Proseminar zu Optimierung und Variationsrechnung (WS 2004/05)

(10) Bestimme die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für die folgenden Optimierungsprobleme.

(a)

$$\begin{aligned} &\min\ 3x_1^4 + 4x_2^2 + 3\sqrt{x_3} \\ &\text{s.t.}\ \ \sin x_1 x_2 + 3x_3 \leq 4 \\ &\qquad x_1 + 3x_2^2 - 4x_3 \geq -3 \\ &\qquad 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} &\min\ 3\sin x_1 + e^{x_2} \\ &\text{s.t.}\ \ x_2^3 \geq x_1 - 1 \\ &\qquad 4x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 0 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 4 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} &\max\ 3\sin(x_1) + x_2\cos(x_3) \\ &\text{s.t.}\ \ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 \geq 3 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 9 \end{aligned}$$

(11) Vergleiche die Optimalitätsbedingungen für die folgenden Optimierungsprobleme und erkläre das Ergebnis.

A)

$$\begin{aligned} &\min\ 4x_1^2 - 3x_1x_2 + 5x_2x_3 - x_2^3 + 4x_3^2 \\ &\text{s.t.}\ \ e^{x_1 - 4x_2} + 3x_1x_3 - 2x_2 \geq 0 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

B)

$$\begin{aligned} &\min\ x_4 \\ &\text{s.t.}\ \ x_4 - 4x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_2x_3 + x_2^3 - 4x_3^2 = 0 \\ &\qquad e^{x_1 - 4x_2} + 3x_1x_3 - 2x_2 \geq 0 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned} &\min\ x_4 \\ &\text{s.t.}\ \ x_4 - 4x_1^2 + 3x_1x_2 - 5x_2x_3 + x_2^3 - 4x_3^2 \geq 0 \\ &\qquad e^{x_1 - 4x_2} + 3x_1x_3 - 2x_2 \geq 0 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(12) (a) Bestimme das duale Optimierungsproblem zu

$$\begin{aligned} \min\ & (x_1-1)^2 + 4(x_2+3)^2 + 2(x_3-4)^4 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \le 0 \\ & 4x_2 + 5x_3 - x_1 = 0 \\ & -3x_1 - x_2 + 5x_3 \ge 0 \\ & x_1, x_2 \ge 0, \quad x_3 \le 0. \end{aligned}$$

(b) Berechne die Lösung des primalen Problems.
(c) Bestimme die Lösung des dualen Problems.
(d) Gibt es eine Dualitätslücke?

(13) Consider the linear program

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x \\ \text{s.t.}\ & Ax \ge b \\ & x \ge 0. \end{aligned}$$

Write down the dual optimization problem and simplify it until the dual problem depends on the Lagrange multipliers only.

(14) Finde möglichst einfache Optimalitätsbedingungen für ein Optimierungsproblem mit einfachen Schranken

$$\begin{aligned} \min\ & f(x) \\ \text{s.t.}\ & x_i \in [\underline{x}_i, \overline{x}_i], \quad \forall i. \end{aligned}$$

(15) Verwende den allgemeinen Satz über die Optimalitätsbedingungen von Karush-John, um Optimalitätsbedingungen für das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \max\ & f(x) \\ \text{s.t.}\ & A_1 x = b_1 \\ & A_2 x \in [\underline{b}, \overline{b}] \\ & C(x) \ge 0 \\ & F(x) = 0 \\ & F(x) \in [\underline{a}, \overline{a}], \end{aligned}$$

wobei $C$ eine konvexe Funktion sei, herzuleiten.

(16) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Wir sagen, dass der Punkt $x$ den Punkt $y$ **stark Pareto–dominert**, wenn

$$\forall i : f_i(x) > f_i(y).$$

Der Punkt $\hat{x}$ heißt **lokal Pareto–optimal**, wenn eine Umgebung $U$ von $x$ existiert, sodass kein $y \in U$ existiert, das $\hat{x}$ stark Pareto–dominiert.

Sei nun speziell $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$. Welche Optimalitätsbedingungen erster Ordnung folgen aus der Tatsache, dass $\hat{x}$ Pareto–optimal ist?