Aufgabensammlung zur Vorlesung
Einführung in das mathematische Arbeiten

Zusammengestellt von
T. Eisenkölbl, M. Fulmek, W. Huyer, M. Kunzinger,
H. Massold, P. Raith, H. Schichl und R. Steinbauer

Sommersemester 2004

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Diese findet geblockt am Anfang des Semesters („Studieneingangsphase“, 1.3.—18.3.2004) statt und wird in diesem Zeitraum von den Proseminaren zu den AnfängerInnenvorlesungen *Proseminar zu Analysis 1* und *Proseminar zu Lineare Algebra und Geometrie 1* begeitet. Dementsprechend zerfällt dieses Skriptum in die beiden Teile „Analysis“ und „Lineare Algebra und Geometrie“. Die entsprechenden Beispiele bilden so den Stoff des jeweiligen Proseminars in der „Studieneingangsphase“.

Die hier zusammengestellten Beispiele dienen der eigenständigen Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung, sowie wichtiger Aspekte des Schulstoffs. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung nur dann, wenn sie *selbständig* bearbeitet bzw. gelöst werden! In den Proseminaren, die mit der Vorlesung inhaltlich eine untrennbare Einheit bilden, werden die Aufgaben dann von Studierenden vorgetragen und diskutiert.

Über den genauen Ablauf der Proseminare informieren Sie sich bitte im entsprechende Informationsblatt.

Die so wie dieser Text grau hinterlegten Beispiele behandeln Themen, die über den Schulstoff hinaus gehen. Sollten Sie bei *anderen* Beispielen Schwierigkeiten haben, so nehmen Sie das bitte zum Anlass, die entsprechenden Abschnitte in Ihren Schulbüchern nochmals sorgfältig zu wiederholen.

R. Steinbauer, H. Schichl, März 2004

Analysis

Elementare Funktionen, Trigonometrie

1. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 1.* Wiederhole die Definiton des Logarithmus sowie die Rechenregeln für Logrithmen und Potenzen (Schulstoff, 6. Klasse AHS) und berechne (ohne einen Taschenrechner zu verwenden):

   (a) $\log_2 32$.
   (b) $\log_{17} 4913$.
   (c) $2^x = 1048576$.
   (d) $3^x = 11$ (verwende Logarithmen zur Basis 3).
   (e) $3^x = 11$ (verwende Logarithmen zur Basis e).
   (f) $8^{\log_2 3}$.
   (g) $16^{\frac{1}{4}\log_2 5}$.
   (h) $e^{3\log 5}$.
   (i) $e^{2\log x}$.
   (j) $e^{4\log 6x}$.

   Hinweis: Wir folgen hier der Konvention log (ohne Basis) für den Logarithmus zur Basis e (e, die Eulersche Zahl) zu schreiben.

2. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 2.*
   (a) Löse die Gleichung: $7^{x+2} - 7^{x-1} = 349$.
   (b) Löse das Gleichungssystem: $4^x 8^y = 512$, $5^{x-y} = 25$.

3. *Textaufgabe (Radiokativer Zerfall).* Die Atomkerne einiger chemischer Elemente (Uran, Plutonium) zerfallen spontan. Die Zeit τ, in der von einer bestimmten Stoffmenge die Hälfte zerfällt heißt *Halbwertszeit.* (Sie kann einige Sekundenbruchteile (Pt^{212}) oder etliche Milliarden Jahre (U^{238} betragen.) Obwohl für keinen einzigen instabilen Atomkern vorausgesagt werden kann, wann genau er zerfällt, gilt für eine genügend große Menge von instabilen Kernen ein exponentielles *Zerfallsgesetz*

   $$N(t) = N(0)\, e^{-\lambda t}$$

   wobei $N(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t vorhandenen Kerne bezeichnet und $t = 0$ als Anfangszeitpunkt festgelegt. Schließlich ist λ die von der Substanz abhängige *Zerfallskonstante.*

   (a) Zeige, dass die Halbwertszeit unabhängig von der Anfangsmenge der radiokativen Substanz ist.
   (b) Drücke die Zerfallskonstante λ durch die Halbwertszeit τ aus.
   (c) Das bei Atombobenversuchen freigesetzte Kobaltisotop hat eine Halbwertszeit von 5.3 Jahren. Berechne nach wievielen Jahren nur mehr 10% bzw. 1% der ursprünglich freigesetzten Menge vorhanden ist.

4. *Sinus und Cosinus.* Wiederhole die Definition der Winkelfunktionen (Schulstoff, 6. Klasse AHS), und ihre Funktionsgraphen.

