, ist für festes $x, y \in X$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ die Menge

$$M(x,y,\lambda,\mu) = \{f \in Y^X \ : \ f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) = 0\}$$

abgeschlossen in Y^X und daher ist auch

$$L(X,Y) = \bigcap M(x,y,\lambda,\mu)$$

abgeschlossen in Y^X.

Satz 6.14.
Sei $H \subset \mathcal{L}(X,Y)$ gleichgradig stetig und H_1 der Abschluss von H in Y^X (also in der Topologie der einfachen Konvergenz). Dann ist auch $H_1 \subset \mathcal{L}(X,Y)$ und H_1 ist gleichgradig stetig.

Beweis. Nach der obigen Bemerkung gilt für ein $T_1 \in H_1 : T_1 \in L(X,Y)$. Nun gibt es für jedes $\beta \in B$ ein $\alpha \in A$ sowie eine Konstante $M > 0$, sodass $q_\beta(T(x)) \leq M p_\alpha(x)$ für jedes $x \in X$ und für jedes $T \in H$ gilt. Ist $T_1 \in H_1$, so existiert ein Netz $(T_\iota)_\iota$, das gegen T_1 konvergiert. Das bedeutet, dass $T_\iota(x)$ für jedes $x \in X$ gegen $T_1(x)$ konvergiert; und weil $q_\beta(T_\iota(x)) \leq M p_\alpha(x)$ für jedes ι und für jedes x gilt, ist auch $q_\beta(T_1(x)) \leq M p_\alpha(x)$ und $H_1 \subset \mathcal{L}(X,Y)$. $\square$

Satz 6.15. *(Alaoglu-Bourbaki)*
*Sei $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ ein lokalkonvexer Raum. Jede gleichgradig stetige Teilmenge von $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$ ist schwach * relativkompakt.*

Beweis. Die schwach * Topologie ist die Topologie der einfachen Konvergenz in $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{C})$, wird daher induziert von der Produkttopologie auf $\mathbb{C}^X$. Nach dem Satz von Tychonov ist $H \subset \mathbb{C}^X$ genau dann relativkompakt in $\mathbb{C}^X$, wenn die Mengen $\{T(x) : T \in H\}$ für alle $x \in X$ relativkompakt in $\mathbb{C}$ sind. Da $H \subset X'$ gleichgradig stetig ist, existiert ein $\alpha \in A$ und eine Konstante $M > 0$, sodass $|T(x)| \leq M p_\alpha(x)$ für jedes $x \in X$ und für jedes $T \in H$ gilt. Die Mengen $\{T(x) : T \in H\}$ sind beschränkt in $\mathbb{C}$ und daher relativkompakt, somit ist auch $H \subset \mathbb{C}^X$ relativkompakt. Also ist der Abschluss H_1 von H kompakt in $\mathbb{C}^X$. Nach 6.14 ist $H_1 \subset X'$ und H_1 ist auch der Abschluss von H in der schwach * Topologie. □

Auf gleichgradig stetigen Teilmengen stimmen verschiedene Topologien überein:

Satz 6.16.
Seien $(X, (p_\alpha)_{\alpha \in A})$ und $(Y, (q_\beta)_{\beta \in B})$ lokalkonvexe Räume. Sei $H \subset \mathcal{L}(X, Y)$ gleichgradig stetig. Die Einschränkungen auf H der folgenden Topologien sind identisch:
(i) die Topologie der einfachen Konvergenz auf einer totalen Teilmenge X_0 von X (X_0 heißt total, wenn $\langle X_0 \rangle^- = X$);
(ii) die Topologie der einfachen Konvergenz auf X;
(iii) die Topologie der kompakten Konvergenz auf X.

Beweis. Wir zeigen : die Topologie von (i) ist feiner als jene von (iii), d.h.: für jedes $T_0 \in H$, für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$, für jedes $\beta \in B$ und für jedes $\epsilon > 0$ existiert eine endliche Teilmenge $F_0 \subset X_0$, ein $\beta' \in B$ und ein $\delta > 0$ mit

$$[T_0 + \{T : \sup_{x \in F_0} q_{\beta'}(T(x)) < \delta\}] \cap H \subseteq T_0 + \{T : \sup_{x \in K} q_\beta(T(x)) < \epsilon\}.$$

Für $\epsilon/5$ existieren $\eta > 0$ und $\alpha \in A$ mit $U = \{x : p_\alpha(x) < \eta\}$ und $q_\beta(T(x)) < \epsilon/5$ für alle $x \in U$ und für alle $T \in H$.
Da K kompakt ist, gibt es für die offene Überdeckung $K \subseteq \bigcup_{x \in K}(x + U)$ endlich viele $x_1, \dots, x_m \in K$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^m (x_i + U)$. Weiters existieren $x_{ij} \in X_0$ und $\lambda_{ij} \in \mathbb{C}$ mit $x_i \in \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_{ij} + U$. Dann folgt

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_{ij} + U + U \right).$$

Es existiert ein $\delta > 0$ mit $\sum_{i,j} |\lambda_{ij}| q_\beta(y) < \epsilon/5$ für $q_\beta(y) < \delta$. Wir setzen nun $F_0 = \{x_{ij} : i = 1, \dots, m\,,\, j = 1, \dots, n\}$.
Für ein $\tilde{T}$ mit $\sup_{x \in F_0} q_\beta(\tilde{T}(x)) < \delta$ gilt $q_\beta(\tilde{T}(x_{ij})) < \delta$ für alle i und j. Für $x \in K$ gilt dann: es gibt $u_1, u_2 \in U$ mit

$$q_\beta(\tilde{T}(x)) = q_\beta(\sum_{j=1}^n (\lambda_{ij} \tilde{T}(x_{ij})) + \tilde{T}(u_1) + \tilde{T}(u_2)).$$

Ist nun $T_0 \in H$ und $\tilde{T}$ mit $\sup_{x \in F_0} q_\beta(\tilde{T}(x)) < \delta$ derart, dass $S = T_0 + \tilde{T} \in H$, dann gilt für jedes $u \in U :\ \tilde{T}(u) = S(u) - T_0(u)$ und

$$q_\beta(\tilde{T}(u)) \leq q_\beta(S(u)) + q_\beta(T_0(u)) < 2\epsilon/5$$

und für $x \in K$

$$q_\beta(\tilde{T}(x)) = q_\beta(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij}\tilde{T}(x_{ij}) + \tilde{T}(u_1) + \tilde{T}(u_2)) < \epsilon/5 + 4\epsilon/5 = \epsilon,$$

also gilt für $S = T_0 + \tilde{T}$, dass

$$S \in T_0 + \{T : \sup_{x\in K} q_\beta(T(x)) < \epsilon\}.$$

□

Satz 6.17.
Seien X und Y Frécheträume und $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ derart, dass der Limes $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)$ für alle $x \in X$ existiert. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $(T_n)_n$ konvergiert gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X.

Beweis. Die Folge $(T_n)_n$ ist beschränkt in der Topologie der einfachen Konvergenz und daher ist $H = \{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig (6.8). Sei H_1 der Abschluss von H in Y^X. Dann ist $T \in H_1$ und $H_1 \subset \mathcal{L}(X,Y)$ und H_1 ist gleichgradig stetig (siehe 6.14). Nach 6.16 folgt dann, dass $T_n \to T$ gleichmäßig auf den kompakten Teilmengen von X. □

Satz 6.18.
Seien X und Y Banachräume und $M \subseteq X$ von zweiter Kategorie in X. Ferner seien $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ derart, dass $(T_n(x))_n$ für jedes $x \in M$ eine Cauchyfolge in Y ist. Dann konvergiert T_n gegen ein T in $\mathcal{L}_c(X,Y)$.

Beweis. Sei $X_M = \langle M \rangle$. Dann ist $\overline{X_M} = X$. Wir betrachten nun die Einschränkungen von T_n auf X_M und erhalten die gewünschten Aussagen aus 6.14 und 6.17. □

Satz 6.19.
Sei X ein separabler, lokalkonvexer Raum und $(Y, (p_k)_{k\geq 1})$ metrisierbar. Sei ferner $H \subset \mathcal{L}(X,Y)$ gleichgradig stetig. Dann ist die Topologie der einfachen Konvergenz eingeschränkt auf H metrisierbar.

Beweis. Nach 6.15 genügt es die Topologie der einfachen Konvergenz auf einer totalen Teilmenge zu betrachten. Da X separabel ist, existiert eine abzählbare, totale Menge $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ von linear unabhängigen Vektoren x_n. Sei $S_n = \{x_l : l \leq n\}$ und

$$q_{n,k}(T) = \sup_{x\in S_n} p_k(T(x)).$$

Dann definieren diese abzählbar vielen Halbnormen die Topologie der einfachen Konvergenz auf H. □

Definition 6.20. Sei X ein lokalkonvexer Raum. Ein linearer Operator $T : X \longrightarrow Y$ heißt endlichdimensional, wenn es Vektoren $y_k \in X$ und lineare Funktionale $x'_k \in X'$, $k = 1, \dots, n$ gibt, sodass

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} x'_k(x) y_k \ , \ \forall x \in X.$$

X besitzt die Approximationseigenschaft , wenn sich die Identität in $\mathcal{L}_c(X,X)$ durch endlichdimensionale Operatoren approximieren lässt.

Satz 6.21. *Jeder Hilbertraum H besitzt die Approximationseigenschaft.*

Beweis. Nach 1.34 besitzt jeder Hilbertraum ein vollständiges Orthonormalsystem $\{x_\alpha : \alpha \in A\}$. Daher existiert für jedes $\epsilon > 0$ und für jedes $x \in X$ eine endliche Menge $F \subset A$, sodass

$$\|x - \sum_{\alpha \in F}(x, x_\alpha)x_\alpha\| < \epsilon.$$

Die Operatoren $T_F(x) = \sum_{\alpha \in F}(x, x_\alpha)x_\alpha$ sind orthogonale Projektionen, und es gilt $\|T_F\| = 1$, $\forall F \subset A$ endlich. Daher ist $\{T_F : F \subset A \text{ endlich}\}$ gleichgradig stetig und nach 6.18 folgt $T_F \to \mathrm{id}$ in $\mathcal{L}_c(H, H)$. □

Satz 6.22. *Sei X ein Fréchetraum mit Schauderbasis $(x_n, x_n')_{n \geq 1}$. Dann besitzt X die Approximationseigenschaft.*

Beweis. Die Operatoren

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k'(x)x_k$$

sind nach 5.13 (c) gleichgradig stetig und es gilt für jedes $x \in X$: $P_n(x) \to x$ bei $n \to \infty$. Also konvergiert P_n gegen die Identität in $\mathcal{L}_c(X, X)$ (siehe 6.17).

□

Bemerkung 6.23. Besitzt ein Fréchetraum nicht die Approximationseigenschaft, so besitzt er auch keine Schauderbasis. Es gibt separable Banachräume, die die Approximationseigenschaft nicht besitzen.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer in der Analysis häufig verwendeten Aussage:

Satz 6.24.
*Sei X ein normierter Raum. Dann ist die Einheitskugel des Dualraumes $B^\circ = \{x' \in X' : \|x'\| \leq 1\}$ schwach * kompakt.*

Beweis. Sei $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel in X. Die Einheitskugel des Dualraumes ist ein gleichgradig stetige Menge. Für ein fixes $x \in X$ ist die Menge $B_x = \{x' : |x'(x)| \leq 1\}$ schwach * abgeschlossen in X'. Daher ist auch

$$B^\circ = \bigcap_{x \in B} B_x$$

schwach * abgeschlossen. Nun verwenden wir noch 6.15. □

Beispiele 6.25.
Komplexe Borelmaße und harmonische Funktionen: Sei μ ein komplexes Borelmaß auf $[-\pi, \pi]$ und

$$P[d\mu](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - t) + r^2}\, d\mu(t),$$

für $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$. Man nennt $P[d\mu]$ das Poisson-Integral von μ. Es gilt

$$\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} = \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} = (1 + ze^{-it}) \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-int} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int},$$

diese Reihe konvergiert für ein fixes $z = re^{i\theta}$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}$. Daher ist die Funktion

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, d\mu(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}\, d\mu(t)\right) z^n\right)$$

holomorph auf $\mathbb{D}$. Ferner gilt $P[d\mu] = \Re g$ und daher ist $P[d\mu]$ harmonisch auf $\mathbb{D}$, d.h.

$$\Delta P[d\mu] = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) P[d\mu] = 0.$$

Ist umgekehrt u eine harmonische Funktion auf $\mathbb{D}$ mit

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta = C < \infty,$$

dann existiert ein komplexes Borelmaß μ auf $[-\pi,\pi]$ derart, dass

$$u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, d\mu(t).$$

Um diese Aussage zu beweisen, verwenden wir den vorigen Satz: sei dazu $\mu_r(-\pi) = 0$ und

$$\mu_r(t) = \int_{-\pi}^{t} u(re^{i\theta})\, d\theta.$$

Sei $-\pi = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \pi$ eine beliebige Partition des Intervalls $[-\pi,\pi]$. Dann gilt die Abschätzung

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu_r(t_k) - \mu_r(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{-\pi}^{t_k} u(re^{i\theta})\, d\theta - \int_{-\pi}^{t_{k-1}} u(re^{i\theta})\, d\theta \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |u(re^{i\theta})|\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})|\, d\theta \leq C,$$

für jedes $0 < r < 1$.
Somit sind die Funktionen $\{\mu_r : 0 < r < 1\} \subset (\mathcal{C}[-\pi,\pi])'$ von gleichmäßiger beschränkter Variation. Die Maße $d\mu_r = \mu_r\, dt$ liegen alle in der Kugel mit Radius C des Dualraumes $(\mathcal{C}[-\pi,\pi])'$. Diese Kugel ist nach 6.24 schwach * kompakt, aber auch metrisierbar (siehe 6.19), daher ist die Kugel auch schwach * folgenkompakt und es existiert eine Folge $(r_n)_n$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, d\mu_{r_n}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, d\mu(t),$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}[-\pi,\pi]$, man sagt auch μ ist der schwach * Limes von (μ_{r_n}). Außerdem kann man zeigen, dass dieser Limes eindeutig bestimmt ist. Setzt man nun für φ den Poisson Kern ein, so erhält man

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, d\mu(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, d\mu_{r_n}(t)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}\, u(r_n e^{it})\, dt = \lim_{n\to\infty} u(r_n r e^{i\theta}) = u(re^{i\theta}).$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile eine Identität für harmonische Funktionen verwendet, die sich aus der Lösung des Dirichlet-Problems ergibt, nähere Details siehe [G], [R1], [Has2]. Also ist u das Poisson-Integral des Maßes μ.

Übungen

41. Man zeige: Jede kompakte Menge in einem lokalkonvexen Raum ist auch beschränkt.

42. Sei $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ eine unendliche Matrix mit folgenden Eigenschaften:

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0\ ,\ \ k \in \mathbb{N} \text{ und } M = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty.$$

Man setze $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ und $A(\xi) = \eta$, wo $\xi = (x_k)_{k\geq 1}$ und $\eta = (y_k)_{k\geq 1}$. Beweise: $A \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$ und $\|A\| = M$.

43. Man beweise: Ist $A \in \mathcal{L}(c_0, c_0)$, so gibt es eine unendliche Matrix $(a_{nk})_{n,k\geq 1}$ mit den Eigenschaften: $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ und $A(\xi) = \eta$, wo $\xi = (x_k)_{k\geq 1}$ und $\eta = (y_k)_{k\geq 1}$, und

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0\ ,\ \ k \in \mathbb{N} \text{ und } \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty.$$

Hinweis: Man verwende den Satz von Banach-Steinhaus (siehe auch [Ma]).

44. Sei $f \in \mathcal{C}[0, 2\pi]$ und

$$s_n(x; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)(\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx))\, dt$$

die n-te Partialsumme der Fourierentwicklung von f. Man beweise:

$$s_n(x; f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, \frac{\sin[(2n+1)(t-x)/2]}{\sin[(t-x)/2]}\, dt.$$

45. Sei E der Banachraum aller stetigen, periodischen Funktionen mit Periode 2π und der Norm $\|f\| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [0, 2\pi]\}$. Man zeige: $u_n(f) = s_n(0; f)$ ist ein stetiges lineares Funktional mit

$$\|u_n\| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)} \right| dt.$$

Hinweis: Man verwende Aufgabe 44.

46. Man zeige: Es gibt eine stetige Funktion f, deren Fourierreihe im Punkt 0 divergiert.

Anleitung: Man verwende Aufgabe 45. und den Satz von Banach-Steinhaus (angenommen $\sup_n |s_n(0;f)| < \infty$ für alle $f \in E$, dann wäre $\sup_n \|u_n\| < \infty$.

47. Man zeige direkt, dass die Koeffizientenfunktionale der Schauderbasis $\{1, z, z^2, \dots\}$ in $\mathcal{H}[\mathbb{D}]$ stetig sind. Ferner finde man mit der Methode von 4.5 (b) eine Integraldarstellung für die Koeffizientenfunktionale.

48. Sei $f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k$ für $n = 0, 1, 2, \dots$. Man zeige: $[f_n)_{n\geq 0}$ bildet eine Schauderbasis in $\mathcal{H}(D_R)$, wobei $D_R = \{z : |z| < R\}$ und $0 < R < 1$. Außerdem finde man eine Integraldarstellung für die zugehörigen Koeffizientenfunktionale. Bildet $(f_n)_{n\geq 0}$ auch eine Schauderbasis in $\mathcal{H}(\mathbb{D})$?

49. Sei E der Vektorraum aller stetigen, reellwertigen Funktionen f auf $[0, 1]$, die in einer Umgebung von $t = 0$ (abhängig von f) verschwinden, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz erzeugt von der Norm $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$. Sei $L_n(f) = nf(n^{-1})$ für $f \in E$ und $n \in \mathbb{N}$. Man zeige: $\{L_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{L}_s(E, \mathbb{R})$, aber nicht gleichgradig stetig.

50. Man gebe ein Beispiel einer nicht gleichgradig stetigen Familie von stetigen, reellwertigen Funktionen auf $[0, 1]$.

51. Sei X ein reflexiver Banachraum und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in X derart, dass $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ schwach relativ kompakt ist. Man zeige: es existiert eine schwach konvergente Teilfolge von $(x_n)_{n\geq 1}$.
Anleitung: man ersetze X durch den separablen Teilraum $E = \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ und verwende den Satz von Alaoglu-Bourbaki.

52. Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $[0, 1]$. Man zeige es existiert eine Folge natürlicher Zahlen $(N_k)_{k\geq 1}$ derart, dass der Limes

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{N_k} \sum_{n=1}^{N_k} g(x_n)$$

für alle $g \in \mathcal{C}[0, 1]$ mit $\sup\{|g(x)| : x \in [0, 1]\} \leq 1$ existiert.
Anleitung: man verwende den Satz von Alaoglu-Bourbaki.

7 Kompakte Operatoren

7.1 Definition, Beispiele und wichtigste Eigenschaften

Definition 7.1. Seien X, Y normierte Räum und $A : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. A heißt kompakt , wenn es eine Nullumgebung U in X gibt, sodass $A(U)$ in Y relativ kompakt ist (d.h. $\overline{A(U)}$ ist kompakt in Y).

Definition 7.2. Ein metrischer Raum E heißt präkompakt , falls es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n$ in E gibt, so dass $E = \bigcup_{j=1}^{n} U_\epsilon(x_j)$ gilt.

Bemerkung 7.3. Für einen metrischen Raum E sind äquivalent: (i) E ist kompakt; (ii) jede Folge in E besitzt eine konvergente Teilfolge; (iii) E ist vollständig und präkompakt. (siehe [MV])
Es folgt sofort aus der Definition, dass jeder kompakte Operator auch stetig ist.
Ferner gilt: A ist genau dann kompakt, wenn jede beschränkte Menge in eine relativ kompakte Menge übergeführt wird.
Weiters gilt: ist X ein Banachraum, so ist A genau dann kompakt, wenn für jede beschränkte Folge $(x_n)_n$ in X die Folge $(A(x_n))_n$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

Satz 7.4.
Die kompakten Operatoren auf einem Banachraum bilden ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{L}(X, X)$ versehen mit der Operatornorm.

Beweis. Ist $T : X \longrightarrow X$ stetig und $A : X \longrightarrow X$ kompakt, dann sind $T \circ A$ und $A \circ T$ ebenfalls kompakt. Sind $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, X)$ kompakt, dann auch $\lambda A_1 + \mu A_2$. Sei nun $(A_n)_n$ eine Folge kompakter Operatoren mit $\|A_n - A\| \to 0$ bei $n \to \infty$ und $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Sei $M \subset X$ beschränkt. Dann ist $A_n(M)$ für jedes n relativ kompakt, also auch präkompakt, weil X vollständig ist, d.h. für ein festes n und ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ existieren $x_1, \dots, x_k \in M$, sodass für jedes $x \in M$ ein $x_j\,(1 \leq j \leq n)$ existiert mit $\|A_n x_j - A_n x\| < \epsilon/3$. Nach Voraussetzung existiert für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|A_n x - Ax\| \leq \epsilon/3$ für jedes $n \geq n_0$ und für jedes $x \in M$. Somit existiert für jedes $x \in M$ ein $j\,(1 \leq j \leq k)$ mit

$$\|Ax - Ax_j\| \leq \|Ax - A_n x\| + \|A_n x - A_n x_j\| + \|A_n x_j - Ax_j\| \leq \epsilon,$$

also ist $A(M)$ relativ kompakt. □

Satz 7.5. *Ein normierter Raum X ist genau dann endlichdimensional, wenn seine abgeschlossene Einheitskugel U kompakt ist.*

Beweis. Ist X endlichdimensional, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Heine-Borel.
Ist andererseits U kompakt, so auch $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Für $x' \in X'$ ist $X \setminus \ker(x')$ offen, und es gilt $S \subset \bigcup_{x' \in X'} (X \setminus \ker(x'))$ (siehe 3.6). Daher gibt es $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$ mit

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} (X \setminus \ker(x'_j)).$$

Sei $A(x) = (x'_1(x), \ldots, x'_n(x))$. Dann ist A eine injektive Abbildung von X nach $\mathbb{C}^n$. Somit ist X endlichdimensional. $\square$

Korollar 7.6. *Ist X ein unendlichdimensionaler Banachraum und A ein kompakter Operator auf X, dann ist A nicht stetig invertierbar.*

Beispiele 7.7. (a) Ist X endlichdimensional, dann ist jeder lineare Operator auf X kompakt.
(b) Die Operatoren

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n} x'_n(x) x_n \ , \ x'_k \in X' \ , \ x_k \in X \ , \ k = 1, \ldots, n$$

haben endlichdimensionales Bild und sind daher kompakt.
(c) Sei $G[0,1] = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : \int_0^1 |f(t)|^2 \, dt < \infty\}$ und

$$A_0(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \, dy \text{ für } K \in \mathcal{C}([0,1] \times [0,1]).$$

Dann ist $A_0 : G[0,1] \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$. Sei ferner $U = \{f \in G[0,1] : \|f\|_2 \leq 1\}$. Wir zeigen: $A_0(U)$ ist relativ kompakt in $\mathcal{C}[0,1]$, dann folgt A_0 ist kompakt. Dazu verwenden wir den Satz von Arzela-Ascoli : ist $B \subseteq \mathcal{C}[0,1]$ gleichgradig stetig (d.h. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ mit $|f(t) - f(t')| < \epsilon$ für alle t, t' mit $|t - t'| < \delta$ und für alle $f \in B$) und beschränkt, dann ist B relativ kompakt in $\mathcal{C}[0,1]$.
Zunächst gilt für $f \in U$:

$$\begin{aligned} \|A_0(f)\|_\infty &\leq \int_0^1 |K(x,y)| \, |f(y)| \, dy \leq \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 \, dy \right)^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

somit ist $A_0(U)$ beschränkt. Weiters gilt

$$\begin{aligned} |A_0(f)(x) - A_0(f)(x')| &\leq \left(\int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 |K(x,y) - K(x',y)|^2 \, dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

und weil K gleichmäßig stetig ist (d.h. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ mit $|K(x,y) - K(x',y)| < \epsilon$ für jedes $y \in [0,1]$ und für jedes $x, x' \in [0,1]$ mit $|x - x'| < \delta$), folgt

$$|A_0(f)(x) - A_0(f)(x')| \leq \epsilon\ , \ \text{für} |x - x'| < \delta \text{ und } \forall f \in U.$$

Daher ist $A_0(U)$ relativ kompakt in $\mathcal{C}[0,1]$. Sei $\overline{A_0}$ die stetige Fortsetzung von A_0 auf $L^2[0,1]$. Dann ist $\overline{A_0} : L^2[0,1] \longrightarrow \mathcal{C}[0,1]$ ebenfalls kompakt. Die Einbettung $i : \mathcal{C}[0,1] \longrightarrow L^2[0,1]$ ist stetig und daher ist der Operator $A = i \circ \overline{A_0}$ ebenfalls kompakt.

Der folgende Satz zeigt, dass man die Kompaktheit eines Operators als Verschärfung der Stetigkeit auffassen kann.

Satz 7.8.
Sei X ein separabler, reflexiver Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X,X)$. A ist genau dann kompakt, wenn jede schwache Cauchy-Folge in eine stark konvergente Folge übergeführt wird.

Beweis. Sei $A \in \mathcal{L}(X,X)$ kompakt. Ist $(x_n)_n$ eine schwache Cauchy-Folge in X, dann ist für jedes $x' \in X'$ die Folge $(x'(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, daher ist $\sup_n |x'(x_n)| < \infty$ für jedes $x' \in X'$ und wegen 6.11 $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Also besitzt die Folge $(A(x_n))_n$ eine (stark) konvergente Teilfolge. Andererseits ist aber die Folge $x'(A(x_n))_n$ für jedes $x' \in X'$ ebenfalls eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$. Da die schwache Topologie auf X Hausdorff'sch ist, kann $(A(x_n))_n$ nur einen Limes haben, und $(A(x_n))_n$ ist stark konvergent.
Zur Umkehrung haben wir zu zeigen, dass jede Folge in $A(M)$ eine konvergente Teilfolge besitzt, dabei ist $M \subset X$ eine beliebige beschränkte Teilmenge von X. Da $X'' \cong X$ gilt, ist die beschränkte Menge $M \subset \mathcal{L}_s(X', \mathbb{C})$ gleichgradig stetig (siehe 6.8). Nach 6.19 ist daher die schwache Topologie auf X eingeschränkt auf M metrisierbar, in dieser Topologie ist M aber auch schwach (= schwach *) relativkompakt (6.15 Satz von Alaoglu-Bourbaki). Sei nun $(y_n)_n$ eine Folge in $A(M)$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_n$ in M mit $y_n = A(x_n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(x_n)_n$ besitzt eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$, die dann auch eine schwache Cauchy-Folge ist und nach Voraussetzung durch A in eine stark konvergente Folge übergeführt wird, also ist $(A(x_{n_k}))_k$ stark konvergent und A daher kompakt. □

Satz 7.9.
Seien H_1 und H_2 separable Hilberträume, $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:
(i) A ist kompakt;
(ii) A^*A ist kompakt;
(iii) A^* ist kompakt.

Beweis. Aus (i) folgt (ii) (siehe 7.4). Sei A^*A kompakt und $(x_n)_n$ eine schwache Cauchyfolge in H_1. Dann konvergiert $(A^*Ax_n)_n$ stark. Wie im vorigen Beweis sieht man, dass eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ existiert. Sei x_0 der schwache Limes dieser Teilfolge. Dann ist $(A^*A(x_n - x_0))_n$ eine starke Nullfolge und es gilt

$$\|A(x_n - x_0)\|^2 = (A(x_n - x_0), A(x_n - x_0)) = (A^*A(x_n - x_0), x_n - x_0) \to 0,$$

daher ist $(Ax_n)_n$ stark konvergent und A kompakt nach 7.8. Also sind (i) und (ii) äquivalent.
Ist nun A kompakt, dann auch $AA^* = (A^*)^*A^*$ somit aber auch A^*. Analoges gilt auch für die Umkehrung. □

7.2 Spektrum und Resolvente eines stetigen linearen Operators

Definition 7.10. Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X, X)$.
(a) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \,\text{nicht injektiv}\} = \sigma_p(A)$ ist das Punktspektrum von A.
(b) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \,\text{injektiv, nicht surjektiv}\,, [(\lambda I - A)(X)]^- = X\} = \sigma_c(A)$ ist das kontinuierliche Spektrum von A.
(c) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \,\text{injektiv}\,, [(\lambda I - A)(X)]^- \neq X\} = \sigma_r(A)$ ist das Restspektrum von A.
(d) $\{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \,\text{nicht stetig invertierbar}\} = \sigma(A)$ ist das Spektrum von A.
$\mathbb{C} \setminus \sigma(A) = \rho(A)$ ist die Resolventenmenge von A.
Die Elemente $\lambda \in \sigma_p(A)$ heißen Eigenwerte von A (für $\lambda \in \sigma_p(A)$ existiert ein $x \neq 0$ mit $Ax = \lambda x$). Diese x heißen Eigenvektoren und $\ker(\lambda I - A)$ der Eigenraum zum Eigenwert λ.

Bemerkung 7.11. Da eine stetige bijektive lineare Abbildung $T : X \longrightarrow X$ nach 5.10 auch eine stetige Inverse besitzt, gilt

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

als disjunkte Vereinigung.

Satz 7.12. *Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(A)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$ und es gilt $|\lambda| \leq \|A\|$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\rho(A)$ offen ist: für $\lambda \in \rho(A)$ ist $\lambda I - A$ stetig invertierbar. Sei $B_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$. Dann ist $\|B_\lambda\|^{-1} = \alpha > 0$. Sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu| < \alpha$. Wir zeigen $(\lambda + \mu)I - A$ ist stetig invertierbar, dann ist $\rho(A)$ offen. Es gilt

$$(\lambda + \mu)I - A = \lambda I - A + \mu I = (\lambda I - A)[I + \mu(\lambda I - A)^{-1}] = (\lambda I - A)(I + \mu B_\lambda).$$

Formal gilt

$$(I + \mu B_\lambda)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\mu B_\lambda)^k.$$

Nach Wahl von μ erhalten wir die Abschätzung

$$\| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\mu B_\lambda)^k \| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|^k \|B_\lambda\|^k < \infty.$$

Die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\mu B_\lambda)^k$ bilden eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(X, X)$ und wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{L}(X, X)$ (5.2) ist $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (\mu B_\lambda)^k \in \mathcal{L}(X, X)$. Also ist $\sigma(A)$ abgeschlossen. Ist weiters $\eta \in \mathbb{C}$ und $|\eta| > \|A\|$, dann ist $I - \frac{A}{\eta}$ stetig invertierbar, denn es gilt

$$\left(I - \frac{A}{\eta} \right)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{A}{\eta} \right)^k.$$

Also ist auch $\eta I - A$ invertierbar, d.h. für $\lambda \in \sigma(A)$ gilt $|\lambda| \leq \|A\|$. Somit ist $\sigma(A)$ auch beschränkt. $\square$

Beispiele 7.13. **(a)** Ist X endlichdimensional, $A \in \mathcal{L}(X, X)$, dann gilt $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, weil jeder injektive Operator schon bijektiv ist.

(b) Sei $X = \mathcal{C}[0,1]$ und $(Af)(t) = t\,f(t)$ für $f \in X$. Wie man leicht sieht, folgt aus $\lambda \in \sigma(A)$, dass $|\lambda| \leq 1$. Weiters ist $\lambda I - A$ stets injektiv. Für $\lambda \notin [0,1]$ ist $\lambda I - A$ surjektiv, weil $(\lambda I - A)(f(t)/(\lambda - t)) = f(t)$ gilt. Ist $g \in (\lambda I - A)(X)$, dann gilt $g(\lambda) = 0$ und daher ist $[(\lambda I - A)(X)]^- \neq X$. Somit ist $\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0,1]$.

(c) Sei $X = l^2$ und $A \in \mathcal{L}(X, X)$ der shift-Operator $A(\xi) = (x_2, x_3, \dots)$ für $\xi = (x_1, x_2, \dots)$. Es gilt $\|A\| = 1$ und daher ist $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$. Aus der Bedingung $(\lambda I - A)(\xi) = 0$ folgt sofort $x_{k+1} = \lambda^k x_1$ für $k \geq 0$. Also besteht der Kern von $(\lambda I - A)$ aus allen Folgen $\xi \in l^2$ der Gestalt $\xi = (c, \lambda c, \lambda^2 c, \dots)$, wobei $c \in \mathbb{C}$ beliebig ist und $|\lambda| < 1$, d.h. $\sigma_p = \{\lambda : |\lambda| < 1\}$, die Eigenräume sind alle ein-dimensional; nach 7.9 ist $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda| \leq 1\}$.
Nun behaupten wir, dass $\sigma_c(A) = \{\lambda : |\lambda| = 1\}$ und $\sigma_r(A) = \emptyset$. Dazu seien $\eta = (y_k)_{k \geq 1} \in l^2$ und $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 < \epsilon^2$ und es existieren $x_k \in \mathbb{C}$ mit $\lambda x_k - x_{k+1} = y_k$ für $k = 1, \dots, n$, dabei setzen wir $x_{n+1} = 0$. Für $\xi = (x_1, \dots, x_{n+1}, 0, \dots)$ folgt

$$\|(\lambda I - A)\xi - \eta\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k - x_{k+1} - y_k|^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2} < \epsilon,$$

das bedeutet, dass $\eta \in [(\lambda I - A)(X)]^-$ und $\lambda \in \sigma_c(A)$, sowie $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Definition 7.14. Wir definieren eine operatorwertige Funktion $R_A : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X, X)$ durch $R_A(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$ für $\lambda \in \rho(A)$ in der Resolventenmenge. R_A heißt Resolvente von A .

