Aufgabensammlung zur prüfungsvorbereitenden Übung zu „STEOP: Einführung in die Mathematik"

Zusammengestellt von H. Schichl und A. Čap

Wintersemester 2015/16

Dieses Skriptum enthält Übungsaufgaben zur Vorlesung *Einführung in die Mathematik*. Diese findet geblockt am Anfang des Semesters („STEOP", 7.10.—17.12.2012) statt und wird in diesem Zeitraum von der prüfungsvorbereitenden Übung begeitet.

Die hier zusammengestellten Beispiele dienen der Erarbeitung und Vertiefung des Stoffes aus der Vorlesung, sowie wichtiger Aspekte des Schulstoffs. Sie entfalten ihre volle positive Wirkung nur dann, wenn sie *selbständig* bearbeitet bzw. gelöst werden!

H. Schichl, September 2015

1. *Die Summe ungerader und gerader Zahlen.* Beweisen Sie, dass die Summe einer ungeraden und einer geraden Zahl ungerade ist. Hinweis: Eine ungerade Zahl a lässt sich als $a = 2k + 1$ für ein passendes ganzes k schreiben.

2. *Indirekter Beweis.* Beweisen Sie, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass $15a + 48b = 107$ gilt.
   Hinweis: Gehen Sie indirekt vor, indem Sie annehmen, dass es solche Zahlen gibt. Dann finden Sie einen Teiler der linken Seite der Gleichung, der die rechte Seite nicht teilt.

3. Gegeben sei die Matrix
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & a_{23} \\ 4 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$
   von der man weiß, dass die Eintragungen von der Form $a_{ij} = \alpha i - \beta j + \gamma$, für (unbekannte) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sind. Man berechne die fehlenden Eintragungen.

4. *Summen- und Produktschreibweise 1.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:
   (a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdots 2m$
   (b) $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + 13 - 15 + 17$

5. Es sei die Zahlenfolge θ für $i = 1, \ldots, 10$ durch $\theta_{2i-1} = 1$ und $\theta_{2i} = 0$ gegeben. Schreiben Sie die Folge an und beschreiben Sie in Worten, welche Gestalt θ hat.

6. Man finde einen geschlossenen Ausdruck für
   $$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k - \frac{1}{2}} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \right).$$
   Hinweis: Es handelt sich hierbei um eine Teleskopsumme, alle Terme bis auf zwei heben sich auf. Welche sind das? Dies findet man heraus, indem man einige Summanden anschreibt.

7. Überprüfen Sie, welche der folgenden Gleichungen gelten. Sollten Sie in einer Gleichung einen Fehler finden, so stellen Sie die rechte Seite richtig.
   (a) $\sum_{i=1}^{k} (b_i - b_{i-1}) = b_{k-1} - b_1$
   (b) $\sum_{i=1}^{n} p_{2i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} p_{2i+1}$

(c) $\sum_{j=0}^{n} k^{2j} = \sum_{r=0}^{2n} k^r - \sum_{s=0}^{n} k^{2s+1}$

(d) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} a^j b^{k-j}$

8. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$:

   (a) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (1+n)^2$, $n \geq 1$,

   (b) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})(1+x^{2^n}) = \dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$

9. *Geometrische Reihe.* Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe, d.h. für beliebiges reelles q und n in $\mathbb{N}$ zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

10. *Binomialkoeffizient.* Beweisen Sie: Der Binomialkoeffizient erfüllt die Identität

$$\binom{n}{k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n+1-i}{i}.$$

11. *Fallunterscheidungen.* Wir definieren

$$\max(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq y \\ y & \text{falls } x < y \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \min(x,y) := \begin{cases} x & \text{falls } x \leq y \\ y & \text{falls } x > y \end{cases}.$$

   (a) Zeigen Sie $\max(x,y) + \min(x,y) = x + y$.

   (b) Berechnen Sie $\max(x,y) - \min(x,y)$.

12. *Rechnen mit Potenzen und Logarithmen 1.* Wiederholen Sie die Definiton des Logarithmus sowie die Rechenregeln für Logrithmen und Potenzen und berechnen Sie (ohne einen Taschenrechner zu verwenden):

   (a) $\log_2 32$.

