Proseminar zu Optimierung und Variationsrechnung (WS 2004/05)

(21) Wie sehen die Bedingungen an eine effiziente Liniensuche für Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aus, und was lässt sich daraus für eindimensionale Optimierungsverfahren folgern?

(22) Betrachte das Optimierungsproblem

$$\min f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2.$$

(a) Bestimme die Abstiegsbedingung für gerade Liniensuchen.

(b) Ist die Abstiegsbedingung für die Newton–Richtung

$$s(x) = -D^2 f(x)^{-1} g(x)$$

an jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ erfüllt?

(23) Führe einige effiziente Liniensuchen mit der Gradientenrichtung und mit der Newton-Richtung für das Optimierungsproblem in Beispiel 22 durch und vergleiche das Ergebnis. Der Startwert sei in jedem Fall $x_0 = (2, 2)$. (Hinweis: ein kurzes MATLAB-Programm erspart einiges an Hand-Rechnerei!)

(24) Betrachte das Optimierungsproblem (die Rosenbrock–Funktion)

$$\begin{aligned} &\min\ (-10x_1^2 + 10x_2)^2 + (x_1 - 1)^2 \\ &\text{s.t. }\ x_1, x_2 \in [-2, 8]. \end{aligned}$$

(a) Bestimme die Abstiegsbedingung für gerade Liniensuchen.

(b) Ist die Abstiegsbedingung für die Newton-Richtung

$$s(x) = -D^2 f(x)^{-1} g(x)$$

an jedem Punkt des $\mathbb{R}^2$ erfüllt?

(25) Führe einige effiziente Liniensuchen mit der Gradientenrichtung und mit der Newton-Richtung für das Optimierungsproblem in Beispiel 22 durch und vergleiche das Ergebnis. Hier sei der Startwert $x_0 = (1, 2)$.

(26) Bestimme die Optimalitätsbedingungen erster Ordnung für die Optimierungsprobleme

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. }\ Ax \leq b \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ &\text{s.t. }\ F(x) = 0 \end{aligned}$$

, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ beide C^1–Funktionen seien und Optimalität im Sinne von Pareto wie in Beispiel 16 verstanden sei.