Übungen zu Höhere Analysis und Differentialgeometrie

F. Haslinger

Wiederholung der Aufgaben 80-93 vom vorigen Semester.

1.) Man berechne das Volumen des Körpers zwischen der Ebene $z = x + y$ und dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 2]$.

2.) Man berechne das Volumen des Körpers der oben von dem Paraboloid $z = x^2 + y^2$ und unten von dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ begrenzt wird.

3.) Man berechne das Volumen des Körpers, der unterhalb der Fläche $z = xy^2 + y^3$ und oberhalb des Quadrats $[0, 2] \times [0, 2]$ liegt.

4.) Man bestimme den Flächeninhalt der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

5.) Man bestimme das Volumen des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

6.) Man bestimme den Inhalt der n-dimensionalen Einheitskugel

$$K_n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ |\mathbf{x}| \leq 1\}.$$

Hinweis: Man führe einen Induktionsbeweis nach n und verwende den Satz von Cavalieri.

7.) Man bestimme das Volumen zwischen der Viertelkreisfläche vom Radius 1 im ersten Quadranten der xy-Ebene und der Fläche $z = xy$.

8.) Man berechne

$$\int_B x^2 y (x, y),$$

wobei B die obere Hälfte des Kreises mit Radius 2 um den Nullpunkt ist.

9.) Man berechne

$$\int_B (x+y^2)(x,y),$$

wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0)$ und $(0,1)$ ist.

10.) Man berechne

$$\int_B (x^2+y^2)(x,y),$$

wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0),(1,0)$ und $(1/2,1/2)$ ist.

11.) Man berechne

$$\int_B xy(x,y),$$

wobei B der Bereich im ersten Quadranten zwischen der Geraden $y=x$ und der Parabel $y=x^2$ ist.

12.) Man berechne das Volumen des Tetraeders, der von den drei Koordinatenebenen und der Ebene $z=2-2x-y$ begrenzt wird.

13.) Man berechne

$$\int_B x^2\, d(x,y),$$

wobei $B=\{(x,y)\ :\ |x|+|y|\leq 1\}$.

14.) Man berechne

$$\int_B xyz\, d(x,y,z),$$

wobei $B=\{(x,y,z)\ :\ 0\leq x\leq y\leq z\leq 1\}$.

15.) Man berechne

$$\int_C e^{y^2}\, d(x,y),$$

wobei $C=\{(x,y)\ :\ |x|\leq y\leq 1\}$. Integrationsreihenfolge!

16.) Man berechne

$$\int_B \frac{\sin x}{x}\, d(x,y),$$

wobei B das Dreieck mit den Ecken $(0,0),(1,0),(1,1)$ ist. Integrationsreihenfolge!

17.) Man zeige für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_B x^n\, y^m\, d(x,y) = \frac{n!\; m!}{(n+m+2)!}$$

wobei $B = \{(x,y)\ :\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
Hinweis: Beta-Funktion.

18.) Man zeige für $n, m, k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_B x^n\, y^m\, (1-x-y)^k\, d(x,y) = \frac{n!m!k!}{(n+m+k+2)!}$$

wobei $B = \{(x,y)\ :\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$.
Hinweis: Substitution $y = (1-x)t$.

19.) Man berechne

$$\int_W \cos(x+y+z)\, d(x,y,z),$$

wobei $W = [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

20.) Man bestimme das Volumen der Menge

$$A = \{(x,y,z)\ :\ x,y,z \geq 0, x+y+z \leq \sqrt{2}, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

21.) In das Paraboloid $z = \frac{r^2}{2}$ (Polarkoordinaten in der xy-Ebene) soll ein Kreiskegel mit der Spitze im Punkt $(0,0,4)$ so eingebaut werden, dass sein Volumen möglichst groß wird. Welches Volumen hat dieser Kegel und in welchem Verhältnis steht dieses Volumen zum Volumen der abgeschnittenen Paraboloidkappe?

22.) Man zeige : ein Kreissektor mit Radius r und Öffnungswinkel α hat den Flächeninhalt $r^2\alpha/2$.

23.) Man berechne den Inhalt des Bereichs, der von der archimedischen Spirale $r = a\varphi$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ und dem Intervall $[0, 2a\pi]$ begrenzt wird.

24.) Man berechne den Inhalt des Bereichs, der von der Kardioide

$$r = a(1+\cos\varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

umschlossen wird.

