29. *Mengenoperationen konkret.* Gegeben $X = \{3, 6, 9, 12\}, Y = \{6, 12, 18, 24\}, Z = \{3, 9, 15, 21\}$. Bestimmen Sie:
    (a) $X \cup (Y \backslash Z)$
    (b) $(Y \cup X) \backslash (X \cap Z)$

30. *Mengenoperationen abstrakt.* Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:
    (a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$
    (b) $(A \cap B) \cup A = A$
    (c) $(B \cup A) \setminus (B \cap A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

31. *Grundeigenschaften von Relationen.* Welche der Eigenschaften „reflexiv", „symmetrisch" und „transitiv" haben die folgenden Relationen R auf M?
    (a) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ a$ ist Primteiler von b ($M = \mathbb{N}$)
    (b) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ |a| = |b|$ ($M = \mathbb{R}$)
    (c) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow$ (a teilt b) oder (b teilt a) ($M = \mathbb{N}$)
    (d) $a\ R\ b \ :\Leftrightarrow\ a = 5^m \cdot b$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ($M = \mathbb{N}$)

32. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:
    (a) $f_1(x) = -x + 1$, $A_1 = \{0, 1, 2\}$, $B_1 = (0, 1)$
    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = \{-1, 1\}$, $B_2 = \{-1, 0\}$
    (c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant), $A_3 = \{-1, 0\} \cup (1, 4)$, $B_3 = \{a\}$

33. *Urbildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist … " an.
    (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
    (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

    Falls Sie sich durch diese beiden Aufgaben nicht genügend herausgefordert fühlen, dann beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung für beliebige Duchschnitte bzw. Vereinigungen:

$$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i) \\ f^{-1}\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

    Hier ist I eine beliebige Indexmenge und die A_i ($i \in I$) sind beliebige Mengen.

(c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

Hinweis: Lassen Sie sich vom relativ hohen Abstraktionsgrad der Aufgabe nicht entmutigen! Gehen Sie formal vor und beginnen Sie zB. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass x ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$. Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen ... na sehen Sie, nach einer weiteren Verwendung der Definition des Urbilds und des Durchschnitts haben wir gezeigt, dass x Element der rechten Seite der Gleichung ist, also die Gleichheit gilt!

34. Es seien $x, y \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion auf den natürlichen Zahlen.

    (a) Man zeige, dass
    $$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
    eine Äquivalenzrelation ist.

    (b) Man gebe ein Beispiel für f an, sodass es nur eine einzige Äquivalenzklasse gibt.

    (c) Man gebe ein Beispiel für f an, sodass jede Äquivalenzklasse einelementig ist. Unter welchen Voraussetzungen an f (injektiv,surjektiv,bijektiv) stimmt das immer?

35. *Gruppenaxiome.* Stellen Sie (durch Nachprüfen der Gruppenaxiome) fest, ob $(\mathbb{R}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei die Verknüpfung durch
$$a \oplus b := a + b + 3$$
definiert ist.

36. Es seien $(G, \odot_G), (H, \odot_H)$ und $(K, \odot_K)$ Gruppen sowie $f : G \to H$ und $g : H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Man zeige $g \circ f : G \to K$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

37. *Explizites Rechnen mit Restklassen* Berechnen Sie modulo 3 und modulo 4:

(i) $\bar{2} + \bar{3}$	(iv) $\bar{2} \cdot \bar{2}$
(ii) $\bar{1} - \bar{2}$	(v) $\bar{2} \cdot \bar{3}$
(iii) $\bar{2} - \bar{3}$	(vi) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

38. *Geraden im Raum.* Überprüfen Sie jeweils die Lagebeziehung der folgenden Paare von Geraden:

    (a) $g : X = (2, -1, 5) + t(1, 4, -4)$ und $g_{R:S}$ mit $R = (2, 3, 3)$ und $S = (6, 11, -9)$.

    (b) g_{Pv} und g_{Qw} für $P = (1, 2, -1)$, $Q = (1, -1, 3)$, $v = (1, 3, 2)$ und $w = (1, 3, 0)$

39. *Abstand 1.* Gegeben seien der Punkt $P = (5, 4, 3)$ und die Gerade g_{Xv} mit $X = (9, 1, 3)$ und $v = (3, 4, -5)$ im Raum.

   (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalebene ε auf g_{Xv} durch P.

   (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von ε mit g.

   (c) Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g_{Xv}.

40. *Abstand 2.* Zeigen Sie, dass die Geraden g_{Pv} und g_{Qw} mit $P = (1, 2, 3)$, $v = (0, -1, 1)$, $Q = (3, 2, 1)$ und $w = (1, 0, 1)$ windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

41. *Ebenen im Raum.* Gegeben sind die Ebenen:

   (a) ε_{Qrs} und ε_{Ptw} mit $Q = (3, 1, 4)$, $P = (-1, 2, 1)$, $r = (1, 1, 1)$, $s = (-1, 1, 2)$, $t = (5, -1, -4)$ und $w = (0, 2, 3)$

   (b) $\varepsilon_{A:B:C}$ und ε_{Duv} mit $A = (3, 4, -2)$, $B = (2, 1, -1)$, $C = (1, 4, 0)$, $D = (4, 5, 1)$, $u = (1, 1, 1)$ und $v = (1, 1, 0)$

   Überprüfen Sie jeweils die Lagebeziehungen der Ebenen. Falls sie einander schneiden, bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

42. *Lineares Gleichungssystem über* $\mathbb{C}$. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}x + (1+i)y &= 0 \\ 2x - (1-i)y &= 2 \end{aligned}$$