Bemerkung 7.15.
(a) Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ gilt

$$R_A(\lambda) - R_A(\mu) = (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu).$$

Das liefert die Rechnung

$$\begin{aligned} R_A(\lambda) = R_A(\lambda)(\mu I - A) R_A(\mu) &= R_A(\lambda)((\lambda I - A) + (\mu - \lambda) I) R_A(\mu) \\ &= R_A(\mu) + (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu). \end{aligned}$$

(b) Ist $\lambda \in \rho(A)$ und $|\lambda - \mu| < |R_A(\lambda)\|^{-1}$, dann gilt

$$R_A(\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k [R_A(\lambda)]^{k+1},$$

man sagt daher: R_A ist holomorph auf $\rho(A)$.
Dazu berechnet man

$$\mu I - A = \lambda I - A + (\mu - \lambda) I = (\lambda I - A)[I + (\mu - \lambda) R_A(\lambda)$$

und bildet links und rechts die Inversen:

$$R_A(\mu) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\mu - \lambda)^k (R_A(\lambda))^k \right) R_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda - \mu)^k (R_A(\lambda))^{k+1}.$$

Wir werden später einen allgemeinen Spektralsatz für selbstadjungierte (unbeschränkte) Operatoren auf einem Hilbertraum behandeln.

7.3 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren auf einem Hilbertraum

In der Folge sei H immer ein separabler Hilbertraum.

Definition 7.16. Sei $A : H \longrightarrow H$ ein stetiger linearer Operator und $y \in H$ fix. Dann ist die Abbildung $x \mapsto (Ax, y)$ ein stetiges lineares Funktional auf H. Daher existiert nach 1.16 ein eindeutig bestimmtes $y^* \in H$ mit $(Ax, y) = (x, y^*)$. Durch die Zuordnung $A^*y = y^*$ wird ein linearer Operator A^* definiert, der adjungierte Operator zu A. Der Operator A heißt selbstadjungiert , falls $A = A^*$ ist.

Bemerkung 7.17.
(a) Es gilt immer $A^{**} = A$. Weiters ist $\|A\| = \|A^*\|$ und $\|A^*A\| = \|A\|^2$.
(b) Sei $A \in \mathcal{L}(H, H) = \mathcal{L}(H)$ und H ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$, weiters sei $(Ax, x) = 0$ für alle $x \in H$. Dann ist $A = 0$. Es gilt

$$0 = (A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y) = 2[(Ax, y) + (Ay, x)],$$

also ist $(Ax, y) + (Ay, x) = 0$, ersetze nun x durch ix, dann folgt $i(Ax, y) - i(Ay, x) = 0$, daher insgesamt $(Ax, y) = 0$ für alle $x, y \in H$. Somit ist $A = 0$.
(c) $A = A^* \Leftrightarrow (Ax, x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$.
Ist $A^* = A$, dann folgt $(Ax, x)^- = (x, Ax) = (Ax, x) \in \mathbb{R}$. Ist umgekehrt $(Ax, x) = (Ax, x)^-$ für alle $x \in H$, dann ist auch $(Ax, x) = (x, A^*x)^- = (A^*x, x)$, also $((A - A^*)x, x) = 0$ für alle $x \in H$. Nach (b) ist $A = A^*$.

Satz 7.18.
Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Beweis. Sei $N_A = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. Dann folgt $N_A \leq \|A\|$. Andererseits ist

$$2[(Ax, y) + (Ay, x)] = (A(x + y), x + y) - (A(x - y), x - y)$$

und wegen $A^* = A$ und der Parallelogrammregel

$$|4\Re(Ax, y)| \leq N_A(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = 2N_A(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Es gibt ein $\theta \in \mathbb{R}$ mit $e^{-i\theta}(Ax, y) = |(Ax, y)|$. Ersetzt man y durch $e^{-i\theta}y$, dann folgt

$$2|(Ax, y)| \leq N_A(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Für $t > 0$ ersetze man x druch tx und y durch y/t. Dann erhält man

$$2|(Ax, y)| \leq N_A \left(t^2\|x\|^2 + \frac{1}{t^2}\|y\|^2 \right).$$

Wir fassen die rechte Seite dieser Ungleichung als Funktion in t auf und erhalten bei Ableitung nach t

$$2t\|x\|^2 - \frac{2}{t^3}\|y\|^2,$$

daher wird die rechte Seite der letzten Ungleichung minimal, falls $t^2 = \|y\|/\|x\|$. Damit erhalten wir

$$2|(Ax, y)| \leq 2N_A\|x\|\,\|y\|,$$

also $\|A\| \leq N_A$. $\square$

Satz 7.19.
Ist $A \in \mathcal{L}(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator, $A \neq 0$, dann existiert ein Eigenvektor $x_0 \in H$ mit $\|x_0\| = 1$ und

$$|(Ax_0, x_0)| = \|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Der dazugehörige Eigenwert λ_0 ist reell und es gilt $|\lambda_0| = \|A\|$.

Beweis. Nach 7.18 gilt $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|$. Daher gibt es eine Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in H mit $\|x_n\| = 1$ und $\lim_{n\to\infty} |(Ax_n, x_n)| = \|A\|$. Die inneren Produkte (Ax_n, x_n) sind reell, daher existiert eine Teilfolge, die wir wieder mit $(x_n)_{n\geq 1}$ bezeichnen, so dass der $\lim_{n\to\infty}(Ax_n, x_n) = \lambda_0$ existiert. Es gilt dann $\lambda_0 = \|A\|$ oder $\lambda_0 = -\|A\|$.
Für diese Folge gilt

$$0 \leq \|Ax_n - \lambda_0 x_n\|^2 = \|Ax_n\|^2 - 2\lambda_0(Ax_n, x_n) + \lambda_0^2\|x_n\|^2 \leq \|A\|^2 - 2\lambda_0(Ax_n, x_n) + \|A\|^2,$$

und beim Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda_0 x_n\| = 0.$$

Da A kompakt ist und $(x_n)_{n\geq 1}$ eine beschränkte Folge ist, existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_k$ mit $\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = x$. Daher gilt auch $\lim_{k\to\infty} \lambda_0 x_{n_k} = x$, und weil $\lambda_0 \neq 0$ ist, existiert auch $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$ mit $\lambda_0 x_0 = x$. Weil A stetig ist, folgt

$$\lim_{k\to\infty} Ax_{n_k} = Ax_0,$$

und somit $x = \lambda_0 x_0 = Ax_0$. Daher ist x_0 ein Eigenvektor von A mit Eigenwert λ_0. $\square$

Theorem 7.20. *(Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren)*
Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein kompakter selbstadjungierter Operator. Dann gilt

$$Ax = \sum_{0\leq k<\nu(A)} \lambda_k (x, x_k) x_k\ ,\ \forall x \in H,$$

dabei sind alle λ_k reell, $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots$. Alle λ_k sind Eigenwerte $\neq 0$ von A, jeder mit seiner Vielfachheit gezählt, $\nu(A)$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen Eigenwerte von A; x_k sind die zugehörigen, normierten Eigenvektoren und $\{x_k\}$ bildet ein vollständiges Orthonormalsystem in $\overline{imA}$.

Beweis. Zunächst ist jeder Eigenwert von A reell: ist $Ax = \lambda x$ und $x \neq 0$, dann folgt $\lambda(x,x) = (Ax,x) = (x,Ax) = (x,\lambda x) = \overline{\lambda}(x,x)$. Also ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sei $H_\lambda = \{x \in H : Ax = \lambda x\}$ der Eigenraum zum Eigenwert λ. Da A stetig, ist H_λ abgeschlossen. Nach 1.34 existiert ein vollständiges Orthonormalsystem in H_λ aus Eigenvektoren von A.
Sind $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Eigenwerte, dann gilt $H_{\lambda_1} \perp H_{\lambda_2}$, weil für $x \in H_{\lambda_1}$ und $y \in H_{\lambda_2}$ folgendes gilt: $\lambda_1(x,y) = (Ax,y) = (x,Ay) = (x,\lambda_2 y) = \lambda_2(x,y)$, also $(x,y) = 0$.
Für einen Eigenwert $\lambda \neq 0$ ist der dazugehörige Eigenraum H_λ immer endlich-dimensional, denn wäre H_λ unendlich-dimensional, dann gäbe es ein unendliches Orthonormalsystem $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ mit $Ax_\alpha = \lambda x_\alpha$ und weil die Einschränkung von A auf H_λ ebenfalls kompakt ist, gäbe es eine konvergente Teilfolge von $(Ax_\alpha)_\alpha$, was einen Widerspruch zu $\|\lambda x_{\alpha_1} - \lambda x_{\alpha_2}\|^2 = 2|\lambda|^2$ für $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ergibt.
Nun sind zwei Fälle möglich: (i) es gibt endlich viele Eigenwerte $\neq 0$; (ii) es gibt unendlich viele Eigenwerte $\neq 0$.
(i) In diesem Fall ist
$$H = H_{\lambda_0} \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_{k-1}} \oplus M,$$
wobei $M = (H_{\lambda_0} \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_{k-1}})^\perp$. Wir behaupten $A(M) \subseteq M$: für $y \in M$ gilt $(Ay,x) = (y,Ax) = 0$, für alle $x \in H_{\lambda_0} \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_{k-1}}$, weil $Ax \in H_{\lambda_0} \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_{k-1}}$, also ist $Ay \in M$.
Die Einschränkung A_M von A auf M ist wieder kompakt und selbstadjungiert: für $x, y \in M$ gilt $(A_M x, y) = (Ax,y) = (x,Ay) = (x,A_M y)$, weil $A(M) \subseteq M$. Wir behaupten nun, dass $A_M = 0$. Angenommen $A_M \neq 0$, dann gibt es nach 7.19 ein $\lambda \neq 0$ mit $A_M x = \lambda x$ für ein $x \neq 0$, also wäre $x \in H_\lambda$, Widerspruch.
Sei $P_i : H \longrightarrow H_{\lambda_i}$ die orthogonale Projektion. Dann gilt nach 1.14
$$x = P_0 x + P_1 x + \cdots + P_{k-1} x + y,$$
mit $Ay = 0$, also folgt
$$Ax = \lambda_0 P_0 x + \lambda_1 P_1 x + \cdots + \lambda_{k-1} P_{k-1} x.$$
(ii) Für jedes $\epsilon > 0$ ist $\{\lambda_i : \lambda_i \text{ Eigenwert von } A \text{ mit } |\lambda_i| \geq \epsilon\}$ eine endliche Menge, denn sonst gäbe es ein unendliches Orthonormalsystem $\{x_i\}$ mit $Ax_i = \lambda_i x_i$ und die Folge $(Ax_i)_i$ müsste eine konvergente Teilfolge enthalten, es gilt jedoch
$$\|Ax_k - Ax_l\|^2 = \|\lambda_k x_k - \lambda_l x_l\|^2 = |\lambda_k|^2 + |\lambda_l|^2 \geq 2\epsilon^2,$$
Widerspruch!
Seien $\lambda_0, \ldots, \lambda_{k-1}$ die Eigenwerte mit $|\lambda_i| \geq \epsilon$ und sei $M = (H_{\lambda_0} \oplus \cdots \oplus H_{\lambda_{k-1}})^\perp$. Die Einschränkung A_M von A auf M ist selbstadjungiert und kompakt, daher existiert nach 7.19 ein Eigenvektor x mit $A_M x = \lambda x$ und $|\lambda| = \|A_M\|$, es gilt somit auch $Ax = \lambda x$. Also ist $x \in (H_{\lambda_i})^\perp$ und $|\lambda| = \|A_M\| < \epsilon$. Es gilt
$$Ax = Ax_1 + A_M x_2,\ x_1 \in M^\perp\ ,\ x_2 \in M,$$
weil $Ax_1 = \lambda_0 P_0 x + \cdots + \lambda_{k-1} P_{k-1} x$ folgt nun
$$\|A_M x_2\| = \|Ax - \lambda_0 P_0 x - \cdots - \lambda_{k-1} P_{k-1} x\| < \epsilon \|x\|.$$

Bei $\epsilon \to 0$ erhalten wir

$$Ax = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j x.$$

Sei $\{\psi_1, \dots \psi_k\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H_{λ_i}. Dann ist

$$AP_i(x) = \lambda_i P_i(x) = \lambda_i \sum_{j=1}^{k} (x, \psi_j)\psi_j.$$

Die Folge der Eigenwerte kann wie folgt geordnet werden:

$$|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots,$$

weil für jedes $\epsilon > 0$ nur endlich viele λ_i die Eigenschaft $|\lambda_i| \geq \epsilon$ haben. $\square$

Bemerkung 7.21.
Es folgt aus der Orthogonalität der Eigenvektoren x_k und der Bessel'schen Ungleichung 1.23

$$\|Ax - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x, x_k) x_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k (x, x_k)|^2 \leq (\|x\| \sup_{k>n} |\lambda_k|)^2,$$

da $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Reihe daher in der Operatornorm gegen A.

Beispiele 7.22. Sei a eine stetige reellwertige Funktion mit $a(-t) = a(t)$. Der Operator

$$Af(x) = \int_0^1 a(x-t) f(t)\, dt \ , \ f \in L^2(\mathbb{T}),$$

ist nach 7.7 c kompakt und selbstadjungiert. Für $\varphi_k(t) = e^{2\pi i k t}$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$A\varphi_k(x) = \int_0^1 a(x-t) e^{2\pi i k t}\, dt = \int_0^1 a(-t) e^{2\pi i k t} e^{2\pi i k x}\, dt = \hat{a}(k) \varphi_k(x).$$

Die Eigenwerte von A sind daher die Fourierkoeffizienten von a. Nach 7.20 gilt

$$Af(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{a}(k) \hat{f}(k)\, e^{2\pi i k x}.$$

Satz 7.23.
Sei A ein kompakter, selbstadjungierter Operator auf einem unendlich-dimensionalen, separablen Hilbertraum H und $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ die Eigenwerte von A. Dann ist das Spektrum von A

$$\sigma(A) = \{\lambda_k \ : \ k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}.$$

Beweis. Es gilt $\lambda_k \in \sigma(A)$, für alle $k \in \mathbb{N}$; wäre $0 \notin \sigma(A)$, dann würde A^{-1} existieren und stetig sein, sowie $I = AA^{-1}$ ein kompakter Operator sein, also wäre die Einheitskugel in H kompakt und H daher endlich-dimensional, Widerspruch.
Sei nun $\mu \neq \lambda_k, 0$, $\forall k$ und

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x, x_k) x_k,$$

und $(y_j)_j$ die Ergänzung von $(x_k)_k$ auf ein vollständiges Orthonormalsystem von ganz H. Dann gilt

$$Ix = \sum_{k=1}^{\infty}(x, x_k)x_k + \sum_j (x, y_j)y_j,$$

und der Operator

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k - \mu}(x, x_k)x_k - \frac{1}{\mu}\sum_j (x, y_j)y_j$$

hat die Norm $\|B\| = \sup\{1/|\lambda_k - \mu|, 1/|\mu|\}$ und ist daher stetig. Außerdem ist B der Inverse zu $A - \mu I$, weil für alle k und j gilt $B(A-\mu I)x_k = B(\lambda_k - \mu)x_k = x_k$ und $B(A-\mu I)y_j = -B\mu y_j = y_j$. Daher ist $B = (A - \mu I)^{-1}$ und $\mu \notin \sigma(A)$.

□

7.4 Die kanonische Darstellung eines kompakten Operators

Satz 7.24.
Seien H_1 und H_2 separable Hilberträume und $A : H_1 \longrightarrow H_2$ ein kompakter, linearer Operator. Dann gibt es eine fallende Nullfolge $(s_n)_{n\geq 0}$ in $\mathbb{R}^+$ und Orthonormalsysteme $(e_n)_{n\geq 0}$ in H_1 und $(f_n)_{n\geq 0}$ in H_2, so dass

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, e_n)f_n \ , \ x \in H_1,$$

wobei die Reihe bezüglich der Operatornorm konvergiert.

Beweis. Der Operator $A^*A : H_1 \longrightarrow H_1$ ist kompakt und selbstadjungiert, nach 7.19 und 7.24 ist das Spektrum $\sigma(A^*A)$ in $[0, \|A\|^2]$ enthalten, denn für jeden Eigenwert λ von A^*A gilt

$$\lambda = (\lambda x, x) = (A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geq 0,$$

wobei x ein Eigenvektor mit $\|x\| = 1$ ist.
Nach 7.20 gibt es daher eine fallende Nullfolge $(s_n)_{n\geq 0}$ und ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\geq 0}$ in H_1, so dass

$$A^*Ax = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2(x, e_n)e_n. \quad (*)$$

Für $n \in \mathbb{N}_0$ mit $s_n > 0$ setzen wir $f_n = s_n^{-1}Ae_n$. Dann gilt für $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $s_n, s_m > 0$

$$(f_n, f_m) = \frac{1}{s_n s_m}(Ae_n, Ae_m) = \frac{1}{s_n s_m}(A^*Ae_n, e_m) = \frac{s_n^2}{s_n s_m}(e_n, e_m) = \delta_{n,m}.$$

Ist $N = \{n \in \mathbb{N}_0 : s_n > 0\}$ eine endliche Menge, dann erweitern wir das Orthonormalsystem $(f_n)_{n\in N}$ zu einem Orthonormalsystem $(f_n)_{n\geq 0}$ in H_2. Für $y \in H_1$ mit $y \perp e_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach $(*)$

$$\|Ay\|^2 = (Ay, Ay) = (A^*Ay, y) = 0.$$

Daher gilt für jedes $x \in H_1$

$$Ax = A\left(x - \sum_{n=0}^{\infty}(x, e_n)e_n\right) + A\left(\sum_{n=0}^{\infty}(x, e_n)e_n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(x, e_n)Ae_n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, e_n)f_n.$$

Analog wie in 7.21 beweist man, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n(x, e_n)f_n$ bezüglich der Operatornorm gegen A konvergiert. □

Korollar 7.25. *Jeder kompakte Operator ist im Sinne der Operatornorm Grenzwert einer Folge von Operatoren mit endlich-dimensionalen Bild.*

Definition 7.26. Die Zahlen s_n heißen s-Zahlen von A.

Wir wollen noch die Eigenschaften der s-Zahlen untersuchen. Dazu benötigen wir noch das sogenannte Minimaximalitätslemma .

Lemma 7.27. *(Minimaximalitätslemma)*
Sei H ein separabler Hilbertraum und $A : H \longrightarrow H$ ein positiver, kompakter Operator (d.h. $(Ax, x) \geq 0 \ \forall x \in H$) mit Spektraldarstellung

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(x, x_n)x_n,$$

wobei $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \ldots$. Dann gilt
(i)

$$\lambda_0 = \max_{x \in H} \frac{(Ax, x)}{(x, x)},$$

wobei das Maximum von einem Eigenvektor zum Eigenwert λ_0 angenommen wird.
(ii)

$$\lambda_j = \min_{L \in N_j} \max_{x \in L^{\perp}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}, \ j \geq 1,$$

dabei bezeichnet N_j die Menge der j-dimensionalen Teilräume von H. Das Minimum wird für den Teilraum $L = L_j = \langle x_0, \ldots, x_{j-1}\rangle$ angenommen, d.h.

$$\lambda_j = \max_{x \in L_j^{\perp}} \frac{(Ax, x)}{(x, x)}.$$

Beweis. (i) folgt aus 7.17 (c) und 7.19.
Für $j \geq 1$ gilt $\lambda_j = (Ax_j, x_j)/(x_j, x_j)$. Die Behauptung folgt daher, wenn wir zeigen können, dass für jeden j-dimensionalen Teilraum L ein $z_0 \perp L$ mit $z_0 \neq 0$ und $z_0 = \sum_{k=0}^{j}(z_0, x_k)x_k$ existiert, denn dann würde folgen:

$$\frac{(Az_0, z_0)}{(z_0, z_0)} = \frac{\sum_{k=0}^{j} \lambda_k |(z_0, x_k)|^2}{\sum_{k=0}^{j} |(z_0, x_k)|^2} \geq \lambda_j,$$

weil $\lambda_j \le \lambda_i$ für $0 \le i \le j$ und daher gilt dann auch

$$\max_{x\in L^\perp} \frac{(Ax,x)}{(x,x)} \ge \lambda_j .$$

Die Existenz von z_0 folgt daraus, dass für eine Basis $\{y_k \,:\, k=0,\dots,j-1\}$ von L das Gleichungssystem

$$\sum_{i=0}^{j} a_i(x_i,y_k) = 0 \ , \ k = 0,\dots j-1,$$

nichttrivial lösbar ist. Setze $z_0 = \sum_{i=0}^{j} a_i x_i$, dann ist $z_0 \perp L$. $\square$

Die s-Zahlen haben die folgenden Eigenschaften:

Satz 7.28. *Sei $A : H \longrightarrow H$ ein kompakter Operator. Dann gilt für die s-Zahlen $s_0(A) \ge s_1(A) \ge \cdots$:*
(a) $s_0(A) = \|A\|$; (b) ist $A^* = A$, dann gilt $s_k(A) = |\lambda_k|$;
(c) $s_k(\lambda A) = |\lambda| s_k(A)$; (d) $s_k(A^*) = s_k(A)$;
(e) $s_k(BA) \le \|B\| s_k(A)$ für $B \in \mathcal{L}(H)$;
(f) $s_k(AB) \le \|B\| s_k(A)$ für $B \in \mathcal{L}(H)$;
(g) $s_j(A) = \min_{K\in\mathcal{K}_j} \|A-K\|$, wobei $\mathcal{K}_j$ die Menge der Operatoren mit j-dimensionalem Bild bezeichnet.

Beweis. (a),(b) und (c) folgen aus der Definition und 7.17.
(d) ist $Ax = \sum_{k=0}^\infty s_k(A)(x,e_k)f_k$, dann ist $A^*x = \sum_{k=0}^\infty s_k(A)(x,f_k)e_k$. Die kanonische Darstellung eines kompakten Operators ist jedoch eindeutig: ist $Ax = \sum_{j=0}^\infty t_j(x,\chi_j)\omega_j$ eine andere Darstellung mit $t_0 \ge t_1 \ge \dots$ und Orthonormalsystemen $(\chi_j)_j$ bzw. $(\omega_j)_j$, dann folgt

$$A^*Ax = \sum_{i=0}^\infty t_i(\sum_{j=0}^\infty t_j(x,\chi_j)\omega_j,\omega_i)\chi_i = \sum_{i=0}^\infty t_i^2(x,\chi_i)\chi_i,$$

und t_i^2 sind die Eigenwerte von A^*A.
(e) Sind A_1, A_2 kompakte Operatoren mit $A_1 \ge 0$ und $A_2 - A_1 \ge 0$, dann folgt $0 \le A_1 \le A_2$ und für jeden j-dimensionalen Teilraum L

$$\max_{x\in L^\perp} \frac{(A_1x,x)}{(x,x)} \le \max_{x\in L^\perp} \frac{(A_2x,x)}{(x,x)}$$

und nach 7.27

$$\lambda_j(A_1) = \min_{L\in N_j} \max_{x\in L^\perp} \frac{(A_1x,x)}{(x,x)} \le \min_{L\in N_j} \max_{x\in L^\perp} \frac{(A_2x,x)}{(x,x)} = \lambda_j(A_2),$$

für $j = 0,1,2,\dots$. Nun gilt $(A^*B^*BAx,x) = \|BAx\|^2 \le \|B\|^2\|Ax\|^2 = (\|B\|^2A^*Ax,x)$, daraus folgt $0 \le A^*B^*BA \le \|B\|^2A^*A$, und daher

$$\lambda_j(A^*B^*BA) \le \lambda_j(\|B\|^2A^*A) = \|B\|^2\lambda_j(A^*A),$$

also $s_j(BA) \le \|B\| s_j(A)$ für $j \ge 0$.

(f) Aus (d) und (e) folgt

$$s_j(AB) = s_j((AB)^*) = s_j(B^*A^*) \le \|B^*\| s_j(A^*) = \|B\| s_j(A).$$

(g) Es gilt nach 7.27

$$s_j^2(A) = \lambda_j(A^*A) = \min_{L \in N_j} \max_{x \in L^\perp} \frac{(A^*Ax, x)}{(x, x)},$$

daraus folgt

$$s_j(A) = \min_{L \in N_j} \max_{x \in L^\perp} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Ist $K \in \mathcal{K}_j$, dann ist auch $K^* \in \mathcal{K}_j$ und es gilt $(\mathrm{im} K^*)^\perp = \ker K$, weil

$$(K^*x, y) = 0 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ (x, Ky) = 0 \ \forall x \ \Leftrightarrow \ Ky = 0.$$

Daher folgt

$$s_j(A) \le \max_{x \in \ker K} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Für $x \in \ker K$ gilt $Ax = (A - K)x$ und $\|Ax\| \le \|A - K\| \, \|x\|$ und somit

$$s_j(A) \le \|A - K\|.$$

Für

$$Kx = K_jx = \sum_{k=0}^{j-1} s_k(A)(x, f_k)e_k$$

gilt andererseits

$$(A - K_j)x = \sum_{k \ge j} s_k(A)(x, f_k)e_k,$$

daher folgt $\|A - K_j\| = \sup_{k \ge j} s_k(A) = s_j(A)$, also ist

$$s_j(A) = \min_{K \in \mathcal{K}_j} \|A - K\|.$$

□

Beispiele 7.29.
Der kanonische Lösungsoperator zu $\overline{\partial}$.
Wir wollen die inhomogene Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \overline{z}} = g \ \text{ kurz } \ \overline{\partial} u = f$$

lösen, dabei ist

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \ z = x + iy$$

und $g \in A^2(\mathbb{D})$.

Sei

$$S(g)(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,w) g(w) (z-w)^{-} d\lambda(w),$$

dabei ist $K(z,w)$ der Bergmankern von $A^2(\mathbb{D})$ (siehe 1.35 (c)). Dann gilt

$$S(g)(z) = \overline{z} g(z) - P(\tilde{g})(z),$$

wobei $P : L^2(\mathbb{D}) \longrightarrow A^2(\mathbb{D})$ die Bergmanprojektion bezeichnet (siehe 1.17) und $\tilde{g}(w) = \overline{w} g(w)$. Wir behaupten $S(g)$ ist eine Lösung der inhomogenen Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} S(g)(z) = \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} g(z) + \overline{z} \, \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial P(\tilde{g})}{\partial \overline{z}} = g(z),$$

weil g und $P(\tilde{g})$ holomorphe Funktionen sind, daher ist $\overline{\partial} S(g) = g$. Weiters gilt $S(g) \perp A^2(\mathbb{D})$, weil für beliebiges $f \in A^2(\mathbb{D})$ gilt:

$$(Sg, f) = (\tilde{g} - P(\tilde{g}), f) = (\tilde{g}, f) - (P(\tilde{g}), f) = (\tilde{g}, f) - (\tilde{g}, Pf) = (\tilde{g}, f) - (\tilde{g}, f) = 0.$$

Man bezeichnet $S : A^2(\mathbb{D}) \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ als den kanonischen Lösungsoperator für $\overline{\partial}$.
Wir zeigen nun, dass S ein kompakter Operator ist. Dazu berechnen wir S^* und zeigen S^*S ist kompakt, was nach 7.9 äquivalent zur Kompaktheit von S ist.
Für $g \in A^2(\mathbb{D})$ und $f \in L^2(\mathbb{D})$ gilt

$$(Sg, f) = \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} K(z,w) g(w) (z-w)^{-} \, d\lambda(w) \right) \overline{f(z)} \, d\lambda(z)$$

$$= \int_{\mathbb{D}} \left(\int_{\mathbb{D}} K(w,z) (z-w) f(z) \, d\lambda(z) \right)^{-} g(w) \, d\lambda(w) = (g, S^* f)$$

und daher ist

$$S^*(f)(w) = \int_{\mathbb{D}} K(w,z)(z-w) f(z) \, d\lambda(z).$$

Wir setzen jetzt

$$c_n^2 = \int_{\mathbb{D}} |z|^{2n} \, d\lambda(z) = \frac{\pi}{n+1},$$

dann bilden die Funktionen $\varphi_n(z) = z^n / c_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $A^2(\mathbb{D})$ und der Bergmankern $K(z,w)$ kann in der Form

$$K(z,w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \overline{w}^k}{c_k^2}$$

geschrieben werden (siehe 1.35 (c)). Nun berechnen wir

$$P(\tilde{\varphi}_n)(z) = \int_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k \overline{w}^k}{c_k^2} \, \overline{w} \, \frac{w^n}{c_n} \, d\lambda(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{c_{k-1}^2} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{w}^k w^n}{c_n} \, d\lambda(w) = \frac{c_n z^{n-1}}{c_{n-1}^2},$$

also gilt

$$S(\varphi_n)(z) = \overline{z} \, \varphi_n(z) - \frac{c_n z^{n-1}}{c_{n-1}^2} \quad , \; n \in \mathbb{N}.$$

Jetzt wird noch der Operator S^* angewandt

$$S^*S(\varphi_n)(w) = \int_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^k}{c_k^2}(z-w)\left(\frac{\overline{z}z^n}{c_n} - \frac{c_n z^{n-1}}{c_{n-1}^2}\right) d\lambda(z).$$

Dieses Integral wird in zwei Schritten berechnet : zunächst die Multiplikation mit z

$$\int_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^k}{c_k^2}\left(\frac{\overline{z}z^{n+1}}{c_n} - \frac{c_n z^n}{c_{n-1}^2}\right) d\lambda(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{D}} \frac{z^{n+1}}{c_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^{k+1}}{c_k^2}\, d\lambda(z) - \frac{c_n}{c_{n-1}^2} \int_{\mathbb{D}} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^k}{c_k^2}\, d\lambda(z) \\
&= \frac{w^n}{c_n^3} \int_{\mathbb{D}} |z|^{2n+2}\, d\lambda(z) - \frac{w^n}{c_{n-1}^2 c_n^2} \int_{\mathbb{D}} |z|^{2n}\, d\lambda(z) \\
&= \left(\frac{c_{n+1}^2}{c_n^3} - \frac{c_n}{c_{n-1}^2}\right) w^n.
\end{aligned}$$

Nun noch die Multiplikation mit w

$$w \int_{\mathbb{D}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^k}{c_k^2}\left(\frac{\overline{z}z^n}{c_n} - \frac{c_n z^{n-1}}{c_{n-1}^2}\right) d\lambda(z)$$

$$\begin{aligned}
&= w \int_{\mathbb{D}} \frac{z^n}{c_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^{k+1}}{c_k^2}\, d\lambda(z) - w \int_{\mathbb{D}} \frac{c_n z^{n-1}}{c_{n-1}^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k \overline{z}^k}{c_k^2}\, d\lambda(z) \\
&= w \left(\frac{c_n w^{n-1}}{c_{n-1}^2} - \frac{c_n w^{n-1}}{c_{n-1}^2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

daher folgt

$$S^*S(\varphi_n)(w) = \left(\frac{c_{n+1}^2}{c_n^2} - \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2}\right) \varphi_n(w) \quad , n = 1, 2, \ldots,$$

für $n = 0$ zeigt eine analoge Rechnung

$$S^*S(\varphi_0)(w) = \frac{c_1^2}{c_0^2}\, \varphi_0(w).$$

Wir erhalten daher

$$S^*S\varphi = \frac{c_1^2}{c_0^2}(\varphi, \varphi_0)\varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c_{n+1}^2}{c_n^2} - \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2}\right)(\varphi, \varphi_n)\varphi_n$$

für jedes $\varphi \in A^2(\mathbb{D})$. Eine einfache Rechnung liefert

$$\frac{c_{n+1}^2}{c_n^2} - \frac{c_n^2}{c_{n-1}^2} = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \to 0 \text{ bei } n \to \infty,$$

womit die Kompaktheit von S^*S und auch jene von S folgt.

Übungen

53. Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ kompakt. Man beweise: der Kern von $I - A$ ist endlichdimensional.

54. Sei X ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(X)$ kompakt. Man beweise: das Bild von $I - A$ ist abgeschlossen.(Anleitung: verwende das open mapping Theorem für den Operator $I - A$.)

55. Man beweise: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon > 0$ so, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|xy| \leq \epsilon x^2 + C_\epsilon y^2$.
Weiters zeige man: ist H ein Hilbertraum, dann gilt: für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon > 0$ so, dass $|(x, y)| \leq \epsilon \|x\|^2 + C_\epsilon \|y\|^2 \quad \forall x, y \in H$.

56. Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$. Man zeige, dass die drei folgenden Aussagen äquivalent sind:
(i) A ist kompakt; (ii) für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon > 0$ und ein kompakter Operator $K_\epsilon \in \mathcal{L}(H)$ so, dass

$$\|Ax\| \leq \epsilon \|x\| + C_\epsilon \|K_\epsilon x\| \quad \forall x \in H.$$

(iii) für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $C_\epsilon > 0$ und ein kompakter Operator $K_\epsilon \in \mathcal{L}(H)$ so, dass

$$\|Ax\|^2 \leq \epsilon \|x\|^2 + C_\epsilon \|K_\epsilon x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

57. Man zeige: ist H ein Hilbertraum und X ein Banachraum, so ist ein Operator $A \in \mathcal{L}(H, X)$ genau dann kompakt, wenn für jede orthonormale Folge $(e_n)_{n\geq 1}$ aus H gilt $Ae_n \to 0$ bei $n \to \infty$.

58. Man zeige: sind H_1 und H_2 Hilberträume, so ist ein Operator $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ genau dann kompakt, wenn für beliebige orthonormale Folgen $(e_n)_{n\geq 1}$ in H_1 und $(f_n)_{n\geq 1}$ in H_2 gilt $(Ae_n, f_n) \to 0$ bei $n \to \infty$.

59. Sei $A \in \mathcal{L}(H)$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator und $\mu \notin \sigma(A) \cup \{0\}$. Man zeige: die Gleichung $(A - \mu I)x = y$ hat für jedes $y \in H$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in H$.

60. Sei $(d_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge und $D : l^2 \longrightarrow l^2$ definiert durch $D(\xi) = (d_n x_n)_{n\geq 1}$ für $\xi = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2$. Man zeige: D ist ein kompakter Operator, ferner bestimme man die s-Zahlen von D.

8 Hilbert-Schmidt und nukleare Operatoren

Definition 8.1. Sind H_1 und H_2 Hilberträume, so definiert man für $0 < p < \infty$ die Schatten p-Klasse als

$$S^p(H_1, H_2) = \{A \in \mathcal{L}(H_1, H_2) \text{ kompakt } : (s_n(A))_{n \geq 0} \in l^p\}.$$

Die Elemente von $S^2(H_1, H_2)$ heißen Hilbert-Schmidt Operatoren , die Elemente von $S^1(H_1, H_2)$ nukleare Operatoren .