   (a) Bestimme alle reellen x, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (b) Bestimme alle $x \in [-\pi, \pi]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (c) Bestimme alle $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (d) Bestimme alle $x \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (e) Bestimme alle $x \in [0, \pi]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (f) Bestimme alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (g) Bestimme alle $x \in [-2\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
   (h) Bestimme alle $x \in [6\pi, \frac{13\pi}{2}]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.

5. *Steigung.* Unter der *Steigung* einer Straße oder Trasse versteht man den Tangens des Winkels, den die Straße mit der Horizontalen einschließt, also $\tan \alpha = \frac{h}{b}$. Dabei ist h der Höhenunterschied und b die Länge der Projektion des Straßenstückes auf die Horizontale.

   (a) Berechnen Sie für folgende Straßensteigungen den zugehörigen Winkel: 10 %, 20 %, 25 %. (*Hinweis*: 10 % = 0,1.)
   (b) Jemand legt auf einer unter 18 % ansteigenden Straße einen Kilometer zurück. Welchen Höhenunterschied hat er dabei überwunden?
   (c) Die Zahnradbahn auf den Schneeberg (NÖ) verläuft auf einer Länge von 9,85 km von Puchberg am Schneeberg (Seehöhe 577m) zum Hotel Hochschneeberg (Seehöhe 1795m). Berechnen Sie mittlere Steigung und zugehörigen Winkel. Die maximal Steigung beträgt 197 Promille. (*Hinweis*: 1 Promille=0,1%) Welche Seehöhe würde erreicht, falls die gesamte Strecke maximale Steigung hätte?

6. Die Grundkante der (quadratischen) Cheopspyramide ist 230 m lang, die Seitenflächen sind unter $\alpha = 51{,}9°$ zur Grundfläche geneigt. Berechnen Sie a) die Höhe, b) die Länge einer Seitenkante, c) den Rauminhalt der Pyramide!

7. *Cosinussatz.* Von einem Dreieck kennt man $a = 128{,}3$, $b = 175{,}4$, $c = 91{,}4$. Berechnen Sie die Winkel!

Summen- und Produktzeichen, Induktion

8. *Summen- und Produktschreibweise 1.*
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

(a) $\sum_{k=2}^{12} k^{2k+1}$

(b) $\sum_{k=-4}^{-6} b_k$

(c) $\sum_{k=0}^{n} x^{k-1}$

(d) $\prod_{j=1}^{9} i^3$

(e) $\prod_{i=1}^{7} h^i$

(f) $\prod_{l=1}^{5} l^j$

(g) $\sum_{j=2}^{5} \prod_{k=2}^{4} e^{jk+2}$

(h) $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} \binom{k}{j}$

9. *Summen- und Produktschreibweise 2.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

(a) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$

(b) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$

(c) $x^9 + 3x^{14} + 9x^{19} + 27x^{24} + 81x^{29} + 243x^{34} + 729x^{39}$

(d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots (2n-1)$

(e) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$

(f) $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 2a_1^2 + 6a_2^2 + 10a_3^2 + 4a_1^3 + 12a_2^3 + 20a_3^3 + 8a_1^4 + 24a_2^4 + 40a_3^4$

10. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} q^{-k} = \frac{q^{n+1}-1}{q^n(q-1)}, \; q \neq 1$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 + k = \left(\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}\right)$$

(c) $$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$$

11. *Summen- und Produktschreibweise 3.* Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=3}^{7} a_{j-2}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_{2k-1} = \sum_{j=-n+1}^{0} p_{-1-2j}$

(c) $\displaystyle\sum_{t\in\{9,16,25,36,49\}} m_t^j = \sum_{p=2}^{6} m_i^{(p+1)^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{2k} = \sum_{j=0}^{2n} \frac{(-1)^j+1}{2} b_j$

(e) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{3j-1} = \sum_{i=0}^{n-1} c_{3j+2}$

(f) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(g) $\displaystyle\log \prod_{i=0}^{n} 3^{a_i} = \log 3 \sum_{j=0}^{n} a_j$

(h) $\displaystyle\prod_{j=0}^{n} j(n-j)p^{\frac{1}{2}j(n-j)} = \sqrt{\prod_{k=1}^{m-1} k(m-k)p^{k(m-k)}}$

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

12. *Bernoullische Ungleichung.* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{für } x \geq -1 \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

