

Научно-методический кабинет
по заочному и вечернему обучению
Московского государственного университета
имени М.В.Ломоносова

А.И.КОМЕЧ

**ПРАКТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

Учебно-методическое пособие
для студентов математических факультетов
государственных университетов

1993

Рекомендовано
кафедрой дифференциальных уравнений
механико-математического факультета
Московского университета

Рецензенты:

Т.Д.Вентцель, доцент
М.И.Вишик, профессор
А.Ф.Филиппов, профессор
М.А.Шубин, доктор физико-математических наук

Комеч А.И. Практическое решение уравнений математической физики: Учеб.-метод.пособие. — Механико-математический факультет МГУ. 1993. 160 с.

Пособие предназначено для студентов, начинающих изучать уравнения с частными производными и уравнения математической физики. Оно может быть использовано также для самообразования.

Предисловие.

Цель данного учебного пособия — научить студентов решать основные задачи дисциплины “Уравнения математической физики”.

В пособии излагаются три основных метода решения уравнений математической физики: метод характеристик Даламбера, метод разделения переменных, метод функции Грина; вводятся и разъясняются понятия характеристик и плоских волн, обобщенных функций и их производных. Для усвоения материала достаточно владеть математическим анализом в объеме первых двух курсов университетов и уметь решать простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения.

Решение задач сопровождается разъяснением применяемых методов и понятий. Однако мы не ставили своей целью систематическое изложение теории. Теоретические вопросы рассматриваются на конкретных примерах. Методы решения задач излагаются скорее в виде рецептов, чем в виде теорем, и иллюстрируются решением конкретных задач. Такой характер изложения выбран в связи с тем, что при формулировке теорем суть метода часто теряется за множеством мелких подробностей. Кроме того, обычно метод не исчерпывается формулировкой одной теоремы или даже нескольких. Такой способ изложения оправдан еще и тем, что точные формулировки студенты получают в курсе лекций, параллельно которому ведутся практические занятия. В начале каждого раздела даются ссылки на литературу с указанием страниц.

С другой стороны, данное пособие не является также обычным задачником, поскольку число задач здесь невелико. Оно является учебным пособием промежуточного характера между учебником, излагающим теорию, и задачником.

Курс практических упражнений, послуживший основой для данного пособия, сложился под влиянием курсов лекций, читаемых сотрудниками кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ. Автор выражает глубокую признательность всему коллективу кафедры и в особенности рецензентам и заведующей кафедрой академику РАН Олейник О.А. за все замечания и обсуждения и помощь в подготовке данного пособия.

5 мая 1992 г.

А.И.Комеч

ГЛАВА I. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ. МЕТОД ХАРАКТЕРИСТИК.

[3, с.43–47, 59–61, 71–73, 190–260]; [9, с.292–310]; [11, с.60–70, 80–131]; [12, с.11–13, 52–62, 193–207]; [14, с.23–81, 403–413].

§1. Вывод уравнения Даламбера.

Уравнение Даламбера

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad x \in [0, l], \quad t > 0. \quad (1.1)$$

описывает малые поперечные колебания натянутой струны и продольные колебания упругого стержня. Приведем краткий вывод этого уравнения (более строгий вывод см. в [3, 12, 14].

1. Поперечные колебания струны.

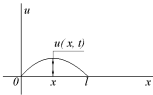


Рис. 1

Пусть струна длиной l натянута с силой T . Направим ось Ox вдоль струны, находящейся в положении равновесия, и пусть $x = 0$ — левый конец струны. Тогда $x = l$ — правый конец струны. Возьмем ось Ou , перпендикулярную к Ox , и будем рассматривать лишь поперечные

колебания струны, когда каждая точка x смещается только вдоль оси Ou . Для создания таких колебаний можно, например, концы струны закрепить неподвижно или прикрепить их к колечкам, которые движутся по вертикальным стержням, как на рис. 3.

Обозначим через $u(x, t)$ смещение точки x струны в момент времени t . Предположим, что углы, образуемые струной с осью x , малы: $|\alpha|, |\beta| \ll 1$ (см. рис. 2). Докажем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1. 1). Для этого запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ou для участка струны от x до $x + \Delta x$:

$$a_u m = F_u. \quad (1.2)$$

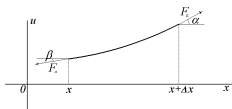


Рис. 2

Здесь $a_u \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$; $m = \mu \cdot \Delta x$, где μ — плотность (линейная) струны, т. е. масса единицы длины (для однородной струны), а

$$F_u \approx (F_{\text{л}})_u + (F_{\text{п}})_u + \tilde{f}(x, t)\Delta x.$$

Через $F_{\text{л}}(F_{\text{п}})$ обозначена сила, действующая на участок $[x, x + \Delta x]$ со стороны левого (правого) куска струны, а $(F_{\text{л}})_u((F_{\text{п}})_u)$ — ее проекция на ось Ou ; $\tilde{f}(x, t)$ — плотность поперечных внешних сил. Например, в поле тяжести Земли если струна горизонтальна, а ось Ou направлена вертикально вверх, то $\tilde{f}(x, t) = -g\mu$, где $g \approx 9,8\text{м/с}^2$.

Подставляя a_u, m и F_u в (1. 2), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mu \Delta x \approx (F_{\text{л}})_u + (F_{\text{п}})_u + \tilde{f}(x, t)\Delta x. \quad (1.3)$$

Далее, для гибкой струны сила натяжения T направлена в каждой точке по касательной к струне. Примем, что T постоянна по величине (см. [3]). Тогда

$$(F_{\text{л}})_u = -T \sin \beta; \quad (F_{\text{п}})_u = T \sin \alpha \quad (1.3')$$

и (1.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mu \Delta x \approx -T \sin \beta + T \sin \alpha + \tilde{f}(x, t)\Delta x. \quad (1.4)$$

Поскольку мы рассматриваем “малые” колебания струны, при которых $|\alpha|$ и $|\beta| \ll 1$, то с точностью до бесконечно малых высшего порядка по α и β

$$\sin \beta \approx \text{tg } \beta = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t); \quad \sin \alpha \approx \text{tg } \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) \quad (1.4')$$

Подставляя эти выражения в (1.4), имеем с той же точностью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \mu \Delta x \approx T \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) + \tilde{f}(x, t)\Delta x. \quad (1.5)$$

Отсюда, деля на Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$ получаем с указанной точностью уравнение (1.1), в котором

$$a = \sqrt{\frac{T}{\mu}}; \quad f(x, t) = \frac{\tilde{f}(x, t)}{\mu}. \quad (1.5')$$

Замечание 1.1. Из нашего предположения о силе натяжения вытекает, что проекции на ось Ox сил $F_{\text{л}}$ и $F_{\text{п}}$ равны $-T \cos \beta$ и $T \cos \alpha$ соответственно. Поэтому их сумма ($T \cos \alpha - T \cos \beta$) есть величина порядка $O(\alpha^2 + \beta^2)$ и, следовательно, проекция на ось Ox равнодействующей сил,

действующих на участок струны от x до $x + \Delta x$, есть малая величина в рассматриваемом приближении. Следовательно, при таком предположении о силе натяжения малые колебания струны с такой точностью являются поперечными.

Замечание 1.2. Из (1.3') и (1.4') вытекает, что

$$T \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.6)$$

есть вертикальная проекция силы натяжения струны в точке x в момент времени t .

Рассмотрим *граничные условия* для струны.

А. Если левый конец струны $x = 0$ закреплен, то его смещение равно нулю:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.6')$$

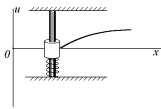
Б. Предположим, что левый конец струны прикреплен к кольцу пренебрежимо малой массы, которое может свободно, без трения двигаться по вертикальному стержню (такой конец можно назвать свободным). Тогда вертикальная составляющая силы действия стержня на левый конец струны равна нулю. Следовательно, по третьему закону Ньютона, вертикальная составляющая (1.6) силы натяжения струны при $x = 0$ также равна нулю:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (1.6'')$$

В. В более общем случае, когда на левом конце к струне прикреплен груз массой m , выполняется краевое условие

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \quad t > 0 \quad (1.7)$$

Если, кроме того, груз прикреплен к пружине (см. рис.3) жесткости k ,



то в правой части (1.7) нужно добавить силу упругости $-ku(0, t)$. Если же на груз действует еще и сила трения, пропорциональная скорости, то в правой части (1.7) добавляется сила трения $-\eta \frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$. Таким образом получается физически осмысленное линейное краевое условие вида

$$\text{Рис. 3} \\ m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - ku(0, t) - \eta \frac{\partial u}{\partial t} + f(t). \quad (1.8)$$

Здесь $f(t)$ — некоторая внешняя сила, приложенная к левому концу струны и параллельная оси Ou .

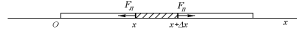


Рис. 4

2. Продольные колебания упругого стержня.

Пусть имеется однородный ненапряженный стержень длиной l . Направим ось Ox вдоль стержня так, чтобы его левый конец находился в точке $x = 0$, тогда $x = l$ — его правый конец. Будем рассматривать лишь продольные колебания стержня. Через $u(x, t)$ будем обозначать смещение точки x в момент времени t вдоль оси Ox .

Докажем, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1.1). Для этого запишем второй закон Ньютона в проекции на ось Ox для участка стержня от x до $x + \Delta x$:

$$a_x m = F_x; \quad a_x \approx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t); \quad m = \mu \Delta x. \quad (1.9)$$

Сила F_x имеет вид

$$F_x = F_{\text{л}} + F_{\text{п}} + \tilde{f}(x, t) \Delta x. \quad (1.9')$$

где $F_{\text{л}}$ ($F_{\text{п}}$) — сила вдоль оси Ox , действующая на участок $[x, x + \Delta x]$ со стороны левого (правого) куска стержня, а $\tilde{f}(x, t)$ — плотность внешних сил, направленных вдоль оси Ox . Например, если стержень висит вертикально в поле тяжести Земли так, что ось Ox направлена вниз, то $\tilde{f}(x, t) = g\mu$.

Подставляя F_x в (1.9), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \mu \Delta x \approx F_{\text{л}} + F_{\text{п}} + \tilde{f}(x, t) \Delta x. \quad (1.10)$$

Чтобы найти величины $F_{\text{л}}$ и $F_{\text{п}}$, воспользуемся законом Гука

$$\sigma(x, t) = E \varepsilon(x, t). \quad (1.11)$$

Здесь $\sigma(x, t)$ — напряжение стержня в точке x , т.е. $\sigma(x, t) = T(x, t)/S$, где $T(x, t)$ — сила натяжения стержня в точке x , а S — площадь поперечного сечения; E — модуль Юнга материала стержня, а $\varepsilon(x, t)$ — относительная деформация в точке x . Для участка стержня $[x, x + h]$ его длина в ненапряженном состоянии равна h , а в напряженном $h + u(x + h, t) - u(x, t)$. Поэтому его абсолютное удлинение равно $u(x + h, t) - u(x, t)$, а относительное удлинение равно

$$\frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \quad h \rightarrow 0.$$

Итак,

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.12)$$

Отсюда по закону Гука (1.11)

$$T(x, t) = S\sigma(x, t) = SE\varepsilon(x, t) = SE\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (1.13)$$

Отметим, что закон Гука (1.11) — это линейное приближение для зависимости $\sigma(x, t)$ от $\varepsilon(x, t)$ и он применим лишь при малых деформациях, т.е. малых $\varepsilon(x, t)$.

Учитывая направление сил $F_{\text{л}}$ и $F_{\text{п}}$, получаем

$$\begin{cases} F_{\text{л}} = -T(x, t) = -SE\frac{\partial u}{\partial x}(x, t), \\ F_{\text{п}} = -T(x + \Delta x, t) = -SE\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t). \end{cases} \quad (1.14)$$

Действительно, если, например, $u(x, t)$ монотонно возрастает по x , то стержень растянут, значит $F_{\text{л}} \leq 0$, а $F_{\text{п}} \geq 0$. В то же время $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$. Это означает, что знаки в (1.14) выбраны верно.

Подставляя (1.14) в (1.10), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)\mu\Delta x \approx SE\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - SE\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \tilde{f}(x, t)\Delta x. \quad (1.15)$$

Отсюда, деля на Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем (1.1) с

$$a = \sqrt{\frac{SE}{\mu}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad f(x, t) = \frac{\tilde{f}(x, t)}{\mu} \quad (1.16)$$

где $\rho = \mu/S$ — (объемная) плотность стержня.

Рассмотрим *граничные условия* для стержня.

А. для закрепленного конца стержня при $x = 0$ получается краевое условие (1.6').

Б. Для свободного конца стержня при $x = 0$ натяжение (1.13) равно нулю. Поэтому выполняется (1.6'').

В. В более общем случае предположим, что к левому концу $x = 0$ стержня прикреплен груз массой m , закрепленный на пружине с жесткостью $k > 0$, причем пружина находится в ненапряженном состоянии, когда смещение левого конца равно нулю.

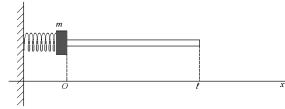


Рис. 5

Пусть груз движется с линейным трением: $F_{\text{тр}} = -\eta v$, где $\eta > 0$, v — скорость груза. Тогда при $x = 0$ выполняется краевое условие

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = -ku(0, t) + SE \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) - \eta \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) + f(t), \quad (1.17)$$

где $f(t)$ — внешняя сила, действующая на левый конец стержня вдоль оси Ox .

§2. Бесконечная струна.

1. Задача Коши для уравнения Даламбера.

Рассмотрим уравнение Даламбера (1.1) на всей числовой оси:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Это соответствует физической задаче о струне относительно больших размеров. Для простоты мы считаем, что $f(x, t) \equiv 0$, т.е. внешних сил нет.

Ниже мы увидим, что решений у уравнения (2.1) бесконечно много, и для однозначного задания движения струны достаточно задать начальные положения и скорости всех точек струны (как обычно в механике):

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Здесь φ и ψ — заданные функции, $\varphi(x)$ — начальное отклонение, $\psi(x)$ — начальная скорость точки x струны.

Задача (2.1) — (2.2) называется задачей Коши (или начальной задачей) для уравнения Даламбера (2.1). Равенства (2.2) называются начальными условиями, а функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — начальными данными.

2. Метод Даламбера.

Метод Даламбера основан на том, что общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (2.3)$$

где f и g — произвольные функции одной переменной.

Замечание 2.1. Если f и g класса $C^2(\mathbb{R})$, то $u(x, t)$ также дважды непрерывно дифференцируемая функция. Однако, оказывается, f и g можно брать недифференцируемыми и даже разрывными. Тогда $u(x, t)$ также будет разрывной функцией.

Как будет показано в §6 гл.IV, такая разрывная функция удовлетворяет уравнению (2.1) в смысле теории обобщенных функций.

Чтобы доказать (2.3), сделаем замену переменных в дифференциальном уравнении (2.1)

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (2.4)$$

3. Замена переменных в дифференциальном уравнении.

Выразим функцию $u(x, t)$ в новых координатах ξ, η :

$$u(x, t) = v(\xi, \eta), \quad (2.5)$$

где ξ, η связаны с x, t соотношениями (2.4). Например:

$$u(x, t) = x \Rightarrow v(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi + \eta).$$

Сделать замену переменных в дифференциальном уравнении (2.1) — значит найти дифференциальное уравнение для функции $v(\xi, \eta)$, эквивалентное (2.1).

Для этого нужно выразить $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ через производные функции $v(\xi, \eta)$ по переменным ξ, η и подставить эти выражения в (2.1). Нужные выражения получаются при помощи теоремы о дифференцировании сложной функции из тождества

$$u(x, t) = v(\xi(x, t), \eta(x, t)) \quad (2.6)$$

А именно, дифференцируя (2.6) по t и по x , получаем по теореме о дифференцировании сложной функции

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Аналогично можно выразить и любые другие производные. Дифференцируя первое тождество в (2.7) по t , получаем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (2.8)$$

Входящий сюда оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ выражаем из того же уравнения (2.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.9)$$

Используя это выражение в (2.8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \\ &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь мы использовали тождество

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Действуя аналогично, можно получить (заменяя в (2.10) t на x) формулу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \\ &+ \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Упражнение. Вывести формулу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \\ &+ \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial t \partial x} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Замечание 2.2. Обычно формулы (2.7) и (2.10)–(2.12) записывают, заменяя v на u . Например, (2.7) записывают в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Однако при этом символ $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ (и $\frac{\partial u}{\partial \eta}$) в правой части нужно понимать как производную вдоль линии $\eta = const$ (или $\xi = const$):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \equiv \frac{d}{d\xi} \left(u \Big|_{\eta=const} \right), \quad (2.14)$$

т.е. фактически как $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ (или $\frac{\partial v}{\partial \eta}$), а не как “частную производную $u(x, t)$ по ξ (или η)” — это выражение лишено смысла, пока не выбрана вторая координата η (или ξ).

Действительно, из (2.14) видно, что $\frac{\partial u}{\partial \xi}$ зависит не только от выбора переменной ξ , но и от переменной η , хотя это и не отражено в обозначении $\frac{\partial u}{\partial \xi}$. Таким образом, использование буквы u в правой части (2.7) вместо v , как в (2.13), может приводить к недоразумениям.

Упражнение. Найти $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, если $u(x, t) = t$, $\xi = x$, а $\eta = t + x$.

Решение. $t = \eta - x = \eta - \xi \implies \frac{\partial u}{\partial \xi} = -1$.

Упражнение. Найти $\frac{\partial u}{\partial \xi}$, если $u(x, t) = t$, $\xi = x$, а $\eta = t - x$.

Решение. $t = \eta + x = \eta + \xi \implies \frac{\partial u}{\partial \xi} = 1$.

Тем не менее, в прикладных задачах используют формулы типа (2.13), чтобы не вводить новых букв. Например, давление обычно обозначается буквой p , сила тока — буквой j , плотность — буквой ρ и т.д. Мы также всюду ниже будем пользоваться формулами вида (2.13).

4. Доказательство представления Даламбера (2.3).

Из общих формул (2.13) для замены (2.4) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= -a \frac{\partial}{\partial \xi} + a \frac{\partial}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta};\end{aligned}\tag{2.15}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \end{cases}\tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в (2.1), получаем

$$\left(a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u = a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) u\tag{2.17}$$

После приведения подобных членов и сокращений получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.\tag{2.18}$$

Это есть канонический вид уравнения Даламбера (2.1), т.е. его простейший вид, в котором оно легко решается. Чтобы решить (2.18), обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)\tag{2.19}$$

Тогда (2.18) запишется в виде

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} \equiv \frac{d}{d\xi} \left(v \Big|_{\eta=const} \right) = 0.\tag{2.20}$$

Отсюда следует, что $v \Big|_{\eta=const}$ не зависит от ξ , т.е.

$$v(\xi, \eta) \equiv c(\eta),\tag{2.21}$$

или ввиду (2.19)

$$\frac{d}{d\eta} \left(u \Big|_{\xi=const} \right) = c(\eta). \quad (2.22)$$

Интегрируя это обыкновенное уравнение, получаем

$$u \Big|_{\xi=const} = \int c(\eta) d\eta + c_1(\xi). \quad (2.23)$$

Таким образом,

$$u = g(\eta) + f(\xi), \quad (2.24)$$

где g и f — некоторые функции от одной переменной. С другой стороны, функция вида (2.24) удовлетворяет уравнению (2.18) при произвольных функциях f и g . Наконец, производя в (2.24) замены (2.4), мы получаем представление Даламбера (2.3).

Замечание 2.3. График функции $f(x - at)$ в (2.4) представляет собой волну, бегущую вправо вдоль оси Ox со скоростью a , а $g(x + at)$ — волну, бегущую влево с той же скоростью. Это означает, что график функции $f(x - at)$ ($g(x + at)$) при любом $t > 0$ как функции от x получается из графика функции $f(x)$ ($g(x)$) с помощью параллельного переноса вправо (влево) вдоль оси Ox на at . Таким образом, форма графика функции $f(x - at)$ как функции от x при разных фиксированных t одна и та же. Такие функции в физике называются бегущими волнами. Таким образом, разложение Даламбера (2.3) означает, что любое решение уравнения Даламбера есть сумма (физики говорят суперпозиция, интерференция, наложение) двух бегущих волн.

5. Решение задачи Коши (2.1), (2.2) для уравнения Даламбера.

Формула Даламбера.

Применим метод Даламбера к задаче (2.1), (2.2). Для этого заменим уравнение (2.1) эквивалентным ему представлением (2.3). Таким образом, остается лишь учесть начальные условия (2.2). Из них мы и найдем неизвестные функции f и g по заданным φ и ψ .

А именно, подставим (2.3) в (2.2):

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ f'(x)(-a) + g'(x)a = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.25)$$

Замечание 2.4. Во втором уравнении (2.25) использована формула дифференцирования сложной функции:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x - at) \right) \Big|_{t=0} = \left(f'(x - at) \frac{\partial}{\partial t} (x - at) \right) \Big|_{t=0} = f'(x)(-a) \quad (2.26)$$

Здесь $f'(x)$ — обыкновенная производная (а не частная). В этом заключается достоинство метода Даламбера, который позволяет совершить переход от уравнений (2.1), (2.2) с частными производными к уравнениям (2.25) с обыкновенными производными.

Далее, интегрируя второе уравнение (2.25), получаем после деления на a :

$$-f(x) + g(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{c}{a}. \quad (2.27)$$

Складывая это уравнение с первым уравнением в (2.25) и деля на 2, получаем

$$g(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{c}{2a}, \quad (2.28)$$

а вычитая, получаем

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{c}{2a} = \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_x^0 \psi(s) ds - \frac{c}{2a}, \quad (2.29)$$

Подставляя эти выражения в разложение Даламбера (2.3), получаем формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds \quad (2.30)$$

Замечание 2.5. Как видно из (2.28) – (2.29), волны $f(x - at)$ и $g(x + at)$ определяются по начальным данным φ и ψ не однозначно, а с точностью до константы, а решение $u(x, t)$ задачи Коши — однозначно.

§3. Анализ формулы Даламбера.

1. Распространение волн.

Упражнение.