Hilbert-Schmidt Operatoren kann man auf folgende Art und Weise charakterisieren

Satz 8.2.
Für jede lineare Abbildung $A : H_1 \longrightarrow H_2$ sind äquivalent:
(i) es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $(e_i)_{i \in I}$ von H_1, so dass $\sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2 < \infty$;
(ii) für jedes vollständige Orthonormalsystem $(f_j)_{j \in J}$ von H_1 gilt $\sum_{j \in J} \|Af_j\|^2 < \infty$;
(iii) A ist ein Hilbert-Schmidt Operator.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $(e_i)_{i \in I}$ wie in (i) und $(g_l)_{l \in L}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H_2. Dann gilt nach der Parseval'schen Gleichung 1.27

$$\sum_{l \in L} \|A^* g_l\|^2 = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I} |(A^* g_l, e_i)|^2 = \sum_{i \in I} \sum_{l \in L} |(g_l, Ae_i)|^2 = \sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2 < \infty.$$

Ist nun $(f_j)_{j \in J}$ ein beliebiges vollständiges Orthonormalsystem von H_1, dann folgt analog

$$\sum_{j \in J} \|Af_j\|^2 = \sum_{l \in L} \|A^* g_l\|^2 = \sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2 < \infty.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $(e_i)_{i \in I}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H_1 und M eine endliche Teilmenge von I, so setzen wir $P_M x = \sum_{i \in M} (x, e_i) e_i$. Dann folgt aus 1.27

$$\|(A - AP_M)x\| = \|A(I - P_M)x\| = \|\sum_{i \in I \setminus M} (x, e_i) Ae_i\|$$

$$\leq \left(\sum_{i \in I \setminus M} \|Ae_i\|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in I \setminus M} |(x, e_i)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i \in I \setminus M} \|Ae_i\|^2 \right)^{1/2} \|x\|.$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{i \in I} \|Ae_i\|^2 < \infty$, somit kann A durch endlichdimensionale Operatoren im Sinne der Operatornorm approximiert werden, A ist daher kompakt und besitzt eine kanonische Darstellung

$$Ax = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (x, x_n) f_n.$$

Nach 1.34 existiert ein vollständiges Orthonormalsystem $(\xi_j)_{j\in J}$, welche das Orthonormalsystem $(x_n)_{n\geq 0}$ umfasst. Dann gilt

$$\sum_{j\in j} \|A\xi_j\|^2 = \sum_{j\in J} \| \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\xi_j, x_n) f_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} s_n^2 < \infty,$$

also ist A ein Hilbert-Schmidt Operator.
(iii) $\Rightarrow$ (i): ist A ein Hilbert-Schmidt Operator, so besitzt A eine kanonische Darstellung wie oben, und Aussage (i) folgt aus dem letzten Schluss im vorigen Beweisschritt. $\square$

Korollar 8.3. *Ist $A : H_1 \longrightarrow H_2$ ein Hilbert-Schmidt Operator, so gilt für jedes vollständige Orthonormalsystem $(e_i)_{i\in I}$ von H_1*

$$\nu_2(A)^2 := \sum_{n=0}^{\infty} s_n(A)^2 = \sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 \geq \|A\|^2.$$

Insbesondere ist ν_2 eine Norm auf dem Raum $S_2(H_1, H_2)$ der Hilbert-Schmidt Operatoren zwischen H_1 und H_2.

Beweis. Es gilt

$$\|Ax\| = \| \sum_{i\in I} (x, e_i) Ae_i\| \leq \left(\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2 \right)^{1/2} \|x\|,$$

somit folgt die erste Aussage aus 8.2. Ferner sieht man leicht, dass $A \mapsto \left(\sum_{i\in I} \|Ae_i\|^2\right)^{1/2}$ eine Norm ist. $\square$

Sind nun H_1 und H_2 separable Hilberträume und $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, sowie $(e_n)_{n\geq 1}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H_1 und $(f_n)_{n\geq 1}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von H_2, dann gilt für alle $x \in H_1$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n) Ae_n$$

und daher für alle $j \in \mathbb{N}$

$$(Ax, f_j) = \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)(Ae_n, f_j).$$

Die Koeffizienten von Ax bezüglich $(f_j)_{j\geq 1}$ berechnen sich also aus den Koeffizienten von x bezüglich $(e_n)_{n\geq 1}$ mittels der unendlichen Matrix

$$a_{j,n} = (Ae_n, f_j) \quad , \; j, n \in \mathbb{N}.$$

Es folgt mit Hilfe der Parseval'schen Gleichung 1.27

$$\sum_{j,n=1}^{\infty} |a_{j,n}|^2 = \sum_{j,n=1}^{\infty} |(Ae_n, f_j)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2,$$

und wir erhalten

Korollar 8.4.
Sind H_1 *und* H_2 *separable Hilberträume, so ist* $A \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ *genau dann ein Hilbert-Schmidt Operator, wenn die Matrix* $(a_{j,n})_{j,n\geq 1}$ *von* A *bezüglich beliebiger vollständiger Orthonormalsysteme quadratisch summierbar ist, d.h. wenn*

$$\sum_{j,n=1}^{\infty} |a_{j,n}|^2 < \infty.$$

In diesem Fall ist

$$\nu_2(A)^2 = \sum_{j,n=1}^{\infty} |a_{j,n}|^2.$$

Korollar 8.5.
Eine lineare Abbildung $A : l^2 \longrightarrow l^2$ *ist genau dann ein Hilbert-Schmidt Operator, wenn es eine Matrix* $(a_{j,n})_{j,n\geq 1}$ *gibt mit* $\sum_{j,n=1}^{\infty} |a_{j,n}|^2 < \infty$*, so dass für alle* $x = (x_n)_{n\geq 1} \in l^2$ *gilt*

$$Ax = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} x_n\right)_{j\geq 1}.$$

Beweis. Hat A die angegebene Form, so gilt nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\|Ax\|_2^2 \leq \left(\sum_{j,n=1}^{\infty} |a_{j,n}|^2\right) \|x\|_2^2,$$

daher folgt alles aus dem vorigen Korollar. □

Satz 8.6.
Seien $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $T \subseteq \mathbb{R}^m$ *offene Mengen und* $A : L^2(T) \longrightarrow L^2(S)$ *eine lineare Abbildung.* A *ist genau dann ein Hilbert-Schmidt Operator, wenn eine* $K \in L^2(S \times T)$ *existiert, so dass*

$$Af(s) = \int_T K(s,t) f(t)\, dt \quad , \; f \in L^2(T).$$

Ist dies der Fall, so gilt

$$\nu_2(A) = \left(\int_{S\times T} |K(s,t)|^2 \, ds\, dt\right)^{1/2}.$$

Beweis. Seien $(g_k)_{k\geq 1}$ und $(f_j)_{j\geq 1}$ vollständige Orthonormalsysteme von $L^2(T)$ bzw. $L^2(S)$. Dann ist $(h_{j,k})_{j,k\geq 1}$ definiert durch

$$h_{j,k}(s,t) := f_j(s)\overline{g_k(t)} \quad , \; (s,t) \in S \times T$$

ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2(S \times T)$. Denn für $F \in L^2(S \times T)$ ist $t \mapsto F(s,t) f_j(s)$ fast überall in $L^2(T)$. Aus $F \perp h_{j,k}$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$ folgt wegen 1.27 angewandt für die Funktionen $t \mapsto F(s,t) f_j(s)$, dass diese Funktionen für alle $j \in \mathbb{N}$ fast überall bezüglich s in $L^2(T)$ verschwindet. Dies impliziert $F = 0$ und dass $(h_{j,k})_{j,k\geq 1}$ ein vollständiges Orthonormalsystem bildet.

Ist nun A ein Hilbert-Schmidt Operator und $(a_{j,k})_{j,k\geq 1}$ seine Matrix bezüglich $(g_k)_{k\geq 1}$ und $(f_j)_{j\geq 1}$, so ist nach 8.4

$$K(s,t) := \sum_{j,k\geq 1} a_{j,k} h_{j,k}(s,t) = \sum_{j,k\geq 1} a_{j,k} f_j(s)\overline{g_k(t)}$$

in $L^2(S\times T)$ und $\|K\|_2 = \sum_{j,k\geq 1} |a_{j,k}|^2 = \nu_2(A)$. Für $f \in L^2(T)$ gilt:

$$Af(s) = \sum_{j,k\geq 1} a_{j,k}(f, g_k) f_j(s) = \int_T \sum_{j,k\geq 1} a_{j,k} f_j(s)\overline{g_k(t)} f(t)\, dt = \int_T K(s,t) f(t)\, dt.$$

Ist umgekehrt A durch einen Kern $K \in L^2(S\times T)$ gegeben, so ist A stetig, da

$$\|Af\|^2 \leq \left(\int_{S\times T} |K(s,t)|^2\, ds\, dt\right) \int_T |f(t)|^2\, dt.$$

Für die Matrix $(a_{j,k})_{j,k\geq 1}$ von A gilt für alle $j,k \in \mathbb{N}$:

$$a_{j,k} = (Ag_k, f_j) = \int_S \left(\int_T K(s,t) g_k(t)\, dt\right) \overline{f_j(s)}\, ds = (K, h_{j,k}).$$

Aus der Bessel'schen Ungleichung und 8.4 folgt daher, dass A ein Hilbert-Schmidt Operator ist. $\square$

Beispiele 8.7.
Wir beweisen, dass der kanonische Lösungsoperator $S : A^2(\mathbb{D}) \longrightarrow L^2(\mathbb{D})$ für $\overline{\partial}$ sogar ein Hilbert-Schmidt Operator ist. Nach 7.29 ist S ein kompakter Operator und es gilt

$$S(g)(z) = \int_{\mathbb{D}} K(z,w) g(w) (z-w)^- d\lambda(w),$$

für $g \in A^2(\mathbb{D})$.
Wir zeigen, die Kernfunktion $(z,w) \mapsto K(z,w)(z-w)^-$ liegt in $L^2(\mathbb{D}\times\mathbb{D})$.
$K(z,w) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}$ ist nach 1.35 c) der Bergmankern von $\mathbb{D}$. Somit ist zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{|\overline{z}-\overline{w}|^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, d\lambda(z)\, d\lambda(w) < \infty.$$

Eine einfache Abschätzung zeigt $|z-w| \leq |1-z\overline{w}|$, for $z,w \in \mathbb{D}$. Daher gilt

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{|\overline{z}-\overline{w}|^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, d\lambda(z)\, d\lambda(w) \leq \int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^2}\, d\lambda(z)\, d\lambda(w).$$

Mit Polarkoordinaten $z = r\,e^{i\theta}$ und $w = s\,e^{i\phi}$ kann man das letzte Integral folgendermaßen schreiben

$$\int_{\mathbb{D}}\int_{\mathbb{D}} \frac{1}{|1-z\overline{w}|^2}\, d\lambda(z)\, d\lambda(w) = \int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r\,s\, d\theta\, d\phi\, dr\, ds}{1-2\,r\,s\,\cos(\theta-\phi)+r^2\,s^2}$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2\,s^2}{1-2\,r\,s\,\cos(\theta-\phi)+r^2\,s^2}\;\frac{r\,s}{1-r^2\,s^2}\, d\theta\, d\phi\, dr\, ds.$$

Integration des Poissonkerns bezüglich θ liefert

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\,\cos(\theta-\phi)+\rho^2}\,d\theta = 2\pi \ , 0<\rho<1.$$

Somit folgt

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2\,s^2}{1-2\,r\,s\,\cos(\theta-\phi)+r^2\,s^2}\ \frac{r\,s}{1-r^2\,s^2}\,d\theta\,d\phi\,dr\,ds$$

$$= (2\pi)^2\int_0^1\int_0^1 \frac{r\,s}{1-r^2\,s^2}\,dr\,ds = -\,(2\pi)^2\int_0^1 \frac{\log(1-s^2)}{2s}\,ds<\infty.$$

Satz 8.8.
Ein Operator $A\in\mathcal{L}(H_1,H_2)$ ist nuklear genau dann, wenn es Folgen $(x_j)_{j\geq 0}$ in H_1 und $(y_j)_{j\geq 0}$ in H_2 gibt, so dass

$$Ax=\sum_{j=0}^{\infty}(x,x_j)y_j \ , \ x\in H_1 \quad \textit{und} \quad \sum_{j=0}^{\infty}\|x_j\|\|y_j\|<\infty.$$

Beweis. Ist A nuklear, so ist $(s_n(A))_{n\geq 0}\in l^1$. Daher hat die kanonische Darstellung von A die angegebenen Eigenschaften.
Hat andererseits A die angegebene Darstellung, so gilt für jedes $m\in\mathbb{N}$

$$\|A-\sum_{j=0}^{m}(.,x_j)y_j\|\leq\sum_{j=m+1}^{\infty}\|x_j\|\|y_j\|.$$

Daher ist A ein kompakter Operator und hat nach 7.24 die kanonische Darstellung

$$Ax=\sum_{n=0}^{\infty}s_n(A)(x,e_n)f_n \ , \ x\in H_1.$$

Für jedes $n\geq 0$ gilt nach Definition der s-Zahlen und der Bessel'schen Ungleichnung

$$\sum_{j=0}^{n}s_j(A)=\sum_{j=0}^{n}(Ae_j,f_j)=\sum_{j=0}^{n}\left|\sum_{k=0}^{\infty}(e_j,x_k)(y_k,f_j)\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}|(e_j,x_k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{n}|(y_k,f_j)|^2\right)^{1/2}\leq\sum_{k=0}^{\infty}\|x_k\|\|y_k\|.$$

Daher folgt $(s_n(A))_{n\geq 0}\in l^1$. ☐

Beispiele 8.9. Sei $S>R>0$ und $E:A^2(D_S)\longrightarrow A^2(D_R)$ die Einschränkungsabbildung, die jeder holomorphen Funktion f auf $D_S=\{z\,:\,|z|<S\}$ ihre Einschränkung auf $D_R=\{z\,:\,|z|<R\}$ zuordnet.
Wir zeigen, der Operator E ist nuklear, als Operator zwischen den Bergmanräumen $A^2(D_S)$ und $A^2(D_R)$. Sei dazu $f\in A^2(D_S)$ mit Taylorentwicklung $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$. Die

normierten Monome $\varphi_n^R(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\frac{z^n}{R^{n+1}}$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $A^2(D_R)$, und da f auch in $A^2(D_R)$ liegt, gilt in $A^2(D_R)$

$$f = \sum_{n=0}^{\infty}(f, \varphi_n^R)_R\, \varphi_n^R,$$

dabei ist $(.,.)_R$ das innere Produkt in $A^2(D_R)$ und

$$(f, \varphi_n^R)_R = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}a_n R^{n+1}.$$

Für die normierten Monome φ_n^S in $A^2(D_S)$ gilt

$$(f, \varphi_n^R)_R = (f, \frac{R^{n+1}}{S^{n+1}}\, \varphi_n^S)_S,$$

dabei ist $(.,.)_S$ das innere Produkt in $A^2(D_S)$, weiters ist die Holomorphie von f ganz wesentlich für diese Identität. Daher folgt

$$Ef = \sum_{n=0}^{\infty}(f, \varphi_n^R)_R\, \varphi_n^R = \sum_{n=0}^{\infty}(f, \frac{R^{n+1}}{S^{n+1}}\, \varphi_n^S)_S\, \varphi_n^R,$$

und weil

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{R^{n+1}}{S^{n+1}}\, \varphi_n^S\|_S\, \|\varphi_n^R\|_R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{S^{n+1}} < \infty,$$

ist $E : A^2(D_S) \longrightarrow A^2(D_R)$ nuklear.

Abschließend beweisen wir noch die Fredholm'sche Alternative:

Satz 8.10. *Sei H ein separabler Hilbertraum und $T \in \mathcal{L}(H)$ ein kompakter, selbstadjungierter Operator. Dann gilt:*
(i) ker$(I - T)$ ist endlichdimensional;
(ii) im$(I-T)$ ist abgeschlossen mit endlichdimensionalen orthogonalen Komplement (von endlicher Kodimension);
(iii) im$(I - T) = H \Leftrightarrow$ ker$(I - T) = \{0\}$.

Beweis. (i) Wir wissen bereits, dass die Eigenräume von T endlichdimensional sind (siehe 7.20).
(ii) Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathrm{im}(I - T)$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ in H. Wir haben zu zeigen, dass $y \in \mathrm{im}(I - T)$. Seien $x_n \in H$ mit $y_n = x_n - Tx_n$. Wir können voraussetzen, dass $x_n \in \ker(I - T)^{\perp}$, weil sonst $y_n = 0$ wäre. Nun behaupten wir zunächst, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist: angenommen es existiert eine Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit $\|x_{n_j}\| \to \infty$, dann betrachten wir die Folge $u_{n_j} = x_{n_j}/\|x_{n_j}\|$ und stellen fest, dass

$$u_{n_j} - Tu_{nj} = \frac{1}{\|x_{n_j}\|}\,(x_{n_j} - Tx_{n_j}) = \frac{1}{\|x_{n_j}\|}\, y_{n_j} \to 0 \quad (*).$$

Außerdem ist die Folge $(u_{n_j})_j$ beschränkt, besitzt daher nach 6.24 eine schwach konvergente Teilfolge, die wir ebenfalls mit $(u_{n_j})_j$ bezeichnen. Da T kompakt ist, ist $(Tu_{n_j})_j$

stark konvergent (7.8). Aus (*) folgt nun, dass auch der Limes $\lim_{j\to\infty} u_{n_j} = u$ existiert und $Tu = u$ gilt, weiters ist $\|u\| = 1$, andererseits jedoch $u \in \ker(I-T)^\perp$, also $u = 0$, Widerspruch!
Somit ist die Folge $(x_n)_n$ beschränkt und es existiert wieder eine schwach konvergente Teilfolge $(x_{n_j})_j$ mit Limes x_∞. Weil T kompakt ist, ist die Folge $(Tx_{n_j})_j$ stark konvergent mit Limes y_∞. Dann gilt

$$(Tx_{n_j}, z) = (x_{n_j}, T^*z) \to (x_\infty, T^*z) = (Tx_\infty, z), \quad \forall z \in H$$

also $Tx_\infty = y_\infty$ und $\lim_{j\to\infty} Tx_{n_j} = Tx_\infty$. Daraus folgt

$$\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = \lim_{j\to\infty}(x_{n_j} - Tx_{n_j}) + \lim_{j\to\infty} Tx_{n_j} = y + Tx_\infty.$$

Wie oben erhält man $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = x_\infty$ und schließlich $y+Tx_\infty = x_\infty$ oder $y = x_\infty - Tx_\infty$.
Wenn $\ker(I-T) = \{0\}$, dann ist auch $\ker(I-T^*) = \{0\}$, und weil $\operatorname{im}(I-T)$ abgeschlossen ist, gilt

$$\operatorname{im}(I-T) = \ker(I-T^*)^\perp = H.$$

Die Umkehrung folgt aus $T = T^*$.
Es gilt

$$\operatorname{im}(I-T)^\perp = \ker(I-T^*) = \ker(I-T),$$

und daraus folgen die restlichen Behauptungen.

□

Bemerkung 8.11. Der letzte Satz stimmt auch für $\lambda I - T$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
Die Fredholm'sche Alternative gilt allgemeiner für kompakte Operatoren auf einem separablen Banachraum: siehe [MV].

9 Soboleveräume

Um den geeigneten theoretischen Rahmen zur Behandlung unbeschränkter Operatoren (insbesondere Differentialoperatoren) zu schaffen, benötigen wir einige grundlegende Informationen über die Fouriertransformation und über Sobolevräume.

Definition 9.1. Für Vektoren $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $x\xi = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j$ und $|x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2$. Ist $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so wird durch

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

eine Funktion $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^n$ definiert, welche man die Fouriertransformierte von f nennt. Die Abbildung $f \mapsto \hat{f}$ heißt Fouriertransformation .
Ist $a \in \mathbb{R}^n$ und f eine Funktion auf $\mathbb{R}^n$, so wird die Translation von f um a durch $T_a f(x) = f(x-a)$ definiert. Offenbar ist T_a eine Isometrie auf $L^p(\mathbb{R}^n)$ für jedes $p \in [1, \infty]$.
Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren wir für $x \in \mathbb{R}^n$:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy,$$

und nennen $f * g$ die Faltung von f mit g.

Satz 9.2.
Für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda > 0$ gelten:
(i) $(T_x f)\hat{}(\xi) = e^{-ix\xi} \hat{f}(\xi)$, (ii) $\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$,
(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) g(\lambda\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda\xi) \hat{g}(\xi)\, d\xi$.

Beweis. (i) folgt durch eine Variablentransformation. Für (ii) verwendet man den Satz von Fubini

$$\widehat{f * g}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y)\, dy\, dx$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x+y)\xi} f(y) g(x)\, dy\, dx = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).$$

Für (iii) verwende man die Variablentransformation $x' = \lambda^{-1} x$ und $\xi' = \lambda\xi$ und den Satz von Fubini:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \right) g(\lambda\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x') \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(\xi') e^{-ix'\xi'}\, d\xi' \right) dx'.$$

$\square$

Um die Umkehrformel zur Fouriertransformation zu beweisen, verwendet man die Funktion

$$\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2) \ , \ x \in \mathbb{R}^n$$

und die Tatsache, dass $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{\varphi} = \varphi$ (Cauchy'scher Integralsatz). Weiters setzen wir für $\sigma > 0$:

$$\varphi_\sigma(x) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\sigma^2}\right) = (2\pi)^{-n/2}\sigma^{-n}\varphi(x/\sigma)\ ,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\sigma(x)\, dx = 1 \quad , \quad \lim_{\sigma\to 0} \int_{|x|\geq\delta} \varphi_\sigma(x)\, dx = 0,$$

für alle $\delta > 0$, sowie

$$\hat{\varphi}_\sigma(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\varphi(\sigma\xi),$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Außerdem ist $\varphi_\sigma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in [1, \infty]$ und für $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ gilt in $L^p(\mathbb{R}^n)$:

$$\lim_{\sigma\to 0} f * \varphi_\sigma = f.$$

Sei $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ der Raum aller stetigen Funktionen f auf $\mathbb{R}^n$, für die für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $\sup_{x\in\mathbb{R}^n\setminus K} |f(x)| \leq \epsilon$.

Satz 9.3.
(i) Für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Seien $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Dann besitzt f einen Repräsentanten in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, und für diesen gilt:

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)e^{i\xi x}\, d\xi,$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ (Umkehrformel), weiters ist dann $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$.

Beweis. Es gilt

$$\widehat{f * \varphi_\sigma}(\xi) = (2\pi)^{n/2}\hat{f}(\xi)\hat{\varphi}_\sigma(\xi) = \hat{f}(\xi)\varphi(\sigma\xi), \quad (*)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, also ist $\widehat{f * \varphi_\sigma} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ für alle $\sigma > 0$. Außerdem folgt, dass für $\sigma \to 0$ die Funktionen $\widehat{f * \varphi_\sigma}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ gegen $\hat{f}$ konvergieren. Daher gilt $\hat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Ist $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so folgt aus (*) und $0 \leq \varphi \leq 1$, dass $\widehat{f * \varphi_\sigma} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, für alle $\sigma > 0$. Somit gilt bei $\sigma \to 0$, dass $\|\widehat{f * \varphi_\sigma} - \hat{f}\|_1 \to 0$ (Satz über die dominierte Konvergenz). Aus 9.2 (iii) folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(\lambda\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall\lambda > 0.$$

Setzt man zunächst voraus, dass f beschränkt und stetig ist, dann ergibt wieder der Satz über die dominierte Konvergenz, dass bei $\lambda \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(0)\varphi(x)\, dx = (2\pi)^{n/2}f(0).$$

Also gilt die Umkehrformel für $x = 0$. Wendet man nun den Fall $x = 0$ auf $T_{-x}f$ an und beachtet $(T_{-x}f)\hat{}(\xi) = e^{i\xi x}\hat{f}(\xi)$, so erhält man die Umkehrformel für stetige und beschränkte Funktionen.

Daher kann die Umkehrformel nun auf die stetige und beschränkte Funktion $\widehat{f * \varphi_\sigma}$ anwenden und erhält, dass $f * \varphi_\sigma$ für $\sigma \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ gegen die Funktion

$$g(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi = \hat{\hat{f}}(-x)$$

konvergiert. Wegen $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt aus (i), dass $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. Da $f * \varphi_\sigma$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergiert, folgt $g = f$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$, also $f = g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$. □

Wir setzen nun

$$L := \{f \in L^1(\mathbb{R}^n) \ : \ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}.$$

Aus dem letzten Satz folgt, dass die Fouriertransformation L bijektiv auf sich abbildet.

Lemma 9.4.
Für jedes $p \in [1, \infty)$ ist L ein dichter Teilraum von $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Nach 9.3 ist $L \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ und daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx \leq \|f\|_\infty^{p-1} \|f\|_1 \quad , \ \forall f \in L.$$

Hat nun eine stetige Funktion f kompakten Träger, d.h. $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$, so ist $f * \varphi_\sigma$ nach 9.2 in L. Andererseits konvergiert $f * \varphi_\sigma$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ gegen f bei $\sigma \to 0$. Daher ist L dicht in $L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Satz 9.5. *(Satz von Plancherel)*
Es gibt einen unitären Operator $\mathcal{F}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ gilt für jedes $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Zunächst gilt für jedes $g \in L$:

$$\hat{\bar{g}}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-i\xi x}\, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi \right)^{-} = \overline{g(x)}.$$

Daher gilt nach 9.2 für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L$ für das innere Produkt in $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)}\, dx = (f, g).$$

Daher wird durch $f \mapsto \hat{f}$ eine Isometrie des in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dichten Teilraumes L nach $L^2(\mathbb{R}^n)$ definiert. Diese setzt sich zu einer Isometrie $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$.
Setzt man $\mathcal{G}f \ : \ \xi \mapsto \mathcal{F}f(-\xi)$, so ist auch $\mathcal{G}$ eine Isometrie, und auf L gilt nach 9.3 $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$. Weil L in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, gilt $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$. Daher ist $\mathcal{G}$ und damit auch $\mathcal{F}$ bijektiv. Folglich ist $\mathcal{F}$ unitär.
Weil für $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ und $g \in L$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi = (f, g) = (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)}\, d\xi.$$

Weil $\{\hat{g} \ : \ g \in L\} = L$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht ist, impliziert dies , dass $\mathcal{F}f$ und $\hat{f}$ als Elemente von $L^2(\mathbb{R}^n)$ gleich sind. □

Bemerkung 9.6.
(i) Für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt im Sinne der L^2-Konvergenz:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \lim_{T\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|\le T} f(x)e^{-ix\xi}\,dx,$$

weil die durch $F_T(x) = f(x)$ für $|x| \le T$ und $F_T(x) = 0$ für $|x| > T$ definierte Funktion F_T in $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ ist und bei $T \to \infty$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegen f konvergiert.
(ii) Für jedes $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{F}^{-1}g(x) = \mathcal{F}g(-x)$, siehe 9.5. Daher gilt nach (i) im Sinne der L^2-Konvergenz

$$\mathcal{F}^{-1}g(x) = \lim_{T\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|\le T} g(\xi)e^{ix\xi}\,d\xi.$$

Korollar 9.7.
Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, so ist $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, und es gilt:

$$\|f\|_\infty \le \|\mathcal{F}f\|_1.$$

Beweis. Nach 9.6 (ii) und 9.5 gilt

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}f(x) = \mathcal{F} \circ \mathcal{F}f(-x) = \widehat{\mathcal{F}f}(-x).$$

Wegen $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ folgt hieraus mit 9.3 die Behauptung. □

Mit Hilfe des Satzes von Plancherel führen wir nun die folgende Familie von Hilberträumen ein:

Definition 9.8.
Für $s \in [0,\infty)$ sei

$$H^s = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,:\, (1+|\xi|^2)^{s/2}\mathcal{F}f(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_s := \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\mathcal{F}f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}.$$

Für $s \in (-\infty, 0)$ sei H^s die vollständige Hülle von $L^2(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Norm $\|.\|_s$. wir nennen H^s den Sobolevraum zum Exponenten $s \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 9.9.
Für $s \ge 0$ wird die Norm $\|.\|_s$ offenbar durch das innere Produkt

$$(f,g)_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}g(\xi)}\,d\xi$$

erzeugt. Ist $L^{2,s} := L^2(\mathbb{R}^n, (1+|\xi|^2)^s\,d\xi)$, so ist $L^{2,s}$ ein dichter Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $H^s = \mathcal{F}^{-1}(L^{2,s})$. Daher folgt aus dem Satz von Plancherel, dass $\mathcal{F}$ den Raum H^s isometrisch auf den Hilbertraum $L^{2,s}$ abbildet. Folglich ist H^s ein Hilbertraum, und es gilt $H^0 = L^2(\mathbb{R}^n)$.
Für $s < 0$ ist $L^2(\mathbb{R}^n)$ ein dichter Teilraum von $L^{2,s}$ und daher setzt sich $\mathcal{F}$ zu einer Isometrie von H^s auf $L^{2,s}$ fort, welche wir ebenfalls mit $\mathcal{F}$ bezeichnen. Daher ist H^s ein Hilbertraum.

Lemma 9.10.
(i) Für $0 \leq s < t$ *gelten* $H^t \subset H^s$ *und* $\|.\|_s \leq \|.\|_t$ *auf* H^t.
(ii) Für $s < t \leq 0$ *setzt sich die Identität von* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *zu einer stetigen Einbettung* $j_t^s : H^t \hookrightarrow H^s$ *fort, und es gilt für alle* $f \in H^t$

$$\|j_t^s f\|_s \leq \|f\|_t.$$

Beweis. (i) folgt aus der Definition. Bei (ii) bezeichnen wir mit $i_t^s : L^{2,t} \hookrightarrow L^{2,s}$ die Inklusion und setzen

$$j_t^s := \mathcal{F}^{-1} \circ i_t^s \circ \mathcal{F}.$$

Weil j_t^s auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ die Identität ist, folgt die Behauptung. □

Wir betrachten die Einbettung j_t^s von 9.10 als kanonisch und werden sie nicht mehr extra angeben; in diesem Sinne ist dann $H^t \subset H^s$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$, und es gilt $\|.\|_s \leq \|.\|_t$ auf H^t.

Lemma 9.11.
(i) Für $t \geq 0$ *setzt sich das innere Produkt in* $L^2(\mathbb{R}^n)$ *auf* $H^t \times L^2(\mathbb{R}^n)$ *zu einer stetigen Sesquilinearform*

$$(\,.\,,.) : H^t \times H^{-t} \longrightarrow \mathbb{C}$$

fort. Es gilt dann

$$(f, g) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi)\overline{\mathcal{F}(g)(\xi)}\, d\xi.$$

(ii) Die Sesquilinearform aus (i) setzt H^t *und* H^{-t} *in Dualität zueinander, d.h.*

$$(H^t)' = \{f \mapsto (f, g) \,:\, g \in H^{-t}\} \;\;,\;\; (H^{-t})' = \{f \mapsto \overline{(g, f)} \,:\, g \in H^t\}.$$

(iii) Die durch (ii) gegebenen Isomorphismen $(H^t)' \cong H^{-t}$ *und* $(H^{-t})' \cong H^t$ *sind isometrisch.*

Beweis. (i) Für $f \in H^t$ und $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt nach dem Satz von Plancherel

$$|(f, g)| = |(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{t/2}\, \mathcal{F}f(\xi)(1 + |\xi|^2)^{-t/2}\, \overline{\mathcal{F}g(\xi)}\, d\xi \right| \leq \|f\|_t \|g\|_{-t}.$$

Nach Definition von H^{-t} folgt hieraus (i).
(ii) Nach (i) ist $f \mapsto (f, g)$ für jedes $g \in H^{-t}$ ein Element von $(H^t)'$. Um nachzuweisen, dass man auf diese Weise ganz $(H^t)'$ erhält, sei $y \in (H^t)'$ vorgegeben. Weil H^t ein Hilbertraum ist, gibt es nach 1.16 ein $h \in H^t$ mit $\|h\|_t = \|y\|$, so dass

$$y(f) = (f, h)_t$$

für alle $f \in H^t$. Wir definieren $H \in L^{2,-t}$ durch $H(\xi) := (1 + |\xi|^2)^t \mathcal{F}h(\xi)$ und setzen $g := \mathcal{F}^{-1}H$. Dann ist $g \in H^{-t}$, und für alle $f \in H^t$ gilt

$$y(f) = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^t \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}h(\xi)}\, d\xi = (f, g).$$

Den zweiten Teil von (ii) beweist man analog.
(iii) Der Beweis von (ii) liefert $\|y\| = \|h\|_t = \|H\|_{L^{2,-t}} = \|g\|_{-t}$. □

Die Räume $(H^t)_{t\in\mathbb{R}}$ bilden eine fallende Skala von Hilberträumen und $(H^t)'$ kann mit H^{-t} identifiziert werden.

Lemma 9.12.
Für $t_1 < t_2 < t_3$ und $f \in H^{t_3}$ gilt:

$$\|f\|_{t_2} \leq \|f\|_{t_1}^{\frac{t_3-t_2}{t_3-t_1}} \|f\|_{t_3}^{\frac{t_2-t_1}{t_3-t_1}}.$$

Beweis. Dies folgt aus der Hölder'schen Ungleichung und der Definition der Norm in $L^{2,t}$, wenn man beachtet, dass für $p := \frac{t_3-t_1}{t_3-t_2}$, $q := \frac{t_3-t_1}{t_2-t_1}$ und $f \in H^{t_3}$ die Funktion $((1+|\xi|^2)^{t_1}|f(\xi)|^2)^{1/p}$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ und $((1+|\xi|^2)^{t_3}|f(\xi)|^2)^{1/q}$ in $L^q(\mathbb{R}^n)$ ist. □

Wir untersuchen nun die Differenzierbarkeitseigenschaften der Elemente von H^s. Dazu setzen wir für $f \in H^s$ und $1 \leq j \leq n$:

$$D_j f = \mathcal{F}^{-1}\xi_j \mathcal{F} f \in H^{s-1},$$

wobei ξ_j die Multiplikation mit der Variablen ξ_j bezeichnet. Ist $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex und $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$, so setzen wir $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ und erhalten für $f \in H^s$

$$D^\alpha f = \mathcal{F}^{-1}\xi^\alpha \mathcal{F} f \in H^{s-|\alpha|},$$

wobei $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$, also ist für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ der Operator D^α stetig und linear als Operator von H^s nach $H^{s-|\alpha|}$ mit Norm gleich 1.
Wir interpretieren nun die Operatoren D_j und damit auch die Operatoren D^α als Ableitungsoperatoren.