13. *Alle Menschen haben blaue Augen.* Die Anzahl aller Menschen ist endlich. Wir können daher den Beweis mittels vollständiger Induktion führen:
Für den Induktionsanfang wird es Ihnen nicht schwer fallen, einen Menschen mit blauen Augen zu benennen.
Als Induktionsannahme postulieren wir, wir hätten bereits für alle Mengen von k Menschen gezeigt, dass alle blaue Augen haben.
Für den Induktionsschritt betrachten wir nun eine beliebige Menge von $k+1$ Menschen $\mathcal{M} := \{M_0, M_2, \dots, M_k\}$. Wir bilden nun die Mengen $\mathcal{M}_0 := \{M_0, \dots, M_{k-1}\}$ und $\mathcal{M}_1 := \{M_1, \dots, M_k\}$. Beide dieser Mengen haben k Elemente, und daher haben jeweils alle in ihnen enthaltenen Menschen blaue Augen, nach Induktionssannahme. Weil jeder Mensch aus $\mathcal{M}$ in $\mathcal{M}_0$ oder in $\mathcal{M}_1$ enthalten ist, hat jeder Mensch in $\mathcal{M}$ blaue Augen. Daher enthalten alle Menschenmengen der Größe $k+1$ nur Menschen mit blauen Augen.
Aus vollständiger Induktion folgt daher, dass alle Menschen blaue Augen haben.

Diskutieren Sie den obigen Beweis.

Mengen, Relationen

14. *Mengenoperationen 1.* Beweisen Sie
    (a) eines der Verschmelzungsgesetze und
    (b) eines der De Morgan-Gesetzte

aus Theorem 3.3.12. Verwenden Sie für einen der beiden Beweise die Mengentafel, für den anderen die Definitionen der Mengenoperationen und Theorem 3.1.6 (wie im Beweis des Distributivgesetzes im Skriptum).

15. *Mengenoperationen 2.* Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:
    (a) $B \subseteq A \;\Rightarrow A \cup B = A$ und $A \cap B = B$
    (b) $B \cup A = A \Leftrightarrow B \subset A$
    (c) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

16. *Äquivalenzrelationen.*
    (a) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen betrachten wir die Relation

$$x \equiv y \;\; :\Leftrightarrow x - y \text{ ist durch 3 teilbar.}$$

    Zeigen Sie, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.
    (b) Bei einem Skirennen betrachtet man 2 Laufzeiten als gleich, wenn sie sich abgerundet auf Hundertstelsekunden nicht unterscheiden. Definiert dieser Gleichheitsbegriff eine Äquivalenzrelation?

17. *Ordnung und Schranken.* Betrachten wir $\mathbb{R}$ mit der (natürlichen) Ordnung $\leq$. Gib für die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ obere und untere Schranken an, falls diese existieren. Handelt es sich dabei um Maxima resp. Minima? Sind die entsprechnden Mengen beschränkt?

    (a) $]-1, 3]$
    (b) $[a, \infty)$
    (c) $]-3, 2[\cup[4, 5[$
    (d) $\mathbb{P}$, die Primzahlen

Differential- und Integralrechnung, Extremwertaufgaben

18. *Differenzieren 1.* Differenzieren Sie nach der angegebenen Variable:

    (a) $f(x) = \dfrac{(1-\sqrt[3]{2x})^2}{x\sqrt{x}}$
    (b) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x}}$
    (c) $f(y) = \sqrt{\dfrac{\sin y - 1}{\cos x + 1}}$
    (d) $x(z) = \sin(\tan z)$
    (e) $g(x) = \dfrac{c^x}{x^c}$
    (f) $g(c) = \dfrac{c^x}{x^c}$
    (g) $h(x) = x^x$
    (h) $y(v) = x^{x^x}$

19. *Differenzieren 2.* Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen von:

    (a) $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
    (b) $f(x) = (x^4 - 2)^5$

20. *Kurvendiskussion.* Unter Diskussion des Graphen einer Funktion (Kurvendiskussion) verstehen wir die Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereiches, der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte, Monotonie, Wendepunkte, Tangenten an die Wendepunkte und des Krümmungsverhaltens (im Fall der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte und Wendepunkte, so vorhanden).

    Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und zeichnen Sie den Graphen.

    (a) $f(x) = \dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$

(b) $g(x) = \sin x + \tan x$

(c) $h(x) = x \cos x$

(d) $i(x) = \frac{\sin x}{x}$, Vorsicht bei 0! Untersuchen Sie die Funktion dort empirisch, falls Sie keine weiter führenden Techniken aus der Schule kennen.