   (b) $\log_{17} 4913$.

   (c) $8^{\log_2 3}$.

   (d) $e^{4 \log 6x}$.

   Hinweis: Wir folgen hier der Konvention, log (ohne Basis) für den Logarithmus zur Basis e (e, die Eulersche Zahl) zu schreiben.

13. *Sinus und Cosinus.* Wiederholen Sie die Definition der Winkelfunktionen, und ihre Funktionsgraphen.
    (a) Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
    (b) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.
14. *Lineare Gleichungssysteme.* Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.
    (a) $\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 29 \\ 8x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \end{array}$
    (b) $\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \qquad a, b \in \mathbb{R}\,, \text{ (konstant)} \end{array}$
15. Bestimmen sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:
    (a) $4 - 3x < 2x + 3 \leq 3x - 4$,
    (b) $\frac{5+x}{5-x} \leq 2$,
    (c) $|3x + 4| \leq |8 - 2x|$
16. Man gebe die disjunktive Normalform einer Schaltung an, welche das in der Schaltwerttabelle beschriebene Verhalten besitzt.

a	b	c	$f(a, b, c)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

17. *Äquivalente Aussagen.* Beweisen Sie, dass
$$(p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$$
und formulieren Sie gemäß dieser Regel äquivalente Aussagen zu:
    (a) $\forall n \in \mathbb{N} : n^2 > n \Rightarrow n > 1$
    (b) $\forall n \in \mathbb{N} : 3|n \Rightarrow 4|n$
    (c) $\forall n \in \mathbb{N} : n^3 \text{ungerade} \Rightarrow n \text{ungerade}$

    Hinweis: Das Zeichen „|“ bedeutet „teilt“.

18. *Logik 1.* Wir betrachten die Aussagen p, q, r und s über deren Wahrheitswert wir folgendes wissen: p und s sind wahr, q und r sind falsch. Welche der folgenden Aussagen ist wahr und welche ist falsch?

(a)	$p \vee r$	(c)	$\neg(p \vee q)$
(b)	$(r \wedge s) \vee q$	(d)	$\neg s \vee \neg r$

19. *Logik 2.* Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie, welche eine Kontradiktion und welche keines von beiden?

(a)	$p \vee (\neg p \wedge q)$	(c)	$(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \wedge q)$
(b)	$p \vee q \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	(d)	$(p \vee (\neg p \vee q)) \vee \neg(q \wedge s)$

20. *Logik 3.* Verneinen Sie die folgenden Aussagen:

    (a) Wenn zwei Ebenen einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

    (b) Es gibt Dreiecke, die genau zwei rechte Winkel haben.

21. *Logik 4.* Begründen Sie, warum die folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

    (a) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x = y,$

    (b) $\exists y \in \mathbb{N} : \forall x \in \mathbb{N} : x = y,$

    (c) $\forall x \in \mathbb{N} : \exists y \in \mathbb{N} : x > y,$

    (d) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x = y,$

    (e) $\forall x \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} : \exists y \in \mathbb{R}^+ : x < y$

    (f) $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} : \exists y \in \mathbb{R}_0^+ : x \leq y$

22. *Verneinung.* Bilden Sie die Verneinung der folgenden Aussagen:

    (a) Alle Hauser sind zu teuer oder schon verkauft.

    (b) Alle Hauser sind entweder zu teuer oder schon verkauft.

    Hinweis: Wir folgen hier der Konvention aus der Vorlesung, die Formulierung „entweder…oder“ als *ausschließendes Oder* (genau eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu interpretieren. Die Formulierung „oder“ ist natürlich als das (mathematische) *einschließende Oder* (mindestens eine der (beiden) Alternativen trifft zu) zu lesen. Falls Ihnen dieser Hinweis Kopfzerbrechen bereitet, dann wiederholen Sie schleunigst den entsprechenden Abschnitt aus der Vorlesung.

    (c) Es gibt Vierecke, die genau drei rechte Winkel haben.

