X. Mehrfache Integrale

Definition (10.1). *Sei $I^k = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \ : \ a_i \le x_i \le b_i \ , \ i = 1, \ldots, k\}$ eine $k-$Zelle in $\mathbb{R}^k$. Weiters sei I^j die $j-$Zelle in $\mathbb{R}^j$ definiert durch die ersten j Ungleichungen, $j = 1, \ldots, k$. Sei ferner $f : I^k \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Setze $f_k = f$ und definiere f_{k-1} auf I^{k-1} durch*

$$f_{k-1}(x_1, \ldots, x_{k-1}) = \int_{a_k}^{b_k} f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k)\, dx_k.$$

Da f_k auf I^k gleichmäßig stetig ist, folgt sofort, dass f_{k-1} stetig auf I^{k-1} ist. Man kann daher den obigen Vorgang fortsetzen und erhält Funktionen f_j, die stetig auf I^j sind derart, dass f_{j-1} das Integral von f_j bezüglich x_j über $[a_j, b_j]$ ist. Nach k Schritten erhält man eine Zahl f_0, die das Integral von f über I^k genannt wird und in der Form

$$\int_{I^k} f(x)\, dx = \int_{I^k} f(x)\, d(x_1, \ldots, x_k) \ \text{oder} \ \int_{I^k} f$$

geschrieben wird.

Zunächst hängt der Wert des Inntegrals $\int_{I^k} f$ von der Reihenfolge der k Integrationen ab. Sei $L(f) = \int_{I^k} f$ und $L'(f)$ das Ergebnis bei irgendeiner anderen Reihenfolge. Dann gilt der folgende

Satz (10.2). *[Fubini] Für jedes $f \in \mathcal{C}(I^k)$ gilt $L(f) = L'(f)$.*

Eine wirklich befriedigendes allgemeineres Resultat in diesem Zusammenhang erhält man im Rahmen der Lebesgueschen Integraltheorie.

Definition (10.3). *Sei $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$. Unter dem Träger von f versteht man die Menge*

$$Trf = \{x \in \mathbb{R}^k \ : \ f(x) \neq 0\}^-.$$

Ist f eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und ist I^k eine k-Zelle mit $Trf \subset I^k$, so definieren wir

$$\int_{\mathbb{R}^k} f = \int_{I^k} f \ .$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von I^k, solange $Trf \subset I^k$.

Man könnte nun das Integral auf geeignete Grenzwerte von stetigen Funktionen mit kompaktem Träger fortsetzen, der geeignete Rahmen dafür ist aber auch die Lebesguesche Integraltheorie.

Beispiel. *Sei Q^k der k-Simplex, bestehend aus allen Punkten $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ in $\mathbb{R}^k$, für die gilt $x_1 + \cdots + x_k \le 1$ und $x_i \ge 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Im Fall $k = 3$ ist Q^k der Tetraeder mit den Eckpunkten $\mathbf{0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$.*

Es gilt $Q^k \subset I^k = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \ : \ 0 \leq x_i \leq 1, \ i = 1, \ldots, k\}$. *Sei* $f \in \mathcal{C}(Q^k)$. *Wir erweitern* f *zu einer Funktion auf* I^k, *indem wir* $f(x) = 0$ *außerhalb von* Q^k *setzen und definieren*

$$\int_{Q^k} f := \int_{I^k} f \ .$$

Da f *auf* I^k *unstetig sein kann, muss die Existenz der rechten Seite nachgewiesen werden, desgleichen die Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Integration.*

In Analogie zum obigen Beispiel übertragen wir nun den Integralbegriff auf eine allgemeinere Situation. Wir ersparen uns hier den langwierigen Aufbau des mehrfachen Riemann-Integrals und verweisen auf das Lebesgue Integral.

Definition (10.4)**.** *Sei* $B \subset \mathbb{R}^k$ *eine beschränkte (messbare) Menge und* $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion (allgemeiner: eine messbare Funktion). Sei* $f_B(x) = f(x)$ *für* $x \in B$ *und* $f_B(x) = 0$ *für* $x \in \mathbb{R}^k \setminus B$ *und sei* I^k *eine* k*-Zelle mit* $B \subset I^k$. *Wir definieren nun*

$$\int_B f := \int_{I^k} f_B \ .$$

Beispiel. *Sei* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *eine stetige Funktion. Ferner sei* $B = \{(x, y) \ : \ x \in [a, b] \ , \ 0 \leq y \leq g(x)\}$.
Das Maß der Menge B *ist der Flächeninhalt der Menge zwischen der* x*-Achse und dem Graphen der Funktion* g *über dem Intervall* $[a, b]$

$$|B| = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Sei nun $M > 0$ *eine Konstante derart, dass* $0 \leq g(x) \leq M$ *für* $x \in [a, b]$ *gilt und* $B \subset [a, b] \times [0, M] = I^2$. *Für die charakteristische Funktion* χ_B *der Menge* B *gilt nun*

$$|B| = \int_B \chi_B = \int_{I^2} \chi_B.$$

Allgemeiner : $A \subset \mathbb{R}^k$ *eine beschränkte (messbare) Menge,* $g_1, g_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *stetige Funktionen. Sei*

$$B = \{(x, y) \ : \ x \in B \ , \ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\} \subset \mathbb{R}^{k+1}.$$