(e) $j(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

21. *Unbestimmte Integrale.* Berechnen Sie die folgenden Integrale

(a) $\displaystyle\int (3x+4)^3 \, dx$

(b) $\displaystyle\int e^{2+5y} \, dt$

(c) $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$

(d) $\displaystyle\int \sin x \, e^{\cos x} \, dx$

(e) $\displaystyle\int 2x^3 \log x \, dx$

(f) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^2-4x+3} \, dx$

(g) $\displaystyle\int \sqrt[n]{ax+b} \, dx \ (n > 1)$

22. *Bestimmte Integrale.* Berechnen Sie:

(a) $\displaystyle\int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

(b) $\displaystyle\int_0^1 3^x \, dx$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(3x) \, dx$

(d) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \left(ax^2 + bx + c\right) \, dt$

(e) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(1-2x)^2}{x^2} \, dx$

(f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x^4}{x^5+3} \, dx$

(g) $\displaystyle\int_0^1 e^{x+e^x} \, dx$

23. *Integrieren.*

(a) Weisen Sie folgende Formel (doppelte partielle Integration) nach:

$$\int f(x)g''(x)\,dx = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) + \int f''(x)g(x)\,dx.$$

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx\,.$$

(c) Weisen Sie folgende Formel nach:

$$\int \sqrt{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \frac{2}{3}f(x)\sqrt{f(x)} + C.$$

Beispiele mit Mathematica

Die folgenden Aufgaben sind für die Bearbeitung mit Mathematica gedacht. Das benötigte Hintergrundwissen finden Sie in den entsprechenden Notebooks, d.h. alle Aufgaben sind mit den dort vorgestellten Befehlen und Methoden lösbar. Die genauen Abgabemodalitäten für diese Aufgaben werden im Proseminar bekanntgegeben.

24. *Rechnen mit Mathematica.* Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse der Aufgaben 1 (a),(b) und 1 (f)-(h) mit Mathematica.

25. *Vereinfachen rationaler Ausdrücke 1.* Betrachten Sie den rationalen Ausdruck

$$\frac{x^4 - 16}{x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 16x + 12}$$

und vereinfachen Sie ihn mit Hilfe von Matehmatica zu

(a) $\frac{-4+x^2}{x^2+4x+3}$ und

(b) $\frac{(-2+x)(2+x)}{(1+x)(3+x)}$.

26. *Vereinfachen rationaler Ausdrücke 2.* Betrachten Sie den rationalen Ausdruck

$$r = 2\,\frac{x^3 - x^2y - xy + y^2}{x^3 - x^2y - x + y}.$$

Vereinfachen Sie r mit Mathematica zu

(a) $\frac{2(x^2-y)}{-1+x^2}$ bzw. zu

(b) $\frac{2(x^2-y)}{(-1+x)(1+x)}$.

27. *Wertetabelle und Plotten.* Erstellen Sie für die folgenden Paare von Funktionen eine Wertetabelle und stellen Sie beide Funktionen jeweils in einem Plot dar. Wählen Sie jeweils einen „vernünftigen“ Definitionsbereich.

(a) $f(x) = \sin^2(x)$, $g(x) = \cos^2(x)$

(b) $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^3}$

28. *Stückweise Definition von Funktionen.* Definieren und plotten Sie folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(i = 1, 2)$.

(a) $f_1(x)$ habe auf dem Intervall $(0, 1)$ den Funktionswert 1, sonst den Wert -1

(b) $f_2(x) := \begin{cases} \sin(x) & 2k\pi \le x \le (2k+1)\pi,\ -1 \le k \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

29. *Binomialkoeffizient.* Definieren Sie rekursiv eine Funktion binom(n, k), die den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ als Funktionswert hat. Überprüfen Sie die Korrektheit Ihrer Definition unter Zuhilfenahme der eingebauten Funktion Binomial.

30. *Gleichungen 1.* Lösen Sie die Gleichungen aus den Beispielen 1 (c), (d) mit Mathematica und vergleichen Sie die neuen Ergebnisse mit Ihren damaligen Berechnungen. Setzen Sie Lösungen in die Gleichungen ein und überprüfen Sie so auch mit Mathematica Ihre Ergebnisse.

31. *Gleichungssysteme.* Lösen Sie mit Mathematica die linearen Gleichungssysteme aus dem Beispiel 1 aus dem Lineare-Algebra-Teil. Setzen Sie wiederum zur Probe die Lösungen in die Gleichungen ein. Beachten Sie, dass in zwei der vier Beispielen freie Parameter auftreten. Was passiert, wenn Sie diese Parameter Null setzen?

32. *Sinus.* Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse von Beispiel 4 mittels Mathematica.

33. *Newton Interpolation.* Finden Sie ein Polynom p vom Grad 5, das die folgende Wertetabelle erfüllt.

x	$p(x)$
-2	-183
-1	-27
0	-9
1	-3
2	21
3	237

Hinweis: Beginnen Sie mit dem folgenden Ansatz ($a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 6$)

$$\begin{aligned} p(x) = {} & a_0 + a_1 x + a_2 x(x+1) + a_3 x(x+1)(x-1) \\ & + a_4 x(x+1)(x-1)(x+2) + a_5 x(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

Benutzen Sie dann die Wertetabelle um die Koeffizienten a_i zu bestimmen.