Возьмем следующие начальные данные в (2.2) (см. замечание 2.1):



Рис. 6

Нарисуем форму струны при $t = 1, 2, 3, 4, 5$, считая $a = 1$. (Можно считать, что $\varphi(x)$ — кусочно-линейная функция. Тогда решение получится также кусочно-линейной функцией, и оно является решением уравнения (2.1) в смысле теории обобщенных функций (см. замечание 2.1). Однако можно считать, что график φ в угловых точках немного закруглен, так что $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$. Тогда решение также будет класса C^2 и на всех рисунках ниже также нужно считать, что все углы немного закруглены.)

Решение. По формуле Даламбера (2.30)

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\varphi(x - t) + \frac{1}{2}\varphi(x + t)$$

Это значит, что график $\varphi(x)$ нужно сжать к оси Ox в 2 раза, сдвинуть вправо на t , влево на t и результаты сложить:

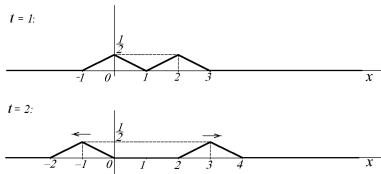


Рис. 7

Дальше эти горбики высотой $\frac{1}{2}$ и шириной 2 разъезжаются влево и вправо со скоростью 1 каждый.

Задача. Нарисовать форму струны при $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ в условиях предыдущего упражнения.

Упражнение (удар по струне молоточком). Возьмем в (2.2) следующие начальные данные:

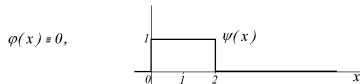


Рис. 8

Нарисуем форму струны при $t = 1, 2, 3, 4, 5$, считая $a = 1$.
 Решение. По формуле Даламбера (2.30)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(s) ds = \phi(x+t) - \phi(x-t),$$

где

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \psi(s) ds :$$

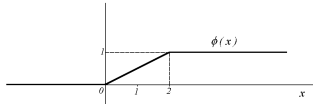


Рис. 9

Эта формула означает, что график функции $\phi(x)$ нужно сдвигать влево и вправо на t и результаты вычитать:

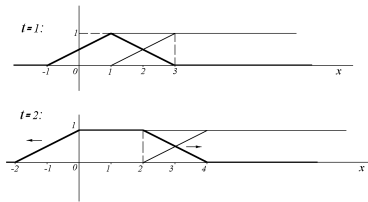


Рис. 10

Дальше эта трапеция раздвигается влево и вправо со скоростью 1.
 Задача. В условиях предыдущего упражнения нарисовать форму струны при $t = \frac{1}{4}$ и $t = \frac{1}{2}$.

2. Характеристики.

При решении двух предыдущих упражнений мы видели, что прямые $x \pm t = const$ играют особую роль. Например, угловые точки графиков решений $u(x, t)$ лежат на прямых $x \pm t = 0$ и $x \pm t = 2$.

Для уравнения (1.1) с коэффициентом a аналогичную роль играют прямые $x \pm at = const$. Они называются характеристиками уравнения (1.1). Таким образом, характеристики уравнения Даламбера — это два семейства прямых (см. рис.11).

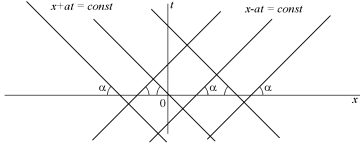


Рис. 11

Будем называть прямые $x - at = const$ характеристиками, бегущими вправо (со скоростью a). Они, очевидно, являются линиями уровня волны $f(x - at)$. Чем больше скорость a , тем меньше угол наклона характеристики к оси Ox (при равных масштабах по осям Ox и Ot):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{a}.$$

Аналогично, прямые $x + at = const$ называются характеристиками, бегущими влево. Они являются линиями уровня волны $g(x + at)$.

3. Разрывы решения.

Возьмем в качестве $f(x)$ разрывную функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

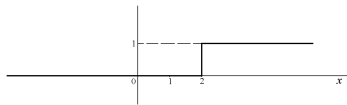


Рис. 12

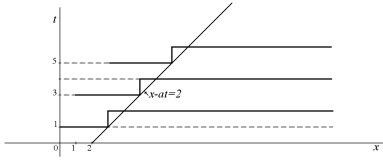


Рис. 13

Тогда функция

$$u(x, t) = f(x - at) \quad (3.1)$$

является разрывной вдоль характеристики $x - at = 2$ (см. рис. 13).

На рис. 13 изображены профили функции $u(x, t)$ при $t = 1, 3, 5$.

Функция (3.1) удовлетворяет уравнению Даламбера (2.1) в смысле теории обобщенных функций (см. замечание 2.1).

Итак:

|| Решения уравнения Даламбера могут иметь разрывы;
 || Разрывы распространяются по характеристикам.

Замечание 3.1. Можно взять гладкую функцию $f_\varepsilon(x)$, быстро меняющуюся от 0 до 1 на отрезке от $x = 2$ до $x = 2 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$:

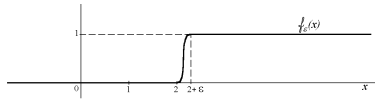


Рис. 14

Тогда функция $f_\varepsilon(x - at)$ будет обычным (гладким) решением уравнения Даламбера, сколь угодно быстро меняющимся от 0 до 1 вблизи точек характеристики $x - at = 2$. При $\varepsilon \rightarrow 0+$ решения $f_\varepsilon(x - at)$ сходятся к разрывной функции $f(x - at)$. Именно в этом смысле естественно считать такую разрывную функцию обобщенным решением уравнения Даламбера (см. также замечание 2.1).

Замечание 3.2. Разрывные решения $u(x, t)$ уравнения Даламбера для струны и стержня лишены физического смысла. Однако такому же уравнению Даламбера удовлетворяет, например, давление $p(x, t)$ газа в длинной узкой трубке (например, во флейте или органной трубе). Функция $p(x, t)$ может быть разрывной.

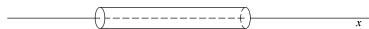


Рис. 15

Разрывные решения волнового уравнения в газовой динамике называются ударными волнами. При полете самолета со сверхзвуковой скоростью (см. § 8) от передних кромок крыльев распространяется такая ударная волна, за фронтом которой давление больше, чем перед фронтом. Мы слышим хлопок в тот момент, когда фронт волны проходит через наше ухо (см. рис. 62).

4. Область зависимости решения и ее графическое построение.

Вопрос. Что нужно знать, чтобы вычислить решение u задачи (2.1) — (2.2) в точке (x_0, t_0) ?

Ответ. Из формулы Даламбера (2.30) видно, что нужно знать начальные отклонения $\varphi(x)$ в двух точках: $x = x_0 + at_0$ и $x = x_0 - at_0$, а также начальные скорости $\psi(x)$ на отрезке $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ между этими точками. Знать $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ вне отрезка $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ не нужно. Поэтому отрезок $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ называется областью зависимости решения задачи Коши (2.1) — (2.2) в точке (x_0, t_0) .

Замечание 3.3. Теперь мы можем точно сказать, когда струну можно считать бесконечной: когда рассматриваемая точка x_0 находится на расстоянии, большем чем at_0 от концов струны, где t_0 — рассматриваемый момент времени.

Для графического построения области зависимости решения из точки (x_0, t_0) выпускаются две характеристики уравнения Даламбера до пересечения с осью Ox :

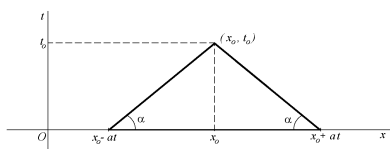


Рис. 16

Пересечение этих характеристик с осью Ox суть точки $x_0 - at_0$ и $x_0 + at_0$, а отрезок оси Ox между этими точками — это и есть область зависимости решения u в точке (x_0, t_0) . Проверим это. Уравнения наших характеристик

$$x - at = c_1; \quad x + at = c_2. \quad (3.2)$$

Поскольку точка (x_0, t_0) лежит на этих характеристиках, то $x_0 - at_0 = c_1$ и $x_0 + at_0 = c_2$. Чтобы найти пересечение характеристик с осью Ox , нужно в (3.2) положить $t = 0$, тогда получится

$$x = c_1 = x_0 - at_0 \quad \text{и} \quad x = c_2 = x_0 + at_0.$$

5. Распространение волн.

Упражнение. Известно, что $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ при $x \notin [2, 5]$.

Найти область, в которой решение $u(x, t)$ задачи (2.1) — (2.2) равно нулю при $t > 0$.

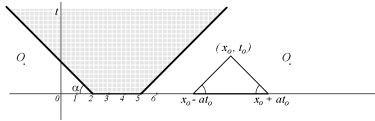


Рис. 17

Решение. Из точек 2 и 5 оси Ox выпускаем характеристики влево и вправо соответственно. В области под этими характеристиками решение равно нулю. Действительно, для точки (x_0, t_0) , лежащей под этими характеристиками, область зависимости не пересекается с отрезком $[2, 5]$. Поэтому в этой области зависимости $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$. Следовательно, $u(x_0, t_0) = 0$.

§4. Метод характеристик для гиперболических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными. Задача Коши.

1. Разложение оператора Даламбера на множители.

Приведем уравнение Даламбера к каноническому виду (2.18) другим способом. Для этого запишем его в виде

$$\square(u) \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0. \quad (4.1)$$

Разложим этот оператор на множители:

$$\square(u) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (4.2)$$

Как известно,

$$L_{(-a,1)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}; \quad L_{(a,1)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.3)$$

— операторы дифференцирования вдоль векторов $(-a, 1)$ и $(a, 1)$ соответственно. Эти векторы направлены вдоль характеристик

$$x + at = \text{const} \quad \text{и} \quad x - at = \text{const}. \quad (4.4)$$

Если взять характеристики за координаты линии, т.е. положить

$$\xi = x - at; \quad \eta = x + at, \quad (4.5)$$

то в силу (2.15) оператор Даламбера принимает вид

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = L_{(-a,1)} \cdot L_{(a,1)} = -2a \frac{\partial}{\partial \xi} 2a \frac{\partial}{\partial \eta} = -4a^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (4.6)$$

Вывод: характеристики уравнения (4.1) — это такие линии, операторы дифференцирования $L_{(\mp a,1)}$ вдоль которых входят в качестве множителей в оператор Даламбера.

Замечание 4.1. Поскольку операторы дифференцирования вдоль характеристик входят множителем в оператор Даламбера, то он обращает в нуль любую функцию, постоянную вдоль характеристик какого-либо семейства, в частности, любую такую разрывную функцию (см. замечание 2.1). Этим и объясняется, почему решения уравнения Даламбера могут иметь разрывы вдоль характеристик.

2. Гиперболическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами на плоскости.

Рассмотрим уравнение вида

$$Au \equiv a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (4.7)$$

В данном пункте будем считать, что коэффициенты a , b и c — постоянные числа.

Попытаемся применить метод пункта 1 к уравнению (4.7) вместо (4.1). Чтобы получить разложение вида (4.2), нужно разложить на линейные множители “характеристическую” квадратичную форму

$$a(\xi, \tau) \equiv a\tau^2 + 2b\tau\xi + c\xi^2 = \xi^2 \left(a \left(\frac{\tau}{\xi} \right)^2 + 2b \frac{\tau}{\xi} + c \right). \quad (4.8)$$

Для этого решим характеристическое уравнение

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \quad (4.9)$$

Его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (4.10)$$

вещественны и различны, если дискриминант положителен:

$$D \equiv b^2 - ac > 0 \quad (4.11)$$

Это и есть условие строгой гиперболичности дифференциального уравнения (4.7).

По теореме Виета

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = a(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \quad (4.12)$$

Поэтому характеристическая квадратичная форма принимает вид

$$A(\xi, \tau) = \xi^2 a \left(\frac{\tau}{\xi} - \lambda_1 \right) \left(\frac{\tau}{\xi} - \lambda_2 \right) = a(\tau - \lambda_1 \xi)(\tau - \lambda_2 \xi). \quad (4.13)$$

Соответственно, дифференциальное уравнение приобретает вид

$$Au = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0 \quad (4.14)$$

Обозначим

$$L_{(-\lambda_1,1)} = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad L_{(-\lambda_2,1)} = \frac{\partial}{\partial t} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial x}.$$

Положим, аналогично (4.5)

$$\xi = x + \lambda_1 t; \quad \eta = x + \lambda_2 t. \quad (4.15)$$

Тогда

$$L_{(-\lambda_1,1)} \xi \equiv 0; \quad L_{(-\lambda_2,1)} \xi \equiv 0. \quad (4.16)$$

Следовательно, $L_{(-\lambda_1,1)}$ — оператор дифференцирования вдоль линий $\xi = const$, а $L_{(-\lambda_2,1)}$ — вдоль линий $\eta = const$. Поэтому

$$L_{(-\lambda_1,1)} = c_1 \frac{\partial}{\partial \eta} \Big|_{\xi=const}; \quad L_{(-\lambda_2,1)} = c_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \Big|_{\eta=const}. \quad (4.17)$$

Отсюда вытекает, что (4.14) эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \xi} u = 0. \quad (4.18)$$

Поэтому, аналогично (2.24), общее решение уравнения (4.7) имеет вид

$$u = f(\xi) + g(\eta) = f(x + \lambda_1 t) + g(x + \lambda_2 t) \quad (4.19)$$

Волна $f(x + \lambda_1 t)$ бежит по оси x со скоростью λ_1 , а $g(x + \lambda_2 t)$ — со скоростью λ_2 (влево, если $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$).

В частности, для уравнения Даламбера (4.1), характеристическое уравнение (4.9) принимает вид $\lambda^2 - a^2 = 0$, откуда $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = a$ и (4.15) переходит в (2.4), а (4.19) — в (2.24).

При помощи представления (4.19) все выводы §3 относительно разрывов решения, распространения волн и области зависимости легко переносятся на уравнение (4.7) (см. замечание 2.1).

Решения уравнения (4.7) могут иметь особенности вдоль характеристик, определяемых уравнениями

$$\xi \equiv x + \lambda_1 t = \text{const} \quad \text{или} \quad \eta \equiv x + \lambda_2 t = \text{const} \quad (4.20)$$

Это видно из (4.19), если взять f или g негладкими функциями (см. также замечание 4.1).

Задача Коши (4.7) с начальными условиями (2.2) имеет решение

$$u(x, t) = \frac{\lambda_2 \varphi(x + \lambda_1 t) - \lambda_1 \varphi(x + \lambda_2 t)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_{x + \lambda_1 t}^{x + \lambda_2 t} \psi(s) ds \quad (4.21)$$

Задача. Вывести формулу (4.21).

Заметим, что для уравнения Даламбера $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = a$ и (4.21) превращается в формулу Даламбера (2.30).

Как видно из (4.21), область зависимости решения u в точке (x_o, t_o) есть отрезок $[x_o + \lambda_1 t_o, x_o + \lambda_2 t_o]$ оси Ox . Его концы получаются пересечением оси Ox с характеристиками (4.20), выпущенными назад по времени из точки (x_o, t_o) :

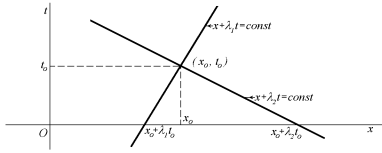


Рис. 18

Отметим, что корни λ_1 и λ_2 могут иметь одинаковых знак; тогда волны $f(x + \lambda_1 t)$ и $g(x + \lambda_2 t)$ бегут в одну и ту же сторону.

Пример. Для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 5 \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + 6 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u = 0 \quad (4.22)$$

характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0 \quad (4.23)$$

имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$, и общее решение

$$u = f(x - 2t) + g(x - 3t) \quad (4.24)$$

— обе волны бегут вправо.

Найдем дифференциальное уравнение характеристик уравнения (4.7).

Заметим, что в силу (4.20) касательный вектор (dx, dt) к характеристике удовлетворяет уравнению

$$dx + \lambda_1 dt = 0, \quad \text{или} \quad dx + \lambda_2 dt = 0 \quad (4.25)$$

Поэтому $\frac{dx}{dt} = -\lambda_1$, или $\frac{dx}{dt} = -\lambda_2$, т.е. $\lambda \equiv -\frac{dx}{dt}$ удовлетворяет характеристическому уравнению (4.9):

$$a \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - 2b \frac{dx}{dt} + c = 0. \quad (4.26)$$

Это и есть дифференциальное уравнение характеристик. В симметрической форме оно выглядит так:

$$adx^2 - 2bdxdt + cdt^2 = 0 \quad (4.27)$$

3. Гиперболические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на плоскости.

Пусть теперь коэффициенты a, b и c в (4.7) переменные, т.е. зависят от x и t :

$$Au(x, t) \equiv a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + c(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0; \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (4.28)$$

Попытаемся обобщить построения пункта 2, чтобы привести (4.28) к каноническому виду (4.18) или близкому к нему (см. [13]).

Заменим в малой окрестности каждой точки (x, t) уравнение (4.28) уравнением (4.7) с постоянными коэффициентами, равными значению

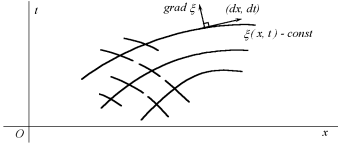


Рис. 19

коэффициентов уравнения (4.28) в этой точке (x, t) . Это процедура называется “замораживанием коэффициентов”.

При этом характеристики “замороженного” в точке (x, t) уравнения будут иметь направления, зависящие от (x, t) , касательный вектор (dx, dt) к которым удовлетворяет уравнению (4.27) (см. рис. 19)

Интегральные кривые уравнения (4.27) называются характеристиками уравнения (4.28) (см. [13]). Итак, в виду (4.27) дифференциальное уравнение характеристик уравнения (4.28) имеет вид

$$a(x, t)dx^2 - 2b(x, t)dxdt + c(x, t)dt^2 = 0. \quad (4.29)$$

Уравнение характеристик (4.29) получается формальной заменой

$$\frac{\partial}{\partial t} \mapsto dx; \quad \frac{\partial}{\partial x} \mapsto -dt. \quad (4.29')$$

Предположим, что в рассматриваемой области плоскости (x, t) , где решается уравнение (4.28), выполняется строгое условие гиперболичности (4.11):

$$b^2(x, t) - a(x, t)c(x, t) > 0. \quad (4.30)$$

Тогда, деля уравнение (4.29) на dt^2 и решая полученное квадратное уравнение, получаем два различных дифференциальных уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}. \quad (4.31)$$

Если функции a , b и c — гладкие, то уравнения (4.31) имеют соответствующие им два семейства интегральных кривых. Будем обозначать эти семейства характеристик соответственно знаками “+” “-”. Выберем на плоскости (x, t) новые координаты ξ , η так, чтобы $\xi = const$ на характеристиках семейства “+”, а $\eta = const$ на характеристиках семейства “-”. Это значит, что мы выбираем характеристики в качестве новых

координатных кривых, а ξ, η — это первые интегралы уравнений (4.31) соответственно.

Отметим, что замена переменных $(x, t) \mapsto (\xi, \eta)$ невырождена в каждой точке, в которой выполняется условие (4.30). Действительно, из (4.31) видно, что в каждой точке характеристики имеют разные направления, а поскольку $\text{grad}\xi$ и $\text{grad}\eta$ ортогональны соответствующим характеристикам, то $\text{grad}\xi$ и $\text{grad}\eta$ также имеют разные направления. Поэтому, кстати, искомые координаты ξ, η существуют в достаточно малой окрестности каждой точки. Отметим, что во всей рассматриваемой области плоскости (x, t) искомые координаты могут не существовать.

Проверим, что в координатах ξ, η уравнение (4.28) приводится к каноническому виду (4.18) с точностью до членов, содержащих производные первого порядка. Для этого выведем дифференциальное уравнение для функций $\xi(x, t), \eta(x, t)$, так называемое характеристическое уравнение. Поскольку $\xi(x, t) = \text{const}$ на любой характеристике из семейства “+”, т.е. эта характеристика является линией уровня функции ξ , то $\text{grad}\xi$ ортогонален этой характеристике (см. рис.19):

$$\text{grad}\xi \perp (dx, dt). \quad (4.32)$$

Следовательно, $\text{grad}\xi \parallel (dt, -dx)$, откуда $\frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{dt}{dx}$, или

$$dt = -kdx, \quad \text{где } k = \frac{\partial \xi}{\partial x} / \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (4.33)$$

Подставляя (4.33) в (4.29), получаем искомое дифференциальное уравнение:

$$a(x, t) \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + 2b(x, t) \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + c(x, t) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (4.34)$$

Точно так же выводится дифференциальное уравнение для $\eta(x, t)$ и оно совпадает с (4.34):

$$a(x, t) \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + 2b(x, t) \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + c(x, t) \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (4.35)$$

В этом нет ничего удивительного, поскольку (4.29) совмещает в себе два разных уравнения (4.31).

Теперь вспомним формулы (2.10) — (2.12) замены переменных в дифференциальном уравнении. Подставляя выражения (2.10) — (2.12) в (4.28), мы получаем для функции $v(\xi, \eta) = u(x, t)$ дифференциальное уравнение

$$\alpha(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\beta(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \dots = 0, \quad (4.36)$$

где ... заменяет члены, содержащие лишь производные первого порядка от v . При этом для коэффициентов α , β и γ получаем выражения:

$$\alpha = a \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + 2b \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2; \quad (4.37)$$

$$\gamma = a \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 + 2b \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2; \quad (4.38)$$

$$\beta = a \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial t} + 2b \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + c \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (4.39)$$

Обозначим через \tilde{A} так называемый характеристический многочлен оператора A из (4.28), соответствующий точке (x, t) :

$$\tilde{A}(\xi_1, \xi_2) = \tilde{A}(x, t; \xi_1, \xi_2) \equiv \alpha(x, t) \xi_2^2 + 2b(x, t) \xi_2 \xi_1 + c(x, t) \xi_1^2. \quad (4.40)$$

Тогда (4.34) и (4.35) равносильны тому, что

$$\alpha = \tilde{A}(\text{grad } \xi) = 0; \quad \gamma = \tilde{A}(\text{grad } \eta) = 0. \quad (4.41)$$

Окончательно (4.28) принимает вид, похожий на (4.18):

$$2\beta(\xi, \eta) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \dots = 0. \quad (4.42)$$

Задача. Докажите, что $\beta(\xi, \eta) \neq 0$ при $\xi = \xi(x, t)$, $\eta = \eta(x, t)$, если выполняется условие (4.30). (Используйте (4.37) — (4.41)).