25.) Es sei I das Einheitsquadrat in der (u, v)-Ebene. Die Abbildung $T : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$T(u, v) = (\arcsin u, (1 - u)v)$$

stellt eine Parameterdarstellung eines gewissen Bereiches $B \subset \mathbb{R}^2$ dar. Man zeichne den Bereich B und verwandle das Integral

$$\int_B (y \cos x - \sin x)\, d(x, y)$$

in ein Integral über I.

26.) Man bestimme das zwischen der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ und dem Paraboloid $4z = x^2 + y^2 + 4$ eingeschlossene Volumen.(Hinweis: Zylinderkoordinaten!)

27.) Berechne das Integral

$$\int_B \sqrt{x + y}\, d(x, y),$$

wobei $B = \{(x, y) \ : \ 0 \leq x + y \leq 1, 0 \leq 2x - 3y \leq 4\}$.
Hinweis: man stelle B als Bild eines Rechtecks in der (u, v)- Ebene dar.

28.) Man berechne den von der Astroide

$$|x|^{2/3} + |y|^{2/3} = a^{2/3} \ , \ a > 0,$$

eingeschlossenen Flächeninhalt.
Hinweis: man stelle den im ersten Quadranten liegenden Teil der Fläche als Bild eines Kreisscheiben-Viertels dar.

29.) Bei Rotation der Kurve $y = \frac{\sin x}{x}$ um die y-Achse entsteht eine Fläche konzentrischer Wellenberge und Wellentäler. Man bestimme die Volumina der von diesen Drehflächen und der Ebene $z = 0$ eingeschlossenen Bereiche.
Hinweis: Zylinderkoordinaten.

30.) Von der Lemniskate $r^2 = \cos 2\varphi$ (Skizze!) sind zu berechnen:
a) die umschlossene Fläche,
b) das Volumen des Drehkörpers mit der Achse $\varphi = 0$ (Kugelkoordinaten mit der Achse $\varphi = 0$),

c) das Volumen des Drehkörpers mit der Achse $\varphi = \pi/2$ (Kugelkoordinaten mit der Achse $\varphi = \pi/2$).

31.) Es sei B der Bereich, der von der Kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ umschlossen wird. Man berechne

$$\int_B x^2 \, d(x, y).$$

32.) Es ist das Volumen des Körpers K zu bestimmen, den der elliptische Zylinder $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1/2$ aus dem Ellpsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ ausschneidet.
Hinweis: verallgemeinerte Polarkoordinaten!

33.) Sei B die Kugel um den Nullpunkt mit Radius R. Man berechne:

$$\int_B \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x, y, z).$$

34.) Für $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiere man

$$F(x, y) = (e^x \cos y - 1, e^x \sin y).$$

Man beweise, dass $F = G_2 \circ G_1$ ist, wobei

$$G_1(x, y) = (e^x \cos y - 1, y) \ , \ G_2(u, v) = (u, (1 + u) \tan v)$$

in einer Umgebung von $(0, 0)$ primitiv sind.
Man berechne die Jacobi-Determinanten von G_1, G_2 und F an der Stelle $(0, 0)$. Man setze

$$H_2(x, y) = (x, e^x \sin y)$$

und suche

$$H_1(u, v) = (h(u, v), v),$$

so dass $F = H_1 \circ H_2$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ gilt.

35.) Sei H das Parallelogramm in $\mathbb{R}^2$ mit den Ecken $(1, 1), (3, 2), (4, 5), (2, 4)$. Man suche die affine Abbildung T, die $(0, 0)$ in $(1, 1)$, $(1, 0)$ in $(3, 2)$ und $(0, 1)$ in $(2, 4)$ überführt und zeige, dass $J_T = 5$ ist. Man verwende T, um das Integral

$$\alpha = \int_H e^{x-y} \, d(x, y)$$

in ein Integral über $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ umzuwandeln, und berechne damit α.