Der $(k+1)$*-dimensionale Inhalt (Volumen) von* B *ist gegeben durch*

$$|B| = \int_B (g_2 - g_1) \ .$$

Satz (10.5)**.** *[Cavalieri] Sei* $M \subset \mathbb{R}^k$ *beschränkt und messbar.* M *liege ganz zwischen den beiden Hyperebenen* $x_1 = a$ *und* $x_1 = b$ *(d.h. für jedes* $(x_1, \ldots, x_k) \in M$ *gilt* $a \leq x_1 \leq b$*). Ferner besitze für jedes*

$\xi \in [a,b]$ der Schnitt $Q(\xi)$ der Hyperebene $x_1 = \xi$ mit M den $(k-1)$-dimensionalen Inhalt $q(\xi)$. Dann ist die Funktion $q(\xi)$ auf $[a,b]$ integrierbar und der Inhalt von M wird gegeben durch

$$|M| = \int_a^b q(\xi)\, d\xi.$$

Normalbereiche[10.6]
Seien $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$ und

$$B = \{(x,y) \ : \ x \in [a,b] \ , \ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

(Normalbereich bezüglich der x-Achse)
Sei ferner $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt :

$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx.$$

Seien $\psi_1, \psi_2 : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\psi_1 \leq \psi_2$ und

$$C = \{(x,y) \ : \ y \in [c,d] \ , \ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

(Normalbereich bezüglich der y-Achse)
Sei ferner $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt :

$$\int_C f(x,y)\, d(x,y) = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine beschränkte, messbare Menge. Seien $\varphi_1, \varphi_2 : A \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$ und

$$B = \{(x,y,z) \ : \ (x,y) \in A \ , \ \varphi_1(x,y) \leq z \leq \varphi_2(x,y)\}$$

(Normalbereich bezüglich der xy-Ebene)
Sei ferner $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt :

$$\int_B f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_A \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) d(x,y).$$

Reduktionsmethode[10.7] Allgemeiner gilt : sei $m = p + q$ und $A \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, messbare Menge. Sei ferner

$$A' = \{x \in \mathbb{R}^p \ : \ \exists y \text{ mit} (x,y) \in A\}$$

(Projektion von A in den x-Raum $\mathbb{R}^p$),

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^q \ : \ (x,y) \in A\}$$

(Schnitt von A mit der im Punkt x errichteten "Ordinate"). Sei $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Existiert für jedes $x \in A'$ das Integral $\int_{A_x} f(x,y)\,dy$ so gilt

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_{A'} \left(\int_{A_x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

Die Substitutionsregel

Definition (10.8). *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $G : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Lässt sich G in der Form*

$$G(x) = \sum_{i \neq m} x_i \mathbf{e_i} + g(x)\mathbf{e_m} \ , \ \ x \in E$$

schreiben, wobei $m \in \mathbb{N}$ und $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ist, so nennt man G eine primitive Abbildung.

Primitive Abbildungen verändern höchstens eine Koordinate. Ist G differenzierbar auf E, so ist für ein $a \in E$ die lineare Abbildung $G'(a)$ genau dann invertierbar, wenn $(D_m g)(a) \neq 0$.

Definition (10.9). *Eine lineare Abbildung $B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, die zwei Vektoren der Standardbasis vertauscht, die übrigen aber festlässt, heißt Transposition.*

Satz (10.10). *Sei F eine $\mathcal{C}^1$-Abbilbung einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Ferner sei $0 \in E$, $F(0) = 0$ und $F'(0)$ invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^n$, in welcher F in der Form*

$$F(x) = B_1 \circ \cdots \circ B_{n-1} \circ G_n \circ \cdots \circ G_1(x)$$

dargestellt werden kann, dabei ist jedes G_i eine primitive $\mathcal{C}^1$-Abbildung in einer geeigneten Umgebung von 0 mit $G_i(0) = 0$ und $G_i'(0)$ invertierbar und jedes B_i ist entweder eine Transposition oder der Identitätsoperator.

Satz (10.11). *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\{V_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von K. Dann existieren Funktionen $\psi_1, \ldots, \psi_s \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:*
(a) $0 \leq \psi_i \leq 1$, für $1 \leq i \leq s$,
(b) jedes ψ_i hat Träger in einem V_α,
(c) für jedes $x \in K$ gilt $\psi_1(x) + \cdots + \psi_s(x) = 1$.
$\{\psi_i\}$ ist die der Überdeckung $\{V_\alpha\}$ zugeordnete Partition der Eins.

Mit Hilfe der letzten beiden Sätze können wir nun die Substitutionsregel ableiten

Satz (10.12). *Sei T eine injektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^k$, derart dass die Jacobideterminante $J_T(x) \neq 0$ für alle*

$x \in E$ gilt. Ist f eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^k$ mit kompaktem Träger, $Trf \subset T(E)$, dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} f(T(x))\,|J_T(x)|\,dx.$$

Es gilt allgemeiner : ist $T : V \longrightarrow W$ eine bijektive $\mathcal{C}^1$-Abbildung zwischen offenen Mengen V, W des $\mathbb{R}^k$ und $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ ine integrierbare Funktion, dann gilt

$$\int_W f(y)\,dy = \int_V f(T(x))\,|J_T(x)|\,dx.$$

Beispiel. *(a) Transformation auf Polarkoordinaten :*
sei $T(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) = (x,y)$ und $V = \{(r,\varphi) \ : \ r_1 < r < r_2 \ , \ \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$ sowie $T(V) = W$. Weiters sei $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_W f(x,y)\,d(x,y) = \int_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,d(r,\varphi).$$