Lemma 9.13.
Für jedes $f \in H^s$ und $1 \leq j \leq n$ gilt in H^{s-1} (mit $e_j = (\delta_{j,\nu})_{\nu=1}^n$)

$$D_j f(x) = \frac{1}{i} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+he_j) - f(x)}{h}.$$

Beweis. Nach 9.2 folgt $\mathcal{F}(T_a f)(\xi) = e^{-ia\xi}\mathcal{F}f(\xi)$ für alle $a \in \mathbb{R}^n$ und alle $f \in H^s$. Daher gilt für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{ih}\left(f(.+he_j) - f(.)\right)\right)(\xi) = \frac{1}{ih}\left(e^{ih\xi_j} - 1\right)\mathcal{F}f(\xi).$$

Wegen

$$\left|h^{-1}\left(e^{ih\xi_j} - 1\right)\right| \leq |\xi_j|$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung aus dem Satz über die dominierte Konvergenz und der Definition der Norm in $L^{2,s-1}$. □

Bemerkung 9.14.
Für $s \geq 1$ konvergiert der Differenzenquotient in 9.13 in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Weil jede in $L^2(\mathbb{R}^n)$ konvergente Folge eine Teilfolge besitzt, die fast überall konvergiert (siehe [R1] oder [MV]), existiert eine Nullfolge $(h_n)_{n\geq 1}$ in $\mathbb{R}$ und eine Lebesgue-Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ die Folge $(i^{-1}h_n^{-1}(f(x+h_ne_j) - f(x)))_{n\geq 1}$ konvergiert. Ist f sogar in $H^s \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, so stimmen daher $D_j f$ und $\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$ fast überall überein. Also gilt $\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial x_j} = D_j f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Induktiv folgt

Korollar 9.15.
Ist $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq s$ und $f \in H^s \cap \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$, so gilt für alle $|\alpha| \leq k$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$D^\alpha f = i^{-|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = i^{-|\alpha|} f^{(\alpha)}.$$

Wir zeigen nun, dass die Elemente von H^s für hinreichend große s bis zu einer gegebenen Ordnung im üblichen Sinne differenzierbar sind. Dazu setzen wir für $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n) \ : \ f^{(\alpha)} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n) \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \text{ mit } |\alpha| \leq k\},$$

versehen mit der Norm

$$\|f\|_k := \sup\{|f^{(\alpha)}(x)| \ : \ x \in \mathbb{R}^n \ , \ |\alpha| \leq k\}.$$

Satz 9.16. *(Einbettungssatz von Sobolev)*
Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $s - k > n/2$. Dann ist H^s in $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}^n)$ enthalten, und die Einbettung ist stetig.

Beweis. Für jedes $f \in H^s$ gilt nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k/2} |\mathcal{F}f(\xi)| \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k/2-s/2} (1+|\xi|^2)^{s/2} |\mathcal{F}f(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \|f\|_s \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{k-s} \, d\xi \right)^{1/2} =: C\|f\|_s \quad (*).\end{aligned}$$

Für $k = 0$ folgt hieraus $\mathcal{F}f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Nach 9.7 gelten daher $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$\|f\|_0 \leq \|\mathcal{F}f\|_1 \leq C\|f\|_s.$$

Für $k \geq 1$ folgt aus (*) und 9.2, dass in $L^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\xi_j \mathcal{F}f(\xi) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{ih} \left(e^{ih\xi_j} - 1\right) \mathcal{F}f(\xi) = \lim_{h \to 0} \mathcal{F} \left(\frac{1}{ih} (T_{-he_j} f - f) \right).$$

Nach 9.7 konvergiert daher $i^{-1}h^{-1}(T_{-he_j} f - f)$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$ gegen $D_j f$. Da wir bereits wissen, dass f, also auch $T_{-he_j} f$ in $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$ sind, ist $D_j f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n)$, und es gilt nach 9.7 und (*)

$$\|D_j f\|_\infty \leq \|\xi_j \mathcal{F}f\|_1 \leq C\|f\|_s.$$

Iteriert man diese Argumentation, so erhält man die Behauptung. □

Wir beschreiben nun die ganzzahligen Sobolevräume, ohne die Fouriertransformation zu benutzen.

Lemma 9.17.
Für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt
(i) $\|f\|_s^2 = \|f\|_{s-1}^2 + \sum_{j=1}^n \|D_j f\|_{s-1}^2$ für alle $f \in H^s$.
(ii) $H^s = \{g = g_0 + \sum_{j=1}^n D_j g_j \ : \ g_j \in H^{s+1}$ für $j = 0, \ldots, n\}$ und $\|.\|_s$ ist äquivalent zu $\|.\|_s\hat{}$, wobei

$$\|g\|_s\hat{} = \inf\{(\|g_0\|_{s+1}^2 + \sum_{j=1}^n \|g_j\|_{s+1}^2)^{1/2} \ : \ g = g_0 + \sum_{j=1}^n D_j g_j, \, g_j \in H^{s+1} \text{ für } j = 0, \ldots, n\}.$$

Beweis. (i) folgt aus

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s-1} \left(1 + \sum_{j=1}^n \xi_j^2\right) |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi.$$

(ii) Ist $g \in H^s$ gegeben, so setzen wir $h(\xi) := (1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|)^{-1}\mathcal{F}g(\xi)$ und $h_j(\xi) := h(\xi)\mathrm{sign}\xi_j$, $1 \le j \le n$. Dann sind $g_0 := \mathcal{F}^{-1}h$, $g_j := \mathcal{F}^{-1}h_j$ in H^{s+1} und es gilt $g = g_0 + \sum_{j=1}^n D_j g_j$, sowie

$$\|g_0\|_{s+1}^2 + \sum_{j=1}^n \|g_j\|_{s+1}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s+1} \, (|h(\xi)|^2 + \sum_{j=1}^n |h_j(\xi)|^2) \, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{s+1} \, (1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|)^{-2} \, (n+1)|\mathcal{F}g(\xi)|^2 \, d\xi \le (n+1)\|g\|_s^2.$$

Also ist H^s in der angegebenen Menge enthalten, und es gilt $\|.\|_s\hat{} \le \sqrt{n+1}\|.\|_s$. Andererseits ist die angegebene Menge nach 9.12 in H^s enthalten und mit Hilfe der Dreiecksungleichung folgt auch $\|.\|_s \le \sqrt{n+1}\,\|.\|_s\hat{}$. □

Definition 9.18.
Ist $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und existiert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(.+he_j) - f(.)}{ih}$$

in $L^2(\mathbb{R}^n)$, so bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $D_j f$ und nennen ihn die L^2-Ableitung von f nach der Variablen ξ_j . Rekursiv erklärt man analog die L^2-Ableitungen $D^\alpha f$.

Satz 9.19.
Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist H^k die Menge aller L^2-Funktionen f, für welche alle L^2-Ableitungen $D^\alpha f$ bis zur Ordnung k existieren, und es gilt

$$\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha|\le k} B_{k,\alpha} \, \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \quad \textit{mit} \quad B_{k,\alpha} := \frac{k!}{(k-|\alpha|)!\alpha_1! \dots \alpha_n!}.$$

Weiters ist die Norm

$$\|f\|_{k,1}^2 := \|f\|_{L^2}^2 + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2$$

äquivalent zu $\|f\|_k$.

Beweis. Nach 9.13 folgt rekursiv, dass für jedes $f \in H^k$ alle L^2-Ableitungen bis zur Ordnung k existieren. Den Beweis der Umkehrung führen wir für k=1. Dazu sei f eine L^2-Funktion, deren erste Ableitungen $D_j f$ alle in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Daher ist $(1+|\xi|^2)|\mathcal{F}f(\xi)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, also $f \in H^1$. Aus

$$(1+|\xi|^2)^k = \sum_{|\alpha'|=k} \binom{k}{\alpha'} \xi_1^{2\alpha_1} \dots \xi_n^{2\alpha_n} = \sum_{|\alpha|\le k} \frac{k!}{(k-|\alpha|)!\alpha_1! \dots \alpha_n!} \, \xi^{2\alpha} = \sum_{|\alpha|\le k} B_{k,\alpha}\xi^{2\alpha}$$

und der Definition von $\|.\|_k$ folgt nun die angegebene Identität.
Die letzte Aussage folgt aus der Ungleichungskette

$$1+\sum_{|\alpha|=k}|\xi^\alpha|^2 \leq C_1(1+|\xi|^2)^k \leq C_2\sum_{|\alpha|\leq k}|\xi^\alpha|^2 \leq C_3(1+\max_{1\leq j\leq n}\xi_j^{2k}) \leq (1+\sum_{|\alpha|=k}|\xi^\alpha|^2),$$

mit geeigneten Konstanten C_1, C_2, C_3, die nur von n und k abhängen. □

Definition 9.20.
Aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz und 9.19 folgt

$$\bigcap_{s>0} H^s = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0^n\}.$$

Wir nennen diesen Raum $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$. Er ist dicht in H^s (denn $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ ist offenbar in $\bigcap_{t>0} L^{2,t}(\mathbb{R}^n)$ enthalten und dicht in $L^{2,s}(\mathbb{R}^n)$, daher ist $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ enthalten und dicht in H^s.)
Außerdem setzen wir

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, \mathrm{Tr}(f) \text{ kompakt}\},$$

wobei $\mathrm{Tr}(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, f(x) \neq 0\}^-$.

Beispiele 9.21. Die folgende Funktion ist in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp((|x|^2-1))^{-1} & \text{für } |x|<1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $\mathrm{Tr}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq 1\}$.

Satz 9.22.
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt dicht in H^sfür alle $s \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei ψ wie im obigen Beispiel. Für $k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\chi_k(x) = c^{-1}\int_{|y|\leq k+1}\psi(x-y)\,dy \ \ , \ \ c := \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,dx.$$

Dann ist $\chi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{Tr}(\chi_k) \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| \leq k+2\}$, und es gelten $\chi_k(x) = 1$ für $|x| \leq k$ sowie

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\chi_k^{(\alpha)}(x)| \leq c^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}|\psi^{(\alpha)}(x)|\,dx, \quad (*)$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Für $f \in \mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ und $k \in \mathbb{N}$ ist daher $f_k := f\chi_k$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Aufgrund der Leibniz-Formel gilt für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$:

$$f^{(\alpha)} - f_k^{(\alpha)} = (f(1-\chi_k))^{(\alpha)} = f^{(\alpha)}(1-\chi_k) - \sum_{\beta\leq\alpha,\beta\neq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}f^{(\beta)}\chi_k^{(\alpha-\beta)},$$

mit $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{j=1}^n \binom{\alpha_j}{\beta_j}$. Hieraus folgt mit (*), dass es zu jedem $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ein $C_\alpha > 0$ gibt, mit

$$\|f^{(\alpha)} - f_k^{(\alpha)}\|_2 \leq C_\alpha \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\int_{|x| \geq k} |f^{(\beta)}(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Daher konvergiert $(f_k^{(\alpha)})_{k \geq 1}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ gegen $f^{(\alpha)}$ für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Da $\mathcal{D}_{L^2}(\mathbb{R}^n)$ in H^s dicht ist für alle $s \in \mathbb{R}$, folgt hieraus die Behauptung.

□

Sind $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, dann folgt durch partielle Integration für das innere Produkt in $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(D^\alpha f, g) = (f, D^\alpha g). \quad (*)$$

Dabei bewährt sich auch die Notation $D_j f = -i \frac{\partial f}{\partial x_j}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} D_j f(x) \overline{g(x)} \, dx = i \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \overline{g}}{\partial x_j} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{D_j g(x)} \, dx.$$

Da sich dieses innere Produkt nach 9.11 für jedes $s \in \mathbb{R}$ zu einer stetigen Sesquilinearform auf $H^{-s} \times H^s$ fortsetzt, folgt aus 9.13 und 9.19, dass (*) sogar für alle $f \in H^{-s+|\alpha|}$, $g \in H^s$ gilt. Ist $s \geq |\alpha|$, so ist $D^\alpha g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Weil $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, ist $D^\alpha g$ bereits dadurch eindeutig bestimmt, dass (*) für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dies gilt auch, wenn man nur $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ voraussetzt; allerdings ist dann die Existenz von $D^\alpha g$ nicht mehr gesichert.

Definition 9.23.
Falls zu $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ein $D^\alpha g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existiert, so dass (*) für alle $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt, so nennt man $D^\alpha g$ die α-te schwache Ableitung von g.

Die Bedeutung der schwachen Ableitung klärt der folgende Satz:

Satz 9.24.
Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$H^k = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,:\, f \text{ besitzt schwache Ableitungen } D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\forall\, \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\},$$

und es gilt $\|f\|_k^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} B_{k,\alpha} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2$.

Beweis. Jedes $f \in H^k$ besitzt für $|\alpha| \leq k$ nach der Vorüberlegung schwache Ableitungen $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, und nach 9.19 gilt die Aussage über $\|f\|_k$.
Besitzt umgekehrt $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ schwache Ableitungen $D^\alpha f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ für $|\alpha| \leq k$, so gilt nach 9.15 und 9.6 für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $|\alpha| \leq k$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi) \xi^\alpha \overline{\mathcal{F}f(\xi)} \, d\xi \right| = |(D^\alpha \varphi, f)| = |(\varphi, D^\alpha f)| \leq \|\varphi\|_{L^2} \|D^\alpha f\|_{L^2} = \|\hat{\varphi}\|_{L^2} \|D^\alpha f\|_{L^2}.$$

Weil mit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ auch $\mathcal{F}(\mathcal{D}(\mathbb{R}^n))$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt, folgt hieraus, dass $\xi^\alpha \overline{\mathcal{F}f(\xi)}$ für $|\alpha| \leq k$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Da es ein $C > 0$ gibt mit

$$(1 + |\xi|^2)^k = (1 + \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2)^k \leq C \sum_{|\alpha| \leq k} |\xi^\alpha|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^k \, |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha \mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi < \infty.$$

Also ist $\mathcal{F}(f) \in L^{2,k}(\mathbb{R}^n)$ und daher $f \in H^k$. $\square$

Definition 9.25.
Sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \, : \, \mathrm{Tr}(f) \subset \Omega\}$$

und definieren für $s \in \mathbb{R}$ den Raum $H_0^s(\Omega)$ als die Abschließung von $\mathcal{D}(\Omega)$ in H^s.

Da $\mathcal{D}(\Omega)$ offenbar ein linearer Teilraum von H^s ist, ist $H_0^s(\Omega)$ ein Hilbertraum. Aus 9.10 folgt, dass für $s < t$ der Raum $H_0^t(\Omega)$ stetig in $H_0^s(\Omega)$ eingebettet ist. Für beschränktes Ω gilt darüber hinaus:

Satz 9.26.
Für jede beschränkte, offene Menge Ω in $\mathbb{R}^n$ und alle $s,t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ ist die Einheitskugel von $H_0^t(\Omega)$ relativ kompakt in $H_0^s(\Omega)$, d.h. die Einbettung

$$j_t^s : H_0^t(\Omega) \hookrightarrow H_0^s(\Omega)$$

ein kompakter Operator.

Beweis. Wir wählen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi|_\Omega \equiv 1$. Dann gilt für $f \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(1) \qquad \hat{f}(\xi) = \widehat{f\varphi}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)e^{-ix\xi} \, dx \; , \; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Aus der Umkehrformel folgt $\varphi(x)e^{-ix\xi} = \mathcal{F}^{-1}(T_{-\xi}\hat{\varphi})(x)$. Daher gibt es zu jedem $r > 0$ ein $C > 0$, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ mit $|\xi| \leq r$ gilt:

$$\|\varphi(.)e^{-i.\xi}\|_{-t}^2 = \|T_{-\xi}\hat{\varphi}\|_{L^{2,-t}}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(y+\xi)|^2(1+|y|^2)^{-t} \, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(y)|^2(1+|y-\xi|^2)^{-t} \, dy \leq C^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(y)|^2(1+|y|^2)^{-t} \, dy = C^2\|\varphi\|_{-t}^2.$$

Fasst man nun das Integral in (1) im Sinne von 9.11 (i) auf, so folgt für $|\xi| \leq r$:

$$(2) \qquad |\hat{f}(\xi)| \leq C\|f\|_t\|\varphi\|_{-t}.$$

Da für $1 \leq j \leq n$ gilt

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)(-ix_j)e^{-ix\xi} \, d\xi,$$

erhält man analog zu jedem $r > 0$ ein $D > 0$ mit

$$(3) \qquad \left|\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j}(\xi)\right| \leq D\|f\|_t,$$

für $|\xi| \leq r$ und $1 \leq j \leq n$. Aus (2) und (3) folgt, dass für jedes $f \in H_0^t(\Omega)$ die Funktion $\hat{f}$ in $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ist, und dass (2) und (3) für alle $f \in H_0^t(\Omega)$ gelten.
Ist nun $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in der Einheitskugel U von $H_0^t(\Omega)$, so folgt hieraus, dass $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ die Voraussetzungen des Satz von Arzela-Ascoli erfüllen: Beschränktheit und gleichgradige Stetigkeit (siehe [MV]). Nach dem bekannten Diagonalfolgenargument gibt es daher eine Teilfolge $(\hat{f}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, welche auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ gleichmäßig konvergiert. Um nachzuweisen, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $H_0^s(\Omega)$ konvergiert, seien $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $R > 0$ fixiert. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_s &\leq \left(\int_{|\xi|\leq R} |\hat{f}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, d\xi\right)^{1/2} + \left(\int_{|\xi|\geq R} |f(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s\, d\xi\right)^{1/2} \\ &\leq M(R) \sup_{|\xi|\leq R} |\hat{f}(\xi)| + (1+R^2)^{(s-t)/2}\, \|f\|_t. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung gilt wegen (2) für alle $f \in H_0^t(\Omega)$. Wendet man sie für großes R in dieser Form auf $f_{n_k} - f_{n_l}$ an, so folgt, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H_0^s(\Omega)$ ist. Daher ist U in $H_0^s(\Omega)$ relativ kompakt. $\square$

Aus dem Sobolev'schen Einbettungssatz 9.16 folgt, dass für offene Mengen Ω in $\mathbb{R}^n$, die von $\mathbb{R}^n$ verschieden sind, der Raum $H_0^k(\Omega)$ für $k > n/2$ nur Funktionen enthält, welche samt allen Ableitungen bis zur Ordnung $k - n/2$ am Rand von Ω verschwinden. Die Dualität wie bei den Räumen H^s ist daher nicht zu erwarten.

Definition 9.27.
Für jede offene Teilmenge Ω von $\mathbb{R}^n$ und $s \in \mathbb{R}$ setzen wir $H_\bullet^s(\Omega) := H_0^{-s}(\Omega)'$.

Für $s < t$ ist die Einbettung $j : H_0^{-s}(\Omega) \longrightarrow H_0^{-t}(\Omega)$ stetig und hat dichtes Bild, da $\mathcal{D}(\Omega)$ in allen Räumen $H_0^s(\Omega)$ dicht liegt. Daher ist $j' : H_\bullet^t(\Omega) \longrightarrow H_\bullet^s(\Omega)$ stetig und injektiv. Wir fassen $H_\bullet^t(\Omega)$ vermöge j' als Teilraum von $H_\bullet^s(\Omega)$ auf und erhalten so eine fallende Skala $(H_\bullet^s(\Omega))_{s\in\mathbb{R}}$ von Hilberträumen. Wegen $H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ können wir $H_\bullet^0(\Omega) = H_0^0(\Omega)'$ mittels des inneren Produktes in $L^2(\Omega)$ mit $L^2(\Omega)$ identifizieren. In diesem Sinne ist dann $H_\bullet^s(\Omega)$ für $s \geq 0$ ein Teilraum von $L^2(\Omega)$.
Für $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ mit $|\alpha| \leq k$ definiert der Ableitungsoperator D^α eine stetige lineare Abbildung von $H_0^{-s}(\Omega)$ nach $H_0^{-s-k}(\Omega)$. Die ebenfalls mit D^α bezeichnete duale Abbildung ist daher eine stetige lineare Abbildung von $H_\bullet^{s+k}(\Omega)$ nach $H_\bullet^s(\Omega)$.

Definition 9.28.
Für $f \in L^2(\Omega)$ bezeichnen wir mit $D^\alpha f \in L^2(\Omega)$ die α-te schwache Ableitung von f, falls für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$(D^\alpha f, \varphi) = (f, D^\alpha \varphi).$$

Weil $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, ist $D^\alpha f$ durch f eindeutig bestimmt.
Für jede offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und $k \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : f \text{ besitzt schwache Ableitungen } D^\alpha f \in L^2(\Omega)\, \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |\alpha| \leq k\}$$

und versehen $H^k(\Omega)$ mit der Norm

$$\|f\|_k = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} B_{k,\alpha}\, \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

$H^k(\Omega)$ ist ein Hilbertraum, der für $\Omega = \mathbb{R}^n$ nach 9.19 mit H^k übereinstimmt. Die Beziehung zwischen $H^k_\bullet(\Omega)$ und $H^k(\Omega)$ klärt das folgende Lemma:

Lemma 9.29.
Für jede offene Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ gelten:
(i) $H^k_\bullet(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ und $\|f\|_k \leq \|f\|^\bullet_k$ für alle $f \in H^k_\bullet(\Omega)$.
(ii) Die Einschränkungsabbildung $\rho : f \mapsto f|_\Omega$ ist eine stetige Surjektion von H^k auf $H^k_\bullet(\Omega)$.
(iii) $H^k_\bullet(\Omega) = H^k(\Omega)$ gilt genau dann, wenn jedes $f \in H^k(\Omega)$ sich zu einem $F \in H^k$ ausdehnen lässt. Ist dies der Fall, so existiert ein $E \in \mathcal{L}(H^k(\Omega), H^k)$ mit $(Ef)|_\Omega = f$ für alle $f \in H^k(\Omega)$.

Beweis. (i) Für $f \in H^k_\bullet(\Omega)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n_0$ mit $|\alpha| \leq k$ ist $D^\alpha f$ in $H^{k-|\alpha|}_\bullet(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Daher gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H_0^{k+|\alpha|}(\Omega)$:

$$(D^\alpha f, \varphi) = (f, D^\alpha \varphi).$$

Also ist $f \in H^k(\Omega)$. Um die Normabschätzung zu beweisen, wählen wir nach Hahn-Banach ein $F \in (H^{-k})' = H^k$ mit $F|_{H_0^{-k}(\Omega)} = f$ und $\|F\|_k = \|f\|^\bullet_k$. Nach 9.19 gilt für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $|\alpha| \leq k$:

$$(D^\alpha F, \varphi) = (F, D^\alpha \varphi) = (f, D^\alpha \varphi) = (D^\alpha f, \varphi),$$

also $D^\alpha F|_\Omega = D^\alpha f$. Hieraus folgt mit 9.19

$$\|f\|^\bullet_k = \|F\|_k = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} B_{k,\alpha} \|D^\alpha F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2} \geq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} B_{k,\alpha} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} = \|f\|_k.$$

(ii) Dies wurde schon im Beweis von (i) gezeigt.
(iii) folgt aus (ii) und (i), sowie daraus, dass H^k ein Hilbertraum ist. □

Es gilt, siehe [St]: (iii) ist erfüllt, wenn Ω einen genügend glatten Rand hat.

Satz 9.30.
Ist Ω eine beschränkte, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{C}^1$-Rand, so gibt es ein $E \in \mathcal{L}(H^k(\Omega), H^k)$ mit $(Ef)|_\Omega = f$ für alle $f \in H^k(\Omega)$.

Korollar 9.31.
Ist Ω eine beschränkte, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{C}^1$-Rand, so gilt $H^k_\bullet(\Omega) = H^k(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Satz 9.32.
Für jede beschränkte, offene Teilmenge Ω des $\mathbb{R}^n$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$ mit $s < t$ ist die Einheitskugel von $H^t_\bullet(\Omega)$ relativ kompakt in $H^s_\bullet(\Omega)$.

Beweis. Nach 9.26 ist die Einheitskugel von $H_0^{-s}(\Omega)$ in $H_0^{-t}(\Omega)$ relativ kompakt, d.h. die Einbettung $j : H_0^{-s}(\Omega) \longrightarrow H_0^{-t}(\Omega)$ ist kompakt, daher auch die adjungierte j' : $H^t_\bullet(\Omega) \longrightarrow H^s_\bullet(\Omega)$ (siehe 7.4). □

Korollar 9.33.
Für jede beschränkte, offene Teilmenge Ω *des* $\mathbb{R}^n$ *mit* $\mathcal{C}^1$*-Rand und jedes* $k \in \mathbb{N}_0$ *ist die Einheitskugel von* $H^{k+1}(\Omega)$ *relativ kompakt in* $H^k(\Omega)$*.*

Satz 9.34.
Für jede beschränkte, offene Teilmenge Ω *des* $\mathbb{R}^n$ *mit* $\mathcal{C}^1$*-Rand und* $m < k - n/2$ *gilt* $H^k(\Omega) \subset \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$*.*

Beweis. Zu jedem $f \in H^k(\Omega)$ gibt es nach 9.30 ein $F \in H^k$ mit $F|_\Omega = f$. Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz ist $F \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$, also $f = F|_\Omega \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$. □

10 Unbeschränkte Operatoren

Definition 10.1. Sei H ein Hilbertraum und T ein linearer Operator definiert auf einem Teilraum $D(T)$ von H. Wir setzen voraus, dass $D(T)$ dicht in H ist.
T heißt abgeschlossen , falls der Graph

$$G(T) = \{(x, y) \in H \times H \,:\, x \in D(T)\,,\, y = Tx\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge in $H \times H$ ist.

Bemerkung 10.2. T ist abgeschlossen, wenn für $u_n \in D(T)$ mit $u_n \to u$ in H und mit $Tu_n \to v$ in H folgt, dass $u \in D(T)$ und $v = Tu$.

Beispiele 10.3.
a) Sei $T_0 = -\Delta = -\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ mit $D(T_0) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ und $H = H^2$ (Sobolevraum, siehe 9.8).
T_0 ist nicht abgeschlossen: dazu betrachte man ein $u \in H^2$, das nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt, weiters eine Folge $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit $u_n \to u$ in H^2. Dann ist $(u_n, -\Delta u_n)$ in $G(T_0)$ und konvergiert in $H^2 \times H^2$ gegen $(u, -\Delta u)$, und dieses Element gehört nicht zu $G(T_0)$. Ähnliches gilt, wenn man für den zugrundeliegenden Hilbertraum den $L^2(\mathbb{R}^n)$ wählt.
b) Sei $T_1 = -\Delta$ und $D(T_1) = H^2$ und $H = L^2(\mathbb{R}^n)$, dabei interpretieren wir den Laplace-Operator Δ im Sinne der L^2-Ableitungen. Dann ist T_1 ein abgeschlossener Operator: wenn $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $(-\Delta u_n) \to v$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$, dann ist $(u_n)_n$ nach 9.19 eine Cauchy-Folge im Sobolevraum H^2, und daher konvergent in H^2. Somit gilt nach 9.19 $(u, -\Delta u) \in G(T_1)$ und T_1 ist abgeschlossen.

Diese Beispiele legen die folgende Begriffsbildung nahe:

Definition 10.4. Ein Operator T heißt abschließbar , wenn der Abschluss des Graphen von T selbst ein Graph ist.
Den Abschluss $\overline{T}$ des Operators T kann man dann wie folgt definieren:

$$D(\overline{T}) := \{x \in H \,:\, \exists y \in H \text{ mit } (x, y) \in \overline{G(T)}\}.$$

Für jedes $x \in D(\overline{T})$ ist, da $\overline{G(T)}$ ein Graph ist, y eindeutig bestimmt, wir setzen daher $\overline{T}x = y$.
$D(\overline{T})$ kann auch als die Menge aller $x \in H$ beschrieben werden, für welche eine Folge $(x_n)_n$ in $D(T)$ existiert, so dass $x_n \to x$ und $(Tx_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist. Wir setzen dann $\overline{T}x = \lim_{n\to\infty} Tx_n$.

Beispiele 10.5.
Sei $T_0 = -\Delta$ und $D(T_0) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, wie in 10.3. Dann ist T_0 abschließbar und der Abschluss von T_0 ist der Operator T_1 aus 10.3 b. Sei dazu $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, so dass eine Folge $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u_n \to v$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt für jedes $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$:

$$(v, g) = (\lim_{n\to\infty}(-\Delta u_n), g) = \lim_{n\to\infty}(-\Delta u_n, g) = \lim_{n\to\infty}(u_n, -\Delta g) = (u, -\Delta g),$$

und daher gilt $v = -\Delta u$ im schwachen Sinne und nach 9.24 ist $u \in H^2$, also gilt $D(\overline{T_0}) \subseteq H^2$. Nach 9.22 ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in H^2, daher ist $H^2 \subseteq D(\overline{T_0})$. Folglich gilt $H^2 = D(T_1) = D(\overline{T_0})$. Somit ist $T_1 = \overline{T_0}$ (siehe 9.19 und 9.24).

Bemerkung 10.6. Ist ein Operator T auf ganz H definiert, also $D(T) = H$, dann ist T genau dann abgeschlossen, wenn T stetig ist (closed graph Theorem).

Definition 10.7. Ist T ein unbeschränkter Operator mit dichtem Definitionsbereich $D(T)$, so definiert man $D(T^*)$ als die Menge aller $u \in H$, für welche die Abbildung $v \mapsto (u, Tv)$ zu einem stetigen, konjugiert-linearen Funktional auf H fortgesetzt werden kann.
Nach 1.16 existiert dann ein $f \in H$ mit $(f, v) = (u, Tv)$, für alle $u \in D(T^*)$ und für alle $v \in D(T)$. Weil $D(T)$ dicht in H ist, folgt, dass f eindeutig bestimmt ist und wir setzen

$$T^* u = f.$$

Bemerkung 10.8. Ist $D(T) = H$ und T stetig, dann ist T^* der gewöhnliche adjungierte Operator zu T.

Beispiele 10.9. Für die Operatoren in 10.3 gilt: $T_0^* = T_1$.
Zunächst ist $u \in D(T_0^*)$ genau dann, wenn die Abbildung $v \mapsto (u, -\Delta v)$ von $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ zu einem stetigen, konjugiert-linearen Funktional auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden kann. Dafür muss nach 1.16 ein eindeutig bestimmtes Element $-\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ existieren mit

$$(u, -\Delta v) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{(-\Delta v(x))}\, dx = (-\Delta u, v),$$

d.h. $-\Delta u$ existiert im Sinne der Distributionen, also als schwache Ableitung im $L^2(\mathbb{R}^n)$.
Daher ist

$$D(T_0^*) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \, : \, -\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Daraus folgt $D(T_0^*) = H^2$ und $T_0^* u = -\Delta u$, für alle $u \in H^2$.

Satz 10.10. *Sei T ein dicht definierter Operator. Dann ist T^* abgeschlossen.*

Beweis. Sei $(v_n)_n$ eine Folge in $D(T^*)$ mit $v_n \to v$ in H und $T^* v_n \to w^*$ in H. Wir haben zu zeigen, dass das Paar $(v, w^*) \in G(T^*)$. Für jedes $u \in D(T)$ gilt:

$$(Tu, v) = \lim_{n\to\infty} (Tu, v_n) = \lim_{n\to\infty} (u, T^* v_n) = (u, w^*).$$

Daraus folgt, dass $v \in D(T^*)$ und $T^* v = w^*$, also ist $(v, w^*) \in G(T^*)$. □

Satz 10.11.
Sei T ein dicht definierter Operator mit Definitionsbereich $D(T)$. Dann gilt für den Graphen $G(T^*)$ von T^* :

$$G(T^*) = (V(\overline{G(T)}))^\perp,$$

wobei $V : H \times H \longrightarrow H \times H$ der unitäre Operator ist, gegeben durch $V(u, v) = (v, -u)$.

Beweis. Für jedes $u \in D(T)$ und $(v, w^*) \in H \times H$ gilt

$$(V(u, Tu), (v, w^*))_{H\times H} = (Tu, v) - (u, w^*).$$

Die rechte Seite verschwindet für alle $u \in D(T)$ genau dann, wenn $v \in D(T^*)$ und $w^* = T^*v$, das heißt, wenn $(v, w^*) \in G(T^*)$. Die linke Seite verschwindet für alle $u \in D(T)$ genau dann, wenn $(v, w^*) \in V(G(T))^\perp$.
Weiters gilt $V^{-1} = -V$ und beide Operatoren V und V^{-1} sind stetig, daher folgt

$$V(G(T))^\perp = \overline{V(G(T))}^\perp = (V(\overline{G(T)}))^\perp.$$

□

Nun untersuchen wir die Frage, unter welchen Bedingungen der Definitionsbereich von T^* dicht liegt.

Satz 10.12.
Sei T ein abschließbarer Operator. Dann gilt : $D(T^*)$ ist dicht in H und $T^{**} := (T^*)^* = \overline{T}$, dabei ist $\overline{T}$ jener Operator, welcher $\overline{G(T)}$ als Graphen hat.
Ist T schon abgeschlossen, dann ist $D(T^*)$ dicht in H und $T^{**} = T$.