Уравнение (4.42) можно решать приближенно. В ряде случаев, когда уравнение (4.42) оказывается достаточно простым, удается найти его общее решение и таким образом найти общее решение уравнения (4.28).

Упражнение (§18 [13]). Найти общее решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (4.43)$$

Решение. Уравнение характеристик (4.29) получается из (4.43) при помощи замен $\frac{\partial}{\partial x} \mapsto dy$; $\frac{\partial}{\partial y} \mapsto -dx$ (см.(4.29')):

$$dy^2 + 2 \sin x dy dx - \cos^2 x dx^2 = 0 \quad (4.44)$$

или

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \sin x \frac{dy}{dx} - \cos^2 x = 0.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x \pm \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x} = -\sin x \pm 1. \quad (4.45)$$

Интегрируя, получаем

$$y = \cos x \pm x = c.$$

Отсюда функции

$$c(x, y) = y - \cos x \mp x$$

постоянны вдоль интегральных кривых, т.е. они и являются первыми интегралами уравнений (4.45). Следовательно,

$$\begin{cases} \xi = y - \cos x - x, \\ \eta = y - \cos x + x. \end{cases} \quad (4.46)$$

Мы уже знаем, что уравнение (4.43) в переменных ξ, η имеет вид (4.42). Однако нам интересен и вид членов, содержащих $\frac{\partial v}{\partial \xi}$, $\frac{\partial v}{\partial \eta}$, обозначенных многоточием в (4.42). Можно было бы воспользоваться готовыми формулами (2.10) — (2.12), но мы сделаем замену переменных (4.46) в (4.43) непосредственно. Вместо v мы всюду будем писать u :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\sin x - 1) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\sin x + 1), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Отсюда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (\sin^2 x - 1) + \dots + \frac{\partial u}{\partial \xi} \cos x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cos x. \quad (4.48)$$

Здесь многоточием обозначены члены, содержащие $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$, которые, как мы уже знаем (см. (4.42)), уничтожаются при пересчете всех членов (4.43). Поэтому их и не нужно писать!

Аналогично,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (\sin x - 1) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} (\sin x + 1) + \dots \quad (4.49)$$

Наконец,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dots + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \dots \quad (4.50)$$

Подставляя (4.47) — (4.50) в (4.43), получаем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} (2(\sin^2 x - 1) - 2 \sin x \cdot 2 \sin x - \cos^2 x \cdot 2) + \cos x \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) - \cos x \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.$$

После приведения подобных членов и сокращений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \implies u = f(\xi) + g(\eta).$$

Ответ: $u(x, y) = f(y - \cos x - x) + g(y - \cos x + x)$.

Для закрепления материала рекомендуем решить задачи:

Задачи. Найти общее решение для следующих уравнений:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$
2. $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \quad x > 0, \quad y > 0.$
3. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$
4. $\frac{\partial}{\partial x} \left(x^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$
5. $(x - y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$
6. $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} + xyu = 0.$

Задачи. Решите следующие задачи Коши:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$
 $u|_{y=0} = 3x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0.$
2. $4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1 - y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1 + y^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0,$
 $u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$
3. $(1 + x^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 + y^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$
 $u|_{y=0} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \varphi_1(x).$
4. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \sin x \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$
 $u|_{y=\sin x} = \varphi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=\sin x} = \varphi_1(x).$

$$\begin{aligned}
5. \quad & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \\
& u|_{y=0} = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = F(x). \\
6. \quad & x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\
& u|_{y=1} = \varphi_0(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=1} = \varphi_1(x).
\end{aligned}$$

4. Негиперболические уравнения.

Рассмотрим случай, когда вместо условия строгой гиперболичности (4.30) выполняется противоположное неравенство

$$b^2(x, t) - a(x, t)c(x, t) < 0. \quad (4.51)$$

Тогда уравнение (4.28) называется эллиптическим в точке (x, t) . При этом правые части уравнений (4.31) - комплексно сопряженные функции, и при их интегрировании получаются комплексно сопряженные “первые интегралы” ξ и $\eta = \bar{\xi}$. Оказывается, если взять $z_1 = Re\xi = \frac{\xi + \eta}{2}$ и $z_2 = Im\xi = \frac{\xi - \eta}{2i}$ в качестве новых координат, то уравнение (4.28) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} + \dots = 0, \quad (4.52)$$

т.е. его главная часть совпадает с оператором Лапласа (см. задачи N 9 и 12–17 из [13]). Это позволяет решать такие уравнения точно или приближенно.

Упражнение (N 14 [13]). Приведем к каноническому виду уравнение

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad y > 0, \quad x > 0. \quad (4.53)$$

Решение. Уравнение характеристик $ydy^2 + xdx^2 = 0$ приводится к $\sqrt{y}dy = \pm i\sqrt{x}dx$, т.е. уравнение (4.53) — эллиптическое. Интегрируя, получаем $y^{3/2} \mp ix^{3/2} = c$. Выбираем за новые координаты $z_1 = Rec = y^{3/2}$, $z_2 = Imc = x^{3/2}$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z_2} \frac{3}{2} x^{1/2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z_1} \frac{3}{2} y^{1/2}$$

Отсюда дифференцированием получаем (не выписывая члены с $\frac{\partial^2 u}{\partial z_1 \partial z_2}$ в соответствии с (4.52)):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} \frac{9}{4} x + \frac{\partial u}{\partial z_2} \frac{3}{4} x^{-1/2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} \frac{9}{4} y + \frac{\partial u}{\partial z_1} \frac{3}{4} y^{-1/2} + \dots$$

Подставляя в (4.53), находим

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2}\right) \frac{9}{4} xy + \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial z_1} xy^{-1/2} + \frac{3}{4} \frac{\partial u}{\partial z_2} yx^{-1/2} = 0.$$

Отсюда получаем канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} + \frac{1}{3z_1} \frac{\partial u}{\partial z_1} + \frac{1}{3z_2} \frac{\partial u}{\partial z_2} = 0.$$

Теперь рассмотрим случай, когда в (4.30) вместо знака $>$ стоит $=$. Тогда уравнение (4.28) называется вырожденным или параболическим в широком смысле в точке (x, t) . Если (4.28) — параболическое уравнение в некоторой области, то уравнения (4.31) совпадают и соответственно имеется только один независимый первый интеграл $\xi(x, t)$. Для приведения (4.28) к каноническому виду в этом случае в качестве можно взять любую функцию так, чтобы замена $x, t \rightarrow \xi, \eta$ была невырожденной. Оказывается, (4.28) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = 0. \quad (4.54)$$

Упражнение (N 10 [13]). Приведем к каноническому виду уравнение

$$\sin^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad y > 0. \quad (4.55)$$

Решение. Уравнение характеристик $\sin^2 x dy^2 + 2y \sin x dy dx + y^2 dx^2 = 0$ приводится к виду $(\sin x dy + y dx)^2 = 0$, т.е. уравнение (4.55) — параболическое. После разделения переменных $dx/\sin x = -dy/y$, откуда $\ln \operatorname{tg}(x/2) = -\ln y + c$, или $y \operatorname{tg}(x/2) = c_1$. Возьмем $\xi = y \operatorname{tg}(x/2)$, тогда, принимая $\eta = y$, находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Отсюда дифференцированием получаем, не выписывая члены с $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$, в соответствии с (4.54):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y \frac{\sin(x/2)}{2 \cos^3(x/2)} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{2 \cos^2(x/2)} + \dots$$

Подставляя в (4.55), находим

$$\sin^2 x \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} y \frac{\sin(x/2)}{2 \cos^3(x/2)} \right) - 2y \sin x \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{1}{2 \cos^2(x/2)} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0,$$

откуда получаем канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(\frac{\xi \sin^2 x}{y^2 2 \cos^2(x/2)} - \frac{\sin x}{y \cos^2(x/2)} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{2\xi}{\eta^2 + \xi^2} \right) = 0.$$

Задачи. Привести к каноническому виду следующие уравнения:

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} + cu = 0.$
2. $\operatorname{tg}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{tg} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \operatorname{tg}^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$
3. $\operatorname{cth}^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y \operatorname{cth} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$

§5. Полубесконечная струна.

1. Смешанная задача для уравнения Даламбера.

Рассмотрим уравнение Даламбера (2.1) на полупрямой $x > 0$. Физически это соответствует струне, у которой один конец находится в начале координат, а другой на очень большом расстоянии от начала (на расстоянии $\gg at$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (5.1)$$

Начальные условия (2.2) здесь также необходимы:

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x > 0. \quad (5.2)$$

Кроме того, физически очевидно, что нужно задать краевое условие на левом конце струны при $x = 0$. Например, если этот конец закреплен, то его смещение равно нулю:

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.3)$$

Возможны также другие физически содержательные краевые условия (см. (1.8) и (1.17)).

Задача (5.1) — (5.3) называется *смешанной*, поскольку в ней присутствуют как начальные (5.2), так и краевые условия (5.3).

2. Решение смешанной задачи (5.1) — (5.3). Метод падающий и отраженной волн.

Применим метод Даламбера, т.е. будем искать решение в виде

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at) \quad (5.4)$$

Подставляя это разложение в начальные условия (5.2), получаем, как и в §2, уравнения (2.25) — (2.30), т.е. формулу Даламбера для $u(x, t)$.

Вопрос. Зачем нужно краевое условие (5.3), если мы, как нам кажется, и так уже нашли решение, используя только начальные условия?

Ответ. Уравнения (2.25) — (2.29) справедливы лишь при $x > 0$, поскольку начальные условия (5.2), в отличие от (2.2), заданы только при $x > 0$. Соответственно, формула Даламбера (2.30) справедлива при $x - at > 0$, а не при всех $x > 0$, $t > 0$.

Вывод. Решение смешанной задачи (5.1) — (5.3) дается формулой Даламбера (2.30) при $x - at > 0$.

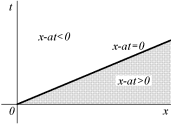


Рис. 20

Это область под “главной” характеристикой $x - at = 0$. Характеристика $x - at = 0$ называется главной, поскольку она выходит из особой (угловой) точки области $x > 0$, $t > 0$, где решается уравнение (5.1). Найдем теперь решение над главной характеристикой (в области $x - at < 0$). Разложение (5.4) справедливо всюду в области $x > 0$, $t > 0$. Однако, волна $f(x - at)$ найдена по формуле

(2.29) в области $x - at > 0$, т.е. под главной характеристикой. В то же время волна $g(x + at)$ найдена по формуле (2.28) всюду. Таким образом, остается найти $f(x - at)$ над главной характеристикой, т.е. при $x - at < 0$. Найдем $f(x - at)$ при $x - at < 0$. Воспользуемся краевым условием (5.3):

$$f(-at) + g(at) = 0, \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Это и есть формула, связывающая неизвестные значения f при отрицательных значениях аргумента с известными (2.28) значениями g при положительных значениях аргумента.

Сделаем замену переменных: положим

$$-at = z. \quad (5.6)$$

Тогда (5.5) примет вид

$$f(z) = -g(-z), \quad z < 0.$$

Ввиду (2.28), получаем отсюда, что при $x - at < 0$

$$f(x - at) = -g(at - x) = -\frac{\varphi(at - x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(s) ds - \frac{c}{2a} =$$

$$-\frac{\varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^0 \psi(s) ds - \frac{c}{2a}. \quad (5.7)$$

Подставляя (5.7) и (2.28) в (5.4), находим: при $x > at$ — формула Даламбера (2.30); при $0 < x < at$:

$$u(x, t) = \frac{-\varphi(at - x) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(s) ds. \quad (5.8)$$

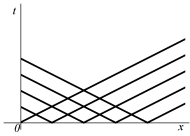
Итак, решение смешанной задачи (5.1) — (5.3) дается двумя разными формулами: формулой Даламбера (2.30) при $x > at$ (под главной характеристикой) и (5.8) при $0 < x < at$ (над главной характеристикой).

Определение. В области $0 < x < at$ волна $g(x + at)$ называется падающей (на левый конец $x = 0$), а $f(x - at)$ — отраженной (от этого конца).

Дадим *графическую интерпретацию* построения решения задачи (5.1) — (5.3).

Решение этой задачи состоит из двух этапов:

А. Подставляем разложение Даламбера (5.4) в *начальные условия* (5.2), которые заданы в точках оси Ox ($x > 0, t = 0$). Решая систему (2.25)



при $x > 0$, находим волны $f(x - at)$ и $g(x + at)$ в этих же точках $x > 0, t = 0$. Теперь $f(x - at)$ известна на всех характеристиках, бегущих вправо из этих точек (рис. 21), поскольку $f(x - at)$ постоянна вдоль таких характеристик. Эти характеристики заполняют всю область $x - at > 0$. С другой стороны, волна $g(x + at)$ известна всюду. Действительно, она постоянна на характе-

Рис. 21

ристиках, бегущих влево, а такие характеристики, выпущенные из точек луча Ox , заполняют всю область $x > 0, t > 0$. Таким образом, начальные данные позволяют определить решение там, где на рис. 21 проходят характеристики обоих семейств, т.е. под главной характеристикой.

Видно (см. рис.21), что над главной характеристикой волна $f(x - at)$ (отраженная) пока не известна, а падающая $g(x + at)$ — известна.

Б. Подставляем разложение Даламбера (5.4) в краевое условие (5.3), которое задано в точках оси Ot ($t > 0, x = 0$). Волна $g(x + at)$ в этих точках уже найдена из начальных условий в пункте А. Поэтому краевое условие (5.5) связывает неизвестное в этих точках значение волны $f(x - at)$ с известным значением

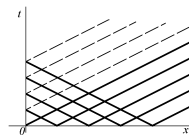


Рис. 22

$g(x + at)$, что позволяет определить волну $f(x - at)$. Но тогда $f(x - at)$ (и следовательно $u(x, t)$) известна на характеристиках, бегущих вправо из всех этих точек (пунктир на рис. 22), т.е. во всей области $x < at$ над главной характеристикой.

3. Другие краевые условия.

Вместо (5.3) можно рассмотреть краевое условие (1.6''):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (5.9)$$

Упражнение. Решим смешанную задачу (5.1) — (5.2), (5.9).

Решение:

- 1). Под главной характеристикой, т.е. при $x > at$, справедлива формула Даламбера (2.30), и формулы (2.28) — (2.29) справедливы при $x > 0$;
- 2). над главной характеристикой, т.е. при $x < at$, вместо (5.5) получаем, подставляя (5.4) в (5.9):

$$f'(-at) + g'(at) = 0, \quad t > 0. \quad (5.10)$$

После подстановки $-at = z$

$$f'(z) + g'(-z) = 0, \quad z < 0. \quad (5.11)$$

Интегрируя, получаем

$$f(z) - g(-z) = c_1 = \text{const}, \quad z < 0. \quad (5.12)$$

Отсюда ввиду (2.28) получаем при $x < at$:

$$f(x - at) = g(at - x) + c_1 = \frac{1}{2}\varphi(at - x) + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(s)ds + \frac{c}{2a} + c_1. \quad (5.13)$$

Беря $g(x + at)$ из той же формулы (2.28), получаем при $x < at$

$$u(x, t) = \frac{\varphi(at - x) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{at-x} \psi(s)ds + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(s)ds + c_2. \quad (5.14)$$

Константу c_2 , как мы сейчас покажем, можно определить из условия непрерывности решения $u(x, t)$ на характеристике $x = at$, если задача (5.1) — (5.2), (5.9) решается для струны или для стержня.

4. Разрывы решения вдоль главной характеристики. Условия непрерывности.

Из сказанного выше следует, что решение задачи (5.1) — (5.2) выражается разными формулами при $x - at > 0$ и $x - at < 0$, поэтому вдоль линии $x - at = 0$ оно может быть разрывным. Оказывается, разрыв любого решения уравнения (5.1) вдоль линии $x - at = 0$ есть величина постоянная. Действительно, это видно из (5.4):

- 1) волна $g(x + at)$ непрерывна при переходе через главную характеристику, так как ее линии уравня $x + at = const$ пересекают прямую $x = at$;
- 2) волна $f(x - at)$ снизу от главной характеристики $x - at = 0$ имеет предел, равный $f(0+)$, так как там $x - at > 0$; аналогично, предел сверху равен $f(0-)$. Итак,

$$u \Big|_{x-at=0-} - u \Big|_{x-at=0+} = f(0-) - f(0+). \quad (5.15)$$

Поэтому условие непрерывности решения $u(x, t)$ на главной характеристике имеет вид

$$f(0-) = f(0+). \quad (5.16)$$

Упражнение. Найти условие непрерывности решения задачи (5.1) — (5.3) на главной характеристике.

Решение. Из (2.29) вытекает, что

$$f(0+) = \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{c}{2a}, \quad (5.17)$$

а из (5.7) следует

$$f(0-) = -g(0) = -\frac{\varphi(0)}{2} - \frac{c}{2a}. \quad (5.18)$$

Следовательно, условие (5.16) дает

$$-\frac{\varphi(0)}{2} = \frac{\varphi(0)}{2} \iff \varphi(0) = 0. \quad (5.19)$$

Замечание 5.1. Рассмотрим область $x > 0, t > 0$, где решается задача (5.1) — (5.3).

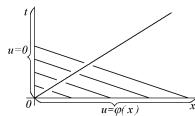


Рис. 23

На ее границе на оси Ot решение равно нулю ввиду (5.3), а на оси Ox решение равно $\varphi(x)$. Поэтому условие (5.19) есть просто условие непрерывности граничных значений $u(x, t)$ в точке $(0, 0)$. Как мы видели, оно необходимо и достаточно для непрерывности решения на всей главной характеристике.

Упражнение. Найти условие непрерывности решения задачи (5.1) — (5.2), (5.9) на главной характеристике.

Решение. Формула (5.17) здесь также верна, а вместо (5.18) получаем из (5.13):

$$f(0_-) = \frac{\varphi(0)}{2} + \frac{c}{2a} + c_1. \quad (5.20)$$

Поэтому (5.16) принимает вид (см. (5.14)):

$$\frac{\varphi(0)}{2} + \frac{c}{2a} + c_1 = \frac{\varphi(0)}{2} - \frac{c}{2a} \iff c_1 + \frac{c}{a} = c_2 = 0. \quad (5.21)$$

Замечание 5.2. Разрывное решение задачи (5.1) – (5.2), (5.9) (при $c_2 \neq 0$) не имеет физического смысла для струны или стержня, поскольку оно означает их разрыв. Однако в акустике или газовой динамике разрывное решение имеет физический смысл и называется ударной волной. При этом величину разрыва, равную c_2 , нельзя найти из уравнений (5.1) – (5.2), (5.9).

Она определяется из дополнительных физических или химических соображений и таким образом неоднозначность в решении задачи ликвидируется. Например, при распространении детонационной волны в парах бензина величина скачка давления на фронте зависит от марки бензина, давления, температуры, состава смеси и т.д.

Смешанная задача (5.1) – (5.2) при более общих краевых условиях (1.8) или (1.17) решается так же, как при условии (5.9), однако краевое уравнение типа (5.10) на отраженную волну будет уравнением второго порядка, и его решение содержит произвольные постоянные. Они определяются в каждой конкретной задаче из дополнительных условий. Например, ниже условие (5.34) означает, что груз при $t = 0$ прилип к левому концу струны и его скорость равна 7.

Упражнение. Найти непрерывное решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, t > 0; \quad u(x, 0) = e^{-x}; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= \cos 5x; \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = u(0, t) + t. \end{aligned}$$

Решение. При $x > 3t$ справедлива формула Даламбера

$$u(x, t) = \frac{e^{-(x-3t)} + e^{-(x+3t)}}{2} + \frac{1}{6} \frac{\sin(5(x+3t)) - \sin(5(x-3t))}{5}.$$

Поэтому при $x < 3t$ нужно искать решение в виде

$$u(x, t) = f(x - 3t) + \frac{e^{-(x+3t)}}{2} + \frac{1}{30} \sin(5(x + 3t)).$$

Подставляя это выражение в краевое условие, находим:

$$f'(-3t) - \frac{e^{3t}}{2} + \frac{1}{6} \cos(15t) = f(-3t) + \frac{e^{-3t}}{2} + \frac{1}{30} \sin(15t) + t, \quad t > 0.$$

После замены $y = -3t$ получаем:

$$f'(y) - \frac{e^y}{2} + \frac{1}{6} \cos(5y) = f(y) + \frac{e^y}{2} - \frac{1}{30} \sin(5y) - \frac{y}{3}, \quad y < 0.$$

или

$$f'(y) - f(y) = e^y - \frac{1}{6} \cos(5y) - \frac{1}{30} \sin(5y) - \frac{y}{3}, \quad y < 0. \quad (5.21')$$

Отсюда

$$f(y) = Ce^y + ye^y + A \cos(5y) + B \sin(5y) + \frac{y}{3} + \frac{1}{3}, \quad y < 0.$$

Константы A и B находим, подставляя $f(y)$ в (5.21'):

$$-5A \sin(5y) - A \cos(5y) + 5B \cos(5y) - B \sin(5y) = -\frac{1}{6} \cos(5y) - \frac{1}{30} \sin(5y).$$

Поэтому $-5A - B = \frac{1}{30}$; $-A + 5B = -\frac{1}{6}$, откуда $-26A = -\frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{78}$; $B = -5A + \frac{1}{30} = -\frac{5}{78} + \frac{1}{30}$. Наконец, C находим из условия непрерывности (5.16): $C + A + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{6} - A = \frac{1}{6} - \frac{1}{78} = \frac{2}{13}$.

Ответ: при $x < 3t$

$$u(x, t) = \frac{2}{13} e^{x-3t} + (x-3t)e^{x-3t} + \frac{1}{78} \cos 5(x-3t) + \left(\frac{1}{30} - \frac{5}{78} \right) \sin 5(x-3t) + \frac{x-3t}{3} + \frac{1}{3} + \frac{e^{-(x+3t)}}{2} + \frac{1}{30} \sin 5(x+3t).$$

5. Распространение волн.