(b) Transformation auf Zylinderkoordinaten :
sei $T(r,\varphi,z) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. Die entsprechende Transformationsformel lautet

$$\int_W f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_V f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\,r\,d(r,\varphi,z).$$

(c) Transformation auf Kugelkoordinaten :
sei

$$T(r,\varphi,\vartheta) = (r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\ ,$$

$r > 0, -\pi/2 < \vartheta < \pi/2 \ , \ 0 < \varphi < 2\pi.$
Die entsprechende Transformationsformel lautet

$$\int_W f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

$$= \int_V f(r\cos\varphi\cos\vartheta, r\sin\varphi\cos\vartheta, r\sin\vartheta)\,r^2\cos\vartheta\,d(r,\varphi,\vartheta).$$

XI. Differentialformen

Definition (11.1)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Eine k-Fläche in E ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung Φ von einer kompakten Menge $D \subset \mathbb{R}^k$ nach E.*
($f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung, falls eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung g auf einer offenen Menge $W \supset D$ existiert mit $g(x) = f(x)$ für alle $x \in D$.)
D heißt Parameterbereich von Φ. Die Punkte von D werden mit $u = (u_1, \ldots, u_k)$ bezeichnet.

Bemerkung. 1-*Flächen sind stetig differenzierbare Kurven.*

Definition (11.2)**.** *Eine Differentialform der Ordnung $k \geq 1$ in E (kurz k-Form in E) ist eine Funktion ω, die symbolisch durch die Summe*

$$\omega = \sum a_{i_1 \ldots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

dargestellt wird (die Indizes $i_1, \ldots, i_k$ laufen unabhängig von 1 bis n), die jeder k-Fläche Φ in E eine Zahl

$$\omega(\Phi) = \int_\Phi \omega$$

gemäß der Regel

$$\int_\Phi \omega = \int_D \sum a_{i_1 \ldots i_k}(\Phi(u)) \frac{\partial(x_{i_1}, \ldots x_{i_k})}{\partial(u_1, \ldots, u_k)}\, du \quad (*)$$

zuordnet, wobei D der Parameterbereich von Φ ist. Die Funktionen $a_{i_1 \ldots i_k}$ seien hierbei reell und stetig in E. Sind $\phi_1, \ldots \phi_n$ die Komponenten von Φ, so gehört die in (*) auftretende Jacobi Determinante zu der Abbildung

$$(u_1, \ldots, u_k) \mapsto (\phi_{i_1}(u), \ldots, \phi_{i_k}(u)).$$

Man sagt, eine k-Form ist von der Klasse $\mathcal{C}^1$ oder $\mathcal{C}^2$, wenn die Funktionen $a_{i_1 \ldots i_k}$ in (*) alle von der Klasse $\mathcal{C}^1$ oder $\mathcal{C}^2$ sind.
Unter einer 0*-Form in E verstehen wir eine stetige Funktion in E.*

Die Determinante (als Multilinearform) in (*) ist für viele Eigenschaften von Differentialformen verantwortlich (siehe weiter unten).

Beispiel (11.3)**.** *Wir betrachten die Differentialform $dx \wedge dy \wedge dz$ im $\mathbb{R}^3$ und die* 3*-Zelle D definiert durch $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$ sowie die Abbildung*

$$\Phi : D \longrightarrow B^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;:\; |\mathbf{x}| \leq 1\}$$

gegeben durch $\Phi(r, \varphi, \vartheta) = (x, y, z)$ mit

$$x = r \cos\varphi \sin\vartheta\ ,\ y = r \sin\varphi \sin\vartheta\ ,\ z = r\cos\vartheta.$$

Dann gilt für die Jacobideterminante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} = r^2 \sin\vartheta$$

und

$$\int_\Phi dx \wedge dy \wedge dz = \int_D r^2 \sin\vartheta = \frac{4\pi}{3},$$

was dem Volumen der Kugel $B^3 = \Phi(D)$ entspricht.

Elementare Eigenschaften:[11.4] Seien $\omega, \omega_1, \omega_2$ k-Formen in E. Man schreibt : $\omega_1 = \omega_2$ genau dann, wenn $\omega_1(\Phi) = \omega_1(\Phi)$ für jede k-Fläche Φ in E.
$\omega = 0$ bedeutet, dass $\omega(\Phi) = 0$ für jede k-Fläche Φ in E.
Für $c \in \mathbb{R}$ wird die k-Form $c\omega$ definiert durch $\int_\Phi c\omega = c\int_\Phi$,
$\omega = \omega_1 + \omega_2$ bedeutet $\int_\Phi \omega = \int_{\omega_1} + \int_{\omega_2}$ für jede k-Fläche Φ in E.
Für die k-Form

$$\omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}$$

sei $\overline{\omega}$ jene k-Form, die sich bei ω durch Vertauschen eines Indexpaares ergibt. Dann gilt $\overline{\omega} = -\omega$.
Insbesondere gilt $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ und $dx_i \wedge dx_i = 0$.
Gilt bei

$$\omega = a(x) dx_{i_1} \wedge \dots dx_{i_k}$$

$i_r = i_s$ bei $r \neq s$, dann ist $\omega = 0$.
0 ist die einzige k-Form, falls $k > n$.