36.) Sei

$$I^k = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ 0 \leq u_i \leq 1 \ , \ i = 1, \ldots, k\}$$

und sei

$$Q^k = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \ : \ x_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{k} x_i \leq 1\}.$$

Man definiere $\mathbf{x} = T(\mathbf{u})$ durch

$$x_1 = u_1, x_2 = (1-u_1)u_2, \ldots, x_k = (1-u_1)\ldots(1-u_{k-1})u_k$$

und zeige

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = 1 - \prod_{i=1}^{k}(1-u_i).$$

Man zeige ferner, dass T den Einheitswürfel I^k auf Q^k abbildet, dass T injektiv im Innern von I^k ist und dass die Inverse S von T im Innern von Q^k durch

$$u_1 = x_1, u_i = \frac{x_i}{1 - x_1 - \ldots x_{i-1}}$$

für $i = 2, \ldots, k$ definiert ist. Man beweise

$$J_T(\mathbf{u}) = (1-u_1)^{k-1}(1-u_2)^{k-2}\ldots(1-u_{k-1})$$

und

$$J_S(\mathbf{x}) = [(1-x_1)(1-x_1-x_2)\ldots(1-x_1-\ldots-x_{k-1})]^{-1}.$$

37.) Seien $r_1, \ldots, r_k$ nichtnegative ganze Zahlen. Man beweise

$$\int_{Q^k} x_1^{r_1}\ldots x_k^{r_k}\, d(x_1, \ldots x_k) = \frac{r_1! \ldots r_k!}{(k + r_1 + \ldots r_k)!}.$$

Hinweis: man verwende die vorige Aufgabe und beachte, dass für den Spezialfall $r_1 = \ldots = r_k = 0$ das Volumen von Q^k gleich $1/k!$ ist.

38.) Man berechne $\int_\gamma \omega$, wobei $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $(0 \leq t \leq 2\pi$ und $\omega = e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$ ist.

39.) Wie Aufgabe 38 für γ der positiv orientierte Rand des Quadrats B : $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ und für $\omega = 2ydx + 6xdy$.

40.) Wie Aufgabe 38 für $\gamma(t) = (t, t^2)$ $(0 \le t \le 1)$ und für $\omega = ydx + xdy$.

41.) Wie Aufgabe 38 für $\gamma(t) = (2t, 4t)$ $(0 \le t \le 1)$ und für $\omega = x^2dx + y^2dy$.

42.) Wie Aufgabe 38 für $\gamma(t) = (\sqrt{t}, t^2)$ $(0 \le t \le 1)$ und für $\omega = e^x dx + e^y dy$.

43.) Wie Aufgabe 38 für γ der geschlossene Polygonzug durch die Punkte $(0,0), (2,0), (2,1), (0,1)$ und $(0,0)$ (in dieser Reihenfolge) und für $\omega = xydx + ye^x dy$.

44.) Wie Aufgabe 38 für $\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ und für $\omega = (y - x)dx - ydy + dz$.

45.) Wie Aufgabe 38 für $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ und für $\omega = (x^2 + 5y + 3yz)dx + (5x + 3xz - 2)dy + (3xy - 4z)dz$.

46.) Man bestimme die Normaldarstellung der folgenden Differentialformen:

$$x_2 dx_3 \wedge dx_1 - x_1 dx_3 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 - dx_1 \wedge dx_2,$$

$$dx_4 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1.$$

47.) Seien $\omega = xy^2 dx \wedge dy - zdy \wedge dz$ und $\zeta = xdx + ydy + zdz$ Differentialformen im $\mathbb{R}^3$. Man berechne : $\omega \wedge \zeta$.

48.) Für die folgenden 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$ berechne man das äußere Differential:
a) $x^2dx + ydz$,
b) $xdx + xydy + xzdz$,
c) $e^{xy}dx - \sin ydy + xdz$,
d) $(x + \cos y)dy + 3dz$.

49.) Berechne das äußere Differential der folgenden 2-Formen auf $\mathbb{R}^3$:
a) $x^2 dx \wedge dy + e^z dy \wedge dz$,
b) $(x + \sin z)dx \wedge dy + ydx \wedge dz + xyzdy \wedge dz$.

50.) Seien P, Q stetig differenzierbare Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^2$ und $\omega = Pdx + Qdy$. Man berechne : $d\omega$.

51.) Seien P, Q, R stetig differenzierbare Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^3$ und $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Man berechne : $d\omega$.

52.) Seien P, Q, R stetig differenzierbare Funktionen auf $G \subset \mathbb{R}^3$ und $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$. Man berechne : $d\omega$.

53.) Sei f eine 0-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf $E \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige :

$$(df(x))\mathbf{h} = f'(x)\mathbf{h},$$

für jedes $x \in E$ und jedes $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Es gilt daher $df = f'$.