Упражнение. Натянутая полубесконечная веревка покоится, а начиная с момента $t = 0$ ее левый конец $x = 0$ движется вверх и вниз с заданным смещением $\sin \pi t$; при этом $a = 1$. Нарисуем форму веревки при $t = 1, 2, 3, \dots$

Решение. Нужно решить смешанную задачу (5.1) — (5.2), где $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$, с краевым условием

$$u(0, t) = \sin \pi t, \quad t > 0. \quad (5.22)$$

1) $x > t \Rightarrow u(x, t) = 0$, поскольку $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ по условию. В частности, $g(x+t) \equiv 0$.

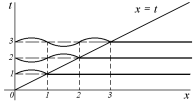


Рис. 24

2) $x < t$: поскольку $g(x + t) \equiv 0$, то

$$u(x, t) \equiv f(x - t). \quad (5.23)$$

Подставляя (5.23) в (5.22), имеем

$$f(-t) = \sin \pi t, \quad t > 0. \quad (5.24)$$

После замены $-t = z$

$$f(z) = \sin \pi(-z), \quad z < 0. \quad (5.25)$$

Поэтому

$$u(x, t) = f(x - t) = \sin \pi(t - x) = -\sin \pi(x - t), \quad x < t. \quad (5.26)$$

Ответ: см. рис. 24.

Упражнение. Натянутая веревка вначале покоится, а начиная с момента $t = 0$ ее левый конец $x = 0$ перемещают вверх и вниз с заданной силой $\sin \pi t$. При этом $a = 1$, натяжение $T = 1$. Нарисуем форму веревки при $t = 1, 2, 3, \dots$

Решение. Нужно найти непрерывное решение смешанной задачи (5.1) — (5.2) при $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ с краевым условием

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -\sin \pi t, \quad t > 0, \quad (5.27)$$

(см. (1.8)).

1) $x > 0 \Rightarrow u(x, t) \equiv 0$, в частности, $g(x + t) \equiv 0$.

2) $x < t$:

$$u(x, t) = f(x - t) \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.27), имеем

$$f'(-t) = -\sin \pi t, \quad t > 0. \quad (5.29)$$

После замены $-t = z$

$$f'(z) = \sin \pi z, \quad z < 0 \Rightarrow f(z) = -\frac{\cos \pi z}{\pi} + c, \quad z < 0. \quad (5.30)$$

Поэтому

$$u(x, t) = f(x - t) = -\frac{\cos \pi(x - t)}{\pi} + c, \quad x < t. \quad (5.31)$$

Условие непрерывности при $x = t$ требует, чтобы

$$u(t, t) = 0 = -\frac{1}{\pi} + c \iff c = \frac{1}{\pi}. \quad (5.32)$$

Окончательно:

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} (-\cos \pi(x - t) + 1), \quad x < t. \quad (5.33)$$

Ответ: см. рис. 25.

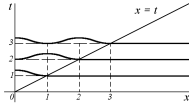


Рис. 25

Упражнение. К левому свободному концу полубесконечного покоящегося стержня прилипает груз массой $m = 2$, летящий со скоростью $v = 7$. Найти смещения стержня при $t > 0$, считая в уравнении (5.1) коэффициент $a = 3$ и $SE = 5$ в (1.17).

Решение. Математическая постановка задачи выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0; \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, t) = 5 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Прилипание груза к левому концу стержня дает такие условия:

$$u(0, 0+) = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0+) = 7 \quad (5.34)$$

Последнее равенство связано с тем, что на левом конце стержня нет другой сосредоточенной массы, кроме прилипшего груза. При $x > 3t$ справедлива формула Даламбера, так что $u(x, t) = 0$, поскольку начальные данные равны нулю. При $x < 3t$ решение имеет вид $u(x, t) = f(x - 3t)$, поскольку $g(x + 3t) \equiv 0$. Подставляя в краевые условия, находим

$$2 \cdot 9f''(-3t) = 5f'(-3t), \quad t > 0; \quad f(0-) = 0; \quad -3f'(0-) = 7.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} 18f''(y) - 5f'(y) &= 0; \quad y < 0 \Rightarrow f(y) = c_1 + c_2 e^{\frac{5}{18}y}; \quad c_1 + c_2 = 0; \\ -3c_2 \frac{5}{18} &= 7; \quad c_2 = -\frac{42}{5}. \end{aligned}$$

Ответ: $u = 0$ при $x > 3t$ и $u = \frac{42}{5} \left(1 - e^{\frac{5}{18}(x-3t)}\right)$ при $x < 3t$.

6. Отражение волн.

К задаче (5.1) – (5.2) при краевых условиях (5.3) или (5.9) кроме общего метода, описанного выше, удобно применять также методы нечетного и четного продолжения соответственно.

Рассмотрим метод нечетного продолжения.

Следующая задача описывает колебания струны при щипке.

Упражнение. Решим смешанную задачу (5.1) – (5.3) с $a = 1$ и такими начальными данными:

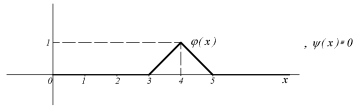


Рис. 26

Нарисуем форму струны при $t = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. Рассмотрим решение $\hat{u}(x, t)$ задачи Коши (2.1) — (2.2) на всей оси с $\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(x, 0) = \hat{\psi}(x) \equiv 0$ и нечетно продолженной $\hat{\varphi}(x)$:

$$\hat{u}(0, x) = \hat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(x), & x < 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

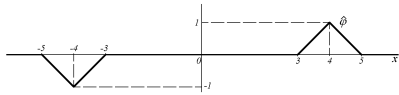


Рис. 27

Положим

$$u(x, t) \equiv \hat{u}(x, t) \Big|_{x \geq 0}. \quad (5.36)$$

Очевидно, u удовлетворяет уравнению (5.1) и начальным условиям (5.2). Ниже мы увидим, что краевое условие (5.3) также выполняется, поскольку $\hat{u}(x, t)$ — нечетная функция по x . Область $x < 0$ будем называть фиктивной, или нефизической.

Построение $\hat{u}(x, t)$. По формуле Даламбера (2.30)

$$\hat{u}(x, t) = \frac{\hat{\varphi}(x-t)}{2} + \frac{\hat{\varphi}(x+t)}{2}, \quad (5.36')$$

т.е. нужно $\hat{\varphi}(x)$ разделить пополам, сдвинуть на t вправо и влево и результаты сложить.

1. $t = 1$: рис. 28.

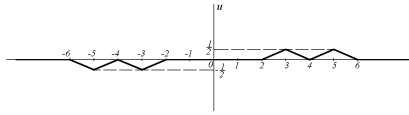


Рис. 28

2. $t = 2$: рис. 29. Стрелки указывают направления движения горбиков.

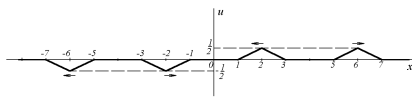


Рис. 29

3. $t = 3$ — левый горбик в физической области $x > 0$ подошел к гвоздю $x = 0$:

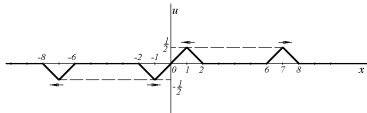


Рис. 30

4. $t = 3, 5$ — гвоздь перетягивает горбик:

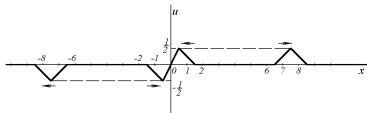


Рис. 31

5. $t = 4$: рис. 32. Оклонение при $x \in [-1, 1]$ равно тождественно нулю, стрелками показаны скорости точек струны.

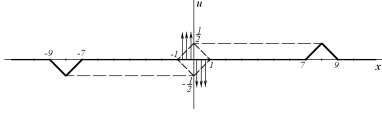


Рис. 32

6. $t = 5$: рис. 33. Горбики разъехались (стрелками показаны направления движения горбиков).

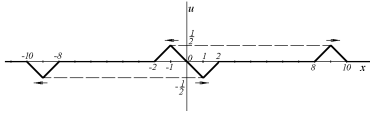


Рис. 33

И так далее: в физической области $x > 0$ бегут два горбика вправо (а в нефизической $x < 0$ — влево).

Замечание 5.3. Видно, что краевое условие (5.3) при $x = 0$ выполняется при всех $t > 0$ потому, что $\hat{u}(x, t)$ — нечетная функция по x .

Задача. Нарисуйте форму струны при $t = 3.25$.

Рассмотрим колебания рояльной струны при ударе молоточком.

Упражнение. Решим смешанную задачу (5.1) — (5.3) с $a = 1$ и такими начальными данными:

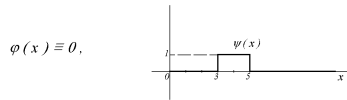


Рис. 34

Нарисуем форму струны при 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Решение. Положим $\hat{\varphi}(x) \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$, а $\psi(x)$ продолжим по нечетности:

$$\hat{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

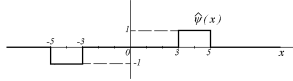


Рис. 35

Рассмотрим решение \hat{u} задачи Коши (2.1) — (2.2) с начальными данными $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$. Как и на с.19

$$\hat{u}(x, t) = \hat{\phi}(x+t) - \hat{\phi}(x-t), \quad \text{где} \quad \hat{\phi}(x) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x \hat{\psi}(s) ds : \quad (5.37)$$

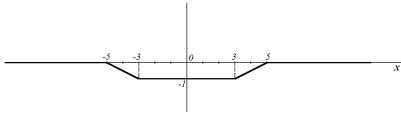


Рис. 36

Положим $u(x, t) \equiv \hat{u}(x, t)|_{x>0}$. Очевидно, $u(x, t)$ удовлетворяет (5.1) и (5.2). Ниже будет видно, что краевое условие (5.3) также выполняется. Построение $\hat{u}(x, t)$ по формуле (5.37): рис. 37–42.

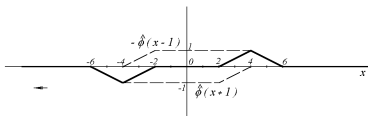
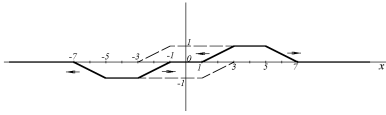
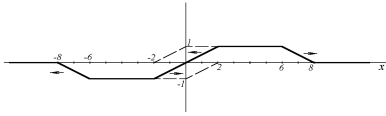


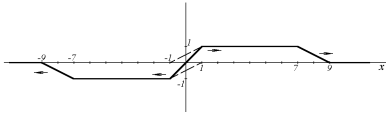
Рис. 37: $t = 1$.



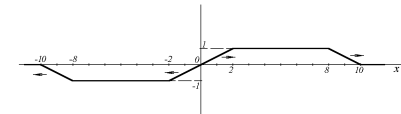
Puc. 38: $t = 2$.



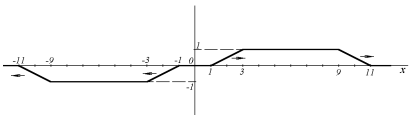
Puc. 39: $t = 3$.



Puc. 40: $t = 4$.



Puc. 41: $t = 5$.



Puc. 42: $t = 6$.

И так далее: в физической области $x > 0$ бежит трапеция вправо (а в нефизической — влево). Краевое условие (5.3), очевидно, выполняется.

Задача. Нарисуйте форму струны при $t = 3.5$ и $t = 4.5$.

Рассмотрим теперь *метод четного продолжения*.

Задача. Решите смешанную задачу (5.1) — (5.2), (5.9) с $a = 1$ и начальными данными (5.34). Нарисуйте форму струны при $t = 1; 2; 3; 3.5; 4; 4.5$.

Указание. Применить четное продолжение $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда краевое условие (5.9) будет выполняться, поскольку $\hat{u}(x, t)$ будет четной по x .

Задача. Решите смешанную задачу (5.1) — (5.2), (5.9) с $a = 1$ и начальными данными (5.37). Нарисуйте форму струны при $t = 1, 2, 3; 3, 5; 4; 4, 5; 6$.

Упражнение. По упругому полубесконечному стержню при $t < 0$ распространяется волна деформации, бегущая влево:

$$u(x, t) = \begin{cases} \sin(x + 3t), & x > -3t, \\ 0, & 0 < x < -3t, \quad t < 0. \end{cases} \quad (5.38)$$

Левый конец стержня при $x = 0$ упруго закреплён (см. (1.17)):

$$0 = -2u(0, t) + 3 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), \quad t > 0. \quad (5.39)$$

Найдем $u(x, t)$ при $t > 0$.

Решение. Из условия вытекает, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \sin x; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 3 \cos x, \quad x > 0.$$

Отсюда при $x > 3t$ по формуле Даламбера $u(x, t) = \sin(x + 3t)$, как и в (5.38). При $x < 3t$ ищем решение в виде $u = f(x - 3t) + \sin(x + 3t)$. Подставляя в краевое условие (5.39), получаем

$$0 = -2f(-3t) - 2 \sin(3t) + 3f'(-3t) + 3 \cos(3t).$$

Замена $y = -3t$ дает

$$3f'(y) - 2f(y) = -2 \sin y - 3 \cos y. \quad (5.40)$$

Поэтому $f(y) = Ce^{(2/3)y} + A \cos y + B \sin y$. Константы A и B находим, подставляя $f(y)$ в (5.40):

$$-3A \sin y - 2A \cos y + 3B \cos y - 2A \sin y = -2 \sin y - 3 \cos y.$$

Поэтому $-3A - 2B = -2$; $-2A + 3B = -3$, откуда

$$-9A - 4A = -12; \quad A = 12/13; \quad B = -1 + \frac{2}{3}A = -1 + \frac{8}{13} = -\frac{5}{13}.$$

Наконец, C находим из условия непрерывности (5.16): $C + A = 0$; $C = -\frac{12}{13}$.

Ответ: при $x < 3t$

$$u(x, t) = -\frac{12}{13}e^{\frac{2}{3}(x-3t)} + \frac{12}{13} \cos(x-3t) - \frac{5}{13} \sin(x-3t) + \sin(x+3t).$$

§6. Ограниченная струна.

1. Метод Даламбера.

Поперечные колебания струны длиной l в отсутствие внешних сил описываются уравнением (5.1):

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (6.1)$$

Для однозначного определения движения струны нужно задать начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad \dot{u}(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < l \quad (6.2)$$

и краевые условия на концах. Например, если концы закреплены, то

$$u(0, t) = 0; \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (6.3)$$

Решение смешанной задачи (6.1) — (6.3) можно найти методом Даламбера по схеме §5, а именно:

1) подставляя (5.4) в начальные условия (6.2), которые заданы в точках $t = 0$, $0 < x < l$, находим по формулам (2.28) — (2.29) волны $f(x - at)$ и $g(x + at)$ в этих же точках. Это дает решение $u(x, t)$ в области I (треугольнике OAB):

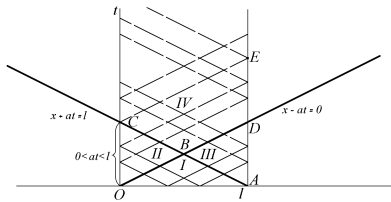


Рис. 43

2) подставляя (5.4) в краевое условие (6.3) при $x = 0$, находим отраженную волну $f(x - at)$ по известной падающей волне $g(x + at)$ в точках отрезка OC . Это дает решение $u(x, t)$ в области II (треугольнике OBC);

3) подставляя (5.4) в краевое условие (6.3) при $x = l$, находим отраженную волну $g(x + at)$ по известной падающей волне $f(x - at)$ в точках отрезка AE .

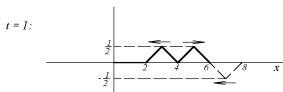
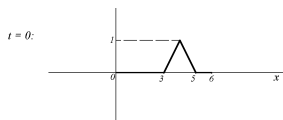
И так далее. Так можно найти решение $u(x, t)$ во всей полуполосе $0 < x < l$, $t > 0$, последовательно разбивая ее на области, ограниченные характеристиками, подобными характеристикам OD , AC , CE . Таким же образом можно решить смешанную задачу (6.1) — (6.2) с другими, более сложными чем (6.3) краевыми условиями на концах струны.

Замечание 6.1. Асимптотические свойства решений задачи (6.1) — (6.3) при $t \rightarrow \infty$, в частности, собственные частоты колебаний, более удобно исследовать методом Фурье, изложенным в главе II.

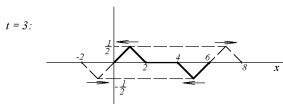
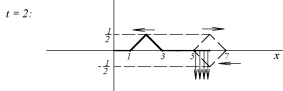
2. Метод “четного” и “нечетного” продолжения.

Упражнение. Решим задачу (6.1) – (6.3) при $a = 1$, $l = 6$ и начальных данных из рис. 26. Нарисуем форму струны при $t = 1, 2, \dots$ и найдем период T колебаний струны.

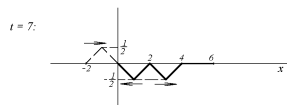
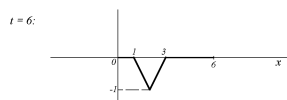
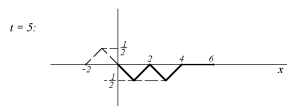
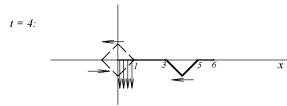
Решение.



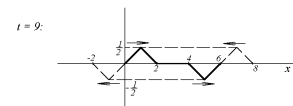
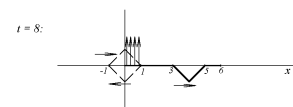
(пускаем справа фиктивный горбик)



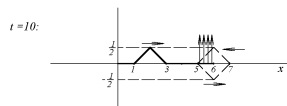
(пускаем слева фиктивный горбик)



(пускаем слева фиктивный горбик)



(пускаем справа фиктивный горбик)



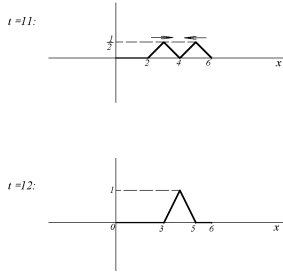


Рис. 44

Итак, цикл замкнулся, период $T = 12 = \frac{2l}{a}$.

Задача (рояльная струна). Решите задачу (6.1) — (6.3) при $a = 1$ и начальных условиях из рис. 34, $l = 6$. Нарисуйте форму струны при $t = 1, 2, \dots$ и найдите период колебаний.

Задача. Решите задачу (6.1) — (6.2) с краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (6.4)$$

Указание. Нужно применять метод “четных” отражений, т.е. пускать отраженные фиктивные горбки (см. рис. 44) с той же “поляризацией”, что и падающие, а не с противоположной.

§7. Волновое уравнение со многими независимыми переменными.

1. Плоские волны, характеристики, разрывы.

Многомерным аналогом уравнения Даламбера (1.1) является волновое уравнение, где $a > 0$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(x, t) \equiv a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right), \quad t > 0, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3. \quad (7.1)$$

Такому уравнению удовлетворяет давление воздуха $p(x, t)$ (звуковая волна в акустике), потенциалы $\varphi(x, t)$ и $A(x, t)$ электромагнитного поля в электродинамике и т.д.

Будем искать решения уравнения (7.1) вида

$$u(x, t) = f(\xi_0 t + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = f(\xi_0 t + \langle \vec{\xi}, x \rangle) \quad (7.2)$$

где $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq 0$; $\langle \vec{\xi}, x \rangle \equiv \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$.

Замечание 7.1. Такая функция называется плоской волной. Это связано с тем, что

а) при фиксированном $t = t_0$ поверхности уровня $u(x, t_0) = const$ являются плоскостями

$$\xi_0 t + \langle \vec{\xi}, x \rangle = c \quad (7.3)$$

перпендикулярными вектору $\vec{\xi}$;

б) при разных значениях $t = t_0, t_1$ функция $u(t_1, x)$ отличается от $u(t_0, x)$ сдвигом на вектор

$$-\frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} \xi_0 (t_1 - t_0). \quad (7.4)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} u \left(x + \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} \xi_0 (t_1 - t_0), t_0 \right) &= f \left(\xi_0 t_0 + \langle \vec{\xi}, x + \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2} \xi_0 (t_1 - t_0) \rangle \right) = \\ &= f \left(\xi_0 t_0 + \langle \vec{\xi}, x \rangle + \frac{\langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle}{|\vec{\xi}|^2} \xi_0 (t_1 - t_0) \right) = f \left(\xi_0 t_1 + \langle \vec{\xi}, x \rangle \right) = u(t_1, x). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Итак, (7.2) есть волна, бегущая вдоль направления вектора $-\vec{\xi}$ со скоростью

$$v = \frac{\xi_0}{|\vec{\xi}|}. \quad (7.6)$$

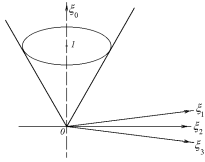
Обозначим единичный вектор направления $-\vec{\xi}$ через $\vec{\omega} = -\frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|}$. Тогда $\xi_0 = v|\vec{\xi}|$; $\vec{\xi} = -\vec{\omega}|\vec{\xi}|$ и, следовательно, (7.2) можно записать в виде

$$u(x, t) = f \left(v|\vec{\xi}|t - \langle \vec{\omega}, x \rangle |\vec{\xi}| \right) = f \left((vt - \langle \vec{\omega}, x \rangle) |\vec{\xi}| \right) = g(vt - \langle \vec{\omega}, x \rangle), \quad (7.7)$$

где $g(z) \equiv f \left(x|\vec{\xi}| \right)$, $|\vec{\omega}| = 1$.

После этих предварительных замечаний приступим к разысканию решения уравнения (7.1) в виде (7.2). Подставим (7.2) в (7.1), по теореме о дифференцировании сложной функции получим:

$$f''(\xi_0 t + \langle \vec{\xi}, x \rangle) \xi_0^2 = a^2 f''(\xi_0 t + \langle \vec{\xi}, x \rangle) (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2). \quad (7.8)$$



Считая, что $f''(z) \neq 0$, получаем отсюда характеристическое уравнение

$$\xi_0^2 = a^2 |\vec{\xi}|^2. \quad (7.9)$$

Решения этого уравнения — векторы $\xi = (\xi_0, \vec{\xi}) \in \mathbb{R}^4$, лежащие на (трехмерном) конусе Q в \mathbb{R}^4 , основание которого — двумерная сфера $|\vec{\xi}| = \frac{1}{a}$, $\xi_0 = 1$ (рис. 45).