Definition (11.5)**.** *Sind $i_1, \dots, i_k$ natürliche Zahlen mit $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ und ist $I = (i_1, \dots, i_k)$ das entsprechende geordnete k-Tupel, dann heißt I ein wachsender k-Index und*

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

eine k-Grundform in $\mathbb{R}^n$.
Bei der sogenannten Normalform von

$$\omega = \sum_I b_I(x)\, dx_I$$

wird nur über alle wachsenden Indizes I summiert.

Satz (11.6)**.** *Sei*

$$\omega = \sum_I b_I(x)\, dx_I$$

die Normaldarstellung einer k-Form ω in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$. Ist $\omega = 0$ in E, dann gilt $b_I(x) = 0$ für jeden wachsenden Index I und für jedes $x \in E$.

Definition (11.7)**.** *Seien $I = (i_1, \dots, i_p)$, $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ und $J = (j_1, \dots, j_q)$, $1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n$ zwei wachsende Indizes. Unter dem Produkt der entsprechenden Grundformen dx_I und dx_J in $\mathbb{R}^n$ versteht man eine $(p+q)$-Form in $\mathbb{R}^n$, die durch das Symbol $dx_I \wedge dx_J$ bezeichnet wird und definiert ist durch*

$$dx_I \wedge dx_J = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_q}.$$

Haben I und J ein gemeinsames Element, dann ist $dx_I \wedge dx_J = 0$. Haben I und J kein gemeinsames Element, dann schreibe man $[I, J]$ für den wachsenden $(p+q)$-Index, den man durch Anordnung der Glieder von $I \cup J$ in ansteigender Reihenfolge erhält. Dann ist $dx_{[I,J]}$ eine $(p+q)$-Grundform. Es gilt

$$dx_I \wedge dx_J = (-1)^\alpha \, dx_{[I,J]},$$

wobei α die Anzahl der negativen Differenzen $j_t - i_s$ ist.

Satz (11.8)**.** *Sei $K = (k_1, \ldots, k_r)$ ein wachsender r-Index, I und J wie oben. Dann gilt*

$$(dx_I \wedge dx_J) \wedge dx_K = dx_I \wedge (dx_J \wedge dx_K).$$

Definition (11.9)**.** *Seien ω und λ p- bzw. q-Formen in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ mit den Normaldarstellungen*

$$\omega = \sum_I b_I(x)\, dx_I \ , \ \ \lambda = \sum_J c_J(x)\, dx_J.$$

Das Produkt von ω und λ, gekennzeichnet durch $\omega \wedge \lambda$, ist durch

$$\omega \wedge \lambda = \sum_{I,J} b_I(x)\, c_J(x)\, dx_I \wedge dx_J$$

definiert. In dieser Summe laufen I und J unabhängig voneinander über alle ihre möglichen Werte.

$\omega \wedge \lambda$ ist eine $(p+q)$-Form in E. Es gelten die folgenden Regeln

$$(\omega_1 + \omega_2) \wedge \lambda = (\omega_1 \wedge \lambda) + (\omega_2 \wedge \lambda),$$
$$\omega \wedge (\lambda_1 + \lambda_2) = (\omega \wedge \lambda_1) + (\omega \wedge \lambda_2),$$
$$(\omega \wedge \lambda) \wedge \sigma = \omega \wedge (\lambda \wedge \sigma).$$

Das Produkt einer 0-Form f mit der p-Form ω ist gegeben durch

$$f\,\omega = \omega\, f = \sum_I f(x)\, b_I(x)\, dx_I.$$

Definition (11.10)**.** *Wir definieren einen Differentiationsoperator d, der jeder k-Form ω der Klasse $\mathcal{C}^1$ in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ eine $(k+1)$-Form $d\omega$ zuordnet.*
Eine 0-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ ist eine reelle Funktion $f \in \mathcal{C}^1(E)$, und wir definieren

$$df = \sum_{i=1}^n (D_i f)(x)\, dx_i.$$

Ist $\omega = \sum_I b_I(x)\, dx_I$ die Normaldarstellung einer k-Form ω und gilt $b_I \in C^1(E)$ für jeden wachsenden k-Index I, dann definieren wir

$$d\omega = \sum_I (db_I) \wedge dx_I.$$

Satz (11.11). *(a) Sind ω und λ k- bzw. m-Formen der Klasse $\mathcal{C}^1$ in E, dann ist*

$$d(\omega \wedge \lambda) = (d\omega) \wedge \lambda + (-1)^k \, \omega \wedge d\lambda.$$

(b) Ist ω von der Klasse $\mathcal{C}^2$ in E, dann ist

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

Definition (11.12). *[Substitutionen von Differentialformen] Sei E eine offfene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und T eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung von E in eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$, weiters sei ω eine k-Form in V mit der Normaldarstellung*

$$\omega = \sum_I b_I(y)\, dy_I \ , \ y \in V \ , \ I = (i_1, \ldots, i_k).$$

Seien $t_1, \ldots, t_m$ die Komponenten von T und sei $y = (y_1, \ldots, y_m) = T(x)$, also $y_i = t_i(x)$. Es gilt

$$dt_i = \sum_{j=1}^{n} (D_j t_i)(x)\, dx_j \quad (1 \le i \le m).$$

Die Abbildung T führt ω in eine k-Form ω_T in E über, die wie folgt definiert ist

$$\omega_T = \sum_I b_I(T(x))\, dt_{i_1} \wedge \cdots \wedge dt_{i_k}.$$

Satz (11.13). *Seien E und T wie in der vorigen Definition und seien ω und λ k- bzw. m-Formen in V. Dann folgt*
(a) $(\omega + \lambda)_T = \omega_T + \lambda_T$ für $k = m$;
(b) $(\omega \wedge \lambda)_T = \omega_T \wedge \lambda_T$;
(c) $d(\omega_T) = (d\omega)_T$, wenn ω von der Klasse $\mathcal{C}^1$ und T von der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist.