54.) Sei ω eine n-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf $E \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige : $d\omega = 0$.

55.) Seien ω eine k-Form und λ eine m-Form. Man zeige :

$$\omega \wedge \lambda = (-1)^{km} \lambda \wedge \omega.$$

56.) Seien ω und ζ Differentialformen der Klasse $\mathcal{C}^2$. Man bestimme :

$$d(d\omega \wedge \zeta - \omega \wedge d\zeta).$$

57.) Man zeige : sind ω und ζ geschlossene Differentialformen, so ist auch $\omega \wedge \zeta$ geschlossen.

58.) Sei $\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j dx_j$ eine 1-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ auf $E \subset \mathbb{R}^n$. Man zeige :
a) $d\omega = \sum_{k<j} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k} - \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \right) dx_k \wedge dx_j$.
b) ω ist genau dann geschlossen, wenn $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ für $j, k = 1, \ldots, n$ ist.

59.) Sei $\sigma = [p_0, p_1, p_2]$ ein orientiertes affines 2-Simplex. Man zeige $\partial^2 \sigma = 0$. Analoges für $\sigma = [p_0, p_1, p_2, p_3]$.

60.) Sei $\sigma = [p_0, p_1, \ldots, p_k]$ ein orientiertes affines k-Simplex. Man zeige $\partial^2 \sigma = 0$.

61.) Man setze $J^2 = \tau_1 + \tau_2$, wobei $\tau_1 = [0, e_1, e_1 + e_2]$ und $\tau_2 = -[0, e_2, e_2 + e_1]$ ist. Man erkläre, warum es sinnvoll ist, J^2 das positiv orientierte Einheitsquadrat in $\mathbb{R}^2$ zu nennen. Man zeige, dass ∂J^2 die Summe von vier orientierten affinen 1-Simplexen ist und beschreibe diese. Was ist $\partial(\tau_1 - \tau_2)$?

62.) Man betrachte das orientierte affine 3-Simplex

$$\sigma_1 = [0, e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3]$$

in $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass σ_1 (als lineare Abbildung betrachtet) die Determinante 1 hat. Somit ist σ_1 positiv orientiert.
Seien $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ fünf weitere 3-Simplexe, die man wie folgt erhält: es gibt fünf von der Identität verschiedene Permutationen $(i_1.i_2, i_3)$ von $(1, 2, 3)$. Man ordne jedem $(i_1.i_2, i_3)$ das Simplex

$$\operatorname{sgn}(i_1.i_2, i_3)\,[0, e_{i_1}, e_{i_1} + e_{i_2}, e_{i_1} + e_{i_2} + e_{i_3}]$$

zu. Man zeige, dass $\sigma_2, \ldots, \sigma_6$ positiv orientiert sind.
Setze $J^3 = \sigma_1 + \ldots + \sigma_6$. Wir nennen J^3 den positiv orientierten Einheitswürfel in $\mathbb{R}^3$. Man zeige, dass ∂J^3 die Summe von 12 orientierten affinen 2-Simplexen ist.

63.) Man führe Bedingungen an, unter welchen die Formel

$$\int_\Phi f\, d\omega = \int_{\partial\Phi} f\omega - \int_\Phi (df) \wedge \omega$$

gültig ist, und zeige, dass sie die Formel für die partielle Integration verallgemeinert.
Hinweis: $d(f\omega) = (df) \wedge \omega + f\omega$.

64.) Welche der Aufgaben 38–45 kann man mit Hilfe des Satzes von Stokes berechnen? Falls es möglich ist, führe man die Rechnung auch aus.

65.) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ betrachte man die 1-Form

$$\eta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Man zeige $d\eta = 0$.