Beweis. Angenommen $D(T^*)$ ist nicht dicht in H. Dann existiert ein $w \neq 0$ mit $w \in \overline{D(T^*)}^\perp$. Es folgt für jedes $v \in D(T^*)$:

$$((0, w), (T^*v, -v))_{H\times H} = 0.$$

Somit ist $(0, w) \in (V(G(T^*))^\perp$. Der vorige Satz liefert jedoch:

$$V(\overline{G(T)}) = G(T^*)^\perp.$$

Wendet man V auf diese Identität an, so folgt wegen $V^2 = -I$

$$V(G(T^*)^\perp) = \overline{G(T)}.$$

Für jeden Teilraum L von $H \times H$ und eine beliebige Isometrie V auf $H \times H$ gilt $V(L^\perp) = (V(L))^\perp$, weil

$$(V(u, v), (x, y))_{H\times H} = ((u, v), V(x, y))_{H\times H}.$$

Daher erhalten wir nun $(0, w) \in \overline{G(T)}$ und das ist der Graph von $\overline{T}$, somit ist $w = 0$, Widerspruch!
Für die zweite Behauptung erwähnen wir zunächst, dass $(T^*)^*$ definiert ist, weil $\overline{D(T^*)}$ dicht in H ist. Da T^* abgeschlossen ist, erhalten wir nach 10.11, dass $G(T^{**}) = \overline{G(T)}$ und $T^{**} = \overline{T}$. Das bedeutet: $D(T^{**}) = D(\overline{T})$ und $T^{**}u = \overline{T}(u)$, für alle $u \in D(\overline{T})$. □

Satz 10.13.
Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2. Dann gilt
(i) $kerT^* = (imT)^\perp$.
(ii) T^* ist dicht definiert genau dann, wenn T abschließbar ist.

Beweis. (i) Sei $x \in \ker T^*$ und $y \in \operatorname{im} T$. Dann existiert ein $u \in D(T)$ mit $Tu = y$ und es gilt $(x, Tu) = (T^*x, u) = 0$, daher ist $x \in (\operatorname{im} T)^\perp$. Ist umgekehrt $x \in (\operatorname{im} T)^\perp$, dann ist $(x, Tu) = 0$ für alle $u \in D(T)$, also auch $(T^*x, u) = 0$ für alle $u \in D(T)$, und weil $D(T)$ dicht in H_1 liegt, folgt $T^*x = 0$ und $x \in \ker T^*$.
(ii) Zunächst gilt: ein linearer Teilraum L von $H_1 \times H_2$ ist genau dann Graph eines linearen Operators A von H_1 nach H_2, wenn $\{(x, y) \in L : x = 0\} = \{(0, 0)\}$ gilt: offensichtlich reicht es zu zeigen, dass die angegebene Bedingung die Existenz eines Operators A mit $G(A) = L$ impliziert; dazu seien π_{H_1} bzw. π_{H_2} die kanonischen Abbildungen von L nach H_1 bzw. H_2. Dann sind π_{H_1}, π_{H_2} linear, und nach Voraussetzung gilt $\pi_{H_1}^{-1}(\{0\}) = \{(0, 0)\}$. Also ist π_{H_1} injektiv; definiert man $D(A) := \pi_{H_1}(L)$ und $A := \pi_{H_2} \circ \pi_{H_1}^{-1}$, so ist A ein linearer Operator von H_1 nach H_2, für den $G(A) = L$ gilt.
Aus dem Beweis von 10.11 folgt: $G(T^*) = V(G(T))^\perp$, dies impliziert

$$\overline{G(T)} = G(T)^{\perp\perp} = (V^{-1}(G(T^*)))^\perp,$$

daher ist $(0, \eta) \in \overline{G(T)}$ genau dann, wenn

$$((0, \eta), (-z, y))_{H_1 \times H_2} = 0 \quad \forall (y, z) \in G(T^*).$$

Dies ist äquivalent zu $(y, \eta)_{H_2} = 0$ für alle $y \in D(T^*)$, also äquivalent zu $\eta \in D(T^*)^\perp$. Nach der obigen Bemerkung folgt hieraus, dass $\overline{G(T)}$ genau dann Graph eines Operators ist, wenn $D(T^*)$ in H_2 dicht liegt. $\square$

Bemerkung 10.14.
Ist $T : D(T) \longrightarrow H$ injektiv, dann wird auf $D(T^{-1}) = \operatorname{im} T$ durch T^{-1} der zu T inverse Operator definiert. Es gilt

$$G(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y) : y \in D(T^{-1})\} = \{(Tx, x) : x \in D(T)\},$$

daher ist ein injektiver Operator T genau dann abgeschlossen, wenn T^{-1} abgeschlossen ist.
Weiters gilt: ist T ein injektiver, dicht definierter Operator und sei $\operatorname{im}(T)$ dicht in H. Dann ist T^* injektiv, und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Es gilt $\ker T^* = (\operatorname{im} T)^\perp = \{0\}$. Um die angegebene Identität zu beweisen definieren wir $U : H \times H \longrightarrow H \times H$ durch $U(x, y) = (y, x)$. Dann ist U unitär und es gilt $UV = V^{-1}U^{-1}$. Aufgrund der Vorbemerkung gilt $G((T^*)^{-1}) = UG(T^*)$ und $U^{-1}G(T) = G(T^{-1})$. Weil T^{-1} dicht definiert ist, erhält man aus 10.11 und dem Beweis von 10.12:

$$G((T^*)^{-1}) = UG(T^*) = U(V(G(T)))^\perp = UV(G(T)^\perp)$$

$$= V^{-1}U^{-1}(G(T)^\perp) = V^{-1}(U^{-1}(G(T)))^\perp = V^{-1}(G((T^{-1}))^\perp = G((T^{-1})^*).$$

Beispiele 10.15. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar (im reellen Sinne). Wir definieren

$$\overline{\partial} f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} \, d\overline{z_k},$$

wobei die rechte Seite eine $(0, 1)$-Form auf Ω ist (siehe auch 7.29). Mit $L^2_{(0,1)}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller $(0, 1)$-Formen $g = \sum_{k=1}^n g_k d\overline{z_k}$ mit Koeffizienten $g_k \in L^2(\Omega)$, $k =$

$1, \ldots, n$. Sind $g, h \in L^2_{(0,1)}(\Omega)$ zwei $(0,1)$-Formen, so ist das innere Produkt in $L^2_{(0,1)}(\Omega)$ definiert durch

$$(g, h) := \sum_{k=1}^{n} (g_k, h_k).$$

so wird $L^2_{(0,1)}(\Omega)$ ein Hilbertraum. Fasst man die Ableitungen bei $\overline{\partial}$ im schwachen Sinne auf, so ist

$$\overline{\partial} : D(\overline{\partial}) \longrightarrow L^2_{(0,1)}(\Omega)$$

ein dicht definierter, abgeschlossener Operator (siehe 10.3). Die genaue Beschreibung des adjungierten Operators $\overline{\partial}^*$ insbesondere seines Definitionsbereiches $D(\overline{\partial}^*)$, sowie Existenz und Eigenschaften der Lösungen der inhomogenen Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen $\overline{\partial} f = g$, bei vorgegebener rechter Seite $g \in L^2_{(0,1)}(\Omega)$, sind zentrale Probleme der modernen Komplexen Analysis. Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung $\overline{\partial} f = g$ ist $\overline{\partial} g = 0$ im Sinne der Distributionen. Ist diese Bedingung auch hinreichend?

Die folgenden Sätze über unbeschränkte Operatoren sind vor allem für das oben geschilderte $\overline{\partial}$-Problem von Bedeutung.
Zunächst einige vorbereitende Aussagen über beschränkte Operatoren:

Lemma 10.16.
Sei $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein beschränkter, linearer Operator zwischen Hilberträumen. $T(H_1)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $T|_{(kerT)^\perp}$ von unten beschränkt ist, d.h.

$$\|Tf\| \geq C\|f\| \ , \ \forall f \in (kerT)^\perp.$$

Beweis. Ist $T(H_1)$ abgeschlossen, dann ist Abbildung

$$T : (\ker T)^\perp \longrightarrow T(H_1)$$

bijektiv und stetig und nach dem open-mapping Theorem (5.10) auch offen. Daraus ergibt sich die gewünschte Ungleichung.
Zur Umkehrung sei $(f_n)_n$ eine Folge in H_1 mit $Tf_n \to y$ in H_2. Wir haben zu zeigen, es existiert $h \in H_1$ mit $Th = y$. Wir zerlegen $f_n = g_n + h_n$ mit $g_n \in \ker T$ und $h_n \in (\ker T)^\perp$. Nach Voraussetzung gilt

$$\|h_n - h_m\| \leq C\|Th_n - Th_m\| = C\|Tf_n - Tf_m\| < \epsilon,$$

für alle genügend großen n und m. Daher ist $(h_n)_n$ eine Cauchy-Folge. Sei $h = \lim_{n\to\infty} h_n$. Dann folgt

$$\|Tf_n - Th\| = \|Th_n - Th\| \leq \|T\| \, \|h_n - h\|,$$

und somit

$$y = \lim_{n\to\infty} Tf_n = Th.$$

$\square$

Lemma 10.17.
Sei T wie im vorigen Lemma. $T(H_1)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $T^*(H_2)$ abgeschlossen ist.

Beweis. Da $T^{**} = T$, genügt es zu zeigen, dass aus der Abgeschlossenheit von $T(H_1)$ jene von $T^*(H_2)$ folgt. Wir werden beweisen, dass aus der Abgeschlossenheit von $T(H_1)$ folgt, dass $(\ker T)^\perp = \mathrm{im} T^*$; da $(\ker T)^\perp$ abgeschlossen ist, sind wir dann fertig.
Sei $x \in \mathrm{im} T^*$. Dann existiert $y \in H_2$ mit $x = T^* y$. Für $x' \in \ker T$ gilt nun

$$(x, x') = (T^* y, x') = (y, Tx') = 0,$$

also ist $\mathrm{im} T^* \subseteq (\ker T)^\perp$.
Für $x' \in (\ker T)^\perp$ definieren wir auf dem abgeschlossenen Teilraum $T(H_1)$ von H_2 durch

$$\lambda(Tx) = (x, x')$$

ein lineares Funktional (es ist wohldefiniert, da aus $Tx = T\tilde{x}$ folgt, dass $x - \tilde{x} \in \ker T$, also ist $(x - \tilde{x}, x') = 0$ und $(x, x') = (\tilde{x}, x')$). Der Operator $T : H_1 \longrightarrow T(H_1)$ ist stetig und surjektiv und weil $T(H_1)$ abgeschlossen ist, folgt aus dem open-mapping Theorem (5.10) $\|x\| \leq C\|Tx\|$, für alle $x \in H_1$, wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Für $y = Tx$ folgt daher

$$|\lambda(y)| = |(x, x')| \leq \|x\|\|x'\| \leq C\|y\|\|x'\|.$$

Daher ist λ stetig auf $\mathrm{im} T$. Nach 1.16 existiert daher ein eindeutig bestimmtes Element $z \in \mathrm{im} T$ mit

$$\lambda(y) = (y, z)_2 = (x, x')_1.$$

Daraus folgt: $(y, z)_2 = (Tx, z)_2 = (x, T^* z)_1 = (x, x')_1$, für alle $x \in H_1$, und daher $x' = T^* z \in \mathrm{im} T^*$. $\square$

Lemma 10.18.
Sei $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. $\mathrm{im} T$ ist genau dann abgeschlossen in H_2, wenn $T|_{D(T)\cap(\ker T)^\perp}$ von unten beschränkt ist, d.h.

$$\|Tf\| \geq C\|f\| \quad , \ \forall f \in D(T) \cap (\ker T)^\perp.$$

Beweis. Auf dem Graphen $G(T)$ definieren wir durch $\tilde{T}(\{f, Tf\}) = Tf$ einen beschränkten, linearen Operator

$$\tilde{T} : G(T) \longrightarrow H_2,$$

denn es gilt

$$\|\tilde{T}(\{f, Tf\})\| = \|Tf\| \leq (\|f\|^2 + \|Tf\|^2)^{1/2} = \|\{f, Tf\}\|;$$

weiters ist $\mathrm{im}\tilde{T} = \mathrm{im} T$.
Nach 10.16 ist daher $\mathrm{im} T$ genau dann abgeschlossen, wenn $\tilde{T}\Big|_{(\ker \tilde{T})^\perp}$ von unten beschränkt ist.
Es gilt $\ker \tilde{T} = \ker T \oplus \{0\}$, und es bleibt zu zeigen, dass $\tilde{T}\Big|_{(\ker \tilde{T})^\perp}$ genau dann von unten beschränkt ist, wenn $T|_{D(T)\cap(\ker T)^\perp}$ von unten beschränkt ist. Dies folgt aus

$$\|\tilde{T}(\{f, Tf\})\| = \|Tf\| \geq C(\|f\|^2 + \|Tf\|^2)^{1/2},$$

und bei $0 < C < 1$ (o.B.d.A.) ergibt sich

$$\|Tf\|^2 \geq \frac{C^2}{1-C^2} \|f\|^2,$$

und daraus folgt die gewünschte Äquivalenz.

□

Lemma 10.19.
Seien $P, Q : H \longrightarrow H$ orthogonale Projektionen auf dem Hilbertraum H. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) im(PQ) ist abgeschlossen;
(ii) im(QP) ist abgeschlossen;
(iii) im$(I-P)(I-Q)$ ist abgeschlossen;
(iv) $P(H) + (I-Q)(H)$ ist abgeschlossen.

Beweis. (i) und (ii) sind äquivalent, wegen $QP = Q^*P^* = (PQ)^*$ und 10.17.
Sei nun (ii) erfüllt und seien $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ Folgen in H mit $Pf_n + (I-Q)g_n \to h$. Dann gilt

$$Q(Pf_n + (I-Q)g_n) = QPf_n \to Qh.$$

Nach Voraussetzung ist $\mathrm{im}(QP)$ abgeschlossen, daher existiert ein $f \in H$ mit $QPf = Qh$; es folgt $Qh = Pf - (I-Q)(Pf)$ und

$$h = Qh+(I-Q)h = Pf-(I-Q)(Pf)+(I-Q)h = Pf+(I-Q)(h-Pf) \in \mathrm{im}(P+(I-Q)),$$

also gilt (iv).
Ist umgekehrt (iv) erfüllt und $(f_n)_n$ eine Folge in H mit $QPf_n \to h$. Dann folgt:

$$QPf_n = Pf_n - (I-Q)Pf_n \in P(H) + (I-Q)(H),$$

und daher existieren $f, g \in H$ mit $h = Pf + (I-Q)g$; es folgt

$$Qh = Q(\lim_{n\to\infty} QPf_n) = \lim_{n\to\infty} Q^2Pf_n = h,$$

und

$$h = Pf + (I-Q)g = Qh = QPf \in \mathrm{im}(QP),$$

also gilt (ii).
Ersetzt man schließlich P durch $I-P$ und Q durch $I-Q$, so folgt aus dem bisher bewiesenen Aussagen die Äquivalenz von

$$\mathrm{im}(I-P)(I-Q) \text{ abgeschlossen} \Leftrightarrow (I-P)(H) + Q(H) \text{ abgeschlossen},$$

und daraus ergibt sich der Rest der Behauptungen. □

Nunmehr sind wir in der Lage, Satz 10.17 auf dicht definierte, abgeschlossene Operatoren zu übertragen:

Satz 10.20.
Sei $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. im$T$ ist genau dann abgeschlossen, wenn imT^* abgeschlossen ist.

Beweis. Sei $P : H_1 \times H_2 \longrightarrow G(T)$ die orthogonale Projektion von $H_1 \times H_2$ auf den abgeschlossenen Teilraum $G(T)$ von $H_1 \times H_2$, weiters $Q : H_1 \times H_2 \longrightarrow \{0\} \times H_2$ ebenfalls die orthogonale Projektion. Dann gilt : $\mathrm{im}T \cong \mathrm{im}QP$ und weil $I - Q : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_1 \times \{0\}$ und

$$I - P : H_1 \times H_2 \longrightarrow G(T)^\perp = V(G(T^*)) \cong G(T^*)$$

gilt (siehe 10.11), folgt der Satz aus 10.19.

□

Satz 10.21. *Sei $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator. Dann ist $\ker T$ abgeschlossen in H_1.*

Beweis. Es gilt: $\ker T^* = (\mathrm{im}T)^\perp$ (siehe 10.13).
Ersetzt man T durch T^*, dann ist wegen $T = T^{**}$ (siehe 10.12) $\ker T^{**} = \ker T = (\mathrm{im}T^*)^\perp$ und $\ker T$ ist abgeschlossen. □

Satz 10.22. *Sei $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator und G ein abgeschlossener Teilraum von H_2 mit $G \supseteq \mathrm{im}T$. Sei ferner $T^*|_{D(T^*)\cap G}$ von unten beschränkt, also $\|f\| \le C\|T^*f\|$ für alle $f \in D(T^*) \cap G$, wobei $C > 0$ eine Konstante ist. Dann gilt $G = \mathrm{im}T$.*

Beweis. Es gilt: $\ker T^* = (\mathrm{im}T)^\perp$. Da $\mathrm{im}T \subseteq G$, folgt $\ker T^* \supseteq G^\perp$. Angenommen $G^\perp$ ist eine echte Teilmenge von $\ker T^*$, dann ist $G \cap \ker T^* \neq \{0\}$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $T^*|_{D(T^*)\cap G}$ von unten beschränkt ist. Daher folgt $\ker T^* = G^\perp$ und $G = G^{\perp\perp} = (\ker T^*)^\perp = \mathrm{im}T^{\perp\perp} = \overline{(\mathrm{im}T)}$. Weiters gilt

$$T^*|_{D(T^*)\cap G} = T^*|_{D(T^*)\cap(\ker T^*)^\perp}$$

und wir erhalten aus 10.18, dass $\mathrm{im}T^*$ abgeschlossen ist, wegen 10.20 ist dann auch $\mathrm{im}T$ abgeschlossen und es folgt $G = \mathrm{im}T$. □

Bemerkung 10.23. Es gilt auch die Umkehrung des obigen Satzes: Ist $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator und G ein abgeschlossener Teilraum von H_2 mit $G = \mathrm{im}T$, dann ist $T^*|_{D(T^*)\cap G}$ von unten beschränkt. Ist nämlich $G = \mathrm{im}T$, dann ist $\mathrm{im}T$ abgeschlossen und daher auch $\mathrm{im}T^*$ (10.20), dann folgt aus 10.18 und wegen $G = (\ker T^*)^\perp$, dass $T^*|_{D(T^*)\cap G}$ von unten beschränkt ist.

Satz 10.24. *Sei $T : H_1 \longrightarrow H_2$ ein dicht definierter, abgeschlossener Operator und G ein abgeschlossener Teilraum von H_2 mit $G \supseteq \mathrm{im}T$. Sei ferner $T^*|_{D(T^*)\cap G}$ von unten beschränkt. Dann gilt: für jedes $v \in H_1$ mit $v \perp \ker T$ existiert ein $f \in D(T^*) \cap G$ mit $T^*f = v$ und $\|f\| \le C\|v\|$.*

Beweis. Es gilt: $\ker T = (\mathrm{im}T^*)^\perp$, und daher ist $v \in (\ker T)^\perp = \overline{\mathrm{im}T^*}$. Ferner ist $G^\perp \subseteq (\mathrm{im}T)^\perp = \ker T^*$ und daher gilt

$$\mathrm{im}T^*|_{D(T^*)\cap G} = \mathrm{im}T^*,$$

also ist $\mathrm{im}T^*$ abgeschlossen und für $v \in (\ker)^\perp = \mathrm{im}T^*$ existiert ein $f \in D(T^*) \cap G$ mit $T^*f = v$. Die gewünschte Normungleichung folgt aus der Voraussetzung, dass $T^*|_{D(T^*)\cap G}$ von unten beschränkt ist. □

Bemerkung 10.25. Wir werden später diese Sätze anwenden für $T = \overline{\partial}$ (im schwachen Sinne) und für $G = \ker\overline{\partial}$ und damit die inhomogene Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung lösen.

Definition 10.26. Sei $T : H \longrightarrow H$ ein dicht definierter Operator. T heißt symmetrisch, falls

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad , \ \forall u, v \in D(T).$$

T heißt normal , falls $D(T) = D(T^*)$ und $\|Tx\| = \|T^*x\|$ für alle $x \in D(T)$ gilt (mittels Polarisierungsidentität folgt $(Tx, Ty) = (T^*x, T^*y)$ für alle $x, y \in D(T)$).
T heißt selbstadjungiert , falls

$$D(T) = D(T^*) \ \text{ und } \ Tu = T^*u \ \ \forall u \in D(T).$$

T heißt wesentlich selbstadjungiert , wenn $\overline{T}$ selbstadjungiert ist.

Beispiele 10.27.
(a) $T = -\Delta$ mit $D(T) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ist symmetrisch, desgleichen $T = D_{x_j} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ mit $D(T) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
(b) Wir definieren den Multiplikationsoperator M auf $L^2(\mathbb{R})$ durch $(Mf)(t) = tf(t)$ für $t \in \mathbb{R}$, auf

$$D(M) := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \, : \, Mf \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

M ist dicht definiert,weil die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen und auch in $D(M)$ liegen. Für $f, g \in D(M)$ gilt

$$(Mf, g) = \int_{\mathbb{R}} tf(t)\overline{g(t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{tg(t)}\, dt = (f, Mg),$$

also folgt $g \in D(M^*)$ und $M^*g = Mg$. Daher gilt $M \subset M^*$. Um zu zeigen, dass $M^* = M$, betrachten wir ein $g \in D(M^*)$ und setzen $h_n := M(g\chi_{[-n,n]})$, wobei $\chi_{[-n,n]}$ die charakteriestische Funktion des Intervalls $[-n, n]$ ist. Dann ist $h_n \in D(M)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$\|h_n\|^2 = \int_{-n}^{n} |tg(t)|^2\, dt = (Mh_n, g) = (h_n, M^*g) \le \|h_n\|\, \|M^*g\|.$$

Hieraus folgt $\sup_n \|h_n\| \le \|M^*g\|$, d.h.$Mg \in L^2(\mathbb{R})$ und daher $g \in D(M)$; insgesamt also $M = M^*$ und $D(M) = D(M^*)$ und M ist selbstadjungiert.
Dieses Beispiel ist für den Spektralsatz für allgemeine selbstadjungierte Operatoren richtungsweisend (siehe Kapitel 12).

Bemerkung 10.28.
Ist T symmetrisch, so folgt $D(T) \subseteq D(T^*)$ und $Tu = T^*u$, für alle $u \in D(T)$. Daher kann man $(T^*, D(T^*))$ als Fortsetzung von $(T, D(T))$ auffassen.
Man sieht leicht, dass ein symmetrischer Operator abschließbar ist. Für symmetrische Operatoren hat man zwei natürliche, abgeschlossene Fortsetzungen

$$T_{\min} := \overline{T} \ \text{ und } \ T_{\max} := T^*.$$

Ist T_{sa} eine selbstadjungierte Fortsetzung von T, so ist T_{sa} eine Fortsetzung von $T_{\min}$ und lässt selbst eine Fortsetzung auf $T_{\max}$ zu (siehe 10.11). Es stellt sich hier die Frage nach der Eindeutigkeit einer selbstadjungierten Fortsetzung eines symmetrischen Operators.
Ferner gilt: ein selbstadjungierter Operator ist abgeschlossen; ist T ein selbstadjungierter Operator, der invertierbar ist, dann ist auch T^{-1} selbstadjungiert (hier bedeutet invertierbar, dass T eine Inverse T^{-1} von $\operatorname{im} T$ auf $D(T)$ besitzt, in diesem Fall ist $\operatorname{im} T$ dicht in H, weil aus $(Tu, w) = 0$ für alle $u \in D(T)$ folgt, dass $w \in D(T^*)$ und $T^*w = 0$, und somit ist $w = 0$ wegen der Selbstadjungiertheit und Injektivität von T; also ist $D(T^{-1})$ dicht in H). Siehe auch 10.14.
Weiters gilt: Ist T selbstadjungiert, so auch $T + \lambda I$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ (siehe 10.11).

Beispiele 10.29. Sei $H = L^2(\mathbb{R})$ und $T = i\frac{d}{dx}$ mit Definitionsbereich $D(T) = \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$, dem Raum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Dann ist T symmetrisch und die Abschließung $\overline{T}$ ist selbstadjungiert (siehe [L]).
Ist $H = L^2(\mathbb{R}_+)$ und $T = i\frac{d}{dx}$ mit Definitionsbereich $D(T) = \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}_+)$, dem Raum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in $(0, \infty)$, dann ist T symmetrisch, aber die Abschließung $\overline{T}$ ist nicht selbstadjungiert. T hat überhaupt keine selbstadjungierte Fortsetzung (siehe [L]).

Satz 10.30. *Ein abgeschlossener, symmetrischer Operator T ist genau dann selbstadjungiert, wenn T^* symmetrisch ist.*

Beweis. Ist T selbstadjungiert, so ist $T = T^*$ und $D(T) = D(T^*)$, somit ist T^* symmetrisch. Ist umgekehrt T^* symmetrisch, dann gilt $(T^*u, v) = (u, T^*v)$ für alle $u, v \in D(T^*)$, daher folgt auch $(T^*u, v) = (T^{**}u, v)$ und weil nach 10.12 $T = T^{**}$ gilt, folgt, dass T selbstadjungiert ist. □

Satz 10.31. *Ein symmetrischer Operator T ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn T^* symmetrisch ist; es gilt dann $\overline{T} = T^*$.*

Beweis. Ist T wesentlich selbstadjungiert, so ist nach 10.12 $T^* = (\overline{T})^* = \overline{T} = T^{**}$, d.h. T^* ist selbstadjungiert, also auch symmetrisch, und es gilt $\overline{T} = T^*$.
Für die Umkehrung beweisen wir zunächst, dass die Abschließung $\overline{T}$ eines symmetrischen Operators T wieder symmetrisch ist: seien $f, g \in D(\overline{T})$; dann existieren Folgen $(f_n)_n$ und $(g_n)_n$ in $D(T)$ mit $f_n \to f, g_n \to g$, sowie $Tf_n \to \overline{T}f$ und $Tg_n \to \overline{T}g$; weil T symmetrisch ist, folgt daher

$$(\overline{T}f, g) = \lim_{n\to\infty}(Tf_n, g_n) = \lim_{n\to\infty}(f_n, Tg_n) = (f, \overline{T}g),$$

und weil $D(\overline{T})$ dicht ist, folgt, dass $\overline{T}$ symmetrisch ist.
Ist nun T und T^* symmetrisch, so ist T abschließbar (10.13) und aus 10.11 folgt:

$$G(T^*) = (V(\overline{G(T)}))^\perp = (V(G(\overline{T}))^\perp = G((\overline{T})^*),$$

und daher ist $T^* = (\overline{T})^*$; also gilt

$$\overline{T} \subset (\overline{T})^* = T^* \subset T^{**} = \overline{T},$$

somit ist $\overline{T} = (\overline{T})^*$. □

Satz 10.32.
Ist T wesentlich selbstadjungiert, so ist seine selbstadjungierte Fortsetzung eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei S eine selbstadjungierte Fortsetzung von T. Dann ist S abgeschlossen und auch eine Fortsetzung der kleinsten Fortsetzung $\overline{T}$ von T. Nach 10.12 gilt $\overline{T} = T^{**}$ und daher folgt

$$\overline{T} \subset S = S^* \subset (\overline{T})^* = (T^{**})^* = T^{**} = \overline{T},$$

also ist $S = T^{**}$. Dabei haben wir verwendet, dass für dicht definierte Operatoren T_1 und T_2 aus $T_1 \subset T_2$, folgt, dass $T_2^* \subset T_1^*$. $\square$

Beispiele 10.33. Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $H = L^2(\Omega)$ und $T = -\Delta$ mit $D(T) = \mathcal{D}(\Omega)$. Wir bestimmen die Abschließung $\overline{T}$ und den adjungierten Operator T^* : aus der Definition 9.25 folgt $H_0^2(\Omega) \subseteq D(\overline{T})$ (siehe auch 10.5). Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $f \in D(\overline{T})$ gegeben. Dann gibt es eine Folge $(f_n)_n$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $f_n \to f$ und $Tf_n \to g = \overline{T}f$ in $L^2(\Omega)$ und damit auch in $L^2(\mathbb{R}^n)$, wenn wir alle Funktionen durch Null fortsetzen. Folglich gelten $\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}f$ und $|\xi|^2\mathcal{F}f_n \to \mathcal{F}g$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Also konvergiert $(1+|\xi|^2)(\mathcal{F}f_n - \mathcal{F}f)$ gegen Null in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dies impliziert $f \in H_0^2(\Omega)$ und $D(\overline{T}) = H_0^2(\Omega)$.
Wir behaupten nun $D(T^*) = H_\bullet^2(\Omega) = H_0^{-2}(\Omega)'$ (siehe 9.27). Sei $f \in H_\bullet^2(\Omega)$. Weil die Abbildung $g \mapsto -\Delta g$ eine stetige lineare Abbildung von $L^2(\mathbb{R}^n)$ nach $H_0^{-2}(\Omega)$ ist (siehe Bemerkung nach 9.12), ist die Linearform

$$g \mapsto f(-\Delta g) \quad , \; g \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (*)$$

stetig bezüglich der von $L^2(\Omega)$ induzierten Topologie. Also gilt nach Definition von $D(T^*)$, dass $f \in D(T^*)$ und daher $H_\bullet^2(\Omega) \subseteq D(T^*)$. Ist andererseits $f \in D(T^*)$, so wird durch (*) eine bezüglich $L^2(\Omega)$ stetige Linearform auf $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert. Daher ist

$$g \mapsto ((1-\Delta)g, f) \quad , \; g \in H_0^2(\Omega)$$

stetig abhängig von g bezüglich der $L^2(\Omega)$-Norm. Wir bemerken nun, dass für $g \in H_0^2(\Omega)$ und $h := (1-\Delta)g$ gilt $\|g\|_{L^2} = \|h\|_{H^{-2}}$. Daher ist $h \mapsto (h, f)$ stetig auf $E := (1-\Delta)H_0^2(\Omega)$ bezüglich der $H^{-2}(\Omega)$-Norm. Weil $H_0^2(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt, ist E in $H_0^{-2}(\Omega)$ dicht. Daher definiert f eine stetige Linearform auf $H_0^{-2}(\Omega)$ und ist daher in $H_\bullet^2(\Omega)$.
Insgesamt haben wir also gezeigt, dass

$$D(\overline{T}) = H_0^2(\Omega) \subseteq H_\bullet^2(\Omega) = D(T^*),$$

ist $\Omega = \mathbb{R}^n$ so gilt $D(\overline{T}) = D(T^*)$.
Es gilt: Δ ist genau dann wesentlich selbstadjungiert, wenn $H_0^2(\Omega) = H_\bullet^2(\Omega)$.

11 Sesquilinearformen und halbbeschränkte Operatoren

Definition 11.1. Sei V ein Hilbertraum und $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Sesquilinearform, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ mit

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\,\|v\| \quad \forall u,v \in V.$$

Die Sesqulinearform a heißt V-elliptisch , falls eine Konstante $\alpha > 0$ existiert, so dass

$$|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2 \quad ,\forall u \in V.$$

Bemerkung 11.2.
Bei fixem $u \in V$ existiert für die konjugiert-lineare Abbildung $v \mapsto a(u,v)$ nach 1.16 ein eindeutig bestimmtes $w \in V$ mit $a(u,v) = (w,v)$. Wir setzen $Au = w$ und stellen fest, dass $A \in \mathcal{L}(V)$, weil

$$|a(u,Au)| = |(Au,Au)| = \|Au\|^2 \leq C\|u\|\,\|Au\| \ , \ \forall u \in V,$$

und daher $\|Au\| \leq C\|u\|$ gilt.

Satz 11.3.
Sei a eine stetige, V-elliptische Sesquilinearform auf $V \times V$. Dann ist der zugehörige Operator $A : V \longrightarrow V$ ein topologischer Isomorphismus.

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt, dass

$$|(Au,u)| = |a(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2 \quad ,\forall u \in V,$$

und mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\|Au\|\,\|u\| \geq \alpha\|u\|^2 \quad \text{und} \quad \|Au\| \geq \alpha\|u\| \quad ,\forall u \in V.$$

Daraus folgt die Injektivität von A. Weiters ist $A(V)$ dicht in V : ist $(Av,u) = 0$ für alle $v \in V$, dann folgt für $v = u$ die Aussage $a(u,u) = 0$ und daher $u = 0$. Andererseits ist $A(V)$ abgeschlossen in V : sei dazu $(v_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $A(V)$, dann existieren $u_n \in V$ mit $Au_n = v_n$ und wir erhalten aus der obigen Ungleichung, dass auch $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge ist; sei $u = \lim_{n\to\infty} u_n$, dann folgt aus der Stetigkeit von A, dass $Au = \lim_{n\to\infty} Au_n$ und $v_n \to v = Au \in A(V)$.
Somit ist A bijektiv, und die Stetigkeit von A^{-1} folgt aus der Ungleichung $\|Au\| \geq \alpha\|u\|$. □

Wir betrachten nun zwei Hilberträume H und V und setzen voraus, dass $V \subset H$ und dass die Einbettung von V in H stetig ist, d.h. es existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\|u\|_H \leq C\|u\|_V$ für alle $u \in V$.
Weiters setzen wir voraus, dass V dicht in H ist. In diesem Fall existiert eine natürliche Einbettung von H in den Dualraum V' : für $h \in H$ betrachten wir die Abbildung

$u \mapsto (u,h)_H$, die auf V stetig ist; daher existiert ein $\ell_h \in V'$ mit $\ell_h(u) = (u,h)_H$ für alle $u \in V$. Die Injektivität der Abbildung $h \mapsto \ell_h$ folgt aus der Dichtheit von V in H.
Ist $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetige, V-elliptische Sesquilinearform, so können wir nun einen unbeschränkten Operator S auf H zuordnen:

$$D(S) := \{u \in V \ : \ v \mapsto a(u,v) \text{ ist stetig auf } V \text{ für die Topologie induziert durch } H\};$$

wegen der Dichtheit von V in H existiert nach 1.16 ein $Su \in H$ mit

$$a(u,v) = (Su,v)_H \quad , \ \forall v \in V.$$

Satz 11.4.
Unter den obigen Voraussetzungen ist der Operator S bijektiv von $D(S)$ auf H und $S^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Weiters ist $D(S)$ dicht in H.

