Proseminar zu Algebra in den Anwendungen (SS 2011)

(1) Zeige, wie man mit dem $[4, 2]$ ternären Hamming Code Einzelfehler korrigieren kann.

(2) Beweise, dass die Hamming–Distanz d_H eine Metrik auf A^n ist für jedes Alphabet A und alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Beweise, dass für einen $SC(m, \frac{1}{m})$ Kanal jeder vollständige Dekodieralgorithmus ein MLD–Algorithmus ist.

(4) Beweise, dass in A^n mit $m := |A|$ die Kugel $S_e(x)$

$$\sum_{i=0}^{e} \binom{n}{i} (m-1)^i$$

Wörter enthält, für jedes $x \in A^n$.

(5) Erkläre, warum der Fehlererkennungsalgorithmus $\mathbf{SS}_0$ alle Übertragungsfehler, die weniger als $d_{\min}$ Symbolfehler enthalten, korrekt erkennt.

(6) Sei $f \geq e$. Beweise, dass die folgenden Aussagen für den Code $C \subseteq A^n$ äquivalent sind:
   (a) Der Algorithmus $\mathbf{SS}_e$ wird alle Übertragungsfehler mit nicht mehr als e falschen Symbolen immer erfolgreich korrigieren, und kein Fehler mit höchstens f Symbolfehlern wird zu einer Fehldekodierung führen.
   (b) Für $x \neq y \in C$ gilt $S_f(x) \cap S_e(y) = \emptyset$.
   (c) Die Minimaldistanz $d_{\min}(C)$ von C ist mindestens $e+f+1$.

(7) Beweise, dass für $x, y \in \mathbb{F}_2^n$ gilt

$$w_H(x+y) = w_H(x) + w_H(y) - 2w_H(x * y),$$

wobei

$$(x * y)_i = \begin{cases} 1 & x_i = y_i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(8) Zeige, dass in einem linearen Code C über dem endlichen Körper F entweder alle Codewörter mit 0 beginnen oder genau $1/|F|$ Codewörter mit 0 beginnen. (Hinweis: Betrachte zuerst den binären Fall.)

(9) Zeige, dass der duale Code eines MDS Codes wieder ein MDS Code ist.

(10) Zeige, dass ein binärer MDS Code der Länge n entweder $\{0\}$ oder $\mathcal{R}ep(n)$ oder $\mathcal{P}ar(n)$ oder $\mathbb{Z}_2^n$ ist.