Unser nächstes Ziel ist es, zu zeigen, dass

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_{\Phi} \omega_T$$

ist. Dazu benötigen wir noch die beiden folgenden Transformationseigenschaften von Differentialformen.

Satz (11.14). *Sei T eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$, sei S eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung von V in eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^p$, sei ferner ω eine k-Form in W, so dass ω_S eine k-Form in V ist und $(\omega_S)_T$ als auch ω_{ST} k-Formen in E sind, wobei $(ST)(x) = S(T(x))$, $x \in E$. Dann gilt*

$$(\omega_S)_T = \omega_{ST}.$$

Satz (11.15)**.** *Sei ω eine k-Form in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$, Φ eine k-Fläche in E mit Parameterbereich $D \subset \mathbb{R}^k$, und sei Δ die k-Fläche in $\mathbb{R}^k$ mit Parameterbereich D, definiert durch $\Delta(u) = u$, $u \in D$. Dann gilt*

$$\int_\Phi \omega = \int_\Delta \omega_\Phi .$$

Satz (11.16)**.** *Sei T eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$, sei Φ eine k-Fläche in E und ω eine k-Form in V. Dann gilt*

$$\int_{T\Phi} \omega = \int_\Phi \omega_T .$$

Simplexe und Ketten

Definition (11.17)**.** *Seien X, Y Vektorräume über $\mathbb{R}$. Eine Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ heißt affin, wenn $f - f(\mathbf{0})$ linear ist, also gilt $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + A\mathbf{x}$ mit $A \in L(X, Y)$. Eine affine Abbildung von $\mathbb{R}^k$ in $\mathbb{R}^n$ ist somit bestimmt, wenn $f(\mathbf{0})$ und $f(\mathbf{e_i})$ für $1 \le i \le k$ bekannt sind.*
Sei $Q^k = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathbf{u} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{e_i} \ , \ \alpha_i \ge 0 \ , \ \sum_i \alpha_i \le 1\}$ das Standardsimplex und seien $\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_k} \in \mathbb{R}^n$. Das orientierte k-Simplex $\sigma = [\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, \dots, \mathbf{p_k}]$ sei definiert als die k-Fläche in $\mathbb{R}^n$ mit Parameterbereich Q^k, die durch die affine Abbildung

$$\sigma(\alpha_1 \mathbf{e_1} + \cdots + \alpha_k \mathbf{e_k}) = \mathbf{p_0} + \sum_{i=1}^k \alpha_i (\mathbf{p_i} - \mathbf{p_0})$$

gegeben ist. σ ist charakterisiert durch $\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{p_0}$, $\sigma(\mathbf{e_i}) = \mathbf{p_i}$, $1 \le i \le k$, und $\sigma(\mathbf{u}) = \mathbf{p_0} + A\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in Q^k$, wobei $A \in L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$ mit $A\mathbf{e_i} = \mathbf{p_i} - \mathbf{p_0}$, $1 \le i \le k$.

Wir nennen σ orientiert, um hervorzuheben, dass die Reihenfolge der Ecken $\mathbf{p_0}, \dots, \mathbf{p_k}$ berücksichtigt wird.
Ist $\overline{\sigma} = \{\mathbf{p_{i_0}}, \mathbf{p_{i_1}}, \dots, \mathbf{p_{i_k}}\}$, wobei $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ eine Permutation von $\{0, 1, \dots, k\}$ ist, so schreiben wir

$$\overline{\sigma} = s(i_0, i_1, \dots, i_k)\, \sigma,$$

wobei

$$s(i_0, i_1, \dots, i_k) = \prod_{p<q} \operatorname{sgn}(i_q - i_p).$$

Somit gilt $\overline{\sigma} = \pm\sigma$. Ist $\overline{\sigma} = \sigma$, so sagt man σ und $\overline{\sigma}$ sind gleich orientiert, ist das Vorzeichen negativ, so sagt man $\overline{\sigma}$ und σ haben entgegengesetzte Orientierung. (Hier wurde eigentlich nur eine Äquivalenzrelation zwischen Simplexen definiert.)
Im Fall $n = k$ und wenn die Vektoren $\mathbf{p_i} - \mathbf{p_0}$ $(1 \leq i \leq k)$ linear unabhängig sind, ist die zugehörige lineare Abbildung A invertierbar. Falls $\det A > 0$, ist σ positiv orientiert, falls $\det A < 0$, ist σ negativ orientiert. Insbesondere ist das Simplex $[\mathbf{0}, \mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_k}]$ in $\mathbb{R}^k$ positiv orientiert.
Zusätzlich definieren wir ein orientiertes 0-Simplex als Punkt zusammen mit einem Vorzeichen: $\sigma = +\mathbf{p_0}$ oder $\sigma = -\mathbf{p_0}$. Ist $\sigma = \epsilon\mathbf{p_0}$ $(\epsilon = \pm 1)$ und f eine 0-Form (d.h. eine stetige, reelle Funktion), so definieren wir

$$\int_\sigma f = \epsilon\, f(\mathbf{p_0}).$$

Satz (11.18)**.** *Ist σ ein orientiertes affines k-Simplex in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ und ist $\overline{\sigma} = \epsilon\sigma$, dann gilt*

$$\int_{\overline{\sigma}} \omega = \epsilon \int_\sigma \omega$$

für jede k-Form ω auf E.