Beweis. Es gilt

$$\alpha\|u\|_H^2 \leq C\alpha\|u\|_V^2 \leq C|a(u,u)| = C|(Su,u)_H| \leq C\|Su\|_H\|u\|_H$$

für alle $u \in D(S)$ und daher ist $\alpha\|u\|_H \leq C\|Su\|_H$ für alle $u \in D(S)$ und S ist injektiv.
Sei nun $h \in H$ vorgegeben. Dann ist die Abbildung $v \mapsto (h,v)_H$ wegen

$$|(h,v)_H| \leq \|h\|_H\|v\|_H \leq C\|h\|_H\|v\|_V$$

stetig auf V und daher existiert nach 1.16 ein eindeutig bestimmtes $w \in V$ mit

$$(h,v)_H = (w,v)_V \quad , \ \forall v \in V.$$

Wir setzen nun $u = A^{-1}w$ und erhalten $a(u,v) = (w,v)_V$. Weil dann $a(u,v) = (h,v)_H$ für alle $v \in V$ gilt, folgt, dass $u \in D(S)$ und $Su = h$. Also ist S surjektiv. Die Stetigkeit von S^{-1} folgt aus der Ungleichung $\alpha\|u\|_H \leq C\|Su\|_H$ für alle $u \in D(S)$.
Sei nun $h \in H$ derart, dass $(u,h)_H = 0$ für alle $u \in D(S)$. Wegen der Surjektivität von S existiert ein $v \in D(S)$ mit $Sv = h$. Also gilt $(Sv,u)_H = 0$ für alle $u \in D(S)$. Somit erhalten wir $a(v,u) = (Sv,u)_H = 0$ für alle $u \in D(S)$. nun setzt man $u = v$ und erhält aus der V-Elliptizität von a, dass $\alpha\|v\|_V^2 \leq a(v,v) = 0$, also $v = 0$ und somit $h = 0$, und daher ist $D(S)$ dicht in H. $\square$

Satz 11.5.
Seien a, V und H wie im vorigen Satz. Zusätzlich sei die Sesquilinearform $a : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ auch noch Hermite'sch , d.h. $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ für alle $u,v \in V$. Dann gilt: der Operator S ist abgeschlossen und selbstadjungiert und $D(S)$ ist dicht in V.

Beweis. Weil a Hermite'sch ist, folgt $(Su,v)_H = a(u,v) = \overline{a(v,u)} = (u,Sv)_H$ für alle $u,v \in D(S)$. Also ist S symmetrisch und insbesondere ist $D(S) \subseteq D(S^*)$.
Sei nun $v \in D(S^*)$. Weil S surjektiv ist, existiert ein $v_0 \in D(S)$ mit $Sv_0 = S^*v$. Für jedes $u \in D(S)$ gilt daher

$$(Su,v_0)_H = (u,Sv_0)_H = (u,S^*v)_H = (Su,v)_H.$$

Verwendet man noch einmal die Surjektivität von S, dann folgt $v = v_0 \in D(S)$, und wir erhalten $D(S) = D(S^*)$ und $Sv = S^*v$ für alle $v \in D(S)$.

Da S^* immer abgeschlossen ist, folgt $S = S^*$ ist abgeschlossen.
Sei $h \in V$ derart, dass $(u,h)_V = 0$, für alle $u \in D(S)$. Sei $f \in V$ derart, dass $Af = h$ (A ist ein Isomorphismus auf V). Dann gilt

$$0 = (u,h)_V = (u, Af)_V = \overline{(Af,u)_V} = \overline{a(f,u)} = a(u,f) = (Su, f)_H,$$

und weil S surjektiv ist, folgt $f = 0$ und $h = Af = 0$. □

Beispiele 11.6. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Sei $H = L^2(\Omega)$ und $V = H^1(\Omega)$. Für $u, v \in H^1(\Omega)$ sei

$$a(u,v) = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \, dx + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, dx = \int_\Omega \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_k}}\, dx + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, dx,$$

wobei die Ableitungen im schwachen Sinne zu verstehen sind. Dann ist a eine Hermite'sche $H^1(\Omega)$-elliptische Sesquilinearform, denn es gilt

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^2\, dx = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.$$

Nach Definition des Definitionsbereichs des Operators S gilt: für $u \in D(S)$ existiert ein $f \in L^2(\Omega)$ derart, dass

$$a(u,v) = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, dx \quad , \; \forall v \in H^1(\Omega);$$

d.h. bei $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ folgt im Sinne der Distributionen

$$-\Delta u + u = f,$$

und daher ist

$$D(S) \subset W(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \, : \, -\Delta u \in L^2(\Omega)\}.$$

Man schreibt $S = -\Delta + 1$ und nennt S die Neumann'sche Realisierung des Laplace Operators in $L^2(\Omega)$. $S - I$ ist eine selbstadjungierte Erweiterung von $-\Delta$ (siehe 10.28). Weitere Details siehe [He1].

Definition 11.7.
Sei T_0 ein symmetrischer, unbeschränkter Operator mit Definitionsbereich $D(T_0) \subset H$. Wir sagen, T_0 heißt halbbeschränkt (von unten), falls eine Konsatnte C existiert so , dass

$$(T_0 u, u)_H \geq -C\|u\|^2_H \quad , \; \forall u \in D(T_0).$$

Beispiele 11.8. Wir betrachten den Schrödinger Operator $T_0 = -\Delta + V(x)$ auf $\mathbb{R}^n$, wobei V eine stetige Funktion (Potential) ist, mit

$$V(x) \geq -C \quad , \; \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Nimmt man als $D(T_0) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$; so ist T_0 ein symmetrischer, halbbeschränkter Operator: für $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$(T_0 u, u) = \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u(x) + V(x)u(x))\overline{u(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} V(x)|u(x)|^2\, dx$$
$$\geq -C\|u\|^2.$$

Wir können nunmehr das Problem der Existenz einer selbstadjungierten Erweiterung auf eine weitere Art und Weise behandeln.

Satz 11.9. *Sei T_0 ein symmetrischer, halbbeschränkter Operator mit Definitionsbereich $D(T_0)$ dicht in H. Dann besitzt T_0 eine selbstadjungierte Erweiterung, diese nennt man die Friedrich'sche Erweiterung .*

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass T_0 strikt positiv ist, d.h. $(T_0 u, u)_H \geq \|u\|_H^2 \ , \ \forall u \in D(T_0)$, indem man T_0 durch $T_0 + \lambda_0 I$ ersetzt. Auf $D(T_0) \times D(T_0)$ definieren wir eine Sesquilinearform a_0 durch

$$a_0(u, v) = (T_0 u, v)_H.$$

Dann folgt aus der Voraussetzung der Halbbeschränktheit, dass

$$a_0(u, u) \geq \|u\|_H^2 \ , \ \forall u \in D(T_0).$$

Nun definieren wir den Hilbertraum V als die Vervollständigung in H von $D(T_0)$ bezüglich der Norm $p_0(u) = \sqrt{a_0(u, u)}$, d.h. ein $u \in H$ gehört zu V, wenn eine Folge $(u_n)_n$ in $D(T_0)$ existiert, derart dass $u_n \to u$ in H und $(u_n)_n$ eine Cauchy Folge bezüglich der Norm p_0 ist. Als Norm in V definieren wir

$$\|u\|_V := \lim_{n \to \infty} p_0(u_n),$$

wobei $(u_n)_n$ eine Cauchy Folge bezüglich p_0 ist, welche in H gegen u konvergiert. Wir zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Cauchy Folge ist:
Ist $(x_n)_n$ eine Cauchy Folge in $D(T_0)$ bezüglich p_0 derart, dass $x_n \to 0$ in H, dann gilt $p_0(x_n) \to 0$.
Diese Behauptung beweisen wir indirekt. Angenommen $p_0(x_n) \to \alpha > 0$, dann gilt zunächst

$$a_0(x_n, x_m) = a_0(x_n, x_n) + a_0(x_n, x_m - x_n),$$

und nach der Cauchy Schwarz'schen Ungleichung

$$|a_0(x_n, x_m - x_n)| \leq \sqrt{a_0(x_n, x_n)} \sqrt{a_0(x_m - x_n, x_m - x_n)}.$$

Da $(x_n)_n$ eine Cauchy Folge bezüglich p_0 ist, folgt daher, dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$|a_0(x_n, x_m) - \alpha^2| \leq \epsilon \ , \ \forall n, m \geq N.$$

Setzt man für $\epsilon = \frac{\alpha^2}{2}$, dann erhalten wir

$$|(T_0 x_n, x_m)_H| \geq \frac{\alpha^2}{2} \ , \ \forall n, m \geq N.$$

Geht man mit $m \to \infty$, so strebt linke Seite der letzten Ungleichung gegen 0, weil ja $x_m \to 0$ in H. Somit erhalten wir einen Widerspruch.
Es gilt nun $\|u\|_V \geq \|u\|_H$, für jedes $u \in V$, also ist die Einbettung von V nach H stetig. Weiters ist V dicht in H, weil V den Definitionsbereich $D(T_0)$ enthält, der nach Voraussetzung dicht in H ist.

Das innere Produkt in V ist als Erweiterung von a_0 definiert:

$$(u, v)_V = \lim_{n\to\infty} a_0(u_n, v_n),$$

wobei $(u_n)_n$ und $(v_n)_n$ Cauchy Folgen bezüglich p_0 sind, die gegen u bzw. v in H konvergieren.
Schließlich verwenden wir 11.5 für $a(u, v) = (u, v)_V$ und erhalten einen unbeschränkten, selbstadjungierten Operator S auf H, welcher eine Erweiterung von T_0 ist und dessen Definitionsbereich $D(S) \subset V$. $\square$

Beispiele 11.10. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein glatt berandetes, beschränktes Gebiet, $H = L^2(\Omega)$ und $T_0 = -\Delta$, sowie $D(T_0) = \mathcal{D}(\Omega)$. Wir betrachten wieder $\tilde{T_0} = T_0 + I$ an Stelle von T_0 und erhalten so einen symmetrischen und positiven (daher auch halbbeschränkten) Operator und vollziehen die Konstruktion im letzten Beweis: der Hilbertraum V ist dann der Abschluss von $\mathcal{D}(\Omega)$ im Sobolevraum H^1, das ist der Raum $H_0^1(\Omega)$ (siehe 9.25). Somit gilt

$$D(S) := \{u \in H_0^1(\Omega) \,:\, -\Delta u \in L^2(\Omega)\},$$

dabei ist $S = -\Delta + 1$ wieder im schwachen Sinne zu verstehen.
Aus 11.4 folgt, dass $S^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$. Man kann S^{-1} auffassen als die Verknüpfung eines stetigen linearen Operators von $H = L^2(\Omega)$ in den Raum $V = H_0^1(\Omega)$ mit der nach 9.26 kompakten Einbettung von $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega) = H_0^0(\Omega)$, dabei hat man zu beachten, dass für $u \in D(S)$ gilt

$$\|Su\|_H \|u\|_H \geq (Su, u)_H = a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \geq \alpha \|u\|_V \|u\|_H,$$

das ergibt $\|Su\|_H \geq \alpha \|u\|_V$, daher folgt aus der Surjektivität von S, dass

$$\|S^{-1}\|_{\mathcal{L}(H,V)} \leq \frac{1}{\alpha},$$

in unserem Beispiel ist $\alpha = 1$; weil die Verknüpfung eines stetigen Operators mit einem kompakten Operator kompakt ist, erhalten dass der "Lösungsoperator" S^{-1} zu $S = -\Delta + 1$ ein kompakter Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ ist.
Weiters gilt

$$D(S) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

(siehe [He1]) und wir erhalten aus dem vorigen Satz die Aussage:
Der Operator $T_1 = -\Delta$ mit $D(T_1) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ist selbstadjungiert und wird die Dirichlet'sche Realisierung von $-\Delta$ in Ω genannt .
Wir setzen dabei $T_1 = S - I$ und verwenden 10.28.

Im Falle eines beschränkten Gebietes Ω ergeben die Neumann'sche und die Dirichlet'sche Realisierung verschiedene selbstadjungierte Erweiterungen von $-\Delta$; $-\Delta$ ist nicht wesentlich selbstadjungiert (siehe 10.32 und 10.33).

12 Der Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren und Folgerungen

In diesem Abschnitt beweisen wir den Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren und erläutern einige wichtige Anwendungen dieses Satzes. Zunächst noch einige ergänzende Bemerkungen zu beschränkten selbstadjungierten Operatoren:

Satz 12.1. *Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum H. Dann ist das Spektrum $\sigma(T)$ enthalten im Intervall $[m, M]$, wobei*

$$m := \inf_{u \neq 0} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \quad \text{und} \quad M := \sup_{u \neq 0} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2}.$$

Weiters gilt: $m, M \in \sigma(T)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$: ist $\lambda \in \sigma(T)$ mit $\Im\lambda \neq 0$, dann folgt wegen $(Tu, u) \in \mathbb{R}$ (siehe 7.17 c)

$$|\Im\lambda| \, \|u\|^2 = |\Im((T - \lambda I)u, u)| \leq \|(T - \lambda I)u\| \, \|u\|.$$

Daraus folgt, dass $T - \lambda I$ und $T - \overline{\lambda} I$ injektiv ist und dass $\mathrm{im}(T - \lambda I)$ abgeschlossen ist. Allgemein gilt für einen dicht definierten Operator A : $\ker A^* = (\mathrm{im} A)^\perp$ (siehe 10.13), daher folgt für $A = T - \lambda I$: $\ker(T - \overline{\lambda} I) = (\mathrm{im}(T - \lambda I)^\perp$. Daher ist $T - \lambda I$ bijektiv und $\lambda \notin \sigma(T)$, Widerspruch!
Sei nun $\lambda > M$. Dann erfüllt die Sesquilinearform

$$(u, v) \mapsto \lambda(u, v)_H - (Tu, v)_H$$

die Voraussetzungen von 11.3 und $T - \lambda I$ ist bijektiv, also $\lambda \notin \sigma(T)$; analog verfährt man für $\lambda < m$.
Wir zeigen nun, dass $M \in \sigma(T)$: dazu verwenden wir die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für das innere Produkt $(u, v) \mapsto M(u, v)_H - (Tu, v)_H$ und erhalten:

$$|(Mu - Tu, v)_H| \leq (Mu - Tu, u)_H^{1/2} (Mv - Tv, v)_H^{1/2},$$

setzt man nun für $v = Mu - Tu$ ein, so folgt

$$\|Mu - Tu\|_H^2 \leq (Mu - Tu, u)_H^{1/2} \|MI - T\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2} \|Mu - Tu\|,$$

also

$$\|Mu - Tu\|_H \leq (Mu - Tu, u)_H^{1/2} \|MI - T\|_{\mathcal{L}(H)}^{1/2}.$$

Sei nun $(u_n)_n$ eine Folge in H mit $\|u_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(Tu_n, u_n)_H \to M$ bei $n \to \infty$. Dann ergibt sich aus der letzten Ungleichung, dass $(T - MI)u_n$ gegen 0 strebt bei $n \to \infty$. Angenommen $M \notin \sigma(T)$, dann würde

$$u_n = (T - MI)^{-1}(T - MI)u_n \to 0 \quad \text{bei } n \to \infty,$$

im Widerspruch zu $\|u_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Analog beweist man, dass $m \in \sigma(T)$. $\square$

Korollar 12.2.
Sei $T \in \mathcal{L}(H)$ ein selbstadjungierter Operator mit $\sigma(T) = \{0\}$.Dann ist $T = 0$.

Beweis. Ist $m = M = 0$, so folgt $(Tu, u) = 0$ für alle $u \in H$. Nun verwende 7.17 (b). $\square$

Wir übertragen nun den Begriff des Spektrums auf dicht definierte unbeschränkte Operatoren.

Definition 12.3. Sei T ein abgeschlossener Operator. Eine komplexe Zahl z heißt Eigenwert von T, wenn ein $f \in D(T)$ existiert mit $f \neq 0$ und $Tf = zf$, d.h. wenn der Operator $T - zI$ nicht injektiv ist.
Die Menge

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - zI \text{ ist injektiv },\ R_T(z) = (T - zI)^{-1} \in \mathcal{L}(H)\}$$

heißt Resolventenmenge von T , die Funktion

$$R_T : \rho(T) \longrightarrow \mathcal{L}(H)$$

heißt Resolvente von T , und die Menge

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

heißt Spektrum von T.
Die Menge $\sigma_p(T)$ der Eigenwerte von T heißt Punktspektrum von T.

Bemerkung 12.4. Ist T nicht abgeschlossen, so sind auch $T - zI$ und $R_T(z)$ nicht abgeschlossen, d.h. es gilt dann $\rho(T) = \emptyset$.
Für abgeschlossene Operatoren T gilt nach dem closed graph Theorem

$$\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} : T - zI \text{ ist bijektiv}\}.$$

Satz 12.5. *Sei T ein abgeschlossener Operator. Dann ist $\rho(T)$ offen und die Resolvente R_T ist eine holomorphe operatorwertige Funktion auf $\rho(T)$.*

Beweis. Sei $z_0 \in \rho(T)$. Dann ist $(z_0 I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Wir setzen $\epsilon := \|(z_0 I - T)^{-1}\|^{-1}$ und fixieren $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \epsilon$. Dann gilt $zI - T = (z - z_0)I + z_0 I - T$ und daher

$$zI - T = ((z - z_0)(z_0 I - T)^{-1} + I)(z_0 I - T).$$

Wegen $\|(z - z_0)(z_0 I - T)^{-1}\| < 1$ ist der erste Operator auf der rechten Seite der letzten Ungleichung invertierbar. Folglich ist $zI - T$ bijektiv. Siehe auch 7.15 für den Rest des Beweises. $\square$

Wir untersuchen nun die Resolvente eines selbstadjungierten Operators. Dabei verwenden wir die Notationen

$$\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\} \text{ und } \mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}.$$

Satz 12.6.
Das Spektrum eines selbstadjungierten Operators T ist reell, die Resolventenmenge $\rho(T)$ enthält $\mathbb{C}^+$ und $\mathbb{C}^-$. Ist $z \in \mathbb{C}^\pm$, dann gilt $R_T(z)^* = R_T(\overline{z})$ und

$$\|R_T(z)\| \leq |\Im z|^{-1}.$$

Beweis. Für $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $h \in D(T)$ gilt wegen $(h, Th) \in \mathbb{R}$:

$$\|((x+iy)I - T)h\|^2 = (x^2 + y^2)\|h\|^2 - 2\Re((x+iy)h, Th) + \|Th\|^2$$

$$= y^2\|h\|^2 + \|(xI - T)h\|^2 \geq y^2\|h\|^2 \quad (*)$$

und daher ist $zI - T$ injektiv und $\mathrm{im}(zI - T)$ ist abgeschlossen, weil mit T auch $zI - T$ ein abgeschlossener Operator ist. Desgleichen ist $\overline{z}I - T$ injektiv, und weil

$$(\mathrm{im}(zI - T))^\perp = \ker(zI - T)^* = \ker(\overline{z}I - T) = \{0\},$$

folgt, dass $\mathrm{im}(zI - T) = H$ und $z \in \rho(T)$.
Es gilt $(T - zI)^* = T^* - \overline{z}I = T - \overline{z}I$. Daher ist wegen $(B^{-1})^* = (B^*)^{-1}$ die gewünschte Formel für die Resolvente gezeigt (siehe 10.14). Die Normabschätzung folgt aus (*). □

Bemerkung 12.7. Gehören i und $-i$ zur Resolventenmenge eines abgeschlossenen Operators T und ist $R_T(i)^* = R_T(-i)$, dann ist T selbstadjungiert. Denn es gilt

$$T^* + iI = (T - iI)^* = ((R_T(i))^{-1})^* = ((R_T(i))^*)^{-1} = (R_T(-i))^{-1} = T + iI,$$

und somit $T^* = T$.

Satz 12.8.
Sei T ein selbstadjungierter Operator und $f \in H$, $f \neq 0$, und sei $\Phi_f(z) = (R_T(z)f, f)$. Dann ist Φ_f auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ definiert und dort holomorph und hat die folgenden Eigenschaften:
(i) $\Phi_f(\mathbb{C}^+) \subseteq \mathbb{C}^+$ *und* $\Phi_f(\mathbb{C}^-) \subseteq \mathbb{C}^-$;
(ii) $\Phi_f(\overline{z}) = \overline{\Phi_f(z)}$;
(iii) $|\Phi_f(z)| \leq (f, f)\, |\Im z|^{-1}$.

Beweis. (ii) und (iii) folgen aus 12.6. Für den Beweis von (i) setzen wir $g = R_T(z)f$, dann folgt $f = (T - zI)g$ und $g \neq 0$, sowie

$$\Phi_f(z) = (R_T(z)f, f) = (g, (T - zI)g) = (Tg, g) + (-\overline{z})(g, g),$$

und wir haben noch zu verwenden, dass $(Tg, g) \in \mathbb{R}$ für jedes $g \in D(T)$. □

Um den allgemeinen Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren formulieren zu können, benötigt man einige Begriffe aus der Maßtheorie, die alle in [E] oder [R1] nachzulesen sind.

Satz 12.9. *(Spektralsatz für selbstadjungierte Opertaoren, 1. Version)*
Sei H ein separabler Hilbertraum und A ein dicht definierter, selbstadjungierter Operator. Dann kann man A darstellen als Multiplikationsoperator auf einem Raum $L^2(M, d\sigma)$, wobei M ein Maßraum mit positivem Maß $d\sigma$ ist und der Multiplikationsopeator auf

$L^2(M, d\sigma)$ durch eine messbare, reellwertige, fast-überall endliche Funktion a auf M gegeben ist (vgl. 10.27 (b)). Genauer: es existiert ein unitärer Operator

$$U : H \longrightarrow L^2(M, d\sigma),$$

so dass $f \in D(A)$ genau dann, wenn $f \in H$ und $aUf \in L^2(M, d\sigma)$, und

$$(UAf)(m) = a(m)(Uf)(m) \quad , \; m \in M;$$

oder anders ausgedrückt

$$Af = U^{-1}aUf,$$

wobei hier a den Multiplikationsoperator auf $L^2(M, d\sigma)$ bezeichnet.

Für die 2. Version des Spektralsatzes benötigen wir den Begriff einer Spektralschar:

Definition 12.10.
Sei H ein separabler Hilbertraum. Eine Spektralschar $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ ist eine Familie von orthogonalen Projektionen $E(\lambda)$ auf H mit folgenden Eigenschaften:
(a) $E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda) = E(\lambda)$ für $\lambda \leq \mu$;
(b) $\lim_{\epsilon>0,\epsilon\to 0} E(\lambda + \epsilon)x = E(\lambda)x$ in der Norm von H, für jedes $x \in H$ (wir sagen auch $E(\lambda + 0) = E(\lambda)$ in der starken Operatortopologie);
(c) $\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 0$, $\lim_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = I$ in der starken Operatortopologie.
Für ein $x \in H$ setzt man

$$\rho_x(t) = (x, E(t)x) = \|E(t)x\|^2 \; , \; t \in \mathbb{R},$$

dann ist $\rho_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, nichtfallend und rechtsstetig, und es gilt

$$\lim_{t\to-\infty} \rho_x(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t\to+\infty} \rho_x(t) = \|x\|^2.$$

Durch den Ansatz

$$\mu_x((t_1, t_2]) = \rho_x(t_2) - \rho_x(t_1)$$

(analoge Formeln gelten für die Intervalle $(t_1, t_2), [t_1, t_2), [t_1, t_2]$, siehe [W]) wird ein Lebesgue-Stieltjes-Maß auf $\mathbb{R}$ definiert.
Eine Funktion $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist E-messbar, wenn sie ρ_x-messbar ist für jedes $x \in H$.
(Jede Funktion, die punktweiser Limes von Treppenfunktionen ist, also insbesondere jede stückweise stetige Funktion, ist E-messbar.)

Beispiele 12.11.
(a) Ist $T \in \mathcal{L}(H)$ selbstadjungiert und kompakt, dann gilt nach 7.20

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j P_j x,$$

wobei $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$ die Eigenwerte von T sind und P_j die orthogonalen Projektionen auf die zugehörigen Eigenräume. Wir nennen hier P_0 die orthogonale Projektion auf ker$T$. Dann gilt $\sum_{k=0}^{\infty} P_k = I$ im Sinne der starken Operatortopologie: ist G das lineare Erzeugnis aller Eigenräume, dann folgt $T(G) \subset G$ und auch $T(G^\perp) \subset G^\perp$, dies folgt

sofort aus der Selbstadjungiertheit von T; nennen wir $\tilde{T}$ die Einschränkung von T auf $G^{\perp}$, dann bleibt $\tilde{T}$ kompakt und selbstadjungiert, es gilt aber auch $\sigma(\tilde{T}) = \{0\}$ und daher ist nach 12.2 $\tilde{T} = 0$; es gilt $G^{\perp} \subset \ker T \subset G$ und daher $G^{\perp} = \{0\}$, also ist G dicht in H.
Sei

$$E(\lambda) = \sum_{\{k\,:\,\lambda_k \leq \lambda\}} P_k \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dann ist E eine Spektralschar.
Eigenschaft (a) von Definition 12.10 ist klar. Um Eigenschaft (b) nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \|P_k x\|^2 = \|x\|^2$ gilt; also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k>k_0} \|P_k x\|^2 < \epsilon$. Sei nun $t \in \mathbb{R}$. Wählt man $\delta_0 > 0$ so, dass $\lambda_k \notin (t, t+\delta_0]$ für $k \leq k_0$ gilt, so folgt

$$\|E(t+\delta)x - E(t)x\|^2 = \sum_{\{k\,:\,\lambda_k \in (t,t+\delta]\}} \|P_k x\|^2 \leq \sum_{k>k_0} \|P_k x\|^2 < \epsilon,$$

für alle $\delta \in (0, \delta_0]$.
Für die Eigenschaft (c) wählt man k_0 wieder wie vorhin. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_k > s$ für $k \leq k_0$, also

$$\|E(t)x\|^2 = \sum_{\{k\,:\,\lambda_k \leq t\}} \|P_k x\|^2 \leq \sum_{k>k_0} \|P_k x\|^2 < \epsilon,$$

für $t \leq s$. Weiters gibt es ein $s' \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_k \leq s'$ für $k \leq k_0$ und somit folgt

$$\|x - E(t)x\|^2 = \sum_{\{k\,:\,\lambda_k > t\}} \|P_k x\|^2 \leq \sum_{k>k_0} \|P_k x\|^2 < \epsilon,$$

für $t \geq s'$.
(b) Sei ρ ein Borelmaß auf $\mathbb{R}$ und der $L^2(\mathbb{R}, \rho)$ der entsprechende L^2-Raum (siehe [E], [R1]). Dann ist durch den Ansatz

$$E(t)f = \chi_{(-\infty,t]} f \quad , \quad f \in L^2(\mathbb{R}, \rho)$$

eine Spektralschar definiert.
Analog auf der direkten Summe $\oplus_{\alpha \in A} L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha)$ durch

$$E(t)(f_\alpha)_{\alpha \in A} = (\chi_{(-\infty,t]} f_\alpha)_{\alpha \in A} \quad , \quad f_\alpha \in L^2(\mathbb{R}, \rho_\alpha).$$

(c) Sei (X, μ) ein Maßraum, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine μ-messbare Funktion. Dann wird durch

$$E(t)f = \chi_{\{x \in X\,:\,g(x) \leq t\}} f \quad , \quad f \in L^2(X, \mu)$$

eine Spektralschar in $L^2(X, \mu)$ definiert.

Lemma 12.12.
Sei E eine Spektralschar in H und $x \in H$. Sei

$$H_x := \overline{\langle E(\lambda)x \, : \, \lambda \in \mathbb{R} \rangle}$$

der Abschluss der linearen Hülle in H. Dann ist

$$V : \langle E(\lambda)x \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\rangle \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \rho_x) \quad , \quad \sum_{j=1}^{n} c_j E(\lambda_j)x \mapsto \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{(-\infty,\lambda_j]}$$

isometrisch; die Abschließung $U := \overline{V} : H_x \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ ist unitär. Bezeichnen wir mit $E_x(.)$ die Einschränkung von $E(.)$ auf H_x, so gilt

$$UE_x(\lambda) = \chi_{(-\infty,\lambda]}U \quad bzw. \quad E_x(\lambda)U^{-1} = U^{-1}\chi_{(-\infty,\lambda]}.$$

Beweis. Ohne Einschränkung kann jedes $y \in \langle E(t)x \,:\, t \in \mathbb{R}\rangle$ in der Form $\sum_k d_k(E(b_k) - E(a_k))x$ mit disjunkten Intervallen $(a_k, b_k]$ geschrieben werden (eventuell kann ein $a_k = -\infty$ sein). Dann gilt

$$\|Vy\|^2 = \|\sum_k d_k\chi_{(a_k,b_k]}\|^2 = \sum_k |d_k|^2(\rho_x(b_k) - \rho_x(a_k)) = \sum_k |d_k|^2\|(E(b_k) - E(a_k))x\|^2$$

$$= \|\sum_k d_k(E(b_k) - E(a_k))x\|^2 = \|y\|^2,$$

dabei wird Eigenschaft 12.10 (a) verwendet, also ist V isometrisch.
im$V$ enthält alle linksstetigen Treppenfunktionen; da diese in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ dicht sind (es genügt zu zeigen, dass jede Treppenfunktion approximiert werden kann), ist $\overline{\mathrm{im}V} = \mathrm{im}\overline{V} = L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, d.h. $U = \overline{V}$ ist unitär.
Für $y = \sum_{j=1}^n c_jE(\lambda_j)x$ gilt

$$UE(\lambda)y = U\sum_k c_kE(\min\{\lambda, \lambda_k\})x = \sum_k c_k\chi_{(-\infty,\min\{\lambda,\lambda_k\}]}$$

$$= \chi_{(-\infty,\lambda]}\sum_k c_k\chi_{(-\infty,\lambda_k]} = \chi_{(-\infty,\lambda]}Uy.$$

Durch Grenzübergang folgt dies für alle $y \in H_x$. Multiplikation von links und rechts mit U^{-1} liefert die letzte Behauptung. □

Lemma 12.13.
(a) Für alle $x \in H$ gilt $x \in H_x$.
(b) Für alle $y \in H_x$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt $E(t)y \in H_x$; insbesondere gilt $H_y \subset H_x$.
(c) Aus $y \perp H_x$ folgt $E(t)y \perp H_x$ für alle $t \in \mathbb{R}$; insbesondere gilt $H_y \perp H_x$ und $\rho_{x+y} = \rho_x + \rho_y$.
(d) Für jedes $y \in H_x$ ist ρ_y absolut stetig bezüglich ρ_x.

Beweis. (a) Für $x_n := E(n)x$ gilt $x_n \in H_x$ und $x_n \to x$.
(b) Ist $(y_n)_n$ eine Folge in $\langle E(\lambda)x \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\rangle$ mit $y_n \to y$, so gilt offenbar $E(s)y_n \in \langle E(\lambda)x \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\rangle$ und somit $E(s)y = \lim_{n\to\infty} E(s)y_n \in H_x$.
(c) Aus $y \perp H_x$ folgt $y \perp E(t)x$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also

$$(E(s)y, E(t)x) = (y, E(\min\{s, t\})x) = 0,$$

d.h. es gilt $E(s)y \perp \langle E(\lambda)x \,:\, \lambda \in \mathbb{R}\rangle$ und somit $E(s)y \perp H_x$.

(d) Für $y \in H_x$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt mit U aus 12.12

$$\rho_y(t) = \|E(t)y\|^2 = \|UE(t)y\|^2 = \|\chi_{(-\infty,t]}Uy\|^2 = \int_{(-\infty,t]} |Uy(s)|^2 \, d\rho_x(s),$$

d.h. ρ_y ist ρ_x-absolut stetig mit Dichtefunktion $|Uy(s)|^2$.