Рис. 45

Обратно, для любого $\xi \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющего (7.9), плоская волна (7.2) является решением уравнения (7.1) при любой функции $f(z)$.

В частности, $f(z)$ можно взять разрывной (или быстро меняющейся) в какой-нибудь точке, например при $z = 2$ (см. рис. 14.). Тогда решение (7.2) будет иметь такой же разрыв (или быстрый скачок) вдоль всей гиперплоскости в $\mathbb{R}_{x,t}^4$ (если $\xi \neq 0$):

$$\xi_0 t + \langle \vec{\xi} x \rangle = 2. \quad (7.10')$$

При фиксированном t этот разрыв расположен на плоскости в \mathbb{R}_x^3 с уравнением (7.10'). Эта плоскость движется с увеличением t в направлении перпендикулярного ей вектора $-\vec{\xi}$ со скоростью $v = \frac{|\xi_0|}{|\vec{\xi}|} = a$ (см. (7.9)).

Определение. Вектор $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^4$, $\xi \neq 0$ удовлетворяющий (7.9), называется характеристической нормалью волнового уравнения (7.1).

Гиперплоскость $\xi^\perp = \{(t, x) \in \mathbb{R}^4 : \xi_0 t + \langle \vec{\xi} x \rangle = const\}$, перпендикулярная некоторой характеристической нормали ξ , называется характеристической гиперплоскостью (или просто характеристикой) волнового уравнения (7.1). Гиперповерхность в \mathbb{R}^4 называется характеристикой, если в каждой точке ее касательная гиперплоскость является характеристической.

Замечание 7.2. В силу характеристического уравнения (7.6) скорость распространения всех плоских волн, удовлетворяющих волновому уравнению (7.1), равна a :

$$v^2 = \frac{\xi_0^2}{|\vec{\xi}|^2} = a^2. \quad (7.10)$$

Вывод. Любая характеристическая гиперплоскость может быть поверхностью разрыва решения уравнения (7.1) (см. замечание 2.1).

Все плоские волны и разрывы этих волн, удовлетворяющих уравнению (7.1), распространяются со скоростью a .

С формулой (7.10) связано открытие *электромагнитной природы света* и *специальной теории относительности*.

Из уравнений электродинамики Максвелл вывел, что потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению (7.1) с коэффициентом

$$a^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}. \quad (7.10'')$$

Здесь ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемость вакуума соответственно — находятся экспериментально из чисто электромагнитных измерений. Когда Максвелл вычислил скорость распространения электромагнитных волн, то оказалось, что она с большой степенью точности совпадает со скоростью света:

$$a = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 299976 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Это навело Максвелла на мысль, что свет имеет электромагнитную природу!

Другим великим открытием, связанным с формулами (7.10), (7.10''), является специальная теория относительности.

Естественно возникает вопрос: если $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ — скорость света, то в какой системе отсчета? Известно, что законы механики справедливы в любой инерциальной системе отсчета. Поэтому можно предположить, что и законы электродинамики также справедливы в любой инерциальной системе. Но тогда, согласно (7.10''), и скорость света также одинакова во всех этих системах! Однако такое свойство скорости противоречит механике Ньютона. Следовательно, либо уравнения Максвелла справедливы лишь в некоторой выделенной системе отсчета, связанной с “неподвижным эфиром”, либо неточны законы механики Ньютона. Именно для выяснения этого вопроса Майкельсон и Морли поставили свой знаменитый эксперимент и таким образом подтвердили тождественность скорости света в различных инерциальных системах отсчета, а следовательно, отсутствие “неподвижного эфира” и неточность ньютоновской механики (при больших скоростях). Необходимое уточнение законов механики было затем дано А.Эйнштейном.

2. Область зависимости. Формула Кирхгофа.

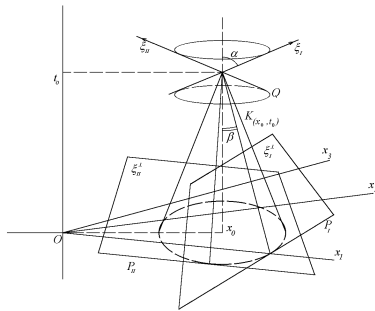


Рис. 46

Попытаемся найти область зависимости для уравнения (7.1) при помощи характеристик, как в §4 (рис. 18), а именно рассмотрим задачу Коши

для уравнения (7.1) с начальными условиями при $t = 0$:

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (7.11)$$

Проведем через какую-либо точку $(x_o, t_o) \in \mathbb{R}^4$, $t_o > 0$ все характеристики (гиперплоскости) уравнения (7.1) (рис. 46). На рис. 46 ξ_I и ξ_{II} — характеристические нормали, а ξ_I^\perp и ξ_{II}^\perp — ортогональные им характеристические гиперплоскости, проходящие через (x_o, t_o) . Эти характеристики пересекают “начальную” гиперплоскость $t = 0$ по плоскостям P_I и P_{II} . Гипотеза: предположим (по аналогии с рис. 18), что область зависимости решения u в точке (x_o, t_o) есть область гиперплоскости $t = 0$, заключенная “между” всеми гиперплоскостями P_I, P_{II}, \dots

Эта область есть шар радиусом at с центром в x_o . Чтобы это увидеть, нужно заметить следующее: нормали ξ_I, ξ_{II} принадлежат конусу Q с уравнением (7.9), а все гиперплоскости $\xi_I^\perp, \xi_{II}^\perp$ касаются конуса $K_{(x_o, t_o)}$ с образующими, “ортогональными” образующим конуса Q (см. рис. 46). Поэтому гиперплоскости P_I, P_{II}, \dots касаются основания конуса $K_{(x_o, t_o)}$, т.е. сферы $S_{(x_o, t_o)}$, которая лежит “между” всеми этими гиперплоскостями.

Замечание 7.3. Конус $K_{(x_o, t_o)}$ называется характеристическим конусом уравнения (7.1) в точке (x_o, t_o) и является характеристической гиперповерхностью. Из рис. 46 видно, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Из (7.9) вытекает, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\vec{\xi}_I|}{|\xi_o|} = \frac{1}{a} \implies \operatorname{tg} \beta = a. \quad (7.12)$$

Поэтому уравнение конуса $K_{(x_o, t_o)}$

$$|x - x_o| = a|t - t_o|. \quad (7.13)$$

Отсюда при $t = 0$ получается уравнение сферы

$$S_{(x_o, t_o)} = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_o| = at_o\} \quad (7.14)$$

Итак, наша гипотеза заключается в том, что область зависимости u в точке (x_o, t_o) есть шар радиуса at_o с центром x_o .

Такая гипотеза равносильна тому, что все решения уравнения (7.1) распространяются со скоростью a . Отметим, что для плоских волн мы это уже доказали.

Оказывается, предложенная гипотеза верна. Более того, оказывается, что область зависимости меньше, чем шар, и совпадает со сферой $S_{(x_o, t_o)}$. Это, очевидно, вытекает из формулы Кирхгофа для решения задачи Коши (7.1), (7.11) (о доказательстве этой формулы см. [11]):

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \psi(y) dS_y + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi a^2 t} \int_{|y-x|=at} \varphi(y) dS_y \right). \quad (7.15)$$

3. Распространение волн. Принцип Гюйгенса.

Упражнение. Дано: $a = 1$, $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ при $|x| > 1$; найти где (заведомо) $u(x, t) \equiv 0$ при $t = 1, 2, 3, 4$.

Решение: Пусть сначала a произвольно. Тогда $u(x, t) = 0$, если в (7.15) область интегрирования — сфера $|y - x| = at$ — не пересекается с областью $|y| \leq 1$, где сосредоточены $\varphi(y)$ и $\psi(y)$:

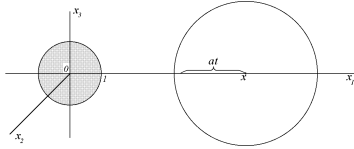
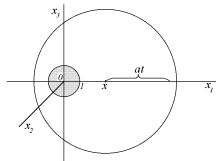


Рис. 47

Видно, что это условие эквивалентно тому, что (см.рис. 47)



$$1 + at < |x|, \quad (7.16)$$

или, другая возможность,

$$at > 1 = |x|. \quad (7.17)$$

когда сфера $|y - x| = at$ охватывает шар $|y| \leq 1$ снаружи (см. рис. 48).
Условие (7.16) при $a = 1$ дает тождество $u(x, t) \equiv 0$ в областях:

Рис. 48

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow |x| > 2; & t = 2 &\Rightarrow |x| > 3; \\ t = 3 &\Rightarrow |x| > 4; & t = 4 &\Rightarrow |x| > 5. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Условие (7.17) при $a = 1$ дает тождество $u(x, t) \equiv 0$ в областях:

$$t = 1 \Rightarrow x \in \emptyset; \quad t = 2 \Rightarrow |x| < 1; \quad t = 3 \Rightarrow |x| < 2; \quad t = 4 \Rightarrow |x| < 3. \quad (7.19)$$

Таким образом, $u(x, t)$ имеет вид сферической волны, сосредоточенной в шаровом слое толщиной 2:

$$\begin{aligned} t = 1 &\Rightarrow |x| \leq 2; & t = 2 &\Rightarrow 1 \leq |x| \leq 3; \\ t = 3 &\Rightarrow 2 \leq |x| \leq 4; & t = 4 &\Rightarrow 3 \leq |x| \leq 5. \end{aligned} \quad (7.20)$$

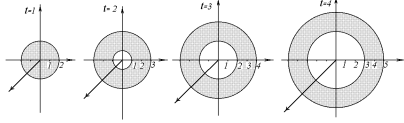


Рис. 49

Ответ: $u(x, t)$ заведомо $\equiv 0$ вне слоев (7.20) (но, разумеется, может обращаться в нуль и где-нибудь внутри этих слоев).

Вывод. Из (7.20) видно, что фронт шаровой волны распространяется со скоростью 1. В общем случае произвольного a из (7.16) и (7.17) видно, что решение $u(x, t) \neq 0$ в шаровом слое

$$at - 1 \leq |x| \leq at + 1 \quad (7.21)$$

толщиной 2. Эта волна имеет два фронта: передний $|x| = at + 1$ и задний $|x| = at - 1$, оба распространяющиеся со скоростью a .

Упражнение. Дано: $a = 1$, $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ при $|x| < 2$ или $|x| > 4$ (как на рис. 49 для $t = 3$). Где $u(x, t) \equiv 0$ при $t = 1, 2, 3, 4, 5$?

Решение. Здесь $u(x, t) \equiv 0$ при трех возможных расположениях I, II, III сферы $|y - x| = t$ (см. рис. 50).

Для расположения I, аналогично (7.16), в случае произвольного a , $4 + at < |x|$. Для расположения II, аналогично (7.17), $at > 4 + |x|$.

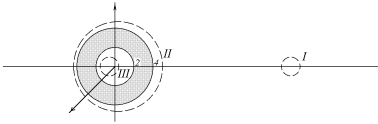


Рис. 50

Наконец, для расположения III, $|x| + at < 2$.

Поскольку в нашем условии $a = 1$, то получаем следующее: 1) при $t = 1$ сфера $|y - x| = t$ имеет радиус 1 и для нее возможны расположения I и III, а II — нет. В результате получаем, что $u(x, 1)$ сосредоточена в слое $1 \leq |x| \leq 5$ (см. рис. 51).

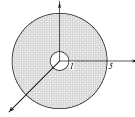
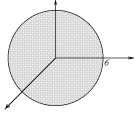


Рис. 51



Отметим, что этот результат сильно отличается от рис. 49 при $t = 4$; 2) далее, при $t = 2$ радиус сферы интегрирования равен 2, следовательно, возможно лишь расположение I. Поэтому волна занимает шар $|x| \leq 6$;

Рис. 52

3) при $t = 3$ также возможно лишь расположение I (сфера интегрирования имеет радиус 3), поэтому волна занимает шар $|x| \leq 7$;

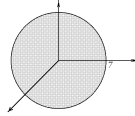


Рис. 53

4) то же происходит при $t = 4$: шар $|x| \leq 8$;

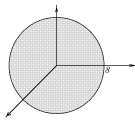


Рис. 54

5) наконец, при $t = 5$, кроме I, появляется возможность расположения II (сфера интегрирования имеет радиус 5) и т.д.

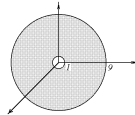


Рис. 55

Теперь видно, что $u(x, t)$ при $t > 4$ есть сферическая волна, занимающая шаровой слой толщиной 8.

Принцип Гюйгенса — это правило, позволяющее строить передний фронт F_t волны в момент времени t , если он известен при $t = 0$. Это правило вытекает из формулы Кирхгофа (7.15) и заключается в следующем:

Пусть $u|_{t=0}$ и $\dot{u}|_{t=0}$ равны нулю вне области, заштрихованной на рис. 56, с гладкой границей F_0 . Тогда $u(x, t) \equiv 0$ вне области, ограниченной поверхностью F_t . Фронт F_t строится так: $\forall x_0, x_0 \in F_0$ рассматривается сфера $S_{at}(x_0)$ радиусом at с центром в x_0 и берется поверхность F_t — огибающая этих сфер.

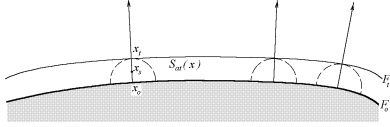


Рис. 56

Обозначим через x_t точку касания фронта F_t со сферой $S_{at}(x_0)$; предположим, что такая точка единственная. Легко видеть, что отрезок $[x_0, x_t] \perp F_t$, если F_t — гладкая поверхность. Можно проверить также, что $[x_0, x_t] \perp F_0$ (задача). Следовательно фронт F_t можно строить еще и так: из каждой точки $x_0 \in F_0$ выпустить отрезок $[x_0, x_t] \perp F_0$ длиной at . Множество всех таких точек x_t и будет фронтом F_t . Отрезки $[x_0, x_t]$ называются *лучами*. Таким образом, принцип Гюйгенса означает, что волны “распространяются по лучам”.

4. Диффузия волн в двумерном случае. Формула Пуассона.

Двумерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \Delta_2 u \equiv a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \quad (7.22)$$

получается из (7.1), когда $u(x_1, x_2, x_3, t)$ не зависит от x_3 . Это бывает в том случае, когда от x_3 не зависят начальные условия и внешние источники: ток, заряды в электродинамике или источники звука в акустике. Например, уравнению (7.22) удовлетворяют потенциалы магнитного поля постоянного прямолинейного тока в проводе, параллельном земной поверхности, акустическое поле длинной прямолинейной шоссеиной дороги и т.д. Такие волны $u(x_1, x_2, t)$, не зависящие от x_3 , называются цилиндрическими.

Начальные данные φ и ψ в этом случае также не зависят от x_3 :

$$u|_{t=0} = \varphi(x); \quad \dot{u}|_{t=0} = \psi(x); \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (7.23)$$

Решение задачи (7.22) — (7.23) дается формулой Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_{|y-x|<at} \frac{\psi(y)dy}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}} + \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{|y-x|<at} \frac{\varphi(y)dy}{\sqrt{(at)^2 - |y-x|^2}} \right). \quad (7.24)$$

Здесь интегралы берутся по кругу $|y-x| < at$, а не по его границе, в отличие от формулы Кирхгофа (7.15). Соответственно, распространение цилиндрических волн (или “волн на плоскости”) не такое, как сферических.

Упражнение. Дано: $a = 1$ и $\varphi(x) \equiv \psi(x) \equiv 0$ при $|x| > 1$, $x \in \mathbb{R}^2$. Где $u(x, t) \equiv 0$ при $t = 1, 2, 3, 4, 5$?

Ответ: $t = 1 \Rightarrow |x| > 2$; $t = 2 \Rightarrow |x| > 3$; $t = 3 \Rightarrow |x| > 4$; $t = 4 \Rightarrow |x| > 5$.

Замечание 7.4. В этом упражнении цилиндрическая волна имеет передний фронт, но не имеет заднего фронта в отличие от сферических волн в двух предыдущих упражнениях. Это явление называется диффузией волн. Оказывается, что при всех нечетных $n \geq 3$ в волновом уравнении с n пространственными переменными x_1, \dots, x_n есть передний и задний фронт; при всех четных $n \geq 2$ (и при $n = 1$!) есть передний, но нет заднего фронта.

Замечание 7.5. Если в последнем упражнении функции φ и ψ , входящие в (7.23) ограничены, то решение $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, как видно из (7.24). (Докажите это!)

Замечание 7.6. (“Метод спуска” от $n = 3$ к $n = 2$.) Можно получить формулу Пуассона (7.24) из формулы Кирхгофа (7.15), используя независимость φ и ψ от x_3 (см. [11]).

§8. Общие гиперболические уравнения. Примеры негиперболических уравнений.

1. Общие гиперболические уравнения с постоянными коэффициентами.

Сначала рассмотрим *однородный* дифференциальный оператор, т.е. такой, в котором все производные имеют один и тот же порядок m :

$$Au(x) \equiv \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \partial_x^\alpha u(x) = 0; \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (8.1)$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $\alpha_k = 0, 1, 2, \dots$,

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (8.2)$$

Будем искать решения типа плоских волн:

$$u(x) = f(\langle \xi, x \rangle) = f(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n); \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (8.3)$$

где f — некоторая функция от одной переменной. Подставляя (8.3) в (8.1) получаем, аналогично (7.8),

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha f^{(m)}(\langle \xi, x \rangle) = 0; \quad \xi^\alpha \equiv \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}. \quad (8.4)$$

Отсюда, считая $f^{(m)}(z) \neq 0$, получаем, аналогично (7.9), алгебраическое уравнение характеристик (сравните с (4.41)):

$$\tilde{A}(\xi) \equiv \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha = 0. \quad (8.5)$$

Оно определяет конус Q в \mathbb{R}^n , т.е.

$$\xi \in Q \implies t\xi \in Q; \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.6)$$

Итак, из (8.4) вытекает, что плоская волна (8.3) удовлетворяет дифференциальному уравнению (8.1) при произвольной функции f тогда и только тогда, когда “волновой” вектор ξ удовлетворяет алгебраическому уравнению (8.5).

Определение:

- 1) вектор $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, удовлетворяющий (8.5), называется характеристической нормалью дифференциального уравнения (8.1);
- 2) гиперплоскость $\xi^\perp \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi, x \rangle = const\}$, перпендикулярная некоторой характеристической нормали, называется характеристикой дифференциального уравнения (8.1);
- 3) гиперповерхность в \mathbb{R}^n называется характеристикой уравнения (8.1), если в каждой ее точке касательная гиперплоскость является характеристикой.

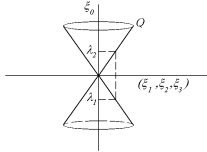
Определение. Уравнение (8.1) называется (строго) гиперболическим в направлении оси Ox_1 , если уравнение (8.5) относительно ξ_1 при любом фиксированном

$$\xi' \equiv (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus 0 \quad (8.7)$$

имеет ровно m различных вещественных корней $\xi_1^{(k)} = \lambda_k(\xi')$, $k = 1, \dots, m$

$$\lambda_1(\xi') < \dots < \lambda_m(\xi'). \quad (8.8)$$

Геометрически условие (8.8) означает, что конус Q имеет m различных пол.



Пример. Для волнового уравнения (7.1) порядок $m = 2$ и уравнение (8.5), эквивалентное (7.9), имеет 2 корня $\xi_0 = \pm a|\xi|$, и значит

$$\lambda_1 = -a|\xi| < \lambda_2 = a|\xi|; \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus 0. \quad (8.9)$$

Соответственно, конус Q имеет 2 полы. Поэтому волновое уравнение гиперболично в направлении оси Ot .

Рис. 57

Пример. Для уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - 9\Delta\right) u(x, t) = 0; \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0 \quad (8.10)$$

порядок $m = 4$, характеристическое уравнение (8.5) имеет вид

$$(\xi_0^2 - |\xi|^2)(\xi_0^2 - 9|\xi|^2) = 0 \quad (8.11)$$

Оно имеет 4 корня: $\xi_o = \pm|\xi|$ и $\xi_o = \pm 3|\xi|$, и значит

$$\lambda_1 = -3|\xi| < \lambda_2 = -|\xi| < \lambda_3 = |\xi| < \lambda_4 = 3|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus 0. \quad (8.12)$$

Поэтому конус Q имеет 4 доли (см.рис 58).

Вопрос. Как связано определение строгой гиперболичности с условием (4.11)?

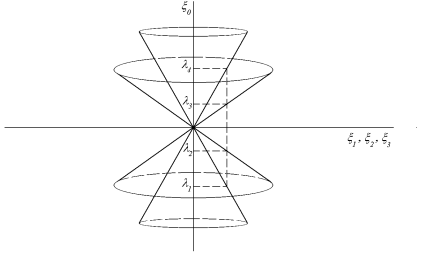


Рис. 58

Ответ. Для уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными они эквивалентны. Действительно, для уравнения (4.7) уравнение (8.5) имеет вид

$$A(\xi_o, \xi_1) \equiv a\xi_o^2 + 2b\xi_o\xi_1 + c\xi_1^2 = 0 \quad (8.13)$$

Его решения

$$\xi_o = \frac{b \pm \sqrt{D}}{a} \xi_1 \quad (8.14)$$

вещественны и различны при условии (4.11).

Беря в (8.3) функцию $f(z)$ разрывной, мы видим, что решение уравнения (8.1) может иметь разрыв вдоль любой заданной характеристической гиперплоскости (см. замечание 2.1).

Замечание 8.1. Возьмем направление характеристической нормали ξ за новую ось координат, так чтобы плоскость $y_1 = 0$ совпадала с ξ^\perp , а остальные координаты y_2, \dots, y_n выберем произвольным образом, лишь бы это была *линейная* невырожденная замена переменных. Тогда, оказывается (задача!), в новых координатах уравнение (8.1) содержит член $b_{(m,0,\dots,0)} \frac{\partial^m u}{\partial y_1^m}$ с коэффициентом (сравните (4.37) — (4.38), (4.40):

$$b_{(m,0,\dots,0)} = \tilde{A}(\text{grad } y_1) = C\tilde{A}(\xi)$$

Но ввиду (8.5) этот коэффициент равен нулю. Поэтому уравнение (8.1) приобретает вид

$$\sum_{|\alpha|=m, \alpha_1 \leq m-1} b_\alpha \partial_y^\alpha u(y) = 0. \quad (8.1')$$

Обычно это свойство вектора ξ и принимают за определение характеристической нормали (см. [4, 10, 11, 14]). Из (8.1') хорошо видно, почему решения уравнения (8.1) могут иметь разрывы на гиперплоскости ξ^\perp . Дело в том, что в каждом слагаемом в уравнении (8.1') есть хотя бы одна производная по переменным y_2, \dots, y_n . Поэтому уравнениям (8.1') и (8.1) удовлетворяет любая функция от y_1 , в частности, любая такая разрывная функция (сравните с замечанием 4.1).