Definition (11.19)**.** *Eine affine k-Kette Γ in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Familie endlich vieler orientierter affiner k-Simplexe $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ in E. Ein Simplex kann in Γ mehrfach vorkommen. Ist Γ eine affine k-Kette und ω eine k-Form in E, so definieren wir*

$$\int_\Gamma \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\sigma_i} \omega,$$

deshalb schreibt man auch

$$\Gamma = \sum_{i=1}^r \sigma_i.$$

Definition (11.20)**.** *Für $k \geq 1$ ist der Rand des orientierten affinen k-Simplexes $\sigma = [\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_k}]$ als die affine $(k-1)$-Kette*

$$\partial\sigma = \sum_{j=0}^k (-1)^j [\mathbf{p_0}, \ldots, \mathbf{p_{j-1}}, \mathbf{p_{j+1}}, \ldots, \mathbf{p_k}]$$

definiert.

Ist zum Beispiel $\sigma = [\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}]$ ein Dreieck, dann ist der Rand von σ

$$\partial\sigma = [\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}] - [\mathbf{p_0}, \mathbf{p_2}] + [\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}] = [\mathbf{p_0}, \mathbf{p_1}] + [\mathbf{p_1}, \mathbf{p_2}] + [\mathbf{p_2}, \mathbf{p_0}]$$

der übliche orientierte Rand des Dreiecks.

Definition (11.21)**.** *Sei T eine $\mathcal{C}^2$-Abbildung einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$ in eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$. Ist σ ein orientiertes affines k-Simplex in E, dann ist $\Phi = T \circ \sigma$ eine k-Fläche in V mit Parameterbereich Q^k. Man nennt Φ ein orientiertes k-Simplex der Klasse $\mathcal{C}^2$.*
Eine endliche Familie Ψ von orientierten k-Simplexen $\Phi_1, \ldots, \Phi_r$ der Klasse $\mathcal{C}^2$ in V heißt eine k-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2$ in V.
Ist ω eine k-Form in V, so definieren wir

$$\int_\Psi \omega = \sum_{i=1}^r \int_{\Phi_i} \omega.$$

Der Rand $\partial\Phi$ des orientierten k-Simplexes $\Phi = T \circ \sigma$ sei als die $(k-1)$-Kette

$$\partial\Phi = T(\partial\sigma)$$

definiert.
Es gilt : $\partial\Phi$ hat die Klasse $\mathcal{C}^2$, wenn dies für Φ gilt.
Der Rand der k-Kette $\Psi = \sum_{i=1}^r \Phi_i$ ist als die $(k-1)$-Kette

$$\partial\Psi = \sum_{i=1}^r \partial\Phi_i$$

definiert.

Wir wollen nun auch festlegen, was man unter dem orientierten Rand einer allgemeineren Menge versteht.

Definition (11.22)**.** *Sei Q^n das Standardsimplex in $\mathbb{R}^n$, sei σ_0 die Identitätsabbildung auf Q^n. Man kann σ_0 als das positiv orientierte n-Simplex*

$$\sigma_0 = [\mathbf{0}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}]$$

auffassen. Sein Rand $\partial\sigma_0$ ist eine affine $(n-1)$-Kette. Diese Kette heißt der positiv orientierte Rand der Menge Q^n.
Sei nun T eine injektive Abbildung von Q^n in $\mathbb{R}^n$ von der Klasse $\mathcal{C}^2$, deren Jacobi-Determinante positiv ist. Sei $E = T(Q)$. Wir definieren den positiv orientierten Rand der Menge E als die $(n-1)$-Kette

$$\partial T = T(\partial\sigma_0)$$

und werden diese $(n-1)$-Kette mit ∂E bezeichnen.

Sei $\Omega = E_1 \cup \cdots \cup E_r$, wobei $E_i = T_i(Q^n)$ ist, jedes T_i dieselben Eigenschaften wie obiges T hat und das Innere der Mengen E_i paarweise disjunkt ist. Dann heißt die $(n-1)$-Kette

$$\partial T_1 + \ldots \partial T_r = \partial\Omega$$

der positiv orientierte Rand von Ω.

Der Satz von Stokes

Satz (11.23)**.** *[Stokes] Ist Ψ eine k-Kette der Klasse $\mathcal{C}^2$ in einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ und ist ω eine $(k-1)$-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ in V, dann gilt*

$$\int_\Psi d\,\omega = \int_{\partial\Psi} \omega.$$

Der Fall $k = m = 1$ entspricht dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Weitere Spezialfälle werden später besprochen.

Geschlossene und exakte Formen

Definition (11.24)**.** *Sei ω eine k-Form in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^n$. Gibt es eine $(k-1)$-Form λ in E mit $\omega = d\lambda$, dann heißt ω exakt in E.*
Ist ω von der Klasse $\mathcal{C}^1$ und ist $d\omega = 0$, dann nennen wir ω geschlossen.