    (d) Wenn zwei Geraden einen gemeinsamen Punkt besitzen, dann sind sie nicht parallel.

23. *Sinus und Cosinus.* Wiederholen Sie die Denition der Winkelfunktionen (Schulstoff, 6. Klasse AHS), und ihre Funktionsgraphen.
    (a) Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.
    (b) Bestimmen Sie alle $x \in [0, 2\pi]$, für die $\cos x = \frac{1}{2}$ gilt.
    (c) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.
    (d) Bestimmen Sie alle $x \in [\pi, 2\pi]$, für die $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt.
    (e) Bestimmen Sie alle $x \in [0, \pi]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
    (f) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gilt.
    (g) Bestimmen Sie alle $x \in [-\pi, 0]$, für die $\sin x = \frac{1}{2}$ gilt.

24. *Sinus- und Cosinussatz.*
    (a) Von einem Dreieck sind $c = 7$, $\alpha = \frac{2\pi}{9}$, $\beta = \frac{2\pi}{5}$ gegeben. Berechnen Sie die übrigen Seiten und Winkel!
    (b) Von einem Dreieck sind $a = 128.3$, $b = 175.4$, $c = 91.4$ bekannt. Berechnen Sie die Winkel!

25. *Paralleogrammgleichung.* Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm die Summe der Quadrate aller (vier!) Seitenlängen gleich der Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen ist.

26. *Differenzieren.* Differenzieren Sie nach der angegebenen Variable.

(a)	$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1}$	(e)	$x(z) = \cos(\tan z)$
(b)	$f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[7]{x}}$	(f)	$g(y) = \frac{d^y}{y^d}$
(c)	$f(x) = \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x-\sqrt{x}}$	(g)	$g(d) = \frac{d^y}{y^d}$
(d)	$x(y) = \sqrt{\frac{\cos y - 1}{\sin y + 1}}$	(h)	$h(x) = x^x$
		(i)	$h(x) = x^{x^2}$
		(j)	$h(x) = x^{x^x}$

27. *Kurvendiskussion 1.* Unter Diskussion des Graphen einer Funktion (Kurvendiskussion) verstehen wir die Bestimmung des (maximalen) Definitionsbereichs, der Nullstellen, Polstellen, Asymptoten, Extremwerte, Monotonie, Wendepunkte und des Krümmungsverhaltens. Diskutieren Sie die folgenden Funktionen und zeichnen Sie den Graphen (in einem „vernünftig“ gewählten Bereich).
    (a) $f(x) = \frac{2}{27}x^4 - \frac{4}{9}x^3$
    (b) $g(x) = \frac{x^3}{x^2-16}$
    (c) $h(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$ (Vorsicht: Für die Nullstellen können Sie nicht direkt die Gleichung lösen. Das ist nämlich nicht möglich.)

28. *Kurvendiskussion 2.*

    (a) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Polynomfunktion dritten Grades $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
    $$f(x) = ax^3 + bx^2 + c^x + d,$$
    deren Graph im Ursprung den Wendepunkt und in A $= (2; \frac{2}{3})$ die Steigung $k_A = 3$ hat. Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie ihren Graphen im Intervall $[-3, 3]$.

    (b) Der Graph der Funktion $f : R \to R$ mit
    $$f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 5}$$
    hat in $P = (0, -5)$ die Steigung $k = \frac{16}{25}$. Ermitteln Sie die Koeffizienten a und b, diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen in $[-4; 12]$.

29. *Mengenoperationen konkret.* Gegeben $X = \{3, 6, 9, 12\}, Y = \{6, 12, 18, 24\}, Z = \{3, 9, 15, 21\}$. Bestimmen Sie:

    (a) $X \cup (Y \backslash Z)$

    (b) $(Y \cup X) \backslash (X \cap Z)$

30. *Mengenoperationen abstrakt.* Seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

    (a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B$

    (b) $(A \cap B) \cup A = A$

    (c) $(B \cup A) \setminus (B \cap A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$

31. *Grundeigenschaften von Relationen.* Welche der Eigenschaften „reflexiv“, „symmetrisch“ und „transitiv“ haben die folgenden Relationen R auf M?