Теперь рассмотрим общий *неоднородный оператор*

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial_x^\alpha u(x) = 0; \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (8.15)$$

Решения этого уравнения вида плоских волн мы уже не найдем. Однако принимается, что, по определению, характеристическое уравнение для (8.15) есть (8.5), т.е. оно составляется без учета производных младшего порядка.

Итак, решения уравнения (8.1) могут иметь разрывы на любой заданной характеристической гиперплоскости. Оказывается, что для уравнения (8.15) это также верно, если оно строго гиперболическое. Следующий пример показывает, что без условия гиперболичности это может быть не так!

2. Примеры негиперболических уравнений.

Уравнение теплопроводности — вырожденное или параболическое (см. Приложение):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u(x, t); \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (8.16)$$

Для него уравнение характеристик (8.5) имеет вид

$$0 = a^2 |\xi|^2 \iff \xi = 0. \quad (8.17)$$

Следовательно, корней $\xi_0(\xi)$ при $\xi \neq 0$ характеристическое уравнение не имеет, т.е. уравнение теплопроводности не гиперболическое по t , а так называемое параболическое. Конус Q состоит из векторов, параллельных оси Ot :

$$Q = \{(\xi_0, 0, 0, 0)\}, \quad (8.18)$$

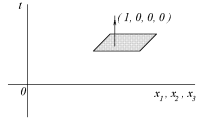


Рис. 59

где ξ_0 произвольно. Соответственно, характеристические гиперплоскости имеют уравнения $t = const$ и перпендикулярны оси Ot (рис. 59).

Вопрос. Верно ли, что уравнение (8.16) имеет решения, разрывные на плоскостях $t = const$?

Ответ. Нет, неверно. Это связано с тем, что уравнение (8.16) не гиперболическое и тем, что мы

пренебрегли членом $\frac{\partial u}{\partial t}$ при составлении характеристического уравнения (8.17).

Оказывается, все решения уравнения теплопроводности бесконечно дифференцируемы. Однако у него есть решения, которые на характеристических плоскостях $t = const$ являются бесконечно дифференцируемыми, но не аналитическими.

Пример. Функция

$$E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{(2\pi t)^{3/2}} e^{-\frac{|x|^2}{2t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (8.19)$$

1) удовлетворяет уравнению теплопроводности (8.16) всюду в \mathbb{R}^4 , кроме точки $t = 0, x = 0$;

2) при $t \neq 0$ или $x \neq 0$ она является бесконечно дифференцируемой;

3) при $t = 0, x \neq 0$ она не является аналитической.

Задача. Докажите сформулированные выше утверждения 1), 2), 3).

Отметим, что если убрать из уравнения (8.16) член $\frac{\partial u}{\partial t}$, то получающееся уравнение $0 = \Delta u$, очевидно, имеет решения, разрывные на любой заданной характеристической гиперплоскости $t = const$, например, произвольные функции вида $u(x, t) \equiv f(t)$, где $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция. Таким образом, свойства решений вырожденных уравнений сильно зависят от младших членов, в отличие от невырожденных уравнений.

Вопрос. Можно ли находить область зависимости для общего уравнения (8.15) при помощи характеристик, как в §4, т.е. верна ли для него гипотеза из §7?

Ответ. Для строгого гиперболического уравнения — верна (как и для волнового в §7) (см. [1]).

Замечание 8.2. Для уравнения теплопроводности (8.16) эта гипотеза также в некотором смысле выполняется. А именно, рассмотрим для (8.16) задачу Коши с начальным условием

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (8.20)$$

Для любой точки (x_o, t_o) , $x_o \in \mathbb{R}^3$, $t_o > 0$ характеристическая гиперплоскость, проходящая через нее, единственна: $t = t_o$. Она не пересекает гиперплоскость $t = 0$ совсем или, можно считать, пересекает ее в бесконечности. Тогда область, заключенная “внутри” пересечений характеристик с $t = 0$, есть вся гиперплоскость $t = 0$. Оказывается, действительно такова область зависимости для уравнения теплопроводности. Это видно из формулы Пуассона для решения задачи Коши (8.16), (8.20) (см. [3, 11, 14]):

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi at)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{|x-y|^2}{2at}} \varphi(y) dy. \quad (8.21)$$

Поэтому скорость распространения возмущений для уравнения теплопроводности бесконечна.

Пример. Уравнение Лапласа (эллиптическое — см. Приложение):

$$\Delta u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0; \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (8.22)$$

Оно получается из волнового уравнения (7.1) и из уравнения теплопроводности (8.16), если u не зависит от t . Это так называемые стационарные решения. Физически они описывают положения равновесия для (7.1) или предельные режимы при $t \rightarrow +\infty$ для решений уравнения (8.16) и представляют особый интерес в приложениях.

Найдем для (8.22) решения типа плоских волн:

$$u(x) = f(\langle \xi, x \rangle) = f(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (8.23)$$

Подставляя в (8.22), получим, как и выше,

$$f''(\langle \xi, x \rangle) \xi_1^2 + f''(\langle \xi, x \rangle) \xi_2^2 + f''(\langle \xi, x \rangle) \xi_3^2 = 0, \quad (8.24)$$

Откуда вытекает характеристическое уравнение

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0. \quad (8.25)$$

Отсюда

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0. \quad (8.26)$$

Вывод. Уравнение (8.22) не является гиперболическим (ни по какой переменной).

Вопрос. Значит ли это, что уравнение Лапласа не имеет решений типа плоских волн?

Ответ. Нет, не значит. Возьмем комплексные решения уравнения (8.25), например,

$$\xi_1 = i\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2}; \quad (\xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^2. \quad (8.27)$$

Однако, тогда в (8.23) функция $f(z)$ должна быть определена при комплексных значениях z . Кроме того, в (8.24) в первом слагаемом $f''(\langle \xi, x \rangle)$ есть производная f по направлению мнимой оси, а во втором и третьем — вдоль вещественной оси! Поэтому для того, чтобы сократить (8.24) на f'' и получить (8.25) нужно, чтобы $f(z)$ в каждой точке имела одинаковые производные по вещественным и мнимым направлениям. Но это означает, как известно из ТФКП, что $f(z)$ аналитична! Соответственно и $u(x) = f(\langle \xi, x \rangle)$ аналитическая функция от вещественных переменных x_1, x_2, x_3 и не может быть разрывной. Например, $u(x) = \langle \xi, x \rangle^3 = (x_1 i\sqrt{\xi_2^2 + \xi_3^2} + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^3$.

Следствие. Все решения уравнения Лапласа (8.22) типа плоских волн являются аналитическими и, следовательно, бесконечно дифференцируемыми. Отметим, однако, что это комплексные решения, и их поверхности уровня — комплексные гиперплоскости в C^3 .

Оказывается, все решения уравнения Лапласа аналитичны [10, 11].

3. Ударные звуковые волны и излучение Вавилова-Черенкова.

Рассмотрим электромагнитное поле равномерно движущегося в некотором веществе точечного заряда. Если скорость заряда равна v и он движется в положительном направлении оси Ox_1 , то его электромагнитное поле описывается четырьмя потенциалами, каждый из которых имеет вид

$$\varphi(x, t) = u(x_1 - vt, x_2, x_3) \quad (8.28)$$

и вне точки $(x_1 - vt, 0, 0) \equiv 0$, где находится заряд, удовлетворяет волновому уравнению (7.1) с коэффициентом $a = c_b$, где c_b — скорость света в данном веществе. Отметим, что $c_b < c$, где c — скорость света в вакууме, а v может быть меньше c_b или больше c_b (но меньше c).

Подставляя (8.28) в (7.1), получаем уравнение

$$v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1 - vt, x_2, x_3) = c_b^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right), \quad x \neq x(t), \quad (8.29)$$

откуда, обозначая $x_1 - vt = y_1$, получаем для $u(y_1, x_2, x_3)$ уравнение

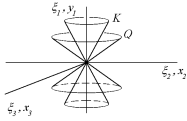
$$(c_b^2 - v^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + c_b^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) = 0, \quad (y_1, x_2, x_3) \neq 0. \quad (8.30)$$

Характеристическое уравнение (8.5), соответствующее (8.30), имеет вид

$$(c_b^2 - v_b^2)\xi_1^2 + c_b^2(\xi_2^2 + \xi_3^2) = 0. \quad (8.31)$$

Отсюда видно, что 1) при $v < c_b$ уравнение (8.30) не имеет (вещественных) характеристик, как уравнение Лапласа. Оно эллиптического типа (см. Приложение). Оказывается, все его решения гладкие, т.е. электромагнитное поле не имеет особенностей при $x \neq x(t)$; 2) при $v > c_b$ уравнение (8.30) гиперболическое по y_1 и, следовательно, имеет разрывные решения типа плоских волн. Характеристическому конусу Q с уравнением (8.31), как мы знаем из §7, соответствует “ортогональный ему” характеристический конус K с уравнением

$$c_b^2 y_1^2 + (c_b^2 - v^2)(x_2^2 + x_3^2) = 0 \quad (8.32)$$



Оказывается, рассматриваемое решение u будет бесконечным на той полё конуса (8.32), где $y_1 < 0$. Из (8.32) получаем уравнение поверхности особенностей потенциала (8.28):

Рис. 60

$$c_b^2(x_1 - vt)^2 = (v^2 - c_b^2)(x_2^2 + x_3^2); \quad x_1 - vt < 0. \quad (8.33)$$

При каждом фиксированном t эта поверхность в \mathbb{R}^3 есть конус с вершиной в точке $x(t)$, в которой находится заряд (см. рис. 61). Вдоль этой поверхности потенциалы и напряженность поля бесконечны, и молекулы вещества в точках этого конуса, возбуждаясь, испускают свет. Это и есть знаменитое излучение Вавилова-Черенкова.

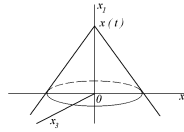


Рис. 61

Точно такая же ситуация возникает при нахождении звукового поля движущегося тела в воздухе: при $v < c_{\text{звука}}$ нет разрывов давления, а при $v > c_{\text{звука}}$ — есть. Поэтому самолет, летящий со сверхзвуковой скоростью, несет за собой на конусе (8.33) ударную волну, т.е. давление — разрывная функция в точках этого конуса (рис. 62)

Когда фронт этой волны проходит через наше ухо, мы слышим “хлопок”. Конический фронт этой ударной волны называется в газовой динамике конусом Маха.

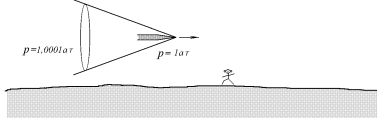


Рис. 62

ГЛАВА II. МЕТОД ФУРЬЕ.

[3, с.47–49, 327–345, 388–394, 464–479]; [9, с.40–42]; [11, с.132–208, 213–218]; [12, с.19–23, 338–351, 397–402]; [14, с.82–121, 147–152, 180–185, 309–318].

§1. Вывод уравнения теплопроводности.

Пусть имеется прямолинейный однородный металлический стержень длиной l . Направим ось x вдоль стержня, пусть $x = 0$ — левый конец стержня, а $x = l$ — правый. Обозначим через $u(x, t)$ температуру стержня в точке x в момент времени $t > 0$. Оказывается, $u(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + bf(x, t) \quad (1.1)$$

где $f(x, t)$ — плотность внешних источников тепла в точке x в момент времени t . Это значит, что на участок $[x, x + \Delta x]$ за время от t до $t + \Delta t$ поступает извне количество тепловой энергии

$$Q_{\text{внеш}} = f(x, t)\Delta x\Delta t. \quad (1.2)$$

Выведем (1.1). Для этого запишем уравнение теплового баланса для участка стержня $[x, x + \Delta x]$ за время от t до $t + \Delta t$:

$$cm\Delta T = Q \quad (1.3)$$

Здесь c — удельная теплоемкость вещества,

$$m(\text{масса}) = \mu\Delta x, \quad \Delta T \approx u(x, t + \Delta t) - u(x, t), \quad (1.4)$$

$$Q = Q_{\text{внеш}} + Q_{\text{л}} + Q_{\text{п}}, \quad (1.5)$$

где Q — полученное участком тепло; $Q_{\text{л}}$ — тепло, полученное слева (т.е. через точку x , а $Q_{\text{п}}$ — справа (т.е. через точку $x + \Delta x$) (см. рис. 63).

По закону теплопроводности Фурье

$$Q_{\text{л}} = -\lambda S \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\Delta t; \quad Q_{\text{п}} = \lambda S \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t)\Delta t \quad (1.6)$$

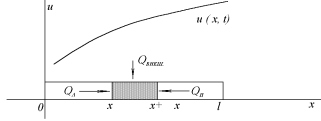


Рис. 63

где λ — коэффициент теплопроводности вещества, а S — площадь поперечного сечения стержня. Закон (1.4), грубо говоря, означает, что скорость передачи тепла через поперечное сечение стержня в точке x пропорциональна “перепаду температур” $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$. Знаки в (1.6) выбраны так, чтобы тепло передавалось от нагретых тел к холодным (2-е начало термодинамики). Например, для $u(x, t)$ на рис. 63 $Q_l \leq 0$; $Q_p \geq 0$, а $\frac{\partial u}{\partial x} \geq 0$ всюду, поэтому знаки левых и правых частей в (1.6) совпадают. Для других случаев (других $u(x, t)$) знаки в (1.6) проверяются аналогично. Подставляя (1.6) и (1.2) в (1.5), а затем (1.5) и (1.4) в (1.3), получаем

$$c\mu\Delta x (u(x, t + \Delta t) - u(x, t)) \approx f(x, t)\Delta x\Delta t + \lambda S \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right) \Delta t. \quad (1.7)$$

Отсюда делением на $\Delta x\Delta t$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$ получаем

$$c\mu \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda S \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t). \quad (1.8)$$

Отсюда получается (1.1).

§2. Смешанная задача для уравнения теплопроводности.

Операторная форма задачи. Идея метода Фурье.

Для однозначного определения температуры стержня, кроме уравнения (1.1), нужно задать начальную температуру

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l \quad (2.1)$$

и краевые условия. Например, если концы опустить в тающий лед, то их температура будет равна нулю:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0. \quad (2.2)$$

Задача (1.1), (2.1) – (2.2) называется смешанной задачей для уравнения теплопроводности.

Запишем ее в операторной форме:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = a^2 A \hat{u}(t) + \hat{f}(t), & t > 0, \\ \hat{u}(0) = \hat{\varphi}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь $A = \frac{d^2}{dx^2}$; $\hat{f}(t) \equiv f(x, t)$; $\hat{u}(t) \equiv u(x, t)$; $\hat{\varphi} = \varphi(x)$. Из краевых условий (2.2) следует, что $\hat{u}(t) \in C_0^2[0, l]$ при каждом $t > 0$, где

$$C_0^2[0, l] \equiv \{u(x) \in C^2[0, l] : u(0) = u(l) = 0\}. \quad (2.4)$$

Итак, оператор A это есть $-\frac{d^2}{dx^2}$ на области определения $D(A) = C_0^2[0, l]$. Идея метода Фурье состоит в том, что при $f \equiv 0$ решение задачи (2.3) ищется в виде суммы частных решений первого уравнения этой задачи, имеющих вид $T(t) \cdot X(x)$.

Поясним эту идею на примере системы n обыкновенных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями, имеющей в векторной записи вид (2.3) (с $f \equiv 0$):

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}(t)}{dt} = A\hat{u}(t), & \hat{u}(t) = (\hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_n(t)) \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ \hat{u}(0) = \hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_n) \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.5)$$

где A — матрица размера $n \times n$.

Пусть для A существует базис из собственных векторов e_1, \dots, e_n :

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.6)$$

Тогда искомое решение $\hat{u}(t)$ и начальный вектор $\hat{\varphi}$ можно представить в виде

$$\hat{u}(t) = \sum_1^n T_k(t)e_k, \quad \hat{\varphi} = \sum \varphi_k e_k. \quad (2.7)$$

Подставляя в (2.5) получаем

$$\sum_1^n \frac{dT_k(t)}{dt} e_k = \sum_1^n \lambda_k T_k(t) e_k, \quad \sum_1^n T_k(0) e_k = \sum_1^n \varphi_k e_k, \quad (2.8)$$

откуда

$$\frac{dT_k(t)}{dt} = \lambda_k T_k(t), \quad t > 0, \quad T_k(0) = \varphi_k. \quad (2.8')$$

Отсюда $T_k(t) = \varphi_k e^{\lambda_k t}$ и, следовательно,

$$\hat{u}(t) = \sum_1^n \varphi_k e^{\lambda_k t} \cdot e_k. \quad (2.9)$$

Ниже мы получим аналоги формул (2.6) – (2.9) для оператора $A = -\frac{d^2}{dx^2}$.

§3. Задача Штурма-Лиувилля и ее решение.

1. Задача Штурма-Лиувилля.

Найдем в $D(A) = C_0^2[0, l]$ собственные векторы $X_1(x), \dots, X_k(x), \dots$ оператора A :

$$\begin{cases} AX_k = \lambda_k X_k; \\ X_k \in D(A), \quad X_k \neq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Подробнее (3.1) означает, что

$$\begin{cases} X_k''(x) = \lambda_k X_k(x), & 0 < x < l, \\ X_k(0) = X_k(l) = 0, & X_k(x) \neq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Замечание 3.1. Как будет показано ниже в §5, в базисе X_1, \dots, X_k, \dots из собственных векторов оператора A решение задачи (2.3) при $f(x, t) \equiv 0$ имеет вид, аналогичный (2.9):

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} e^{a^2 \lambda_k t} \varphi_k X_k(x), \quad (3.3)$$

где φ_k – координаты $\hat{\varphi}$ в базисе $\{X_k\}$.

Отметим, что каждое слагаемое ряда (3.3) в силу (3.1) удовлетворяет операторному уравнению в (2.3). Поэтому любая конечная (частичная) сумма этого ряда также удовлетворяет (2.3). Весь ряд (3.3) удовлетворяет уравнению (2.3), если он допускает почленное дифференцирование по t и дважды – по x , т. е. если он достаточно быстро сходится.

Введем обозначение

$$\langle u, v \rangle = \int_0^l u(x) v(x) dx \quad \text{для} \quad \forall u, v \in L_2[0, l].$$

Лемма. Оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ на $D(A) = C_0^2[0, l]$ симметричен и отрицателен, т. е.

$$\left\langle \frac{d^2 u}{dx^2}, v \right\rangle = \left\langle u, \frac{d^2 v}{dx^2} \right\rangle, \quad \forall u, v \in D(A), \quad (3.4)$$

$$\left\langle \frac{d^2 u}{dx^2}, u \right\rangle < 0, \quad \forall u \in D(A), \quad u(x) \neq 0. \quad (3.5)$$

Доказательство:

1) равенство (3.4) означает, что

$$\int_0^l u''(x) v(x) dx = \int_0^l u(x) v''(x) dx. \quad (3.6)$$

Чтобы его доказать, проинтегрируем по частям:

$$\int_0^l u''(x) v(x) dx = u' v \Big|_0^l - \int_0^l u'(x) v'(x) dx, \quad (3.7)$$

$$\int_0^l u(x) v''(x) dx = u v' \Big|_0^l - \int_0^l u'(x) v'(x) dx. \quad (3.8)$$

Подстановка в (3.7) равна нулю, поскольку $v(0) = v(l) = 0$, а в (3.8) – поскольку $u(0) = u(l) = 0$. Поэтому равенство (3.6) доказано;

2) при $u = v$ из (3.7) вытекает, что

$$\left\langle \frac{d^2 u}{dx^2}, u \right\rangle = \int_0^l u''(x) u(x) dx = - \int_0^l (u'(x))^2 dx \leq 0.$$

Отсюда следует (3.5). Действительно, если

$$\int_0^l (u'(x))^2 dx = 0, \quad (3.9)$$

то $u'(x) \equiv 0 \Rightarrow u(x) \equiv \text{const}$. Но

$$u(0) = u(l) = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0, \quad (3.10)$$

что противоречит условию $u(x) \neq 0$ в (3.5).

Следствие:

1) собственные числа оператора $A = d^2/dx^2$ все отрицательны. Действительно, из (3.5) следует, что

$$0 > \left\langle \frac{d^2 X_k}{dx^2}, X_k \right\rangle = \lambda_k \langle X_k, X_k \rangle; \quad (3.11)$$

2) собственные векторы X_k, X_n с разными собственными числами $\lambda_k \neq \lambda_n$ ортогональны:

$$\int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = 0. \quad (3.12)$$

Действительно, из (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} \langle AX_k, X_n \rangle &= \langle X_k, AX_n \rangle \Rightarrow \lambda_k \langle X_k, X_n \rangle = \lambda_n \langle X_k, X_n \rangle \Rightarrow \\ (\lambda_k - \lambda_n) \langle X_k, X_n \rangle &= 0 \Rightarrow \langle X_k, X_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

2. Решение задачи Штурма-Лиувилля (3.1).

Из уравнения (3.2) имеем

$$X_k(x) = A_k e^{\sqrt{\lambda_k}x} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}x}. \quad (3.13)$$

Подставляя в краевые условия (3.2), получаем

$$\begin{cases} A_k + B_k = 0, \\ A_k e^{\sqrt{\lambda_k}l} + B_k e^{-\sqrt{\lambda_k}l} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Матрица этой системы должна быть вырожденной, иначе $A_k = B_k = 0$ и $X_k(x) \equiv 0$, что противоречит (3.2). Итак, λ_k удовлетворяют так называемому характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{\lambda_k}l} & e^{-\sqrt{\lambda_k}l} \end{vmatrix} = e^{-\sqrt{\lambda_k}l} - e^{\sqrt{\lambda_k}l} = 0. \quad (3.15)$$

Отсюда

$$e^{-\sqrt{\lambda_k}l} = e^{\sqrt{\lambda_k}l} \Rightarrow e^{2\sqrt{\lambda_k}l} = 1. \quad (3.16)$$

Следовательно, $2\sqrt{\lambda_k}l = 2k\pi i$, $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow$

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{k\pi i}{l} \Rightarrow \lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2; \quad (3.17)$$

Здесь можно считать $k \geq 0$. Как и следовало ожидать, $\lambda_k \leq 0$.