Da $d^2 = 0$ ist, folgt, dass jede exakte Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ geschlossen ist. In konvexen Mengen gilt auch die Umkehrung, siehe später.

Bemerkung. *(a) Sei $\omega = \sum_{i=1}^n f_i(x)\,dx_i$ eine 1-Form mit $f_i \in \mathcal{C}^1(E)$. Dann gilt: ω ist genau dann geschlossen, wenn $(D_j f_i)(x) = (D_i f_j)(x)$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ und für alle $x \in E$ gilt.*
(b) Integrale exakter 1-Formen in E über geschlossene (differenzierbare) Kurven in E sind gleich 0.
(c) Integrale von geschlossenen k-Formen in E über k-Ketten, die Ränder von $(k+1)$-Ketten sind, sind 0.
(d) Ist Ψ eine $(k+1)$-Kette in E der Klasse $\mathcal{C}^2$. Dann gilt $\partial^2\Psi = 0$, d.h. der Rand eines Randes ist 0.

Satz (11.25)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe, offene Menge und $k \geq 1$. Sei ω eine k-Form der Klasse $\mathcal{C}^1$ in E mit $d\omega = 0$. Dann existiert eine $(k-1)$-Form λ in E mit $\omega = d\lambda$.*

Satz (11.26)**.** *Sei k mit $1 \leq k \leq n$ vorgegeben. Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, in der jede geschlossene k-Form exakt ist. Sei T eine bijektive $\mathcal{C}^2$-Abbildung von E auf eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, deren Inverse S ebenfalls von der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist.*
Dann ist jede geschlossene k-Form in U exakt in U.

XII. Vektoranalysis

Hier werden die eben bewiesenen Sätze noch in eine andere Sprache übersetzt, die hauptsächlich physikalisch orientiert ist.

Vektorfelder

Definition (12.1)**.** *Sei* $\mathbf{F} = F_1\mathbf{e_1} + F_2\mathbf{e_2} + F_3\mathbf{e_3}$ *eine stetige Abbildung einer offenen Menge* $E \subset \mathbb{R}^3$ *in* $\mathbb{R}^3$*. Da* $\mathbf{F}$ *jedem Punkt von* E *einen Vektor zuordnet, wird* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld genannt.*
Jedem solchen $\mathbf{F}$ *sind eine* 1*-Form und eine* 2*-Form zugeordnet:*

$$\lambda_{\mathbf{F}} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz,$$

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy.$$

Ist $u \in \mathcal{C}^1(E)$ *eine reellwertige Funktion, so ist der Gradient*

$$\bigtriangledown u = (D_1 u)\mathbf{e_1} + (D_2 u)\mathbf{e_2} + (D_3 u)\mathbf{e_3}$$

ein Beispiel eines Vektorfeldes in E*.*
Sei $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld der Klasse* $\mathcal{C}^1$ *in* E*. Seine Rotation* $\mathrm{rot}\mathbf{F} = \bigtriangledown \times \mathbf{F}$ *ist das Vektorfeld definiert durch*

$$\bigtriangledown \times \mathbf{F} = (D_2F_3 - D_3F_2)\mathbf{e_1} + (D_3F_1 - D_1F_3)\mathbf{e_2} + (D_1F_2 - D_2F_1)\mathbf{e_3}.$$

Seine Divergenz ist die reellwertige Funktion $\mathrm{div}\mathbf{F} = \bigtriangledown \cdot \mathbf{F}$ *in* E *definiert durch*

$$\bigtriangledown \cdot \mathbf{F} = D_1F_1 + D_2F_2 + D_3F_3.$$

Satz (12.2)**.** *Sei* E *eine offene Menge in* $\mathbb{R}^3$*,* $u \in \mathcal{C}^2(E)$ *und* $\mathbf{G}$ *ein Vektorfeld der Klasse* $\mathcal{C}^2$ *in* E*.*
(a) Ist $\mathbf{F} = \bigtriangledown u$*, dann gilt* $\bigtriangledown \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
(b) Ist $\mathbf{F} = \bigtriangledown \times \mathbf{G}$*, dann gilt* $\bigtriangledown \cdot \mathbf{F} = 0$.
Ist ferner E *zu einer konvexen Menge* $\mathcal{C}^2$*-äquivalent, dann sind auch die Umkehrungen gültig, wenn wir voraussetzen, dass* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld der Klasse* $\mathcal{C}^2$ *in* E *ist:*
(a') Ist $\bigtriangledown \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$*, dann ist* $\mathbf{F} = \bigtriangledown u$*, für ein* $u \in \mathcal{C}^2(E)$*.*
(b') Ist $\bigtriangledown \cdot \mathbf{F} = 0$*, dann ist* $\mathbf{F} = \bigtriangledown \times \mathbf{G}$*, für ein Vektorfeld* $\mathbf{G}$ *der Klasse* $\mathcal{C}^2$ *in* E*.*

Definition (12.3)**.** *Die* k*-Form* $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ *in* $\mathbb{R}^k$ *wird als Volumselement* dV_k *bezeichnet. (*$dA := dV_2$*.)*

Ist Φ eine positiv orientierte k-Fläche in $\mathbb{R}^k$, und f eine stetige Funktion auf dem Bildbereich von Φ, dann schreiben wir

$$\int_\Phi f(x)\,dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k = \int_\Phi f\,dV.$$

Ist D ein Parameterbereich in $\mathbb{R}^k$ und Φ eine injektive $\mathcal{C}^1$- Abbildung von D in $\mathbb{R}^k$ mit positiver Jacobi-Determinante J_Φ, dann gilt

$$\int_\Phi f\,dV = \int_D f(\Phi(u))\,J_\Phi(u)\,du = \int_{\Phi(D)} f(x)\,dx.$$

Nimmt man für $f \equiv 1$, so ist $\int_\Phi 1\,dV$ das Volumen von Φ.

