Aufgabensammlung zum
Tutorium zur STEOP für LAK

Zusammengestellt von A. Čap und H. Schichl

Wintersemester 2012/13

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in das mathematische Arbeiten* für Lehramtsstudierende. Diese findet geblockt am Anfang des Semesters („STEOP", 2.10.—17.12.2012) statt und wird in diesem Zeitraum vom *Tutorium zur STEOP für LAK* begeitet.

Die hier zusammengestellten Beispiele dienen der eigenständigen Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung, sowie wichtiger Aspekte des Schulstoffs. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung nur dann, wenn sie *selbständig* bearbeitet bzw. gelöst werden!

A. Čap und H. Schichl, Oktober 2012

1. *Die Summe ungerader und gerader Zahlen.* Beweisen Sie, dass die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl ungerade ist. Hinweis: Eine ungerade Zahl a lässt sich als $a = 2k + 1$ für ein passendes ganzes k schreiben.

2. *Indirekter Beweis.* Beweisen Sie, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass $15a + 48b = 107$ gilt.
   Hinweis: Gehen Sie indirekt vor, indem Sie annehmen, dass es solche Zahlen gibt. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite der Gleichung, der die rechte Seite nicht teilt.

3. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & a_{23} \\ 4 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$
   von der man weiß, dass die Eintragungen von der Form $a_{ij} = \alpha i - \beta j + \gamma$, für (unbekannte) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sind. Man berechne die fehlenden Eintragungen.

4. *Summen- und Produktschreibweise 1.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

   (a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2m$

   (b) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17$

5. Es sei die Zahlenfolge θ für $i = 1, \ldots, 10$ durch $\theta_{2i-1} = 1$ und $\theta_{2i} = 0$ gegeben. Schreiben Sie die Folge an und beschreiben Sie in Worten, welche Gestalt θ hat.

6. Man finde einen geschlossenen Ausdruck für
$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right).$$
   Hinweis: Es handelt sich hierbei um eine Teleskopsumme, alle Terme bis auf zwei heben sich auf. Welche sind das? Dies findet man heraus, indem man einige Summanden anschreibt.

7. Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.

   (a) $\sum_{i=1}^{k} (b_i - b_{i-1}) = b_{k-1} - b_1$

   (b) $\sum_{i=1}^{n} p_{2i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} p_{2i+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

8. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \tfrac{1}{4}n^2(1+n)^2$, $n \geq 1$,

   (b) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$

9. *Geometrische Reihe.* Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe, d.h. für beliebiges reelles q und n in $\mathbb{N}$ zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

10. *Binomialkoeffizient.* Beweisen Sie: Der Binomialkoeffizient erfüllt die Identität

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}.$$

11. *Fallunterscheidungen.* Wir definieren

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x < y \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{falls } x > y \end{cases}.$$

   (a) Zeigen Sie $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$.

   (b) Berechnen Sie $\max(x,y) - \min(x,y)$.

12. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 1.* Wiederholen Sie die Definiton des Logarithmus sowie die Rechenregeln für Logrithmen und Potenzen und berechnen Sie (ohne einen Taschenrechner zu verwenden):

   (a) $\log_2 32$.

   (b) $\log_{17} 4913$.

   (c) $8^{\log_2 3}$.

   (d) $e^{4\log 6x}$.

   Hinweis: Wir folgen hier der Konvention, log (ohne Basis) für den Logarithmus zur Basis e (e, die Eulersche Zahl) zu schreiben.

13. *Sinus und Cosinus.* Wiederholen Sie die Definition der Winkelfunktionen, und ihre Funktionsgraphen.

    (a) Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.

    (b) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.

14. *Lineare Gleichungssysteme.* Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

    (a) $$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 29 \\ 8x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \end{array}$$

    (b) $$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \qquad a, b \in \mathbb{R}\,,\ \text{(konstant)} \end{array}$$

15. Bestimmen sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

    (a) $4 - 3x < 2x + 3 \leq 3x - 4$,

    (b) $\frac{5+x}{5-x} \leq 2$,

    (c) $|3x + 4| \leq |8 - 2x|$