(18) Berechnen Sie den Thieleschen Kettenbruch zu den Punkten $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(5;8)$.

(19) Berechnen Sie den Wert des Thieleschen Kettenbruchs an der Stelle $x = 4$ zu den Interpolationspunkten $(1;4)$, $(2;3)$, $(3;4)$, $(5;8)$, $(0;5)$.

(20) Für die Funktion $f(x) = \cos x$ bestimmen Sie den Wert $\cos 0$, indem Sie den Thieleschen Kettenbruch T zu den Funktionswerten $(h; \cos h)$ für $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$ berechnen und T bei 0 auswerten. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem wahren Fehler.

(21) Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion aus den Beispielen 1 und 2, indem Sie 5 Werte für h (etwa 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005, 0.0001) wählen und das Interpolationspolynom durch diese Werte bei 0 auswerten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den naiv berechneten Näherungen aus den Beispielen 1 und 2.

(22) Führen Sie Beispiel 21 aus, indem Sie den Thieleschen Kettenbruch verwenden.

(23) Verwenden Sie die zusammengesetzte Trapezregel, um das Integral

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\, dx$$

anzunähern, indem Sie einige Unterteilungen verwenden. Versuchen Sie $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{24}$. Wieviele verschiedene Punkte müssen Sie auswerten? Versuchen Sie, den wahren Wert herauszufinden.

(24) Setzen Sie Beispiel 23 fort, indem Sie die berechneten Werte in einer polynomialen Extrapolation verwenden, um den Wert für $h = 0$ zu schätzen.

(25) Wie Beispiel 24 nur mit rationaler Extrapolation.

(26) Versuchen Sie das Integral aus Beispiel 23 mit Hilfe der zusammengesetzten Simpson-Formel und Extrapolation zu bestimmen. Wie viele Punkte bentigen Sie, um 8 approximative Werte zu berechnen? Wie genau wird das Ergebnis?

(27) Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen aus Beispiel 1 und 2 mittels automatischer Differentiation (vorwärts). Vergleichen Sie Aufwand und Genauigkeit der automatischen und numerischen Differentiation anhand der Beispiele.

(28) Bestimmen Sie die Formeln für die Differentialzahlen dritter Ordnung, d.h. für Quadrupel (f, f', f'', f''') und überprüfen Sie die Formeln, indem sie die ersten drei Ableitungen von

$$f(x) = x^2 + 3\sqrt{\sin x - xe^{3x+4}}$$

an der Stelle $x = 1$ berechnen.

(29) Berechnen Sie den Gradienten der Funktion

$$f(x, y, z) = (4x + 3y + 2z)e^{-3x^2-4y^2-3xy-2z^2}$$

numerisch und mit Hilfe der automatischen Differentiation (rückwärts). Vergleichen Sie Genauigkeit und Aufwand.

(30) Bestimmen Sie alle Nullstellen von

$$f(x) = 3x^4 + 7x^3 + 2x + 1$$

mit Hilfe des Bisektionsverfahrens.

(31) Verwenden Sie das Sekantenverfahren mit den Startwerten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ für die Funktion aus Beispiel 30 und überprüfen Sie deren Konvergenz.

(32) Die Funktion

$$f(x) = 729x^4 + 2214x^3 - 452x^2 - 1430x + 507$$

hat eine Nullstelle nahe $\xi = 0.48$. Versuchen Sie die Nullstelle möglichst genau zu bestimmen. Verwenden Sie das Bisektionsverfahren und das Sekantenverfahren. Wo liegt das Problem?

(33) Welche Methode ist die Beste, um die Nullstelle von f aus Beispiel 32 zu bestimmen. Wenden Sie diese an und berechnen Sie die Nullstelle moglichst genau. Was ist die höchste Genauigkeit, die Sie erzielen können?

(34) Bestimmen Sie alle Nullstellen von

$$g(x) = 0.2x - \sin(x).$$

(35) Wie genau können Sie die betragskleinste Nullstelle der Funktion

$$\sin^2(x) \log^3(x + 1)$$

numerisch bestimmen? Wie genau die kleinste positive?