Итак, собственные числа λ_k мы нашли. Найдем теперь собственные функции $X_k(x)$. Для этого учтем, что система (3.14) вырожденная. Следовательно, уравнения в ней пропорциональны и достаточно учитывать только первое из них: $B_k = -A_k$. Поэтому из (3.13) получаем ввиду (3.17)

$$X_k(x) = A_k (e^{\frac{k\pi i}{l}x} - e^{-\frac{k\pi i}{l}x}) = A_k 2i \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (3.18)$$

Здесь мы применили формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi.$$

Поскольку собственные функции X_k определены с точностью до числового множителя, то можно положить окончательно

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.19)$$

Здесь можно считать $k > 0$, поскольку при $k = 0$ имеем $X_0(x) \equiv 0$.

Ответ:

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.20)$$

Свойства решений задачи Штурма-Лиувилля.

1. $X_k(x)$ образуют полную систему в $L_2(0, l)$ (это свойство известно из теории рядов Фурье).

2. Ортогональность:

$$\langle X_k, X_n \rangle = \int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = 0 \quad \text{при } k \neq n. \quad (3.21)$$

3. Асимптотика: $\lambda_k \sim -k^2$ при $k \rightarrow \infty$ т. е. существует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_k}{-k^2} > 0.$$

Упражнение. Проверим непосредственно свойство ортогональности (3.21)

для X_k .

Решение: поскольку $k \neq n$, то

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \int_0^l [\cos(\frac{k\pi x}{l} - \frac{n\pi x}{l}) - \cos(\frac{k\pi x}{l} + \frac{n\pi x}{l})] dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \frac{(k-n)\pi x}{l}}{\frac{(k-n)\pi}{l}} \Big|_0^l - \frac{\sin \frac{(k+n)\pi x}{l}}{\frac{(k+n)\pi}{l}} \Big|_0^l \right] = 0. \end{aligned}$$

Упражнение. Найти норму X_k в $L_2(0, l)$.

Решение.

$$\begin{aligned} \|X_k\|^2 &\equiv \int_0^l X_k^2(x) dx = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \int_0^l \frac{1 - \cos \frac{2k\pi x}{l}}{2} dx = \int_0^l \frac{1}{2} dx - \frac{\sin \frac{2k\pi x}{l}}{2 \frac{2k\pi}{l}} \Big|_0^l = \frac{l}{2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Упражнение. Нарисуем график $X_k(x)$.

Решение.

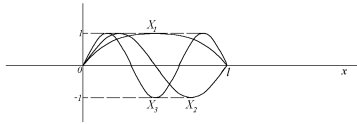


Рис. 64

Задача. Решить задачу Штурма-Лиувилля, т. е. найти собственные функции оператора $A \equiv \frac{d^2}{dx^2}$ на отрезке $[0, l]$ при других краевых условиях:

$$X_k(0) = X'_k(l) = 0, \quad (3.23)$$

$$X'_k(0) = X_k(l) = 0, \quad (3.24)$$

$$X'_k(0) = X'_k(l) = 0. \quad (3.25)$$

Задача. Для каждого краевого условия (3.23)-(3.25) проделать последние три упражнения.

Ответы:

Для (3.23): см. рис. 65,

$$\lambda_k = -\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2,$$

$$X_k(x) = \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{l},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

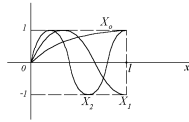


Рис. 65

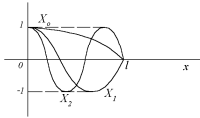


Рис. 66

Для (3.24): см. рис. 66,

$$\lambda_k = -\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2,$$

$$X_k(x) = \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{l},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

Для (3.25): см. рис. 67,

$$\lambda_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$

$$X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

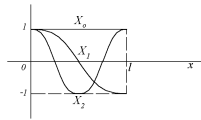


Рис. 67

Можно также рассмотреть произвольные краевые условия вида

$$\alpha_0 X'_k(0) + \beta_0 X_k(0) = 0; \quad \alpha_1 X'_k(l) + \beta_1 X_k(l) = 0, \quad (3.26)$$

где $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$ и $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\alpha_{0,1}$ и $\beta_{0,1}$ — вещественные числа.

Задача. Докажите, что при краевых условиях (3.26) оператор $\frac{d^2}{dx^2}$ симметричен.

Замечание 3.2. Собственные функции и собственные числа задач (3.23)-(3.25) обладают всеми свойствами 1, 2, 3 задачи (3.1) (полнота, ортогональность, асимптотика собственных чисел) (см. [3, 9, 11, 12, 14]).

3. Многомерная задача на собственные числа.

Рассмотрим любую ограниченную область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ и задачу нахождения собственных функций для оператора Лапласа в Ω при краевых условиях Дирихле:

$$\Delta X_k(x) = \lambda_k X_k(x), \quad x \in \Omega, \quad (3.27)$$

при краевых условиях Дирихле:

$$X_k \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.28)$$

Оказывается, ее собственные функции при разных λ_k также ортогональны в $L_2(\Omega)$, а собственные числа λ_k — отрицательны.

Задача. Докажите, что: 1) при краевых условиях (3.28) оператор Лапласа симметричный и отрицательный и 2) при краевых условиях Неймана вместо (3.28):

$$\frac{\partial X_k}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.29)$$

(где n — нормаль к $\partial\Omega$), оператор Лапласа симметричен и неположителен; $\lambda = 0$ является собственным числом, $X_0(x) \equiv 1$.

§4. Разложение по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля.

Собственные функции $\sin \frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \dots$ образуют полную систему в $L_2(0, l)$, как указано выше. Поэтому они образуют ортогональный базис в $L_2(0, l)$ и, следовательно, любую функцию $\varphi(x) \in L_2(0, l)$ можно разложить по этому базису:

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty} \varphi_k X_k(x). \quad (4.1)$$

Найдем формулу для коэффициентов φ_k . Это делается при помощи соотношений ортогональности (3.21): умножим (4.1) на $X_k(x)$ и проинтегрируем от 0 до l . Тогда получим

$$\int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = \varphi_n \int_0^l X_n^2(x) dx, \quad (4.2)$$

поскольку все слагаемые в сумме (4.2) с номерами $k \neq n$ равны нулю! Почленное интегрирование ряда в (4.2) законно, поскольку ряд (4.1)

сходится в пространстве $L_2(0, l)$, а скалярное произведение элементов из $L_2(0, l)$ непрерывно по каждому из сомножителей. Наконец, учтем (3.22). Тогда из (4.2) получаем искомую формулу:

$$\varphi_n = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx} = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx. \quad (4.3)$$

Упражнение. Найдём условия на функцию $\varphi(x)$, при которых: 1) ряд (4.1) сходится равномерно на отрезке $[0, l]$; 2) ряд (4.1) можно два раза почленно дифференцировать.

Решение:

1) достаточно (хотя и не необходимо), чтобы

$$\sum_1^{\infty} |\varphi_k| < \infty. \quad (4.4)$$

Чтобы это условие выполнялось, потребуем:

$$\varphi(x) \in C^1[0, l]; \quad \varphi(0) = \varphi(l) = 0. \quad (4.5)$$

Выведем (4.4) из (4.5). Интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \frac{(-\cos \frac{k\pi x}{l})'}{\frac{k\pi}{l}} dx = \\ &= \frac{2}{k\pi} \left[-\varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right]. \end{aligned} \quad (4.5')$$

Подстановка здесь равна нулю в силу краевых условий в (4.5). Поэтому $\varphi_k = \frac{2}{k\pi} \varphi'_k$, где $\varphi'_k = \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx$. Но $\{\cos \frac{k\pi x}{l}\}$ — ортогональная система в $L_2(0, l)$, и $\int_0^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}$, следовательно, по неравенству Бесселя

$$\sum_1^{\infty} |\varphi'_k|^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi'(x)|^2 dx < \infty. \quad (4.6)$$

Поэтому из неравенства Коши-Буняковского получаем:

$$\sum_1^{\infty} |\varphi_k| \leq \left(\sum_1^{\infty} \left| \frac{2}{k\pi} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_1^{\infty} |\varphi'_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty; \quad (4.6')$$

2) для двукратной дифференцируемости ряда (4.1) достаточно, чтобы ряд для $\varphi''(x)$ равномерно сходилсся. Это, в свою очередь, выполняется, если

$$\sum_1^{\infty} k^2 |\varphi_k| < \infty. \quad (4.7)$$

Потребуем для этого в дополнение к (4.5), чтобы

$$\varphi(x) \in C^3[0, l], \quad \text{и} \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \quad (4.8)$$

Выведем (4.7) из (4.8), (4.5). Для этого заметим, что в силу (4.5), (4.5')

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2l}{(k\pi)^2} \int_0^l \varphi''(x) \frac{(\cos \frac{k\pi x}{l})'}{\frac{k\pi}{l}} dx = \\ &= \frac{2l^2}{(k\pi)^3} \left[\varphi''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l - \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Подстановка здесь равна нулю в силу краевых условий (4.8). Поэтому $\varphi_k = \frac{-2l^2}{(k\pi)^3} \varphi_k'''$, где $\varphi_k''' = \int_0^l \varphi'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx$. Но $\varphi''' \in L^2(0, l)$, следовательно (см. (4.6)):

$$\sum_1^{\infty} |\varphi_k'''|^2 \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi'''(x)|^2 dx < \infty,$$

и отсюда аналогично (4.6'):

$$\sum_1^{\infty} k^2 |\varphi_k| \leq \frac{2l^2}{\pi^3} \sum_1^{\infty} \frac{1}{|k|} |\varphi_k'''| < \infty \quad (4.9')$$

Задача. Для функции $\varphi(x) \in C^{(N)}[0, l]$ оценки

$$|\varphi_k| \leq C/|k|^N, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0, \dots; \quad \varphi^{2n}(0) = \varphi^{2n}(l) = 0 \quad (4.10')$$

при всех $2n \leq N - 2$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (докажите).

Отметим, что краевым условиям (4.10') удовлетворяют, в частности, все собственные функции $\sin \frac{k\pi x}{l}$. С другой стороны, при условии (4.10) ряд (4.1) сходится на отрезке $[0, l]$ равномерно вместе с производными до

порядка $N-2$. Поэтому из справедливости однородных краевых условий (4.10') для собственных функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$ вытекает выполнение тех же краевых условий и для суммы ряда (4.1). Это доказывает необходимость условий (4.10') для (4.10).

Замечание 4.1. Аналогично, для справедливости оценки (4.10) для коэффициентов Фурье φ_k разложения функции $\varphi(x)$ по другим системам собственных функций $X_k(x)$, соответствующих краевым условиям (3.23)—(3.25), необходимо, чтобы $\varphi(x)$ удовлетворяла тем же однородным краевым условиям, что и функции $x_k(x)$ и их производные до порядка $N-2$. Нетрудно проверить, что эти условия также и достаточны для (4.10), если $\varphi \in C^{(N)}[0, l]$.

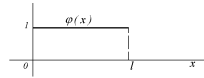
Задача. Сделать последнее упражнение для случая разложений по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля при краевых условиях (3.23)—(3.25).

Упражнения. Разложить по системе $\sin \frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \dots$ следующие функции:

1) $\varphi(x) \equiv 1$, $0 < x < l$. **Решение:**

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \left. \frac{-\cos \frac{k\pi x}{l}}{\frac{k\pi}{l}} \right|_0^l = \\ &= \frac{2}{k\pi} [-\cos k\pi + 1] = \frac{2}{k\pi} [1 - (-1)^k]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Отметим, что здесь условие (4.4) не выполняется. Это связано с тем, что $\varphi(x) \equiv 1$ не обращается в нуль на концах интервала (рис. 68).



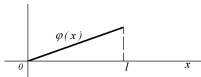
2) $\varphi(x) \equiv x$, $0 < x < l$.

Решение:

Рис. 68

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l x \frac{(-\cos \frac{k\pi x}{l})'}{\frac{k\pi}{l}} dx = \dots = -\frac{2}{k\pi} l (-1)^k. \quad (4.12)$$

Рис. 69



Здесь $|\varphi_k| \sim \frac{1}{k}$ из-за того, что $\varphi(l) \neq 0$ (см. (4.10)—(4.10') и рис. 69).

3) $\varphi(x) = x(l-x)$. Верно ли, что здесь $\varphi_k = O(\frac{1}{k})$, или $O(\frac{1}{k^2})$, или $O(\frac{1}{k^3}), \dots$?

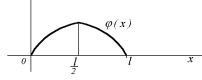


Рис. 70

Задача. Разложите функции $\varphi(x) = 1, x, x^2, x(l-x)$ по собственным функциям задач Штурма-Лиувилля (3.23)—(3.25). В каждом из этих случаев угадать асимптотику:

$$\varphi_k = O\left(\frac{1}{k}\right), O\left(\frac{1}{k^2}\right), \dots?$$

Указание. Воспользуйтесь замечанием 4.1.

§5. Метод Фурье решения смешанной задачи (2.3) для уравнения теплопроводности.

Итак, решим задачу (2.3). Для простоты, пусть сначала $f(x, t) \equiv 0$ Тогда задача принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (5.2)$$

Общий случай $f(x, t) \neq 0$ рассматривается ниже, в §7. Будем искать решение задачи (5.1)—(5.2) в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) X_k(x); \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (5.3)$$

В таком виде можно записать вообще любую функцию $u(x, t)$, если $u(x, t) \in L_2(0, l)$ при каждом фиксированном t . Здесь существенно свойство полноты собственных функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$ в $L_2(0, l)$. Выбор базиса $\{\sin \frac{k\pi x}{l}\}$ определяется граничными условиями, входящими в (5.1). А именно, каждое слагаемое ряда (5.3) удовлетворяет этим краевым условиям, поскольку $\sin \frac{k\pi x}{l}$ удовлетворяют краевым условиям из (3.2).

Чтобы найти решение $u(x, t)$ остается лишь определить $T_k(t)$ — так называемые "временные" функции ($\sin \frac{k\pi x}{l}$ — "пространственные" функции); $T_k(t)$ находятся подстановкой ряда (5.3) в уравнения (5.1) и (5.2).

Замечание 5.1. Равенства (5.1) для функции $u(x, t)$ из (5.3) формально выполняются, поскольку они выполняются для каждого слагаемого ряда (5.3). Структура (5.3) решения объясняет название метода "разделения переменных" (а также "собственных функций").

1. Нахождение временных функций.

А. Подставляем ряд (5.3) в уравнение (5.1): для $t > 0$

$$\sum_1^{\infty} T_k'(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = a^2 \sum_1^{\infty} T_k(t) \left(-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\right) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad 0 < x < l. \quad (5.4)$$

Здесь мы переставили операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ с суммированием ряда. Законность такой перестановки мы еще будем обсуждать ниже. В этом и заключается обоснование метода Фурье.

Кроме того, в (5.4) использовано равенство

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \sin \frac{k\pi x}{l} = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (5.5)$$

для собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (3.1)—(3.2). Заметим, что краевые условия задачи Штурма-Лиувилля уже использованы выше (см. замечание 5.1).

Далее, если ряды в (5.4) сходятся в $L_2(0, l)$, то в силу ортогональности базиса $\{\sin \frac{k\pi x}{l}\}$ получаем равенство коэффициентов этих рядов:

$$T_k'(t) = -a^2 \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t) = -\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t), \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.6)$$

Это — линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, однородное. Составляем характеристическое уравнение:

$$\lambda = -\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 \quad (5.7)$$

Отсюда общее решение

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \quad (5.8)$$

Подставляя в (5.3), получаем

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} C_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (5.9)$$

Б. Неизвестные константы C_k в (5.9) находятся из начальных условий (5.2). А именно, подставляя ряд (5.3) в (5.2), находим:

$$\sum_1^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x), \quad 0 < x < l. \quad (5.10)$$

Следовательно, $T_k(0)$ совпадают с коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\sin \frac{k\pi x}{l}$ (см. (4.3)):

$$T_k(0) = \varphi_k \equiv \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (5.11)$$

Подставляя сюда (5.8), находим

$$C_k = \varphi_k. \quad (5.12)$$

Итак, из (5.9) получаем

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \varphi_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (5.13)$$

2. Проверка решения (5.13).

Действительно ли ряд (5.13) — решение задачи (5.1) - (5.2)?

А. При $t > 0$ ряд (5.13) сходится при каждом $x \in [0, l]$. Пусть, например,

$$\varphi(x) \in L_2(0, l). \quad (5.14)$$

Тогда ряд (5.10) сходится в этом же пространстве $L_2(0, l)$. В самом деле, по неравенству Коши-Буняковского

$$|\varphi_k| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi(x)| dx \leq \frac{2}{l} \left(\int_0^l dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^l \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \text{const}. \quad (5.15)$$

Следовательно, ряд (5.13) при фиксированном $t > 0$ мажорируется числовым рядом

$$\text{const} \cdot \sum_1^{\infty} e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t} = \text{const} \cdot \sum_1^{\infty} e^{-\varepsilon k^2}, \quad (5.16)$$

где $\varepsilon = (\frac{\pi}{l})^2 t > 0$, который быстро сходится. Отсюда, по теореме Вейерштрасса, функциональный ряд (5.13) сходится равномерно на $[0, l]$ при $\forall t > 0$ к непрерывной по x функции.

Следствие. Ряд (5.13) удовлетворяет краевым условиям (2.2).

Б. Ряд (5.13) — дифференцируемая функция от $x \in [0, l]$ при $\forall t > 0$. Действительно, по теореме о дифференцировании ряда, при $\forall t > 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_1^{\infty} \varphi_k e^{-(\frac{k\pi}{l})^2 t} \left(-\cos \frac{k\pi x}{l} \right) \frac{k\pi}{l}, \quad (5.17)$$

если ряд в правой части сходится равномерно по x на $[0, l]$. Но последнее условие выполнено, поскольку ряд (5.17) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\text{const} \cdot \frac{\pi}{l} \sum_1^{\infty} k e^{-\varepsilon k^2} < \infty. \quad (5.18)$$

В. Ряд (5.13) имеет производные по x и по t всех порядков при $t > 0$. Это доказывается аналогично Б.

Следствие. Все почленные дифференцирования рядов в (5.4) законны, и поэтому ряд (5.13) удовлетворяет уравнению теплопроводности (1.1).

Наконец, при $t = 0$ ряд (5.13) удовлетворяет начальному условию (2.1) ввиду (5.10), (5.11) в следующем смысле (докажите!)

$$\|u(t, x) - \varphi(x)\|_{L_2(0, l)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0 +.$$

Замечание 5.2. Условие (5.14) позволяет функции $\varphi(x)$ иметь разрывы: например, пусть $\varphi(x) \equiv 0$ при $x < \frac{l}{2}$, $u(x) \equiv 1$ при $x > \frac{l}{2}$. Таким образом, функция $u(x, 0) = \varphi(x)$ будет разрывной. В то же время решение $u(x, t)$ при $\forall t > 0$ будет гладкой функцией на $[0, l]$! Как говорят, уравнение теплопроводности (1.1) “сглаживает” начальные данные.

Упражнение. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t), & 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(5, t) = 0, \\ u(x, 0) = 1. \end{cases}$$

Решение. По формуле (5.13)

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \varphi_k e^{-(\frac{3k\pi}{5})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{5}, \quad (5.19)$$

где φ_k находятся по формуле (5.11):

$$\varphi_k = \frac{2}{5} \int_0^5 \sin \frac{k\pi x}{5} dx = \frac{2}{k\pi} [1 - (-1)^k]. \quad (5.20)$$

Упражнение. Найти предел решения (5.19) при $t \rightarrow \infty$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_1^{\infty} \varphi_k e^{-(\frac{3k\pi}{5})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{5} = \\ &= \sum_1^{\infty} \varphi_k \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-(\frac{3k\pi}{5})^2 t} \sin \frac{k\pi x}{5} = \sum_1^{\infty} 0 = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Задача. Обоснуйте перестановку предела с суммированием ряда в (5.21).
 Упражнение. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 4u_{xx}(x, t), & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = x. \end{cases} \quad (5.22)$$

Решение. Здесь решение надо разлагать по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (3.23) (см. рис.65):

$$u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3}. \quad (5.23)$$

Подставляя этот ряд в (5.22), получаем

$$\sum_0^{\infty} T_k'(t) \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3} = 4 \sum_0^{\infty} -\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{3}\right)^2 T_k(t) \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3}. \quad (5.24)$$

Отсюда при $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$T_k'(t) = -\left(\frac{2(k + \frac{1}{2})\pi}{3}\right)^2 T_k(t) \Rightarrow T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{2(k + \frac{1}{2})\pi}{3}\right)^2 t}. \quad (5.25)$$

Подставляя (5.23) в начальное условие задачи (5.22), получаем

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} T_k(0) \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3} = x & \Rightarrow T_k(0) = \frac{2}{3} \int_0^3 x \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3} dx = \\ & = \frac{2}{3} x \frac{-\cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3}}{\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{3}} \Big|_0^3 + \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{\cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3}}{\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{3}} dx = 0 + \frac{2}{3} \frac{\sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3}}{\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{3}\right)^2} \Big|_0^3 = \\ & = \frac{\frac{2}{3} \sin(k + \frac{1}{2})\pi}{\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{3}\right)^2} = \frac{2}{3} \frac{(-1)^k 9}{(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2} = \frac{6(-1)^k}{(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

Поскольку в (5.25) $C_k = T_k(0)$, то, подставляя $T_k(t)$ в (5.23), находим

$$u(x, t) = \sum_0^{\infty} \frac{6(-1)^k}{(k + \frac{1}{2})^2 \pi^2} e^{-\frac{4\pi^2(k + \frac{1}{2})^2 t}{9}} \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{3}.$$

Задача. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t(x, t) = 16u_{xx}(x, t), & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$

Задача. Найдите предел при $t \rightarrow \infty$ решения предыдущей задачи.