66.) Sei $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ für $r > 0$, und sei Γ eine $\mathcal{C}^2$-Kurve in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ mit Parameterintervall $[0, 2\pi]$ mit $\Gamma(0) = \Gamma(2\pi)$ und so, dass die Intervalle $[\gamma(t), \Gamma(t)]$ für beliebige $t \in [0, 2\pi]$ nicht $(0,0)$ enthalten. Sei η wie in Aufgabe 7. Man beweise:

$$\int_\Gamma \eta = 2\pi.$$

Hinweis: Für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $0 \leq u \leq 1$ definiere man

$$\Phi(t,u) = (1-u)\Gamma(t) + u\gamma(t).$$

Dann ist Φ eine 2-Fläche in $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, deren Parameterbereich das angegebene Rechteck ist. Man zeige : $\partial\Phi = \Gamma - \gamma$. Dann verwende man den Satz von Stokes zusammen mit $d\eta = 0$ zum Beweis von

$$\int_\Gamma \eta = \int_\gamma \eta.$$

67.) Man setze $\Gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, wobei $a, b > 0$ fest sind. Mit Aufgabe 8.) zeige man

$$\int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\, dt = 2\pi.$$

68.) Auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ betrachte man die 2-Form

$$\zeta = \frac{x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy}{r^3},$$

wobei $r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ ist. Man beweise: auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ gilt $d\zeta = 0$.

69.) Man setze $\lambda = -(z/r)\eta$, wobei η wie in Aufgabe 7.) ist. Dann ist λ eine 1-Form in jeder offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^3$, in der $x^2 + y^2 > 0$ gilt. Man zeige, dass ζ in V exakt ist, indem man zeigt, dass $\zeta = d\lambda$ gilt, wobei ζ wie in Aufgabe 10.) ist.

70.) Man berechne die Rotation der folgenden Vektorfelder auf $\mathbb{R}^3$:
a) $xy\mathbf{e_1} + x^2z\mathbf{e_2} + y\mathbf{e_3}$,
b) $2\mathbf{e_1} + xz^2\mathbf{e_2} + x\sin y\mathbf{e_3}$,
c) $e^{xy}\mathbf{e_1} + xyz\mathbf{e_2} + x^2ye^z\mathbf{e_3}$.

71.) Man zeige, für das Vektorfeld

$$\mathbf{F} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}$$

gilt rot$\mathbf{F} = 0$.

72.) Die Vektorfelder $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ und das Skalarfeld φ seien differenzierbar auf einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^3$. Man zeige : auf E gilt

a) $\mathrm{rot}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{rot}\mathbf{F} + \mathrm{rot}\mathbf{G}$,
b) $\mathrm{rot}(a\mathbf{F}) = a\,\mathrm{rot}\mathbf{F}\ ,\ a \in \mathbb{R}$,
c) $\mathrm{rot}(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\,\mathrm{rot}\mathbf{F} + \mathrm{grad}\varphi \times \mathbf{F}$.

73.) Man berechne die Divergenz der folgenden Vektorfelder:
a) $x^2yz\mathbf{e_1} + e^{x+z}\mathbf{e_2} + \sin y \cos z\mathbf{e_3}$,
b) $\sin(xy)\mathbf{e_1} + y^3z\mathbf{e_2} + x^2e^{yz}\mathbf{e_3}$.

74.) Sei $\mathbf{r} = x\mathbf{e_1} + y\mathbf{e_2} + z\mathbf{e_3}\ ,\ r = |\mathbf{r}|$ und $m \in \mathbb{Z}$. Man zeige :

$$\mathrm{div}(r^m\mathbf{r}) = (m+3)r^m,$$

insbesondere gilt $\mathrm{div}\mathbf{r} = 3$.

75.) Die Vektorfelder $\mathbf{F}$ und $\mathbf{G}$ und das Skalarfeld φ seien differenzierbar auf einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^3$. Man zeige : auf E gilt
a) $\mathrm{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \mathrm{div}\mathbf{F} + \mathrm{div}\mathbf{G}$,
b) $\mathrm{div}(a\mathbf{F}) = a\,\mathrm{div}\mathbf{F}\ ,\ a \in \mathbb{R}$,
c) $\mathrm{div}(\varphi\mathbf{F}) = \varphi\,\mathrm{div}\mathbf{F} + \mathrm{grad}\varphi \cdot \mathbf{F}$,
d) $\mathrm{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \mathrm{rot}\mathbf{G}$.

76.) Sei φ ein zweimal differenzierbares Skalarfeld und

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

Δ wird Laplaceoperator genannt. Man zeige:

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \Delta\varphi.$$

77.) Mit Hilfe des Satzes von Green berechne man den Flächeninhalt der Kreisscheibe mit Radius r.

78.) Mit Hilfe des Satzes von Green berechne man den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

eingeschlossen wird.

79.) Mit Hilfe des Satzes von Green berechne man den Flächeninhalt des Bereiches, der von der Zykloide $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ und dem Intervall $[0, 2\pi r]$ eingeschlossen wird.