□

Satz 12.14.
Ist E eine Spektralschar im separablen Hilbertraum H, so gibt es beschränkte Borelmaße ρ_j $(j = 1, \dots, N$ mit $N \leq \infty)$ auf $\mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung $U : H \longrightarrow \oplus_{j=1}^N L^2(\mathbb{R}, \rho_j)$ so, dass gilt

$$UE(t)U^{-1} = \chi_{(-\infty,t]} \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Sei $\{x_j\}$ eine abzählbare totale Menge in H, sei ferner $h_1 := x_1$ und $h_{j+1} := (I - P_1 - \cdots - P_j)x_{j+1}$, wobei P_k die orthogonale Projektion auf $H_k := H_{x_k}$ ist (das Verfahren bricht ab, wenn $\oplus_{j=1}^N H_j = H$ ist). Man erhält eine (eventuell endliche) Folge $(h_j)_j$ mit $\oplus_j H_j = H$.
Definieren wir $\rho_j := \rho_{h_j}$ und

$$V_j : \langle E(\lambda)h_j \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\rangle \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \rho_j) \quad , \quad \sum_{k=1}^n c_k E(\lambda_k)h_j \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(-\infty,\lambda_k]},$$

so sind die Abschließungen (vgl. 12.12)

$$U_j := \overline{V_j} : H_j = \overline{\langle E(\lambda)h_j \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\rangle} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}, \rho_j)$$

sowie deren orthogonalen Summe

$$U := \oplus_j U_j : H = \oplus_j H_j \longrightarrow \oplus_j L^2(\mathbb{R}, \rho_j), \quad (y_j)_j \mapsto (U_j y_j)_j$$

unitär. Es gilt für $x = (y_j)_j \in \oplus_j H_j = H$

$$UE(t)x = UE(t)(y_j)_j = U(E(t)y_j)_j = (U_j E(t)y_j)_j = (\chi_{(-\infty,t]}U_j y_j)_j$$

$$= \chi_{(-\infty,t]}(U_j y_j)_j = \chi_{(-\infty,t]}U(y_j)_j = \chi_{(-\infty,t]}Ux.$$

Damit folgt $E(t) = U^{-1}\chi_{(-\infty,t]}U$. □

Definition 12.15.
Wir können nun das Integral bezüglich einer Spektralschar erklären: Für eine Treppenfunktion (o.B.d.A. mit disjunkten Konstanzintervallen I_j)

$$u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \quad , \quad u(t) = \sum_j c_j \chi_{I_j}$$

definieren wir das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} u(t) \, dE(t) = \int u(t) \, dE(t) := \sum_j c_j E(I_j)$$

mit $E((a,b]) = E(b) - E(a)$. Für alle $x \in H$ gilt dann

$$\| \int u(t)\, dE(t)x \|^2 = \sum_j |c_j|^2 \|E(I_j)x\|^2 = \sum_j |c_j|^2 \rho_x(I_j)$$

$$= \int |u(t)|^2\, d\rho_x(t) \leq \|x\|^2 \max |u|^2.$$

Für eine Treppenfunktion u ist also $\int u(t)\, dE(t)$ ein Operator in $\mathcal{L}(H)$ mit Norm $\leq \max |u|$.
Ist nun $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine beliebige E-messbare Funktion, so gibt es für jedes $x \in H$ mit $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ eine Folge $(u_n)_n$ von Treppenfunktionen mit $u_n \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$. Insbesondere ist $(u_n)_n$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, und es gilt

$$\| \int u_n(t)\, dE(t)x - \int u_m(t)\, dE(t)x \|^2 = \| \int (u_n(t) - u_m(t))\, dE(t)x \|^2$$

$$= \int |u_n(t) - u_m(t)|^2\, d\rho_x(t) \to 0 \;\text{ für } n, m \to \infty,$$

d.h. $(\int u_n(t)\, dE(t)x)_n$ ist eine Cauchyfolge in H. Daher können wir definieren

$$\int u(t)\, dE(t)x := \lim_{n\to\infty} \int u_n(t)\, dE(t)x,$$

diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Folge $(u_n)_n$. Es gilt

$$\| \int u(t)\, dE(t)x \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| \int u_n(t)\, dE(t)x \|^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int |u_n(t)|^2\, d\rho_x(t) = \int |u(t)|^2\, d\rho_x(t) = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho_x)}.$$

Das Integral ist offenbar linear in dem Sinn, dass für $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ und $a, b \in \mathbb{C}$ gilt

$$\int (au(t) + bv(t))\, dE(t)x = a \int u(t)\, dE(t)x + b \int v(t)\, dE(t)x.$$

Die wichtige Linearität in x ist wesentlicher Bestandteil des nächsten Satzes.

Im folgenden wollen wir zeigen, dass durch das Integral

$$\int u(t)\, dE(t)$$

ein linearer Operator auf H definiert ist, und wie man mit diesen Operatoren rechnen kann. Dabei benutzen wir folgende Funktionenfolgen $\varphi_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} z & \text{für } \; |z| \leq n \\ 0 & \text{für } \; |z| > n \end{cases}$$

und $\chi_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\chi_n(z) = \begin{cases} 1 & \text{für } \; |z| \leq n \\ 0 & \text{für } \; |z| > n. \end{cases}$$

Satz 12.16.
Sei E eine Spektralschar im Hilbertraum H, und $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine E-messbare Funktion. Dann wird durch

$$D(u_E) := \{x \in H \,:\, u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)\}\ ,\ u_E x := \int u(t)\, dE(t)x \text{ für } x \in D(u_E)$$

ein normaler Operator u_E erklärt; für den so definierten Operator u_E schreiben wir im folgenden auch $\int u(t)\, dE(t)$. Ist u reellwertig, so ist u_E selbstadjungiert.
Sind $u, v : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ E-messbar, so gilt:
(a) Für $x \in D(u_E)$ und $y \in D(v_E)$ gilt

$$(u_E y, v_E x) = \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi_n(v(t))}\varphi_n(u(t))\, d(y, E(t)x) := \int \overline{v(t)} u(t)\, d\rho_{y,x}(t)$$

dabei ist das komplexe Maß $\rho_{y,x}$ mittels Polarisierungsidentität als Linearkombination von vier positiven Maßen zu verstehen, $\rho_{y,x} = \rho_{y+x} - \rho_{y-x} + i\rho_{y-ix} - i\rho_{y+ix}$; das letzte Integral ist formal zu verstehen, es ist durch den davor stehenden Grenzwert zu definiert, wenn dieser existiert.
(b) Für $x \in D(u_E)$ gilt $\|u_E x\|^2 = \int |u(t)|^2\, d\rho_x(t) = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R},\rho_x)}$.
(c) Ist u beschränkt, so ist $u_E \in \mathcal{L}(H)$ mit $\|u_E\| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|$.
(d) Für die Einsfunktion 1 gilt $1_E = I$.
(e) Für $x \in D(u_E)$ und alle $y \in H$ gilt $(u_E x, y) = \int u(t)\, d\rho_{y,x}(t)$.
(f) Ist $u(t) \geq c$ für alle $t \in \mathbb{R}$, so ist u_E nach unten halbbeschränkt mit unterer Schranke c.
(g) $(u + v)_E \supset u_E + v_E$ und $D(u_E + v_E) = D((|u| + |v|)_E)$.
(h) $(uv)_E \supset u_E v_E$ und $D(u_E v_E) = D(v_E) \cap D((uv)_E)$.
(i) $D(u_E)$ ist dicht in H, weiters ist $D(u_E) = D(\overline{u}_E)$ und $(u_E)^* = \overline{u}_E$.
(j) Ist $u = \chi_S$ die charakteristische Funktion einer Menge $S \subset \mathbb{R}$, so dass u E-messbar ist, so ist $u_E = (\chi_S)_E$ eine orthogonale Projektion. Wir schreiben dafür kurz $E(S)$, wodurch ein projektionswertiges Maß auf $\mathbb{R}$ definiert wird.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass u_E ein linearer Operator ist: $D(u_E)$ ist ein linearer Teilraum von H und $u_E : D(u_E) \longrightarrow H$ ist linear. Für $a \in \mathbb{C}$ ist $ax \in D(u_E)$ und $u_E(ax) = au_E(x)$ für alle $x \in D(u_E)$, noch zu zeigen: ist $x, y \in D(u_E)$ so folgt $x + y \in D(u_E)$ und $u_E(x + y) = u_E(x) + u_E(y)$.
Sei zunächst u beschränkt, $(u_n)_n$ eine beschränkte Folge von Treppenfunktionen mit $u_n(t) \to u(t)$ ρ-fast überall mit $\rho = \rho_x + \rho_y$. Dann gilt $U_n(t) \to u(t)$ ρ_z-fast überall und somit nach dem Satz von Lebesgue $u_n \to u$ im Sinne von $L^2(\mathbb{R}, \rho_z)$ für $z = x, z = y$ und $z = x + y$. Für beschränkte Funktionen u gilt $x + y \in D(u_E)$, weil $D(u_E) = X$, also ist

$$u_E(x + y) = \lim_{n\to\infty} (u_n)_E(x + y) = \lim_{n\to\infty} ((u_n)_E x + (u_n)_E y) = u_E(x) + u_E(y).$$

Sei nun u eine beliebige E-messbare Funktion mit $x, y \in D(U_E)$. Die Folge $(|\varphi_n \circ u|)_n$ konvergiert punktweise nichtfallend gegen $|u|$, und es gilt

$$\left(\int |\varphi_n(u(t))|^2\, d\rho_{x+y}(t)\right)^{1/2} = \|(\varphi_n \circ u)_E(x + y)\| = \|(\varphi_n \circ u)_E x + (\varphi_n \circ u)_E y\|$$

$$\leq \|(\varphi_n \circ u)_E x\| + \|(\varphi_n \circ u)_E y\| = \left(\int |\varphi_n(u(t))|^2 \, d\rho_x(t)\right)^{1/2} + \left(\int |\varphi_n(u(t))|^2 \, d\rho_y(t)\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\int |u(t)|^2 \, d\rho_x(t)\right)^{1/2} + \left(\int |u(t)|^2 \, d\rho_y(t)\right)^{1/2} = \|u_E x\| + \|u_E y\| < \infty.$$

Nach dem Satz über die monotone Konvergenz (siehe [R1]) folgt $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_{x+y})$ und $\varphi_n \circ u \to u$ in $L^2(\mathbb{R}, \rho_{x+y})$, also $x + y \in D(u_E)$ und

$$u_E(x+y) = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E(x+y) = \lim_{n\to\infty} ((\varphi_n \circ u)_E x + (\varphi_n \circ u)_E y) = u_E x + u_E y.$$

(a) Die Aussage ist wahr für Treppenfunktionen für alle $x, y \in H$. Ein Grenzübergang liefert die Aussage für alle beschränkten E-messbaren Funktionen u und v, wobei in der Formel der Grenzübergang $n \to \infty$ entfällt, da für große n gilt $\varphi_n \circ u = u$ und $\varphi_n \circ v = v$. Sind u und v beliebige E-messbare Funktionen, so gilt für $x \in D(u_E)$ und $y \in D(v_E)$

$$(u_E y, v_E x) = \lim_{n\to\infty} ((\varphi_n \circ u)_E y, (\varphi_n \circ v)_E x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int \overline{\varphi_n(v(t))} \varphi_n(u(t)) \, d\rho_{y,x}(t) = \int \overline{v(t)} u(t) \, d\rho_{y,x}(t).$$

(b) Folgt aus (a) mit $v = u$ und $y = x$.
(c) Ist u beschränkt, so ist $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ für alle $x \in H$, weil $\rho_x(\mathbb{R}) = \|x\|^2$ endlich ist, d.h. es gilt $D(u_E) = H$. Die Normabschätzung folgt aus (b).
(d) Nach (c) ist $1_E \in \mathcal{L}(H)$. Es gilt $\chi_{(-n,n]} \to 1$ in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, also

$$1_E x = \lim_{n\to\infty} (\chi_{(-n,n]})_E x = \lim_{n\to\infty} (E(n) - E(-n))x = x \quad , \text{ für alle} x.$$

(e) Folgt aus (d) mit $v = 1$ unter Berücksichtigung von (a).
(f) Folgt aus (e) mit $y = x$.
(g) Ist $x \in D(U_E + v_E) = D(u_E) \cap D(v_E)$, so gilt $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, also $x \in D((u + v)_E)$; die Linearität des Integrals liefert $(u + v)_E x = u_E x + v_E x$.
Da für E-messbare u, v offenbar $u, v \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ genau dann gilt, wenn $|u| + |v| \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ gilt, folgt auch $D(u_E + v_E) = D((|u| + |v|)_E)$.
(h) Für eine beschränkte E-messbare Funktion u und $x, y \in H$ gilt

$$(u_E x, y) \overset{(e)}{=} \int u(t) \, d\rho_{y,x}(t) = \overline{\int \overline{u(t)} \, d\rho_{x,y}(t)} = \overline{(\overline{u}_E y, x)} = (x, \overline{u}_E y).$$

Damit folgt für beschränkte E-messbare Funktionen u und v

$$(u_E v_E x, y) = (u_E(v_E x), y) = (v_E x, \overline{u}_E y)$$

$$\overset{(a)}{=} \int u(t)v(t) \, d\rho_{y,x}(t) = ((uv)_E x, y),$$

also $u_E v_E = (uv)_E$.
Seien nun u, v beliebige E-messbare Funktionen, $x \in D(u_E v_E)$ (d.h. $x \in D(v_E)$ und $v_E x \in D(u_E)$. Da $\varphi_n \circ u$ für festes n beschränkt ist, gilt

$$(\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v) \to (\varphi_n \circ u)v \;\text{ in } L^2(\mathbb{R}, \rho_x) \;\text{ für } m \to \infty,$$

und somit

$$u_E v_E x = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E v_E x = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E \left(\lim_{m\to\infty} (\varphi_m \circ v)_E x\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E (\varphi_m \circ v)_E x = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} ((\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v))_E x = \lim_{n\to\infty} ((\varphi_n \circ u)v)_E x.$$

Die hiermit gezeigte Existenz dieses Grenzwertes besagt, dass $((\varphi_n \circ u)v)_n$ eine Cauchyfolge in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$ ist. Diese konvergiert nach Konstruktion punktweise gegen uv. Also ist $uv \in L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, $x \in D((uv)_E)$ und $(uv)_E x = u_E v_E x$, d.h. es gilt

$$D(U_E v_E) \subset D(v_E) \cap D((uv)_E) \quad \text{und} \quad u_E v_E \subset (uv)_E.$$

Sei nun $x \in D(v_E) \cap D((uv)_E)$; wegen $|(\varphi_n \circ u)v| \leq |uv|$ ist dann $x \in D(((\varphi_n \circ u)v)_E)$ und $(\varphi_n \circ u)v \to uv$ in $L^2(\mathbb{R}, \rho_x)$, also

$$(uv)_E x = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} ((\varphi_n \circ u)(\varphi_m \circ v))_E x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E (\varphi_m \circ v)_E x = \lim_{n\to\infty} (\varphi_n \circ u)_E v_E x.$$

Die hiermit gezeigte Existenz dieses Grenzwertes liefert $u \in L^2(\mathbb{R}, \rho_{v_E x})$ und $v_E x \in D(u_E)$, also $x \in D(u_E v_E)$.
(i) $D(u_E)$ ist dicht in H : es gilt $(\chi_m \circ u)_E x \in D(u_E)$ für alle $x \in H$ und $m \in \mathbb{N}$, denn es ist (da $\chi_m \circ u$ und $u.(\chi_m \circ u)$ beschränkt sind)

$$D(u_E(\chi_m \circ u)_E) = D((u.(\chi_m \circ u))_E) \cap D((\chi_m \circ u)_E) = H.$$

Wegen $x = \lim_{m\to\infty} (\chi_m \circ u)_E x$ folgt die Dichtheit von $D(u_E)$.
Die Gleichung $D(\overline{u}_E) = D(u_E)$ ist offensichtlich; für $x, y \in D(\overline{u}_E) = D(u_E)$ gilt

$$(u_E x, y) \overset{(e)}{=} \int u(t)\, d\rho_{y,x} = \overline{\int \overline{u(t)}\, d\rho_{x,y}} \overset{(e)}{=} \overline{(\overline{u}_E y, x)} = (x, \overline{u}_E y),$$

d.h. u_E und $\overline{u}_E$ sind formal adjungiert; insbesondere gilt $\overline{u}_E = (u_E)^*$ für beschränktes u. Für allgemeines u bleibt $D((u_E)^*) \subset D(\overline{u}_E)$ zu beweisen: Sei $y \in D((u_E)^*)$. Dann gilt für alle $x \in D(u_E)$

$$((u_E)^* y, x) = (y, u_E x) = \lim_{n\to\infty} (y, (\varphi_n \circ u)_E x)$$

$$= (\overline{(\varphi_n \circ u)}_E y, x) = \lim_{n\to\infty} ((\varphi_n \circ \overline{u})_E y, x).$$

Insbesondere gilt für jedes $x \in H$ und $m \in \mathbb{N}$ (da χ_m reellwertig ist und $(\chi_m \circ u)_E x \in D(u_E)$ gilt)

$$((\chi_m \circ u)_E (u_E)^* y, x) = ((u_E)^* y, (\chi_m \circ u)_E x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} ((\varphi_n \circ \overline{u})_E y, x) = \lim_{n\to\infty} (((\chi_m \circ u)(\varphi_n \circ \overline{u}))_E y, x) = ((\varphi_m \circ \overline{u})_E y, x),$$

d.h. es gilt für alle $y \in D((u_E)^*)$

$$(u_E)^* y = \lim_{m\to\infty} (\chi_m \circ u)(u_E)^* y = \lim_{m\to\infty} (\varphi_m \circ \overline{u})_E y.$$

Die Existenz dieses Limes bedeutet $y \in D(\overline{u}_E$.
Damit folgt nun auch die Normalität von u_E, denn es gilt: $D((u_E)^*) = D(\overline{u}_E) = D(u_E)$,

$$\|(u_E)^* x\|^2 = \|\overline{u}_E x\|^2 = \int |u(t)|^2 \, d\rho_x(t) = \|u_E x\|^2.$$

Insbesondere ist u_E selbstadjungiert, falls u reell ist.
(j) Folgt aus (c),(h) und (i).

□

Für den Beweis des Spektralsatzes benötigen wir nun noch zwei Sätze aus der Komplexen Analysis bzw. Maßtheorie.
Eine Funktion $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ heißt von beschränkter Variation , wenn es vier beschränkte nicht-fallende Funktionen $w_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $w = w_1 - w_2 + iw_3 - iw_4$. Man kann zeigen (siehe [R1]), dass w genau dann so darstellbar ist, wenn es ein $C \geq 0$ gibt mit $\sum_n |w(b_n) - w(a_n)| \leq C$ für jede Folge von disjunkten Intervallen $(a_n, b_n]$; das kleinste C mit dieser Eigenschaft heißt die Variation von w.

Satz 12.17.
Sei $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion von beschränkter Variation; außerdem sei w rechtsstetig mit $w(t) \to 0$ für $t \to -\infty$. Wir betrachten wir das Stieltjes-Integral der Form

$$f(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z} \, dw(t) \quad , \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (*)$$

(a) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$w(t) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} (f(s+i\epsilon) - f(s-i\epsilon)) \, ds,$$

insbesondere ist w durch f eindeutig bestimmt.
(b) Ist w reellwertig, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$w(t) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t+\delta} \Im f(s+i\epsilon) \, ds.$$

Beweis. Ist $w = u + iv$ mit reellwertigen u und v, und sind f_u und f_v entsprechend definiert, so folgt (a) aus (b) wegen $f_u(s - i\epsilon) = \overline{f_u(s + i\epsilon)}$, und $f_v(s - i\epsilon) = \overline{f_v(s + i\epsilon)}$.
Ist w reellwertig, so gilt für jedes $\epsilon > 0$

$$\Im f(s+i\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \Im \left(\frac{1}{\tau - s - i\epsilon} \right) dw(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon}{(s-\tau)^2 + \epsilon^2} \, dw(\tau),$$

und es folgt aus dem Satz von Fubini folgt für jedes $r \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{r} \Im f(s+i\epsilon) \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{r} \frac{\epsilon}{(s-\tau)^2 + \epsilon^2} \, ds \, dw(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\arctan \frac{r-\tau}{\epsilon} + \frac{\pi}{2} \right) dw(\tau).$$

Wegen $|\arctan \frac{r-\tau}{\epsilon} + \frac{\pi}{2}| \leq \pi$ für alle $r \in \mathbb{R}$, und

$$\arctan \frac{r-\tau}{\epsilon} + \frac{\pi}{2} \to \begin{cases} \pi & \text{für } r > \tau, \\ \pi/2 & \text{für } r = \tau, \\ 0 & \text{für } r < \tau, \end{cases}$$

bei $\epsilon \to 0+$, folgt aus dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz

$$\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{r} \Im f(s+i\epsilon)\,ds = \int_{(-\infty,r)} \pi\,dw(\tau) + \int_{\{r\}} \frac{\pi}{2}\,dw(\tau) + \int_{(r,\infty} 0\,dw(\tau)$$

$$= \pi w(r-) + \frac{\pi}{2}(w(r) - w(r-)) = \frac{\pi}{2}(w(r) + w(r-)).$$

Ersetzt man hier r durch $t+\delta$, so folgt bei $\delta \to 0+$ die gewünschte Behauptung, da w rechtsstetig ist.
Ist $f(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}_+$, dann folgt $w(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also ist w durch f eindeutig bestimmt. $\square$

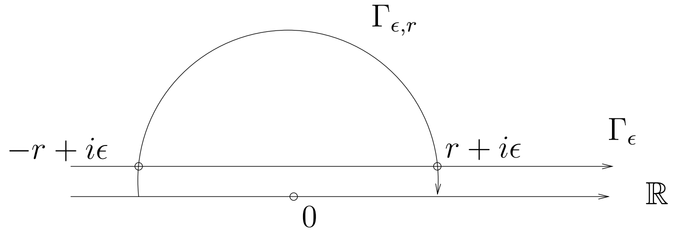
Satz 12.18.
Sei $M \geq 0$ und $f : \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $\Im f(z) \geq 0$ und $|f(z)\Im z| \leq M$ für $z \in \mathbb{C}_+$. Dann gibt es genau eine rechtsstetige nicht-fallende Funktion $w : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $w(t) \to 0$ bei $t \to -\infty$ und

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\,dw(t)$$

für $z \in \mathbb{C}_+$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $w(t) \leq M$ und

$$w(t) = \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{t+\delta} \Im f(s+i\epsilon)\,ds.$$

Beweis. Die Darstellung und Eindeutigkeit von w folgt aus dem vorigen Satz, wenn wir die Existenz gezeigt haben. Wir benutzen die folgenden Integrationswege:
$\Gamma_{\epsilon,r}$: von $-r+i\epsilon$ geradlinig nach $r+i\epsilon$ und auf dem oben liegenden Halbkreis mit Radius r zurück nach $-r+i\epsilon$,
$\Gamma'_{\epsilon,r}$: nur der Kreisbogen aus $\Gamma_{\epsilon,r}$ von $r+i\epsilon$ nach $-r+i\epsilon$,
Γ_ϵ : die Parallel zur x-Achse von $-\infty+i\epsilon$ nach $\infty+i\epsilon$.



Dabei sei $z = x+iy \in \mathbb{C}_+$ und $0 < \epsilon < y$ (also liegt z innerhalb von $\Gamma_{\epsilon,r}$ und $\overline{z}+2i\epsilon$ außerhalb von $\Gamma_{\epsilon,r}$ für hinreichend große r). Nach der Cauchy'schen Integralformel und dem Cauchy'schen Integralsatz gilt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\epsilon,r}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\epsilon,r}} \left(\frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta-(\overline{z}+2i\epsilon)}\right) f(\zeta)\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\epsilon,r}} \frac{(z-\overline{z}-2i\epsilon)}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z}-2i\epsilon)} f(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_{\epsilon,r}} \frac{y-\epsilon}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z}-2i\epsilon)} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Wegen

$$|f(\zeta)| \leq \epsilon^{-1}M \quad \text{und} \quad \left|\frac{y-\epsilon}{(\zeta-z)(\zeta-\overline{z}-2i\epsilon)}\right| < Cr^{-2} \quad \text{für } \zeta \in \Gamma'_{\epsilon,r}$$

strebt das Integral über $\Gamma'_{\epsilon,r}$ gegen 0 bei $r \to \infty$, d.h. es gilt

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma_{\epsilon,r}} \frac{y-\epsilon}{(\zeta - z)(\zeta - \overline{z} - 2i\epsilon)} f(\zeta)\, d\zeta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\epsilon}{(t+i\epsilon - z)(t - i\epsilon - \overline{z})} f(t+i\epsilon)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\epsilon}{(x-t)^2 + (y-\epsilon)^2} f(t+i\epsilon)\, dt.$$

Mit $v(z) = \Im f(z)$ gilt also

$$v(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\epsilon}{(x-t)^2 + (y-\epsilon)^2} v(t+i\epsilon)\, dt.$$

Aus $|v(z)y| \leq |f(z)\Im z| \leq M$ folgt

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y-\epsilon}{(x-t)^2 + (y-\epsilon)^2} v(t+i\epsilon)\, dt \right| = |(y-\epsilon)v(z)| \leq M.$$

Bei $y \to \infty$ folgt hieraus mit dem Lemma von Fatou (siehe [R1]) die Integrierbarkeit von $v(.+i\epsilon)$ und

$$0 \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t+i\epsilon)\, dt \leq M \quad \text{für alle } \epsilon > 0.$$

Da für $\epsilon < y/2$ gilt

$$\left| \frac{y-\epsilon}{(x-t)^2 + (y-\epsilon)^2} - \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right| \leq \frac{\epsilon}{y} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-\epsilon} \right) \leq 3\epsilon y^{-2},$$

folgt bei $\epsilon \to 0+$

$$\int_{-\infty\epsilon\epsilon}^{\infty} \left(\frac{y-\epsilon}{(x-t)^2 + (y-\epsilon)^2} - \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} \right) v(t+i\epsilon)\, dt \to 0,$$

also

$$v(z) = \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} v(t+i\epsilon)\, dt.$$

Definieren wir nun für $\epsilon > 0$ die Funktion $w_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$w_\epsilon(t) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t} v(s+i\epsilon)\, ds \quad \text{für } t \in \mathbb{R},$$

so ist w_ϵ stetig differenzierbar, nicht-fallend, und es gilt $0 \leq w_\epsilon(t) \leq M$.
Auf ähnliche Weise wie in 6.25 verwenden wir nun 6.24, um zu zeigen, dass eine Nullfolge $(\epsilon_n)_n$ und eine Funktion $\tilde{w}$ von beschränkter Variation existieren mit

$$v(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} v(t+i\epsilon_n)\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} w'_{\epsilon_n}(t)\, dt$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} dw_{\epsilon_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} d\tilde{w}(t).$$

Definieren wir

$$\hat{w}(t) := \inf\{\tilde{w}(s) \,:\, s > t\} \quad \text{und} \quad w(t) := \hat{w}(t) - \lim_{s\to-\infty} \hat{w}(s),$$

so ist w rechtsstetig und nicht-fallend mit $w(t) \to 0$ für $t \to -\infty$, und es gilt

$$v(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, d\hat{w}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(x-t)^2 + y^2}\, dw(t),$$

denn $\hat{w}$ unterscheidet sich von $\tilde{w}$ höchstens in den abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen von $\tilde{w}$, w und $\hat{w}$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante; beides hat keinen Einfluss auf das Integral, da der Integrand stetig ist.
Die Funktion

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, dw(t)$$

ist holomorph in $\mathbb{C}_+$ mit $\Im F(z) = v(z) = \Im f(z)$. Also gilt $\Re f(z) = \Re F(z) + C$, d.h.

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, dw(t) + C.$$

Wegen $|f(z)\Im z| \leq M$ und

$$\left| \Im z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t-z}\, dw(t) \right| \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} 1\, dw(t) \right| \leq M$$

folgt $C = 0$, d.h. w hat alle gewünschten Eigenschaften. □

Wir formulieren und beweisen nun die 2. Version des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren, um damit die 1. Version zeigen zu können.

Satz 12.19.
(Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren, 2. Version) Zu jedem selbstadjungierten Operator T im Hilbertrum H gibt es genau eine Spektralschar E mit $\mathrm{id}_E = T$, anders ausgedrückt

$$T = \int t\, dE(t),$$

dabei ist E gegeben durch

$$(y, E(t)x) = \lim_{\delta\to0+} \lim_{\epsilon\to0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} (y, ((T-(s+i\epsilon)I)^{-1} - (T-(s-i\epsilon)I)^{-1})x)\, ds \quad (*)$$

für alle $x, y \in H$ und $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Eindeutigkeit: Ist $T = \mathrm{id}_E$, so gilt nach 12.16 mit $u_z(t) := (t-z)^{-1}$ für $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$$(T-zI)(u_z)_E = I \quad \text{und} \quad (u_z)_E(T-zI) = I|_{D(T)},$$

d.h. es gilt $(u_z)_E = (T-zI)^{-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, und somit nach 12.16

$$(y, (T-zI)^{-1}x) = \int \frac{1}{t-z}\, d(y, E(t)x)$$

für $x, y \in H$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Aus 12.18 folgt damit die Darstellung (*) für $(y, E(t)x)$. Das bedeutet, dass die Spektralschar, die T erzeugt (falls eine solche existiert) durch T eindeutig bestimmt wird.

Existenz: Falls eine Spektralschar E mit $\mathrm{id}_E = T$ existiert, ist diese nach dem bereits Bewiesenen durch (*) gegeben. Wir gehen deshalb von dieser Formel aus und zeigen, dass durch sie eine Spektralschar E definiert ist mit $\mathrm{id}_E = T$.
Nach 12.8 ist die Funktion $f_x(z) = (x, (T - zI)^{-1}x)$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und es gilt

$$|f_x(z)\Im z| \leq \|x\|^2.$$

Daher folgt aus 12.18

$$(x, (T - zI)^{-1}x) = \int \frac{1}{t - z}\, dw_x(t) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

mit der rechtsstetigen nicht-fallenden Funktion

$$w_x(t) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} (x, ((T - (s + i\epsilon)I)^{-1} - (T - (s - i\epsilon)I)^{-1})x)\, ds.$$

Es gilt außerdem $w_x(t) \to 0$ für $t \to -\infty$ und $w_x(t) \leq \|x\|^2$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Polarisierungsidentität folgt auch

$$(y, (T - zI)^{-1}x) = \int \frac{1}{t - z}\, dw_{y,x}(t) \quad \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

mit

$$w_{y,x}(t) = \lim_{\delta \to 0+} \lim_{\epsilon \to 0+} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{t+\delta} (y, ((T - (s + i\epsilon)I)^{-1} - (T - (s - i\epsilon)I)^{-1})x)\, ds.$$

Die Abbildung $H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$, $(y, x) \mapsto w_{y,x}(t)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Sesquilinearform; diese ist Hermite'sch und nichtnegativ, $w_{x,x}(t) = w_x(t) \geq 0$, weiters beschränkt, weil $|w_{y,x}(t)|^2 \leq w_y(t)w_x(t) \leq \|y\|^2\|x\|^2$, daher existiert nach 11.5 für jedes $t \in \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmter selbstadjungierter Operator $E(t) \in \mathcal{L}(H)$ mit $(y, E(t)x) = w_{y,x}(t)$ für alle $x, y \in H$.
Wir zeigen, dass $E(.)$ eine Spektralschar ist. Für $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ mit $z \neq z'$ gilt wegen 7.15 (a)

$$\int \frac{1}{t - z}\, d((T - \overline{z'}I)^{-1}y, E(t)x) = ((T - \overline{z'}I)^{-1}y, (T - zI)^{-1}x) = (y, (T - z'I)^{-1}(T - zI)^{-1}x)$$

$$= \frac{1}{z - z'}\big((y, (T - zI)^{-1}x) - (y, (T - z'I)^{-1}x)\big) = \frac{1}{z - z'} \int \left(\frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - z'}\right) d(y, E(t)x)$$

$$= \int \frac{1}{(t - z)(t - z')}\, d(y, E(t)x) = \int \frac{1}{t - z}\, d_t \int_{(-\infty, t]} \frac{1}{s - z'}\, d_s(y, E(s)x).$$

Mit der Eindeutigkeitsaussage in 12.17 folgt daraus

$$((T - \overline{z'}I)^{-1}y, E(t)x) = \int_{(-\infty, t]} \frac{1}{s - z'}\, d_s(y, E(s)x),$$

also für alle $z' \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\int \frac{1}{s-z'}\, d_s(y, E(s)E(t)x) = (y, (T-z'I)^{-1}E(t)x)$$

$$= ((T-\overline{z'}I)^{-1}y, E(t)x) = \int_{(-\infty,t]} \frac{1}{s-z'}\, d_s(y, E(s)x).$$

Nochmalige Anwendung der Eindeutigkeitsaussage in 12.17 liefert

$$(y, E(s)E(t)x) = \begin{cases} (y, E(s)x) & \text{für } s \leq t, \\ (y, E(t)x) & \text{für } s \geq t, \end{cases}$$

d.h. es gilt $E(s)E(t) = E(\min\{s,t\})$. Insbesondere ist $E(t)$ idempotent. Also ist $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{L}(H)$ eine wachsende projektionswertige Abbildung. Die starke Rechtsstetigkeit folgt aus der Rechtsstetigkeit von w_x :

$$\|E(t+\delta)x - E(t)x\|^2 = \|E(t+\delta)x\|^2 - \|E(t)x\|^2 = w_x(t+\delta) - w_x(t) \to 0 \ \text{ bei } \delta \to 0.$$

Außerdem gilt $\|E(t)x\|^2 = w_x(t) \to 0$ also $E(t) \to 0$ in der starken Operatortopologie bei $t \to -\infty$. Aus der Monotonie erhält man die Existenz einer orthogonalen Projektion E_∞ mit $E(t)x \to E_\infty x$ bei $t \to \infty$ und $E(t) \leq E_\infty$ für alle $\in \mathbb{R}$. Für $F := I - E_\infty$ gilt also

$$E(t)F = E(t)(I - E_\infty) = E(t) - E(t) = 0 \ \text{ für alle } t \in \mathbb{R},$$

und somit für alle $x, y \in H$

$$(y, (T-zI)^{-1}Fx) = \int \frac{1}{t-z}\, d_t(y, E(t)Fx) = 0 \ \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Also ist $(T-zI)^{-1}F = 0$ und somit $F = 0$ bzw. $E_\infty = I$, d.h. es gilt $E(t) \to I$ in der starken Operatortopologie bei $t \to \infty$. E ist also eine Spektralschar.
Wegen $(u_z)_E = (T-zI)^{-1}$ für $u_z(t) = (t-z)^{-1}$ gilt somit $(v_z)_E = T - zI$ für $v_z = \mathrm{id} - z$, also ist $\mathrm{id}_E = T$. □

Beispiele 12.20.
Seien (X, μ) ein Maßraum, $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine μ-messbare Funktion und $T = M_g$ der Multiplikationsoperator $Tf = gf$ mit Definitionsbereich

$$D(T) = \{f \in L^2(X,\mu) \,:\, gf \in L^2(X,\mu)\}.$$

Dann ist T selbstadjungiert und für $z \in \rho(T)$ und $f \in L^2(X,\mu)$ gilt $(T-zI)^{-1}f = \frac{1}{g-z} f$

und daher gilt nach 12.19

$$
\begin{aligned}
(E(t)f,h) &= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{t+\delta}\int_X \frac{2i\epsilon}{(s-g(x))^2+\epsilon^2}\,f(x)\overline{h(x)}\,d\mu(x)\,ds\\
&= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\epsilon\to 0+}\frac{1}{\pi}\int_X\int_{-\infty}^{t+\delta}\frac{\epsilon}{(s-g(x))^2+\epsilon^2}\,f(x)\overline{h(x)}\,ds\,d\mu(x)\\
&= \lim_{\delta\to 0+}\lim_{\epsilon\to 0+}\int_X f(x)\overline{h(x)}\;\frac{1}{\pi}\arctan\frac{s-g(x)}{\epsilon}\Big|_{-\infty}^{t+\delta}\,d\mu(x)\\
&= \lim_{\delta\to 0+}\int_X f(x)\overline{h(x)}\begin{cases}1 & \text{für } t+\delta>g(x)\\ 1/2 & \text{für } t+\delta=g(x)\\ 0 & \text{für } t+\delta<g(x)\end{cases}d\mu(x)\\
&= \int_{\{x\in X\,:\,g(x)\le t\}} f(x)\overline{h(x)}\,d\mu(x) = (\chi_{\{x\in X\,:\,g(x)\le t\}}f,h).
\end{aligned}
$$

Also ist $E(t)$ gleich der Multiplikation mit der Funktion $\chi_{\{x\in X\,:\,g(x)\le t\}}$ (vgl. 12.11).