Zusatz: Zeigen Sie (mit Papier und Bleistift, dh. *ohne* Mathematica, denn es wird Ihnen hier nicht viel helfen...), dass ein Polynom p vom Grad $k-1$, das an den Stellen b_i die Werte a_i annimmt ($1 \leq i \leq k$) wie folgt geschrieben werden kann

$$p(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \frac{1}{p_i(b_i)} p_i(x),$$

wobei

$$p_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^{k}(x-a_j)}{x-a_i}.$$

(Man kann sogar beweisen, dass p das eindeutig bestimmte Polynom von minimalem Grad ist, das die vorgegebene Wertetabelle erfüllt; dafür kann man zB. den Fundamentalsatz der Algebra bemühen...)

34. *Vermutung und Beweis:* Sie haben in Beispiel 10(b) mittels vollständiger Induktion einige Summenformeln bewiesen. Wie steht es mit der Summe der ersten n Quadrate oder der vierten Potenzen oder der fünften oder anderer Polynome? Versuchen Sie mit Hilfe von Mathematica geschlossene Ausdrücke für diese Summen, genauer für

$$s(m,n) := \sum_{k=1}^{n} k^m$$

für $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ zu finden. (Über die Verwendung des Befehls `Sum` machen Sie sich am besten in der Online-Hilfe schlau; er „funktioniert“ dankenswerter Weise analog dem Summenzeichen!) Konkret erledigen Sie die folgenden Aufgaben:

    (a) Geben sie Formeln für die Summe der ersten n Potenzen der Ordnung m für $0 \leq m \leq 10$ an.

    (b) Beweisen Sie exemplarisch eine dieser Formeln mittels vollständiger Induktion. (Sie wissen schon, *ohne*...)

35. Ein 4 m langer Draht soll in zwei Teile zerschnitten werden, wobei der eine Teil zu einem Kreis, der andere zu einem Quadrat gebogen werden soll. Wo muss man den-Draht zerschneiden, damit der Gesamtflächeninhalt von Kreis und Quadrat minimal wird?

36. Einem gleichschenkeligen Trapez mit $a = 8$, $c = 6$ und $h = 3$ soll ein Rechteck mit größtem Flächeninhalt so eingeschrieben werden, dass eine Rechteckseite auf der Grundlinie des Trapezes liegt.

37. *Ein Problem von Johannes Kepler.* Ein Fass hat die Gestalt eines geraden Zylinders. In halber Höhe des Zylinders ist der Mittelpunkt des Spundloches. Der Abstand dieses Mittelpunktes vom entferntesten Punkt eines Grundkreises ist $\sqrt{3}$. Wie groß müssen

der Durchmesser des Grundkreises und die Fasshöhesein, damit das Faßvolumen den größten Wert annimmt?

38. Einem Drehzylinder (Radius r, Höhe h) wird ein Drehkegel so umgeschrieben, dass die Zylindergrundfläche konzentrisch in der Kegelgrundfläche liegt. Berechnen Sie Radius R und Höhe H jenes Drehkegels, der das kleinste Volumen hat.

Lineare Algebra und Geometrie

Gleichungen und Ungleichungen

1. *Lineare Gleichungssysteme.* Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

   (a) $$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 29 \\ 8x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \end{array}$$

   (b) $$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \end{array} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,,\ \text{(konstant)}$$

   (c) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

   (d) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 5a & - & 2b & + & 3c & - & 4d & = & 0 \\ 2a & + & b & & & & & = & 0 \\ & & & & 3c & - & 2d & = & x \\ a & & & + & 6c & & & = & y \end{array} \qquad x, y \in \mathbb{R}\,,\ \text{(konstant)}$$

2. Eine Strecke von 80 cm soll so in zwei Teile geteilt werden, dass diese beiden Strecken Katheten eines rechtwinkeligen Dreieckes mit dem Flächeninhalt 768 cm^2 sein können. Wie lang sind die Teile?

3. Bestimmen sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

   a) $\frac{17-3x}{5} + 38 < 4x - 13.$

   b) $325 - 2x(2x - 39) < 8x(x - 4)^2 - (2x - 5)^3.$

   c) $4 - 3x < 2x + 3 \leq 3x - 4.$

   d) $x < x + 3 < 6 \leq 5x - 1.$

   e) $\frac{5+x}{5-x} \leq 2.$

   f) $3 - \frac{x+1}{x-2} < \frac{x-4}{x-2}.$

   g) $\frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2}.$

4. Bestimmen sie zeichnerisch, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

   a) $x - 2y \geq 0$ und $2x + y \geq 1.$

   b) $x + y \leq 1$ oder $x - y \leq 1.$

   c) $3y^2 \leq 6 - 2x^2.$

5. *Binomialkoeffizient.* Wiederholen Sie den Begriff des Binomialkoeffizienten und beweisen Sie die folgenden Identitäten.

