

1 Typische Prüfungsbeispiele für Einführung in das mathematische Arbeiten

Bei einem Prüfungstermin werden üblicherweise vier Aufgaben dieser Art gestellt. Beispiele aus dem Schulstoff sind dabei typische Matura-Aufgaben. Eine Prüfung dauert drei Stunden. Die Punkte werden auf die Beispiele gemäß ihrer Schwierigkeit verteilt. Dabei gelten Beispiele, die zum neuen Stoff gehören, bei gleichem Zeitaufwand grundsätzlich als schwieriger als Schulbeispiele.

1. Der Kreis k_1 mit Mittelpunkt $(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2})$ und Radius $\frac{\sqrt{50}}{2}$ wird von der Geraden $g : X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ geschnitten. In den Schnittpunkten T_1 und T_2 werden Tangenten an den Kreis gelegt, die einander im Punkt S schneiden. Berechnen Sie
 - (a) die Koordinaten von S und den Winkel zwischen den Tangenten,
 - (b) den Flächeninhalt des Dreiecks $D = T_1T_2S$,
 - (c) die Gleichung und den Flächeninhalt des Umkreises k_2 des Dreiecks D ,
 - (d) den Inhalt des Flächenstücks, das k_1 und k_2 gemeinsam haben.
 - (e) Beweisen Sie unabhängig von der speziellen Wahl von k_1 und g , dass k_2 durch den Mittelpunkt von k_1 gehen muss, d.h. sein Mittelpunkt U Halbpunkt der Strecke \overline{MS} ist. Vorausgesetzt sei nur, dass k_1 und g sich in zwei Punkten schneiden.
2. Eine zylinderförmige Arena (Durchmesser 200 m , Höhe 20 m) soll mit einem bis zum Boden reichenden Rotationsparaboloid zeltförmig überdacht werden, wobei der umbaute Raum des Zeltes minimal werden soll. Berechnen Sie Höhe und Bodenradius dieses Zeltes und das Volumen des umbauten Raumes.
3. (a) Bestimmen Sie die Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung

$$z^2 - z + (i + 1) = 0$$

in \mathbb{C} .

(b) Berechnen Sie die Zahl $z = \frac{\sqrt{2}}{2}z_1z_2$.

(c) Bestimmen Sie die Menge G aller *verschiedenen* Potenzen von z

$$z^0, z, z^2, z^3, \dots, z^n$$

und beweisen Sie, dass G zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe bildet.

- (d) Stellen Sie die Verknüpfungstabelle von G auf und bestimmen Sie die Ordnung von G .

4. Die Koeffizienten b_1, b_2, b_3 des Polynoms

$$p(x) = x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3$$

bilden eine geometrische Folge. Der Graph des Polynoms p hat in $E = (-2, 76)$ ein Extremum.

- (a) Berechnen Sie die Koeffizienten (**Achtung:** zwei Lösungen)
- (b) Diskutieren Sie beide Funktionen und zeichnen Sie die Graphen in $[-10, 4]$. Bestimmen Sie die Nullstellen näherungsweise auf ein Zehntel genau.
(Wählen Sie als Einheiten auf der x -Achse 1 cm und auf der $p(x)$ -Achse 1 mm . Zeichnen Sie nur den Bereich des Graphen, der zwischen $p(x) = -60$ und $p(x) = 140$ liegt.)
- (c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das von beiden Kurven und der x -Achse eingeschlossen wird und im 2. Quadranten liegt.
- (d) Dieses Flächenstück rotiert um die x -Achse. Berechnen Sie das Volumen das dabei entstehenden Rotationskörpers.
5. Beweisen Sie, dass $(\mathbb{Q}, \oplus, \otimes)$ ein Körper ist, wobei die Verknüpfungen definiert seien als

$$a \oplus b = a + b + 4$$
$$a \otimes b = ab + 4a + 4b + 12$$

Lösen sie in diesem Körper die Gleichung

$$(x \oplus x) \otimes x = 46.$$

6. Einem Würfel wird eine Kugel eingeschrieben. Zu allen Ecken hin werden immer wieder einander berührende Kugeln eingeschrieben. In welchem Verhältnis steht die Summe aller Kugelinhalte zum Volumen des Würfels.
7. Von einem gleichschenkeligen Trapez kennt man die Länge der Paralleelseite $a = 67$ und die Länge der Diagonale $e = 54$. Der der Seite b gegenüberliegende Winkel zwischen den Diagonalen ist $\epsilon = 4\pi/15$. Das

Trapez dreht sich einmal um die eine, dann um die andere Paralleleseite. In welchem Verhältnis stehen die Oberfläche und Volumina beider Drehkörper?

8. Bei einer Blutuntersuchung wird festgestellt, dass von 2000 Versuchspersonen 706 die Blutgruppe O aufweisen.
- (a) Kann die Annahme, dass 35% der Personen in der betrachteten Grundgesamtheit die Blutgruppe O haben, aufgrund des Stichprobenergebnisses verworfen werden? Wenn nein, bei welchen Stichprobenergebnissen könnte man diese Annahme verwerfen? (Wähle die Signifikanzzahl $\alpha_0 = 0.05!$)
 - (b) Wie (8a), wenn die Vermutung vorliegt, dass der Prozentsatz an Personen mit Blutgruppe O zugenommen hat.
 - (c) Gib auf Grund des Stichprobenergebnisses das 95%–Konfidenzintervall für den Anteil der Personen mit Blutgruppe O in der Grundgesamtheit an.
 - (d) Ist es aufgrund des Ergebnisses von (8c) denkbar, dass höchstens 30% in der Grundgesamtheit die Blutgruppe O haben? Wie wahrscheinlich ist das höchstens?
9. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass für $q \neq 1$ die Summe der endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

erfüllt. Leiten Sie aus dieser Beziehung die Gleichung

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k}$$

her. Berechnen Sie

$$3^7 + 2 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^5 + 8 \cdot 3^4 + 16 \cdot 3^3 + 32 \cdot 3^2 + 64 \cdot 3 + 128.$$