Satz 12.21.
Zwei selbstadjungierte Operatoren T und S sind genau dann unitär äquivalent ($S = U^{-1}TU$), wenn ihre Spektralscharen E und F unitär äquivalent sind mit der gleichen unitären Abbildung ($F(t) = U^{-1}E(t)U$).

Beweis. Dies folgt aus Formel (*) von 12.19. Gilt $F(t) = U^{-1}E(t)U$, so sind offenbar E- und F-Messbarkeit äquivalent, und es gilt $u \in L^2(\mathbb{R},\rho_x^E)$ genau dann, wenn $u \in L^2(\mathbb{R},\rho^F_{U^{-1}x})$ gilt. Für Treppenfunktionen u ist $u_F = U^{-1}u_EU$ offensichtlich; für beliebige E- bzw. F-messbare Funktionen folgt dies durch Grenzübergang. □

Wir sind nun in der Lage, die erste Version 12.9 des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren zu beweisen: sei dazu E die Spektralschar von T. Nach 12.14 gibt es eine unitäre Abbildung U mit $E(t) = U^{-1}\chi_{(-\infty,t]}U$. Nach 12.21 folgt

$$UTU^{-1} = U\mathrm{id}_EU^{-1} = \mathrm{id}_{UE(.)U^{-1}} = \mathrm{id}_{\chi_{(-\infty,.]}} = M_{\mathrm{id}},$$

wobei wir im letzten Schritt 12.20 verwendet haben, und M_{id} die Multiplikation mit der identischen Funktion auf $\oplus_{j=1}^N L^2(\mathbb{R},\rho_j)$ bezeichnet. Als Maßraum kann man nun die disjunkte Vereinigung der Maßräume $(\mathbb{R},\rho_j)$ wählen, dabei stellt man sich M als Vereinigung von disjunkten Geraden l_j (Kopien von $\mathbb{R}$) vor und sagt eine Menge $B\subset M$ ist genau dann messbar, wenn $B\cap l_j$ für jedes j messbar ist und setzt

$$d\sigma(B) = \sum_j d\rho_j(B\cap l_j).$$

Dann gibt es eine unitäre Abbildung zwischen $L^2(M,d\sigma)$ und $\oplus_{j=1}^N L^2(\mathbb{R},\rho_j)$ und insgesamt eine σ-messbare Funktion $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine unitäre Abbildung $V: H \longrightarrow L^2(M,d\sigma)$, so dass $T = V^{-1}M_gV$, damit ist der Spektralsatz auch in der 1. Version bewiesen.

Als Anwendung des Spektralsatzes untersuchen wir nun Funktionen von selbstadjungierten Operatoren. Ist T ein selbstadjungierter Operator mit Spektralschar E, so schreiben wir im folgenden $u(T)$ für den Operator u_E. Wir wissen bereits, dass für $u_z(t) = (t-z)^{-1}$ gilt $u_z(T) = (u_z)_E = (T - zI)^{-1}$, diese Schreibweise wird gerechtfertigt durch Satz 12.16 (g), (h) und durch

Satz 12.22.
Ist T ein selbadjungierter Operator mit Spektralschar E und $u(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$, so ist $u_E = \sum_{j=0}^{n} c_j T^j$, dabei ist $T^0 = I$.

Beweis. Induktion nach n : für $n = 0$ gilt $u_E = c_0 I = c_0 T^0$. Sei die Aussage für Polynome vom Grad $\leq n-1$ richtig, d.h. für $v(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j t^{j-1}$ gilt $v(T) = \sum_{j=1}^{n} c_j T^{j-1}$. Für die Funktion $u = v.\mathrm{id} + c_0$ folgt aus 12.16 (h):

$$u(T) \supset v(T)T + c_0 I = (\sum_{j=1}^{n} c_j T^{j-1})T + c_0 I.$$

Für $n \geq 1$ ist $D(T) = D(\mathrm{id}_E) \supset D(u_E)$, also nach 12.16 (h)

$$D(u(T)) = D(T) \cap D(u(T)) = D(v(T)T),$$

und daraus folgt die Behauptung. □

Wir sind jetzt in der Lage, die n-te Wurzel eines nichtnegativen, selbstadjungierten Operators zu erklären und die polare Zerlegung unbeschränkter Operatoren anzugeben.

Definition 12.23.
Ein linearer Operator U von H_1 nach H_2 mit $D(U) = H_1$ heißt partielle Isometrie , wenn ein abgeschlossener Teilraum M von H_1 existiert mit $\|Ux\| = \|x\|$ für $x \in M$, und $Ux = 0$ für $x \in M^\perp$.
$\mathrm{im}U$ ist abgeschlossen: ist $(Ux_n)_n$ eine Folge in $\mathrm{im}U$ mit $Ux_n \to y$, so ist wegen $Ux_n = UP_M x_n$ auch $(P_M x_n)_n = (z_n)_n$ eine Cauchyfolge in M; sei $z = \lim_n z_n \in M$; dann ist $y = \lim_n Ux_n = \lim_n Uz_n = Uz \in \mathrm{im}U$. Die abgeschlossenen Teilräume M und $\mathrm{im}U$ heißen Anfangs- bzw. Endmenge der partiellen Isometrie U.

Satz 12.24.
(a) Jeder nichtnegative, selbstadjungierte Operator T besitzt genau eine nichtnegative selbstadjungierte n-te Wurzel $T^{1/n}$. Ist E die Spektralschar von T, so gilt

$$T^{1/n} = \int t^{1/n}\, dE(t),$$

dabei ist $t^{1/n} \geq 0$ für $t \geq 0$; für $t < 0$ braucht $t^{1/n}$ nicht festgelgt zu werden, da $(-\infty, 0)$ für jedes $x \in H$ eine ρ_x-Nullmenge ist. Ist T kompakt, so ist auch $T^{1/n}$ kompakt.
(b) Sei T ein dicht definierter abgeschlossener Operator von H_1 nach H_2. T lässt sich eindeutig darstellen in der Form $T = US$, wobei S ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator in H_1ist und U eine partielle Isometrie mit Anfangsmenge $\overline{\mathrm{im}S}$ und Endmenge $\overline{\mathrm{im}T}$. Es gilt $S = (T^*T)^{1/2} =: |T|$.

Beweis. (a) Nach 12.16 (f),(h) und (i) ist der angegebene Operator $T^{1/n}$ eine nichtnegative n-te Wurzel von T. Der Operator $T^{1/n}$ hat die Spektralschar $E_{1/n}(t) = E(t^n)$ für $t \geq 0$ (ist u eine reellwertige E-messbare Funktion, so gilt für die Spektralschar F von $u(T)$: $F(t) = E(\{s \in \mathbb{R} : u(s) \leq t\})$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ und $F(B) = E(\{s \in \mathbb{R} : u(s) \in B\})$ für jede Borelmenge B, weil $F(B) = \chi_B(u(T)) = (\chi_B \circ u)(T)$ und $\chi_B \circ B = \chi_{\{s \in \mathbb{R} : u(s) \in B\}}$ gilt, siehe auch 12.20).
Ist nun S eine beliebige nichtnegative n-te Wurzel von T mit Spektralschar F, so hat $T = S^n$ die Spektralschar $F_n(t) = F(t^{1/n})$ für $t \geq 0$. Wegen der Eindeutigkeit der Spektralschar von T (siehe 12.19) folgt $E = F_n$, also $F = E_{1/n}$ und somit $S = T^{1/n}$.
Ist T kompakt, $Tx = \sum_j \lambda_j (x, x_j) x_j$ die Darstellung aus 7.20, so ist $Sx = \sum_j \lambda_j^{1/n} (x, x_j) x_j$ eine kompakte nichtnegative n-te Wurzel von T, wegen der Eindeutigkeit ist der hier konstruierte Operator $T^{1/n}$ kompakt.
(b) Der Operator T^*T ist nach 10.30 selbstadjungiert und nichtneagtiv, besitzt also nach (a) eine eindeutig bestimmte Quadratwurzel $|T| := (T^*T)^{1/2}$ so gilt nach 12.16 (h) und (i), dass $D(|T|) = D(T)$. Weiters ist

$$\||T|x\|^2 = (|T|x, |T|x) = (|T|^2 x, x) = (T^*Tx, x) = (Tx, Tx) = \|Tx\|^2,$$

für alle $x \in D(T)$.
Definiere nun $V(|T|x) := Tx$ für jedes $|T|x \in \mathrm{im}|T|$. Dann ist V isometrisch von $\mathrm{im}|T|$ auf $\mathrm{im}T$ und $U := \overline{V}$ die geforderte partielle Isometrie.
Eindeutigkeit: ist $T = US$ eine solche Darstellung, so gilt

$$T^*T = S^*U^*US = SU^*US = S^2,$$

weil U^*U die orthogonale Projektion auf $\overline{\mathrm{im}S}$ ist. Daher folgt aus Teil (a): $S = (T^*T)^{1/2} = |T|$. Damit ist die Eindeutigkeit gezeigt, denn U ist durch $U|T|x = Tx$ eindeutig bestimmt. □

Abschließend verwenden wir den Spektralsatz zur genaueren Bestimmung des Spektrums.

Definition 12.25.
Das wesentliche Spektrum $\sigma_e(T)$ eines selbstadjungierten Operators ist die Menge der reellen Zahlen, die Eigenwerte unendlicher Vielfachheit, oder Häufungspunkte des Spektrums oder auch beides sind. Offenbar ist $\sigma_e(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\sigma(T)$. Das diskrete Spektrum $\sigma_d(T)$ ist die Menge der Eigenwerte endlicher Vielfachheit, die isolierte Punkte von $\sigma(T)$ sind. Also $\sigma_d(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_e(T)$.

Satz 12.26.
Sei T ein selbstadjungierter Operator mit Spektralschar E und $\lambda \in \mathbb{R}$. Die folgenden Eigenschaften (i),(ii),(iii) bzw.(iv) sind jeweils äquivalent:
(a)

(i) λ ist Eigenwert von T,

(ii) es gibt eine Cauchyfolge $(x_n)_n$ aus $D(T)$ mit $x_n \nrightarrow 0$ und $(T - \lambda I)x_n \to 0$,

(iii) $E(\{\lambda\}) := E(\lambda) - E(\lambda-) \neq 0$, d.h. λ ist eine Sprungstelle von E (dabei ist $E(\lambda-) = \lim_{\epsilon \to 0+} E(\lambda - \epsilon)$).

(b)

(i) $\lambda \in \sigma(T)$,

(ii) es gibt eine Folge $(x_n)_n$ *aus* $D(T)$ *mit* $x_n \nrightarrow 0$ *und* $(T - \lambda I)x_n \to 0$,

(iii) für jedes $\epsilon > 0$ *ist* $E(\lambda + \epsilon) - E(\lambda - \epsilon) \neq 0$, *d.h.* λ *ist eine Wachstumsstelle von* E.

(iv) $(\lambda - z)^{-1} \in \sigma((T - zI)^{-1})$ *für ein / alle* $z \in \rho(T)$.

(c)

(i) $\lambda \in \sigma_e(T)$,

(ii) es gibt eine Folge $(x_n)_n$ *aus* $D(T)$ *mit* $x_n \nrightarrow 0$, $x_n \to 0$ *schwach und* $(T - \lambda I)x_n \to 0$, *eine solche Folge heißt eine singuläre Folge zu* T *und* λ,

(iii) für jedes $\epsilon > 0$ *gilt* $\dim \mathrm{im}(E(\lambda + \epsilon) - E(\lambda - \epsilon)) = \infty$,

(iv) für jedes $z \in \rho(T)$ *existiert eine Folge* $(x_n)_n$ *in* H *mit* $x_n \nrightarrow 0$, $x_n \to 0$ *schwach und* $((T - zI)^{-1} - (\lambda - z)^{-1})x_n \to 0$.

(d)

(i) $\lambda \in \sigma_d(T)$,

(ii) es gibt eine Folge $(x_n)_n$ *aus* $D(T)$ *mit* $x_n \nrightarrow 0$ *und* $(T - \lambda I)x_n \to 0$, *und jede Folge dieser Art enthält eine konvergente Teilfolge,*

(iii) $E(\{\lambda\}) \neq 0$ *ist endlichdimensional und es gibt ein* $\epsilon > 0$, *mit* $E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon) = E(\{\lambda\})$.

(e) *In allen Fällen (a) bis (d) gilt:*
Ist $(x_n)_n$ *eine Folge mit der Eigenschaft (ii) und* $\delta > 0$, *so hat auch die Folge* $y_n := (E(\lambda + \delta) - E(\lambda - \delta))x_n$ *diese Eigenschaft.*

Beweis. **(a)** (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist $x \neq 0$ ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so kann man $x_n := x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wählen.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Da T abgeschlossen ist, ist $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in D(T)$, und es gilt $x \neq 0$ und $(T - \lambda I)x = \lim_{n\to\infty}(T - \lambda I)x_n = 0$, d.h. λ ist Eigenwert von T.
(i) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen $E(\{\lambda\}) = 0$. Dann gilt für alle $x \in D(T)$, wegen $(t - \lambda)^2 > 0$ für ρ_x-fast alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \int (t - \lambda)^2 \, d\rho_x(t) > 0,$$

d.h. λ ist nicht Eigenwert, Widerspruch!
(iii) $\Rightarrow$ (i): Für $x \in \mathrm{im}E(\{\lambda\}) \setminus \{0\}$ gilt, wegen $(t - \lambda)^2 = 0$ für ρ_x-fast alle $t \in \mathbb{R}$,

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \int (t - \lambda)^2 \, d\rho_x(t) = 0,$$

d.h. λ ist Eigenwert von T.

(b) (i) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon) = 0$, dann gilt für alle $x \in D(T)$, wegen $(t-\lambda)^2 \geq \epsilon^2$ für ρ_x-fast alle $t \in \mathbb{R}$

$$\|(T-\lambda I)x\|^2 = \int (t-\lambda)^2 \, d\rho_x(t) \geq \epsilon^2 \|x\|^2,$$

d.h. $(T-\lambda I)$ ist stetig invertierbar, Widerspruch!
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Für $x_n \in \mathrm{im}(E(\lambda+1/n) - E(\lambda-1/n))$ mit $\|x_n\| = 1$ gilt, wegen $(t-\lambda)^2 \leq 1/n^2$ für ρ_{x_n}-fast alle $t \in \mathbb{R}$, also

$$\|(T-\lambda I)x_n\|^2 = \int (t-\lambda)^2 \, d\rho_{x_n}(t) \leq \frac{1}{n^2} \|x_n\|^2 = \frac{1}{n^2} \to 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Wegen (ii) ist $T - \lambda I$ nicht stetig invertierbar, also $\lambda \in \sigma(T)$.
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv): $(T-zI)^{-1} - (\lambda - z)^{-1} I = \int [(t-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1}] \, dE(t)$ ist genau dann stetig invertierbar, wenn $|(t-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1}|$ E-fast überall nach unten beschränkt ist, d.h. wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $E(\lambda+\epsilon) = E(\lambda-\epsilon)$.
(c) (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist λ unendlich-vielfacher Eigenwert, so kann für $(x_n)_n$ z.B. jede orthonormale Folge aus dem Eigenraum $\ker(T-\lambda I)$ gewählt werden. Ist λ Häufungspunkt von $\sigma(T)$, so gibt es eine Folge $(\lambda_n)_n$ aus $\sigma(T)$ mit $\lambda_n \to \lambda$, $\lambda_n \neq \lambda$ und $\lambda_n \neq \lambda_m$ für $n \neq m$. Es gibt weiters $\epsilon_n > 0$ so, dass die Intervalle $(\lambda_n - \epsilon_n, \lambda_n + \epsilon_n]$ disjunkt sind, natürlich gilt dann $\epsilon_n \to 0$. Wegen $\lambda_n \in \sigma(T)$ ist $E(\lambda_n + \epsilon_n) - E(\lambda_n - \epsilon_n) \neq 0$. Für $x_n \in \mathrm{im}(E(\lambda_n+\epsilon_n) - E(\lambda_n - \epsilon_n))$ mit $\|x_n\| = 1$ gilt also $x_n \perp x_m$ für $n \neq m$, also $x_n \to 0$ in der schwachen Topologie und

$$\|(T-\lambda I)x_n)\|^2 = \int_{|t-\lambda_n| \leq \epsilon_n} (t-\lambda)^2 \, d\rho_{x_n}(t) \leq (|\lambda_n - \lambda| + \epsilon_n)^2 \|x_n\|^2 = (|\lambda_n - \lambda| + \epsilon_n)^2 \to 0.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Angenommen es gibt ein $\epsilon > 0$ mit $\dim \mathrm{im}(E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon)) < \infty$. Dann ist die orthogonale Projektion $P = E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon)$ endlichdimensional, also kompakt, und es gilt $Px_n \to 0$ (siehe 7.8). Damit folgt

$$\|(T-\lambda I)x_n\|^2 = \int (t-\lambda)^2 \, d\rho_{x_n}(t) \geq \int_{\mathbb{R}\setminus(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]} (t-\lambda)^2 \, d\rho_{x_n}(t)$$

$$\geq \epsilon^2 \int (1 - \chi_{(\lambda-\epsilon,\lambda+\epsilon]}(t)) \, d\rho_{x_n}(t) = \epsilon^2 (\|x_n\|^2 - \|Px_n\|^2) \nrightarrow 0,$$

in Widerspruch zu (ii).
(iii) $\Rightarrow$ (i): Ist $\dim \mathrm{im}(E(\lambda) - E(\lambda-)) = \infty$, so ist λ unendlich-vielfacher Eigenwert, also $\lambda \in \sigma_e(T)$. Ist $\dim \mathrm{im}(E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon)) = \infty$ für alle $\epsilon > 0$, aber $\dim \mathrm{im} E(\{\lambda\}) < \infty$, so enthält nach Teil (b) das Intervall $(\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon]$ für jedes $\epsilon > 0$ mindestens einen von λ verschiedenen Punkt des Spektrums; also ist λ Häufungspunkt von $\sigma(T)$, d.h. es gilt $\lambda \in \sigma_e(T)$.
(i) $\Rightarrow$ (iv): Ist $\lambda \in \sigma_e(T)$, so gibt es eine orthonormale Folge $x_n \in \mathrm{im}(E(\lambda+1/n) - E(\lambda - 1/n))$, also $x_n \to 0$ in der schwachen Topologie und $x_n \nrightarrow 0$ (siehe oben). Für diese Folge gilt mit $c := \inf\{|t-z|\,|\lambda - z| \, : \, t \in \sigma(T)\} > 0$

$$\| \left((T-zI)^{-1} - 1/(\lambda-z)\right) x_n\|^2 = \int \left| \frac{1}{t-z} - \frac{1}{\lambda - z} \right|^2 d\|E(t)x_n\|^2$$

$$= \int_{(\lambda-1/n,\lambda+1/n]} \left| \frac{\lambda - t}{(t-z)(\lambda - z} \right|^2 d\|E(t)x_n\|^2 \leq \frac{1}{c^2n^2}\|x_n\|^2 \to 0.$$

(iv) $\Rightarrow$ (i): Ist $\lambda \notin \sigma_e(T)$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ so, dass $E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon)$ endlichdimensional, also kompakt ist. Für jede schwache Nullfolge $(x_n)_n$ mit $\|x_n\| = 1$ gilt also

$$\|(I - E(\lambda+\epsilon) + E(\lambda-\epsilon)x_n\| \to 1,$$

und somit

$$\| \left((T-zI)^{-1} - 1/(\lambda - z)\right) x_n\|^2 \geq \int_{\{t\,:\,|\lambda - t| \geq \epsilon\}} \left| \frac{\lambda - t}{(t-z)(\lambda-z)} \right|^2 d\|E(t)x_n\|^2$$

$$\geq \inf\{|(\lambda-t)/((t-z)(\lambda-z))|^2 \,:\, |\lambda - t| \geq \epsilon,\, t \in \sigma(T)\}\, \|(I - E(\lambda+\epsilon) + E(\lambda-\epsilon))x_n\|^2$$
$$\to \inf\{|(\lambda-t)/((t-z)(\lambda-z))|^2 \,:\, |\lambda - t| \geq \epsilon,\, t \in \sigma(T)\} > 0.$$

(d) (i) $\Rightarrow$ (iii): Da λ endliche Vielfachheit hat, ist $\ker(T - \lambda I) = \mathrm{im}E(\{\lambda\})$ endlichdimensional. Da außerdem in einer Umgebung $(\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]$ keine weiteren Spektralpunkte liegen, gibt es dort keine Wachstumspunkte, d.h. es gilt $E(\{\lambda\}) = E(\lambda+\epsilon) - E(\lambda-\epsilon)$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Jede normierte Folge $(x_n)_n$ aus $\mathrm{im}E(\{\lambda\})$ hat die gewünschte Eigenschaft. Ist $(x_n)_n$ eine beliebige Folge mit $(T - \lambda I)x_n \to 0$, und

$$y_n := x_n - E(\{\lambda\})x_n = E(\mathbb{R} \setminus (\lambda-\epsilon, \lambda+\epsilon])x_n,$$

so gilt

$$\epsilon\|y_n\| \leq \|(T - \lambda I)y_n\| \leq \|(T - \lambda I)x_n\| \to 0,$$

also $\|x_n - E(\{\lambda\})x_n\| \to 0$; da $\mathrm{im}E(\{\lambda\})$ endlichdimensional ist, enthält $(E(\{\lambda\})x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge, was dann auch für $(x_n)_n$ gilt.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Ohne Einschränkung kann die Folge $(x_n)_n$ als konvergent angenommen werden; dann ist $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ Eigenvektor zum Eigenwert λ. Wäre λ unendlich-vielfacher Eigenwert oder Häufungspunkt des Spektrums, so wäre jede orthogonale Folge $(x_n)_n$ aus $\mathrm{im}E(\{\lambda\})$ eine Folge mit Eigenschaft (ii), die keine konvergente Teilfolge enthält, im Widerspruch zu (ii).
(e) Sei $P := I - E(\lambda+\delta) + E(\lambda-\delta)$, und $z_n := Px_n$. Dann gilt

$$\delta^2\|z_n\|^2 \leq \|(T - \lambda I)x_n\|^2 \to 0,$$

also $z_n \to 0$. Damit gelten für $y_n := x_n - z_n$ die gewünschten Eigenschaften. □

Aus den letzten Resultaten lässt sich sofort das folgende Korollar ablesen:

Korollar 12.27.
Sei T selbstadjungiert mit Spektralschar E.
(a) Für $-\infty \leq \lambda < \mu \leq \infty$ gilt $k := \dim \mathrm{im}(E(\mu-) - E(\lambda)) < \infty$ genau dann, wenn in (λ, μ) nur endlich viele Eigenwerte endlicher Vielfachheit und keine weiteren Spektralpunkte liegen. Die Gesamtvielfachheit (= Summe der Vielfachheiten) ist k.
(b) Ist $(\lambda, \mu) \cap \sigma_e(T) \neq \emptyset$, so ist $\dim \mathrm{im}(E(\mu-) - E(\lambda)) = \infty$; ist $\dim \mathrm{im}(E(\mu) - E(\lambda-)) = \infty$, so ist $[\lambda, \mu] \cap \sigma_e(T) \neq \emptyset$.
(c) T ist halbbeschränkt nach unten (bzw. oben), wenn ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $\dim \mathrm{im}(E(\lambda)) < \infty$ (bzw. $\dim \mathrm{im}(I - E(\lambda)) < \infty$).

Die Halbbeschränktheit (siehe 11.7) eines selbstadjungierten Operators kann wie folgt charakterisiert werden:

Satz 12.28.
Für einen selbstadjungierten Operator T sind die folgenden Aussagen äquivalent:
(i) T ist halbbeschränkt nach unten mit unterer Schranke γ,
(ii) $E(t) = 0$ für $t < \gamma$,
(iii) $(-\infty, \gamma) \subset \rho(T)$.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (iii): Für $\lambda < \gamma$ und alle $x \in D(T)$ mit $\|x\| = 1$ gilt

$$\|(T - \lambda I)x\| \geq ((T - \lambda I)x, x) \geq (\gamma - \lambda)\|x\|^2 = \gamma - \lambda,$$

d.h. $T - \lambda I$ ist stetig invertierbar, $\lambda \in \rho(T)$.
(iii) $\Rightarrow$ (ii): Wegen $(-\infty, \gamma) \subset \rho(T)$ ist nach 12.26 (b) dort $E(.)$ konstant, also $E(t) = 0$ für $t \in (-\infty, \gamma)$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Für alle $x \in D(T)$ gilt

$$(Tx, x) = \int t\, d\rho_x(t) = \int_{[\gamma,\infty)} t\, d\rho_x(t) \geq \gamma \int_{[\gamma,\infty)} d\rho_x(t) = \gamma\|x\|^2,$$

d.h. T hat untere Schranke γ. □

Wir können nun einen eventuell diskreten unteren Teil des Spektrums eines halbbeschränkten Operators (siehe 11.7) mit Hilfe der zugehörigen Sesquilinearform analog zum Minimaximalitätslemma (7.27) für kompakte Operatoren beschreiben und erhalten auch eine Beschreibung des unteren Randes des wesentlichen Spektrums.

Satz 12.29.
Sei a eine nach unten beschränkte, Hermite'sche Sesquilinearform und S der durch a erzeugte selbstadjungierte Operator (siehe 11.5).
Sei $\Sigma := \inf \sigma_e(S)$, ferner beschreibe man die Menge $\sigma(S) \cap (-\infty, \Sigma)$ als eine Folge (endlich oder unendlich) $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ von Eigenwerten von S.
Dann gilt

$$\lambda_1 = \inf\{a(x, x) \,:\, x \in D(S)\,,\, \|x\| = 1\}.$$

und für $n \geq 2$

$$\lambda_n = \inf\{a(x, x) \,:\, x \in D(S)\,,\, \|x\| = 1\,,\, x \in K_{n-1}^{\perp}\},$$

wobei $K_j = \bigoplus_{i \leq j} ker(S - \lambda_i I)$.

Beweis. Sei $\mu_1 = \inf\{a(x, x) \,:\, x \in D(S)\,,\, \|x\| = 1\}$. Ist ϕ_1 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_1, dann folgt sofort $\mu_1 \leq \lambda_1$.
Ist E die zu S gehörige Spektralschar, dann gilt nach 12.26 (b) für alle $x \in D(S)$

$$a(x, x) = (Sx, x) = \int_{\sigma(S)} t\, d\|E(t)x\|^2 \geq \inf \sigma(S)\|x\|^2.$$

Daher folgt $\inf \sigma(S) \leq \mu_1$. Ist nun das Spektrum von S unterhalb von Σ nichtleer, dann folgt $\lambda_1 \leq \mu_1$ und somit $\lambda_1 = \mu_1$.
Anschließend verwende man für $n \geq 2$ dasgleiche Argument für den Operator S eingeschränkt auf $D(S) \cap K_{n-1}^{\perp}$. □

Der letzte Satz ist sehr hilfreich bei der Untersuchung des Spektrums von vielen wichtigen Differentialoperatoren (Laplace-Operator, Schrödinger-Operatoren, siehe [He1], [He2]).

Literatur

[E] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie,* Springer Verlag, 1996.

[G] J. Garnett, *Bounded analytic functions,* Academic Press, 1980.

[Has1] F. Haslinger, *Funktionentheorie I,* Skriptum zur Vorlesung, Universität Wien, 2005.

[Has2] F. Haslinger, *Funktionentheorie II,* Skriptum zur Vorlesung, Universität Wien, 2005.

[He1] B. Helffer, *Spectral theory and applications,* Lecture Notes , Paris, 2003. http://www.math.u-psud.fr/ helffer/

[He2] B. Helffer, *Introduction to semi-classical methods for Schrödinger operators with magnetic field,* Lecture Notes, Wien, 2005. http://www.math.u-psud.fr/ helffer/

[Heu] H. Heuser, *Funktionalanalysis,* Teubner, Stuttgart, 1986.

[Ho] J. Horváth, *Topological vector spaces and distributions,* Addison-Wesley, Reading, 1966.

[J] H. Jarchow, *Locally convex spaces,* Teubner, Stuttgart, 1981.

[K] G. Köthe, *Topological vector spaces I, II,* Springer Verlag, 1969, 1979.

[L] P. Lax, *Functional Analysis,* Wiley-Interscience, 2002.

[LR] D.H. Luecking and L.A. Rubel, *Complex Analysis, a Functional Analysis Approach,* Springer Verlag, 1984.

[Ma] I.J. Maddox, *Elements of functional analysis,* Cambridge University Press,1988.

[MV] R. Meise und D. Vogt, *Einführung in die Funktionalanalysis,* vieweg studium, 1992.

[R1] W. Rudin, *Real and Complex Analysis,* McGraw-Hill, 1974.

[R2] W. Rudin, *Functional Analysis,* McGraw-Hill, 1991.

[Sch] H. H. Schaefer, *Topological vector spaces,* Springer Verlag, 1971.

[St] E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton University Press, 1970.

[W] J. Weidmann, *Lineare Operatoren in Hilberträumen I, II,* B.G. Teubner, Stuttgart 2000, 2003.

Index

$A^2(\Omega)$, 4
H^2, 3
H^∞, 18
L^2-Ableitung, 80
$S^p(H_1, H_2)$, 66
V-elliptisch, 98
$\Lambda(P)$, 21
$\mathcal{E}^m(\Omega)$, 20
$\mathcal{H}(\Omega)$, 21
$\mathcal{S}$, 20
ω, 21
$\overline{\partial}$, 62
$\perp$, 5
$\rho(A)$, 53
$\rho(T)$, 104
$\sigma(A)$, 53
$\sigma(T)$, 104
$\sigma_c(A)$, 53
$\sigma_d(T)$, 122
$\sigma_e(T)$, 122
$\sigma_p(A)$, 53
$\sigma_r(A)$, 53
l^2, 3
s, 21
$s_n(A)$, 60

abgeschlossener Operator, 87
abschließbar, 87
absolutkonvex, 19
Alaoglu-Bourbaki, 43
Approximationseigenschaft, 45
Arzela-Ascoli, 51
Auswahlaxiom, 13

Banachraum, 18
Bergmankern, 8
Bergmanprojektion, 9
Bergmanraum, 4
beschränkte Menge, 18, 21
beschränkter Operator, 19
Bessel'sche Ungleichung, 11
beste Approximation, 9
Blaschkeprodukt, 36

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung, 2

closed graph, 35

Dirichlet'sche Realisierung, 102
diskrete Spektrum, 122
Dreiecksungleichung, 2
Dualraum, 21

Eigenraum, 53
Eigenvektoren, 53
Eigenwert, 104
Eigenwerte, 53
Einbettunssatz von Sobolev, 79
erste Kategorie, 33

Faltung, 73
Fourierkoeffizienten, 15
Fouriertranformation, 73
Fréchetraum, 21
Fredholm'sche Alternative, 71
Friedrich'sche Erweiterung, 101
Fundamentalsystem, 20
Funktion von beschränkter Variation, 114

Gram'sche Determinante, 16

halbbeschränkter Operator, 100
Halbnorm, 19
Hardyraum, 3
harmonische Funktion, 46
Hermite Funktionen, 17
Hermite'sche Sesqulinearform, 99
Hilbert-Schmidt Operatoren, 66
Hilbertraum, 3
Hilbertraumisomorphismus, 13

inhomogene Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung, 62
innerer Produktraum, 2
interpolierende Folge, 36

Köthe-Folgenraum, 21
kompakter Operator, 19, 50
kontinuierliche Spektrum, 53
konvex, 5

Lebesgue-Stieltjes-Maß, 106
lokalkonvexer Raum, 19

maximale total geordnete Menge, 13
Minimaximalitätslemma, 60
Minkowski-Funktional, 19

Neumann'sche Realisierung, 100
nirgends dicht, 33
normaler Operator, 95
normiert, 18
nuklearer Operator, 66

offen, 32
open mapping, 34
orthogonal, 5
orthogonale Projektion, 6
Orthonormalsystem, 9

Parallelogrammregel, 5
Parseval'sche Gleichung, 12
partiell geordnet, 13
partielle Isometrie, 121
Plancherel, 75
Poisson-Integral, 46
polare Zerlegung, 121
Polarisierungsidentität, 15
präkompakt, 50
Punktspektrum, 53, 104

Quotientenraum, 22

reflexiv, 29
reguläre Summationsmethode, 42
reproduzierende Eigenschaft, 8
Resolvente, 54, 104
Resolventenmenge, 53, 104
Restspektrum, 53
Runge'sche Approximationssatz, 30

s-Zahlen, 60
Schatten p-Klasse, 66
Schauder-Basis, 37
Schrödinger Operator, 100
schwach - * Topologie, 21
schwache Ableitung, 82
schwache Topologie, 21
selbstadjungiert, 55
selbstadjungierter Operator, 95
separabel, 13
Sobolevraum, 76
Spektralschar, 106
Spektrum, 53, 104
stark fallenden Folgen, 21
starke Topologie, 21
Stieltjes-Integral, 114
strikt konvex, 16
symmetrischer Operator, 95

topologischer Vektorraum, 19
total geordnet, 13
Translation, 73

Variation, 114
vollständig, 3
vollständiges Orthonormalsystem, 12

wesentlich selbstadjungierter Operator, 95, 102
wesentliche Spektrum, 122

Zorn'sches Lemma, 13, 25
zweite Kategorie, 33