80.) Mit Hilfe von Flächenintegralen bestimme man die Oberfläche einer Kugel mit Radius r.

81.) Man zeige : wird ein Flächenstück durch die Gleichnug $z = f(x, y)$ gegeben, so ist sein Flächeninhalt (unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion f und ihren Definitionsbereich D) gleich

$$\int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, d(x, y).$$

82.) Die Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar und ≥ 0. Läßt man ihr Schaubild um das Intervall $[a, b]$ rotieren, so erhält man eine sogenannte Rotationsfläche mit der Parameterdarstellung

$$\Phi(u, v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)\ ,\ (a \le u \le b, 0 \le v \le 2\pi).$$

Man zeige, dass ihr Flächeninhalt gegeben ist durch

$$2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + \left(\frac{df}{du}\right)^2}\, du.$$

83.) Man berechne den Flächeninhalt desjenigen Teils des Paraboloids $z = x^2 + y^2$, der zwischen den Ebenen $z = 0$ und $z = 4$ liegt.

84.) Man berechne den Flächeninhalt desjenigen Teils des hyperbolischen Paraboloids $z = xy$, der über dem Viertelkreis $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0, y \ge 0$, liegt.

85.) Man berechne den Flächeninhalt desjenigen Teils der Halbkugeloberfläche $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$, welcher in dem zur z-Achse parallelen Kreiszylinder $(x - R/2)^2 + y^2 \le R^2/4$ liegt.

86.) Ein Kegel der Höhe h entstehe, indem man die Gerade $y = ax$ $(a > 0)$ um die x-Achse rotieren läßt. Man berechne den Inhalt seiner Mantelfläche.

87.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man das Integral

$$\int_{\partial\Omega} (4xz\mathbf{e_1} - y^2\mathbf{e_2} + yz\mathbf{e_3}) \cdot \mathbf{n}\, dA,$$

wobei Ω der Würfel $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ und $\mathbf{n}$ die nach außen weisende Normale ist.

88.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man das Integral

$$\int_{\partial\Omega} (x^3\mathbf{e_1} + y^3\mathbf{e_2} + z^3\mathbf{e_3}) \cdot \mathbf{n}\, dA,$$

wobei Ω die Kugel mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt und $\mathbf{n}$ die nach außen weisende Normale ist.

89.) Mit Hilfe des Satzes von Stokes berechne man das Integral

$$\int_{\gamma} -y^3\, dx + x^3\, dy - z^3\, dz,$$

wobei γ der Durchschnitt des Zylinders $x^2+y^2 = 3$ mit der Ebene $x+y+z = 1$ ist und γ entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn orientiert ist, wenn man γ von einem genügend hoch gelegenen Punkt auf der z-Achse betrachtet.

90.) Mit Hilfe des Satzes von Stokes berechne man das Integral

$$\int_{\gamma} y^2 \cos(xz)\, dx + x^3 e^{yz}\, dy - e^{xyz}\, dz,$$

wobei γ der positiv orientierte Kreis $x^2 + y^2 = 4$ der (x, y)-Ebene ist.

91.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV,$$

wobei Ω der Zylinder $\{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 < 1,\ 0 < z < 1\}$ und

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (1 - (x^2 + y^2)^3, 1 - (x^2 + y^2)^3, x^2z^2)$$

ist.

92.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man

$$\int_{\partial\Omega} (x^2 + y + z)\, dA,$$

wobei Ω die Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ und $\partial\Omega$ positiv orientiert ist.

93.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man

$$\int_{\partial\Omega} xy^2\, dy \wedge dz + x^2 y\, dz \wedge dx + y\, dx \wedge dy,$$

wobei Ω der Zylinder $x^2 + y^2 \leq 3$ beschränkt von oben durch die Ebene $x + z = 0$ und von unten durch die Ebene $z = 0$ ist.

94.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man

$$\int_{\Omega} yz^2 e^{-xyz}\, dV,$$

wobei $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ ist.

95.) Mit Hilfe des Divergenzsatzes berechne man

$$\int_{\partial\Omega} x^2\, dy \wedge dz - 2xy\, dz \wedge dx + 3xz\, dx \wedge dy,$$

wobei $\Omega = \{(x, y, z) \ : \ x, y, z \geq 0\,, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ ist.