   (a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$
   Verwenden Sie dabei die Darstellung des Binomialkoeffizienten aus Proposition 2.5.4, also $\binom{n}{k} = n!/((n-k)!\,k!)$.

   (b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$,

   (c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

   Hinweis: Während die Aufgabe a) durch „brute force“ gelöst werden kann, bewältigt man die Aufgaben b) und c) am einfachsten mit einem „Trick“: Formulieren Sie die rechten Seiten mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes!

Mathematische Grundlagen, Logik

6. *Mathematische Ausdrucksweise 1.* Lesen Sie die folgende verunglückte Lösung zu dem angeführten Übungsbeispiel durch. Versuchen Sie, alle Unklarheiten und Ungeschicklichkeiten zu entdecken und produzieren Sie eine den mathematischen Gepflogenheiten und Schreibweisen entsprechende richtige Lösung:
   Zeigen Sie: Das Quadrat jeder ungeraden Zahl ist kongruent 1 modulo 4.
   LÖSUNG:

   $$n \quad \text{Quadrat} \implies n^2$$
   $$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \quad = \quad \text{Rest } 1$$
   $$\nearrow$$
   $$\text{modulo } 4$$

7. Wie in Beispiel 6. *Zeigen Sie: Sei p eine Primzahl, und sei n eine natürliche Zahl. Dann gilt:*
   $$p|n^2 \iff p|n.$$
   LÖSUNG:

   Zu zeigen: p teilt $n^2 \iff$ wenn $p|n$
   Klar: notwendig ✓
   Umgekehrt: Wenn $p|n \implies$ auch $p|n^2$
   wg. Eindeutigkeit Primfaktorenzerlegung.

8. *Indirekter Beweis 1.* Beweisen Sie: n^2 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade.

9. *Indirekter Beweis 2.* Es gibt keine ganzen Zahlen n, m mit $28m + 42n = 100$.

10. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:
    (a) Alle Schwammerl sind giftig oder schwer zu finden.
    (b) Alle Schwammerl sind entweder giftig oder schwer zu finden.
    (c) Alle giftigen Schwammerl sind leicht zu finden.
    (d) Alle Schwammerl sind giftig, daher sind sie leicht zu finden.
    (e) Wenn zwei Geraden keinen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie parallel.
    (f) Es gibt Dreiecke, die zwei rechte Winkel haben.

    Hinweis: Wir folgen hier der Konvention aus der Vorlesung, die Formulierung „entweder ... oder" als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu interpretieren. Die Formulierung „oder" ist natürlich als das (mathematische) *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternative trifft zu) zu lesen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung und suchen als Zusatzaufgabe ein Beispiel aus dem Alltagsleben, wo die Formulierung „entweder ... oder" bedeutet, dass höchstens eine der (beiden) Alternative zutrifft, geben die Schaltwerttabelle der entsprechenden Operation an und vergleichen diese mit den Schaltwertabellen der OR- und der XOR-Operation.

11. *Äquivalente Aussagen.* Beweisen Sie die Äquivalenz

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

    und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:
    (a) $\forall n \in \mathbb{N}$: n^4 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade
    (b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $4 \mid n \Rightarrow 2 \mid n$
    (c) $\forall n \in \mathbb{N}$: $n^2 > n \Rightarrow n > 1$

    Hinweis: Das Zeichen „|" bedeutet „teilt".

12. *Rechenregeln.* Beweisen Sie eines der Distributivgesetze und eines der De Morganschen Gesetze aus Theorem 3.1.6.

13. *Logik 1.* Es seien p, q, und r beliebige Aussagen. Sind dann die folgenden Aussagen wahr?
    (a) $(p \vee (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
    (b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
    (c) $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg q)) \Rightarrow \neg p$
    (d) $\neg(q \wedge (\neg q))$
    (e) $(\neg q \vee p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

14. *Logik 2.* Wir betrachten die Aussagen p und q. Es gelte $p \Rightarrow q$. Was läßt sich dann über die folgenden vier Aussagen sagen?
    (a) $\neg q \Rightarrow \neg p$
    (b) $p \Rightarrow \neg q$
    (c) $q \Rightarrow p$
    (d) $\neg p \Rightarrow \neg q$

15. *Logik 3.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:
    (a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y$
    (b) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y$
    (c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y$
    (d) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$
    (e) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$
    (f) $\exists y \in \mathbb{Z} : \forall x \in \mathbb{N} : x \geq y$

16. *Fallunterscheidungen.*
    (a) Zeigen Sie $\max(x,y)\min(x,y) = xy$.
    (b) Zeigen Sie $\frac{x+y-|x-y|}{2} = \min(x,y)$.