Satz (12.4)**.** *[Green] Sei E eine offene Menge in $\mathbb{R}^2$, ferner $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^1(E)$ und Ω eine abgeschlossene Teilmenge von E mit positiv orientiertem Rand $\partial\Omega$. Dann gilt*

$$\int_{\partial\Omega} (\alpha\,dx + \beta\,dy) = \int_\Omega \left(\frac{\partial\beta}{\partial x} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\right) dA.$$

Beispiel. *Setzt man $\alpha(x, y) = -y, \beta(x, y) = x$ so folgt aus dem letzten Satz*

$$\frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (x\,dy - y\,dx) = A(\Omega),$$

was dem Flächeninhalt von Ω entspricht.

Definition (12.5)**.** *Sei Φ eien 2-Fläche der Klasse $\mathcal{C}^1$ in $\mathbb{R}^3$ mit Parameterbereich $D \in \mathbb{R}^2$. Für $(u, v) \in D$ definiere man*

$$\mathbf{N}(u, v) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{e_1} + \frac{\partial(z.x)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{e_2} + \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\mathbf{e_3},$$

wobei die auftretenden Jacobi-Determinanten der Gleichung $(x, y, z) = \Phi(u, v)$ entsprechen.
Ist f eine stetige Funktion auf $\Phi(D)$, dann definieren wir das Flächenintegral von f über Φ durch

$$\int_\Phi f\,dA = \int_D f(\Phi(u, v))|\mathbf{N}(u, v)|\,du\,dv.$$

Für $f \equiv 1$ ist

$$A(\Phi) = \int_D |\mathbf{N}(u, v)|\,du\,dv$$

der Flächeninhalt von Φ.

Bemerkung. *Der Vektor $\mathbf{N}(u, v)$ steht senkrecht auf der Tangentialebene zu Φ an der Stelle (u, v), deswegen auch die Bezeichnung Normalenvektor.*

Satz (12.6)**.** *Sei γ eine $\mathcal{C}^1$-Kurve in einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^3$ mit Parameterintervall $[0, 1]$, sei $\mathbf{F}$ ein Vektorfeld in E und*

$$\lambda_{\mathbf{F}} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz.$$

Für $u \in [0, 1]$ ist

$$\gamma'(u) = \gamma_1'(u)\,\mathbf{e_1} + \gamma_2'(u)\,\mathbf{e_2} + \gamma_3'(u)\,\mathbf{e_3}$$

der Tangentialvektor zu γ an der Stelle u.

Wir schreiben $\mathbf{t} = \mathbf{t}(u)$ *für den Einheitsvektor in Richtung von* $\gamma'(u)$. *Dann gilt* $\gamma'(u) = |\gamma'(u)|\,\mathbf{t}(u)$ *und*

$$\int_\gamma \lambda_{\mathbf{F}} = \int_0^1 \mathbf{F}(\gamma(u)) \cdot \mathbf{t}(u)\, ds = \int_\gamma (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds,$$

wobei $ds = |\gamma'(u)|\, du$ *das sogenannte Bogenlängenelement bezeichnet.*

Satz (12.7)**.** *Sei* Φ *eine* 2*-Fläche der Klasse* $\mathcal{C}^1$ *in einer offenen Menge* $E \subset R^3$ *mit Parameterbereich* $D \subset \mathbb{R}^2$, *ferner sei* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld in* E *und*

$$\omega_{\mathbf{F}} = F_1\, dy \wedge dz + F_2\, dz \wedge dx + F_3\, dx \wedge dy.$$

Dann gilt

$$\int_\Phi \omega_{\mathbf{F}} = \int_\Phi (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA,$$

wobei $\mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v)$ *der Einheitsvektor in Richtung der Normalen* $\mathbf{N}$ *zu* Φ *und* $dA = |\mathbf{N}|\, du\, dv$ *das sogenannte Flächenelement ist.*

Satz (12.8)**.** *[Stokes] Ist* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld der Klasse* $\mathcal{C}^1$ *in einer offenen Menge* $E \subset \mathbb{R}^3$ *und* Φ *eine* 2*-Fläche der Klasse* $\mathcal{C}^2$ *in* E, *dann gilt*

$$\int_\Phi \mathrm{rot}\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_\Phi (\bigtriangledown \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_{\partial\Phi} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t})\, ds.$$

Satz (12.9)**.** *[Divergenzsatz, Satz von Gauß] Ist* $\mathbf{F}$ *ein Vektorfeld der Klasse* $\mathcal{C}^1$ *in einer offenen Menge* $E \subset \mathbb{R}^3$ *und* Ω *eine abgeschlossene Teilmenge von* E *mit positiv orientiertem Rand* $\partial\Omega$, *dann gilt*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{F}\, dV = \int_\Omega (\bigtriangledown \cdot \mathbf{F})\, dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dA.$$