    (a) $a\ R\ b\ :\Leftrightarrow\ a$ ist Primteiler von b ($M = \mathbb{N}$)

    (b) $a\ R\ b\ :\Leftrightarrow\ |a| = |b|$ ($M = \mathbb{R}$)

    (c) $a\ R\ b\ :\Leftrightarrow$ (a teilt b) oder (b teilt a) ($M = \mathbb{N}$)

    (d) $a\ R\ b\ :\Leftrightarrow\ a = 5^m \cdot b$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ ($M = \mathbb{N}$)

32. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i ($i = 1, 2, 3$) die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

    (a) $f_1(x) = -x + 1$, $A_1 = \{0, 1, 2\}$, $B_1 = (0, 1)$

    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = \{-1, 1\}$, $B_2 = \{-1, 0\}$

(c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant), $A_3 = \{-1, 0\} \cup (1, 4)$, $B_3 = \{a\}$

33. *Urbildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist ... “ an.

    (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
    (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

    Falls Sie sich durch diese beiden Aufgaben nicht genügend herausgefordert fühlen, dann beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung für beliebige Duchschnitte bzw. Vereinigungen:

    $$\begin{aligned} f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i) \\ f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \end{aligned}$$

    Hier ist I eine beliebige Indexmenge und die A_i ($i \in I$) sind beliebige Mengen.

    (c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

    Hinweis: Lassen Sie sich vom relativ hohen Abstraktionsgrad der Aufgabe nicht entmutigen! Gehen Sie formal vor und beginnen Sie zB. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass x ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$. Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen ... na sehen Sie, nach einer weiteren Verwendung der Definition des Urbilds und des Durchschnitts haben wir gezeigt, dass x Element der rechten Seite der Gleichung ist, also die Gleichheit gilt!

34. Es seien $x, y \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion auf den natürlichen Zahlen.

    (a) Man zeige, dass
    $$x \sim y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
    eine Äquivalenzrelation ist.
    (b) Man gebe ein Beispiel für f an, sodass es nur eine einzige Äquivalenzklasse gibt.
    (c) Man gebe ein Beispiel für f an, sodass jede Äquivalenzklasse einelementig ist. Unter welchen Voraussetzungen an f (injektiv,surjektiv,bijektiv) stimmt das immer?

35. *Gruppenaxiome.* Stellen Sie (durch Nachprüfen der Gruppenaxiome) fest, ob $(\mathbb{R}, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei die Verknüpfung durch
    $$a \oplus b := a + b + 3$$
    definiert ist.

36. *Gruppen.* Geben Sie die Verknüpfungstabelle für die Gruppe $(\mathbb{Z}_5, +)$ an.

37. *Körper.* Überprüfen Sie explizit, dass $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Körper ist.

38. Es seien $(G, \odot_G), (H, \odot_H)$ und $(K, \odot_K)$ Gruppen sowie $f : G \to H$ und $g : H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Man zeige $g \circ f : G \to K$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

39. *Explizites Rechnen mit Restklassen* Berechnen Sie modulo 3 und modulo 4:

(i) $\bar{2} + \bar{3}$	(iv) $\bar{2} \cdot \bar{2}$
(ii) $\bar{1} - \bar{2}$	(v) $\bar{2} \cdot \bar{3}$
(iii) $\bar{2} - \bar{3}$	(vi) $\bar{2} \cdot \bar{4}$

40. Berechnen Sie die Primfaktorenzerlegungen der Zahlen 4941216, 18136811, 140735595, 1862741, 84934656 und 86028121.

41. Berechnen Sie jeweils den ggT der folgenden Zahlenpaare: $(114912, 287280)$, $(3335739, 356961)$, $(1827735, 114912)$.

42. Berechnen Sie den ggT der beiden Polynome $3x^5 + 6x^4 - 11x^3 + 12x^2 + 18$ und $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 12x - 3$.

43. *Lineares Gleichungssystem über* $\mathbb{C}$. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$\frac{1}{i}x + (1+i)y = 0$$
$$2x - (1-i)y = 2$$