Analytische Geometrie

17. *Abstand 1.* Gegeben seien der Punkt $P = (2,3,1)$ und die Gerade $g : X = (9,1,3) + t(3,4,-5)$ im Raum.
    (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalebene ε auf g durch P.
    (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von ε mit g.
    (c) Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g.

18. *Winkel 1.* Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade $g : X = (6, 3, -4) + t(2, 1, -2)$ die x–y–Ebene ?

19. *Schnittpunkt/winkel.* Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade $g : X = (6, 3, -4) + t(2, 1, -2)$ die x–y–Ebene ?

20. *Ebene.* Gegeben ist die Ebene $\varepsilon : 6x + 4y + 3z = 24$. Ihre Schnittpunkte mit den drei Koordinatenachsen werden mit A, B, C bezeichnet. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die aus diesen drei Punkten und dem Ursprung gebildet wird.

21. *Trapez im Raum.* Gegeben sind die Punkte $A = (4, 1, 1)$, $B = (2, 4, 5)$ und $C = (-1, -2, 3)$. Berechnen Sie den vierten Eckpunkt D des Trapezes $ABCD$, wenn noch zusätzlich bekannt ist, dass die Seiten AB und CD parallel sind und der Winkel DAB gleich dem Winkel ABC ist. Berechnen Sie auch noch den Flächeninhalt des Trapezes.

22. *Abstand 2.* Zeigen Sie, dass die Geraden $g : X = (1, 1, 3) + s(2, -1, 1)$ und $h : X = (5, 2, 3) + t(1, 0, -1)$ windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

23. *Kegelschnitte 1.* Gegeben sei die Parabel par : $x_2^2 = 16x_1$.

    (a) Die Normale g auf die Parabelachse durch den Brennpunkt F schneidet die Parabel in den Punkten A und B. Wie lautet eine Gleichung des Kreises k, der F als Mittelpunkt hat und durch A und B geht.

    (b) In welchem Punkt C mit positiver erster Koordinate schneidet der Kreis die x_1–Achse?

    (c) Von einem beliebigen Punkt $Q \neq O$ der Parabel wird das Lot auf g gezogen. Der Schnittpunkt des Lotes mit g sei R. Zeige, dass der Schnittpunkt S der Geraden QF und RC auf k liegt.

Abbildungen

24. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

    (a) $f_1(x) = x + 3$, $A_1 = \{1, 2, 5\}$, $B_1 = (-1, 3)$,

    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = (-1, 1)$, $B_2 = \{-1, 0\}$,

    (c) $f_3(x) = a$ $(a \in \mathbb{R}$ konstant$)$, $A_3 = \{0\} \cup (1, 2)$, $B_3 = \{a\}$.

25. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 1.*

(a) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B. Geben sie die (genauen(!)) Definitionen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f an.

(b) Geben Sie jeweils eine injektive und nicht surjektive, eine surjektive und nicht injektive und eine bijektive Funktion von A nach B an, wobei A und B geeignete Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

26. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 2.* Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^3$

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n^4$

(c) $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+ (:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\})$, $x \mapsto x^4 + 1$

(d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = -4x + 1$

(e) $f_5 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \cos x$

27. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 3.*

(a) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht bijektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ bijektiv ist?

(b) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht injektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ injektiv ist?

(c) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht surektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ surektiv ist?

28. *Urbildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist ... " an.

   (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

   (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   Falls Sie sich durch (b) nicht genügend herausgefordert fühlen, dann beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung für beliebige Vereinigungen

   $$f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

   Hier ist I eine beliebige Indexmenge.

   (c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

   Hinweis: Lassen Sie sich vom relativ hohen Abstraktionsgrad der Aufgabe nicht entmutigen! Gehen Sie formal vor und beginnen Sie zB. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass x ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$. Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen ... na sehen Sie, nach einer weiteren Verwendung der Definition des Urbilds und des Durchschnitts haben wir gezeigt, dass x Element der rechten Seite der Gleichung ist, also die Gleichheit gilt!

29. *Bildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) für f nötig sind, damit die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind. Muss bzw. kann man das $=$ durch $\subseteq$ oder $\supseteq$ ersetzen, damit die Beziehung auch für allgemeine f gilt? Geben Sie schließlich—wie im obigen Beispiel—eine verbale Formulierungen für jede der Eigenschaften an.

   (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,

   (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   Analog zu (b) im vorigen Beispiel gilt hier die Verallgemeinerung auf beliebige Durchschnitte unter denselben Voraussetzungen wie (b) selbst. Na, motiviert für einen Versuch?

   (c) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

Komplexe Zahlen

30. *Rechnen mit komplexen Zahlen 1.* Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $|z|$, $\arg z$, $1/z$, $\sqrt{z}$.

    (a) $z = 2 + 3i$,

    (b) $z = 1 - 3i$,

    (c) $z = i$,

    (d) $z = 2 - 2i$.

31. *Rechnen mit komplexen Zahlen 2.* Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

    (a) $\dfrac{1+i}{7-i}$,

    (b) $|4 + 3i|$,

    (c) $\left|\dfrac{2-6i}{3+8i}\right|$,

    (d) $(9 + 6i)^4$,

    (e) $\sqrt{5 - 3i}$,

    (f) i^{101},

    (g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{1234} i^n$.

32. *Rechnen mit komplexen Zahlen 3.*

    (a) Multiplizieren Sie $3+\frac{2}{3}i$ mit $-1+\frac{i}{4}$. Wie sieht das in der komplexen Zahlenebene aus?

    (b) Was ist in $\mathbb{C}$ das Inverse zu $\frac{7}{4} - \frac{2}{3}i$?

33. *Komplexe Nullstellen von Polynomen.* Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Nullstellen der Polynome

    (a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$,

    (b) $p(x) = x^3 + x - 10$,

    (c) $p(z) = z^2 - 4iz - 5$,

    (d) $p(z) = z^4 - 6z^2 + 25$,

34. *Lineares Gleichungssystem über $\mathbb{C}$.* Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned}(2-i)x + (2+i)y &= 12 - 6i\\ (2-3i)x - (1-i)y &= 11 - 3i.\end{aligned}$$

Gruppen, Ringe, Körper

35. *Eindeutigkeit des Inversen in eine Gruppe.* Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass für alle $g \in G$ das inverse Element g^{-1} eindeutig bestimmt ist.

36. *Polynomdivision.* Teilen Sie jeweils das Polynom p durch das Polynom q

    (a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$, $q(x) = x^2 + 1$

    (b) $p(x) = x^6 - 6x^5 + 23x^4 - 21x^3 + 12x^2 - 6x + 9$, $q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$

37. *Restklassen.* Berechnen Sie

    (a) $2 + 2 \mod 5$,

    (b) $5 - 8 \mod 6$,

    (c) $5 \cdot 6 \mod 13$,

    (d) $4^{-1} \mod 7$,

    (e) $4^{807} \mod 16$,

38. *Einheitswurzeln.* Zeigen Sie, dass die drei komplexen Lösungen der Gleichung $x^3 = 1$ eine abelsche Gruppe bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen bilden. Vergleichen Sie ihre Multiplikationstabelle mit derjenigen der additiven Gruppe $\mathbb{Z}_3$.

39. Sei G eine Gruppe, und seien $g, h \in G$. Bestimmen Sie $(gh)^{-1}$.

40. Die Symmetrien eines Rechtecks, das kein Quadrat ist, bilden eine Gruppe. Welche Ordnung hat sie? Stellen Sie die Multiplikationstabelle auf. Welche Untergruppen gibt es?

41. Sei R ein Ring. Beweisen Sie für alle $a \in R$ die Beziehung $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

42. S^1. Zeigen Sie, dass die komplexen Zahlen c mit $|c| = 1$ bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe bilden; diese wird mit S^1 bezeichnet. Kann man 1 durch ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ ersetzen?

43. $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$. Beweisen Sie, dass die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den Operationen

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{5}) \oplus (a' + b'\sqrt{5}) &:= (a + a') + (b + b')\sqrt{5}\\ (a + b\sqrt{5}) \otimes (a' + b'\sqrt{5}) &:= (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5}\end{aligned}$$

ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, indem Sie die Voraussetzungen der entsprechenden Proposition überprüfen. Versuchen Sie abzuschätzen, wieviel Arbeit es Ihnen bereiten würde, durch Nachprüfen der Körperaxiome zu beweisen, dass $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ ein Körper ist. Vergleichen Sie diesen Auwand mit dem, den Ihnen dieses Übungsbeispiel bereitet hat.

44. *Nullteilerfreiheit.* Sei K ein beliebiger Körper. Widerlegen Sie die Aussage: Es gibt $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $ab = 0$.

45. $\mathbb{Z}_7$. Stellen Sie die beiden Verknüpfungstafeln (bzgl. $+$ und $\cdot$) von $\mathbb{Z}_7$ auf. Welche algebraische Struktur sehen Sie vor sich?

46. $\mathbb{Z}_8$. Stellen Sie die beiden Verknüpfungstafeln (bzgl. $+$ und $\cdot$) für $\mathbb{Z}_8$ auf und vergleichen Sie diese mit derjenigen von $\mathbb{Z}_5$. Welche algebraische Struktur liegt vor? Sind $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_6$ als Ringe isomorph?