Ответ: $\lim_{t \rightarrow \infty} u = \varphi_0 \equiv \frac{1}{3} \int_0^3 x dx = \frac{1}{3} \frac{9}{2} = \frac{3}{2}$.

§6. Смешанная задача для уравнения Даламбера.

Решим смешанную задачу

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (6.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \quad (6.3)$$

В операторной форме она записывается, подобно (2.3), в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2}(t) = a^2 A \hat{u}(t), & t > 0, \\ \hat{u}(0) = \varphi, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(0) = \psi. \end{cases} \quad (6.4)$$

1. Решение задачи (6.1) —(6.3).

Будем искать решение в виде ряда (5.3):

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (6.5)$$

А. Подставляя (6.5) в (6.1), получаем формально:

$$\sum_1^{\infty} T_k''(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = a^2 \sum_1^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (6.6)$$

Отсюда, если эти ряды сходятся в $L_2(0, l)$, находим уравнения для временных функций (сравните (5.6)):

$$T_k''(t) = -\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t), \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

Его общее решение (сравните (5.8)):

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{ak\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ak\pi}{l} t. \quad (6.8)$$

Б. Неизвестные константы A_k и B_k находятся из начальных условий (6.3):

$$\begin{cases} u(x, 0) = \sum_1^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x) \Rightarrow T_k(0) = \varphi_k, & (\text{см. (5.11)}) \\ u_t(x, 0) = \sum_1^{\infty} T_k'(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \psi(x) \Rightarrow T_k'(0) = \psi_k \equiv \frac{2}{l} \int_0^l \psi_k(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{cases}$$

Подставляя сюда (6.8), находим:

$$\begin{aligned} T_k(0) &= A_k = \varphi_k, \\ T'_k(0) &= B_k \frac{ak\pi}{l} = \psi_k \Rightarrow B_k = \frac{\psi_k}{\left(\frac{ak\pi}{l}\right)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Поэтому по формуле (6.8),

$$T_k(t) = \varphi_k \cos \frac{ak\pi}{l}t + \frac{\psi_k}{\left(\frac{ak\pi}{l}\right)} \sin \frac{ak\pi}{l}t.$$

Наконец, подставляя (6.9) в (6.5), получаем

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{ak\pi}{l}t + \frac{\psi_k}{\left(\frac{ak\pi}{l}\right)} \sin \frac{ak\pi}{l}t \right) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (6.10)$$

При получении формул (6.7) мы опять переставляем дифференцирования по x и t с суммированием ряда. Законно ли это?

2. Проверка решения (6.10).

А. Сходится ли ряд (6.10)? Он мажорируется числовым рядом

$$\text{const} \cdot \sum_1^{\infty} \left(|\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{k} \right). \quad (6.11)$$

Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \varphi(x) \in C^1[0, l], & \varphi(0) = \varphi(l) = 0; \\ \psi(x) \in C[0, l]. \end{cases} \quad (6.12)$$

Это доказывается аналогично выводу (4.4) из (4.5).

Б. Нам нужно, чтобы ряд (6.5) можно было бы два раза дифференцировать почленно по x и t . Для этого достаточна сходимость ряда

$$\sum_1^{\infty} (k^2 |\psi_k| + k |\varphi_k|) < \infty. \quad (6.13)$$

Для сходимости этого ряда достаточно, чтобы

$$\begin{cases} \varphi(x) \in C^3[0, l], & \varphi(0) = \varphi(l) = 0, & \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0; \\ \psi(x) \in C^2[0, l], & \psi(0) = \psi(l) = 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Это обосновывается аналогично выводу (4.7) из (4.8).

Вывод. Ряд (6.10) является решением задачи (6.1)—(6.3), если функции φ и ψ удовлетворяют условиям (6.14).

Замечание 6.1. Более точные (менее ограничительные) условия на φ , ψ даются в терминах соболевских пространств (см. [9], [10] и ниже §8 этой главы).

Упражнение. Найти решение смешанной задачи

$$u_t = 9u_{xx}(x, t), \quad 0 < x < 4, \quad t > 0, \quad (6.15)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(4, t) = 0, \quad (6.16)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 16 - x^2. \quad (6.17)$$

Решение. Нужно решение разлагать по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (3.24) (см. рис. 66):

$$u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_k(t) \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{4}. \quad (6.18)$$

Подстановка в (6.15) дает, аналогично (6.7):

$$T_k''(t) = -9\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{4}\right)^2 T_k(t). \quad (6.19)$$

Начальные условия (6.17) дают

$$T_k(0) = \varphi_k = 0,$$

$$T_k'(0) = \psi_k \equiv \frac{2}{4} \int_0^4 (16 - x^2) \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{4} dx = \left(\frac{4}{(k + \frac{1}{2})\pi}\right)^3 (-1)^k. \quad (6.20)$$

Отметим, что здесь $\varphi_k \equiv 0$, а для $\psi(x)$ выполняются условия, аналогичные (6.14): $\psi(x) \equiv 16 - x^2 \in C^2[0, 4]$; $\psi'(0) = \psi(4) = 0$, т. е. $\psi(x)$ удовлетворяет тем же однородным краевым условиям, что и собственные функции $X_k(x) = \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{4}$, и $\psi_k \leq C/k^3$, согласно замечанию 4.1. Поэтому оценка (6.13) имеет место.

Поэтому из (6.19) — (6.20) находим аналогично (6.8) — (6.9), что

$$T_k(t) = \frac{\psi_k \sin \frac{3(k + \frac{1}{2})\pi t}{4}}{3 \frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{4}}.$$

Ответ:

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \frac{256(-1)^k}{3((k + \frac{1}{2})\pi)^4} \sin \frac{3(k + \frac{1}{2})\pi t}{4} \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{4}.$$

§7. Распространение метода Фурье на неоднородные уравнения.

1. Уравнение теплопроводности.

А. Рассмотрим смешанную задачу для неоднородного уравнения теплопроводности с однородными краевыми условиями (неоднородные краевые условия — это следующий этап в развитии метода Фурье):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < l, \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x). \end{cases} \quad (7.1)$$

Решение этой задачи ищется также в виде (5.3), (6.5):

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (7.2)$$

Новым шагом будет разложение в такой же ряд по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля:

$$f(x, t) = \sum_1^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}; \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (7.3)$$

Такое разложение возможно в силу полноты семейства собственных функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$ в пространстве $L_2(0, l)$, если $f(x, t) \in L_2(0, l)$ при каждом фиксированном $t > 0$.

Б. Для нахождения временных функций $T_k(t)$ подставим разложения (7.2), (7.3) в (7.1):

$$\sum_1^{\infty} T_k'(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = a^2 \sum_1^{\infty} -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_1^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (7.4)$$

Отсюда, в силу ортогональности семейства собственных функций, получаем

$$T_k'(t) = -\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k(t) + f_k(t), \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.5)$$

Итак, дифференциальное уравнение для временных функций получено. Чтобы определить эти функции однозначно, нужно учесть начальное условие в (7.1)

$$\sum_1^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x) \Rightarrow T_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (7.6)$$

Отметим, что краевые условия в (7.1) выполняются автоматически в силу разложения (7.2) (поскольку они выполняются для собственных функций $\sin \frac{k\pi x}{l}$), если $T_k(t) = O(\frac{1}{k^2})$.

В. Применим эту схему для решения задач.

Упражнение. Решим смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t = 16u_{xx} + 2, & 0 < x < 7, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u(7, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (7.7)$$

Решение. Из вида краевых условий вытекает, что решение нужно раскладывать по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (3.24) (см. рис. 66):

$$u(x, t) = \sum_0^{\infty} T_k(t) \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{7}. \quad (7.8)$$

Подставляя этот ряд в (7.7), получаем уравнение вида (7.5)

$$T'_k(t) = -\left(\frac{4(k + \frac{1}{2})\pi}{7}\right)^2 T_k + f_k, \quad t > 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.9)$$

где

$$f_k \equiv \frac{2}{7} \int_0^7 2 \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{7} dx = \frac{4}{7} \frac{\sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{7}}{\left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{7}\right)} \Big|_0^7 = 4 \frac{(-1)^k}{(k + \frac{1}{2})\pi}. \quad (7.10)$$

Из начального условия задачи очевидно следует, что

$$T_k(0) = 0. \quad (7.11)$$

Решим задачу (7.9), (7.11). Общее решение уравнения (7.9) имеет вид:

$$T_k(t) = T_k^0(t) + T_k^ч(t), \quad (7.12)$$

где T_k^0 — общее решение однородного уравнения:

$$T_k^0(t) = C_k e^{-\left(\frac{4(k + \frac{1}{2})\pi}{7}\right)^2 t} \quad (7.13)$$

Частное решение — константа: $T_k^ч(t) = A_k$. Подставляя в (7.9), получаем

$$\begin{aligned} 0 &= -\left(\frac{4(k + \frac{1}{2})\pi}{7}\right)^2 A_k + f_k \quad \implies \\ A_k &= \frac{49f_k}{16\left((k + \frac{1}{2})\pi\right)^2} = \frac{49(-1)^k}{4\left((k + \frac{1}{2})\pi\right)^3}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Подставляя (7.13) и (7.14) в (7.12), получаем

$$T_k(t) = C_k e^{-\left(\frac{4(k+\frac{1}{2})\pi}{7}\right)^2 t} + \frac{49(-1)^k}{4\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^3}. \quad (7.15)$$

Теперь нужно учесть (7.11):

$$0 = C_k + \frac{49(-1)^k}{4\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^3} \Rightarrow C_k = -\frac{49(-1)^k}{4\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^3}. \quad (7.16)$$

Наконец, подставляя (7.15) в (7.8), получаем

$$u(x, t) = \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{49}{4\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^3} \left[-e^{-\left(\frac{4(k+\frac{1}{2})\pi}{7}\right)^2 t} + 1 \right] \cos \frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{7}. \quad (7.17)$$

Упражнение. Найти предел решения задачи (7.7) при $t \rightarrow +\infty$.

Решение. Переходя к пределу при $t \rightarrow \infty$ в каждом члене ряда (7.17), получаем (обосновать законность!)

$$u_{\infty}(x) \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = \sum_0^{\infty} \frac{49(-1)^k}{4\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^3} \cos \frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{7}. \quad (7.18)$$

Вычислим сумму этого ряда. Для этого заметим, что

$$u'_{\infty}(x) = -\sum_0^{\infty} \frac{7}{4} \frac{(-1)^k}{\left((k+\frac{1}{2})\pi\right)^2} \sin \frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{7}, \quad (7.19)$$

$$u''_{\infty}(x) = -\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{4(k+\frac{1}{2})\pi} \cos \frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{7} = -\frac{1}{8} \quad (7.20)$$

где последнее равенство вытекает из разложения (см. (7.10))

$$2 = \sum_0^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(k+\frac{1}{2})\pi} \cos \frac{(k+\frac{1}{2})\pi x}{7}. \quad (7.21)$$

Интегрируя два раза тождество (7.20), получаем

$$u_{\infty}(x) = \frac{1}{16}(-x^2 + C_1 x + C_2). \quad (7.22)$$

Чтобы найти C_1 и C_2 , заметим, что в силу (7.18) и (7.19)

$$u_{\infty}(7) = 0, \quad u'_{\infty}(0) = 0. \quad (7.23)$$

Подставляя сюда (7.22), находим $C_1 = 0$, $C_2 = 49$:

$$u_\infty(x) = \frac{1}{16}(49 - x^2). \quad (7.24)$$

Замечание 7.1. Можно было бы получить u_∞ без использования нестационарного решения (7.17) непосредственно из (7.7), заменяя u_t на 0, как решение задачи

$$\begin{cases} 0 = 16u_\infty''(x) + 2, & 0 < x < 7, \\ u_\infty'(0) = 0, & u_\infty(7) = 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

Замечание 7.2. Общее свойство уравнения теплопроводности состоит в том, что если внешние условия стационарны, т. е. неоднородные члены уравнения и краевые условия не зависят от t явно, то $u(x, t)$ стабилизируется при $t \rightarrow +\infty$:

$$u(x, t) \rightarrow u_\infty(x), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (7.25')$$

При этом предельная функция $u_\infty(x)$ является решением соответствующей стационарной задачи.

Упражнение. Найдем предел при $t \rightarrow +\infty$ решения смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = 25u_{xx}(x, t) + 3x^2, & 0 < x < 6, \\ u(0, t) = 0, & u'(6, t) = 1, \\ u(x, 0) = \sin x. \end{cases} \quad (7.26)$$

Решение. Как сказано выше, получаем из (7.26), (7.25') краевую задачу для $u_\infty(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$

$$\begin{cases} 0 = 25u_\infty''(x) + 3x^2, & 0 < x < 6, \\ u_\infty(0) = 0; & u_\infty'(6) = 1. \end{cases}$$

Интегрируя уравнение, получаем $u_\infty(x) = -\frac{x^4}{100} + C_1x + C_2$. Из краевых условий имеем $C_2 = 0$, $-\frac{6^3}{25} + C_1 = 1$.

Ответ: $u_\infty(x) = -\frac{x^4}{100} + \frac{241}{25}x$.

2. Волновое уравнение.

Рассмотрим задачу для неоднородного волнового уравнения.

Упражнение. Решим смешанную задачу ($\omega > 0$).

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 25u_{xx} + \sin(\omega t)x(3 - x), & 0 < x < 3, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(3, t) = 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (7.27)$$

Решение.

А. Соответственно ввиду краевых условий в (7.27), ищем решение u в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля (3.1):

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{3}. \quad (7.28)$$

Для этого функцию $\sin(\omega t)x(3-x)$ в уравнении (7.27) также разложим в ряд по системе $\sin \frac{k\pi x}{3}$:

$$\sin(\omega t)x(3-x) = \sin(\omega t) \sum_1^{\infty} g_k \sin \frac{k\pi x}{3}, \quad (7.29)$$

где $g_k = \frac{2}{3} \int_0^3 x(3-x) \sin \frac{k\pi x}{3} dx = \frac{36}{(k\pi)^3} (1 - (-1)^k)$.

Б. Нахождение временных функций $T_k(t)$. Подставляя разложения (7.28) и (7.29) в уравнение (7.27) и пользуясь ортогональностью семейства $\sin \frac{k\pi x}{3}$, получаем, аналогично (6.7)

$$T_k''(t) = -\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 T_k(t) + g_k \sin(\omega t). \quad (7.30)$$

Подставляя ряд (7.28) в начальные условия (7.27), получаем, очевидно,

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0. \quad (7.31)$$

Задача Коши (7.30) —(7.31) однозначно определяет временные функции $T_k(t)$.

Как известно, общее решение уравнения (7.30) имеет вид

$$T_k(t) = T_k^0(t) + T_k^ч(t), \quad (7.32)$$

где $T_k^0(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$T_k^0(t) = A_k \cos\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) + B_k \sin\left(\frac{5k\pi}{3}t\right), \quad (7.33)$$

а $T_k^ч(t)$ — частное решение неоднородного уравнения (7.30).

При нахождении частного решения нужно различать два случая: нерезонансный и резонансный.

1. *Нерезонансный*: для всех $k \in N$,

$$\omega \neq \frac{5k\pi}{3}. \quad (7.34)$$

Тогда $T_k^u(t)$ нужно искать в виде

$$T_k^u(t) = A \sin(\omega t). \quad (7.35)$$

Подстановка в (7.30) дает

$$-\omega^2 A \sin(\omega t) = -\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 A \sin(\omega t) + g_k \sin(\omega t),$$

откуда ввиду (7.34)

$$A = \frac{g_k}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 - \omega^2}.$$

Тогда (7.32) принимает вид

$$T_k(t) = A_k \cos\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) + B_k \sin\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) + \frac{g_k \sin(\omega t)}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 - \omega^2}. \quad (7.36)$$

Наконец, начальные условия (7.31) дают

$$A_k = 0, \quad B_k \frac{5k\pi}{3} + \frac{g_k \omega}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 - \omega^2} = 0 \Rightarrow B_k = -\frac{g_k \omega}{\frac{5k\pi}{3} \left(\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 - \omega^2\right)}. \quad (7.37)$$

Итак, в случае, если условие (7.34) выполняется для всех $k = 1, 2, \dots$, имеем

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} \frac{g_k}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 - \omega^2} \left(-\frac{\omega}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)} \sin\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) + \sin(\omega t)\right) \sin \frac{k\pi x}{3}. \quad (7.38)$$

2. *Резонансный*: при некотором натуральном $m \in \mathbb{N}$,

$$\omega = \frac{5m\pi}{3}. \quad (7.39)$$

В этом случае

$$T_m^u(t) = t(A \cos \omega t + B \sin \omega t). \quad (7.40)$$

Подстановка в (7.30) дает (при $k = m$)

$$\begin{aligned} 2(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) + t(-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)) = \\ = -\left(\frac{5m\pi}{3}\right)^2 t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + g_m \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Здесь в левой части применяется формула Лейбница для вычисления

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(t(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \right).$$

Учитывая (7.39), после приведения подобных членов в (7.41) получаем

$$2(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) + g_m \sin(\omega t). \quad (7.42)$$

Приравниваем коэффициенты при $\cos(\omega t)$ и $\sin(\omega t)$ слева и справа:

$$2B\omega = 0, \quad -2A\omega = g_m.$$

Поскольку $\omega > 0$, то

$$B = 0, \quad A = -\frac{g_m}{2\omega}. \quad (7.43)$$

Таким образом,

$$T_m^{\text{ч}}(t) = -t\frac{g_m}{2\omega} \cos(\omega t). \quad (7.44)$$

Поэтому

$$T_m(t) = A_m \cos\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) + B_m \sin\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) - t\frac{g_m}{2\omega} \cos(\omega t). \quad (7.45)$$

Подставляя в начальные условия (7.31), получаем

$$A_m = 0; \quad B_m \frac{5m\pi}{3} - \frac{g_m}{2\omega} = 0 \implies B_m = \frac{3g_m}{10m\pi\omega}.$$

Отсюда

$$T_m^{\text{ч}}(t) = \frac{3g_m}{10m\pi\omega} \sin\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) - t\frac{g_m}{3} \cos(\omega t).$$

Итак, если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ выполняется условие (7.39), то получаем (сравните (7.38)):

$$u(x, t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{\infty} \frac{g_k}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)^2 - \omega^2} \left(-\frac{\omega}{\left(\frac{5k\pi}{3}\right)} \sin\left(\frac{5k\pi}{3}t\right) + \sin(\omega t) \right) \sin \frac{k\pi x}{3} + \left(\frac{3g_m}{10m\pi\omega} \sin\left(\frac{5m\pi}{3}t\right) - t\frac{g_m}{2\omega} \cos(\omega t) \right) \sin \frac{m\pi x}{3}. \quad (7.46)$$

Замечание 7.3. В нерезонансном случае все слагаемые ряда (7.38) — ограниченные функции от x , t , а в резонансном случае (7.39) одно из слагаемых в (7.46) неограничено при $t \rightarrow +\infty$. Поэтому при больших t решение будет описываться в основном последним слагаемым в (7.46). При очень больших t решение станет весьма большим. Если это струна, то она порвется. Обычно на практике, когда решение становится большим, система перестает описываться линейным волновым уравнением и формула (7.46) перестает быть справедливой.

Задача. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) = 16u_{xx} + \sin \frac{7\pi x}{10}, & 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(5, t) = 0, \\ u(0, x) = 0, \quad u_t(0, x) = 0. \end{cases}$$

§8. Распространение метода Фурье на неоднородные краевые условия.

До сих пор мы решали методом Фурье задачи лишь с однородными краевыми условиями. Оказывается, задача с неоднородными краевыми условиями легко сводится к аналогичной задаче с однородными краевыми условиями.

1. Уравнение теплопроводности.

Упражнение. Найдите решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx}, & 0 < x < 4, \quad t > 0, \\ u(0, t) = f(t), \quad u(4, t) = g(t), \\ u(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Решение.

Найдем вспомогательную функцию $v(x, t)$, которая удовлетворяет нужным краевым условиям:

$$v(0, t) = f(t), \quad v(4, t) = g(t), \quad t > 0. \quad (8.2)$$

Такую функцию легко найти, например, линейной интерполяцией:

$$v(x, t) = \frac{x}{4}g(t) + \frac{4-x}{4}f(t). \quad (8.3)$$

Обозначим $w = u - v$. Тогда w удовлетворяет однородным краевым условиям

$$w(0, t) = 0, \quad w(4, t) = 0, \quad t > 0. \quad (8.4)$$

Вопрос. Какому уравнению и начальному условию удовлетворяет функция w ?

Ответ. Подставляем $u = w + v$ в (8.1), тогда

$$\begin{cases} w_t + v_t = 9(w_{xx} + v_{xx}), \\ w(x, 0) + v(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

Отсюда

$$\begin{cases} w_t = 9w_{xx} + 9(v_{xx} - v_t), \\ w(x, 0) = -v(x, 0). \end{cases} \quad (8.6)$$

Итак, w удовлетворяет неоднородному уравнению теплопроводности, в отличие от u ! Но зато краевые условия (8.4) однородные, поэтому w можно найти по методу §7; тогда $u = w + v$ - решение задачи (8.1). Итак, мы “перегнали” неоднородность из краевых условий в дифференциальное уравнение (8.1) и в начальное условие.

2. Волновое уравнение.

Упражнение. Решим смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, & 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & u_x(5, t) = \sin(\omega t), \\ u(x, 0) = 0 & u_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

Решение.

А. Вспомогательная функция

$$v(x, t) = x \sin(\omega t) \quad (8.8)$$

удовлетворяет нужным краевым условиям. Для $w \equiv u - v$ имеем

$$\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx} + \omega^2 x \sin(\omega t), & 0 < x < 5, \quad t > 0, \\ w(0, t) = 0, & w_x(5, t) = 0, \\ w(x, 0) = -v(x, 0) = 0 & w_t(x, 0) = -v_t(x, 0) = -x\omega. \end{cases} \quad (8.9)$$

Б. По методу §7 ищем w в виде

$$w(x, t) = \sum_0^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5}. \quad (8.10)$$

Для этого раскладываем правую часть уравнения (8.9):

$$\omega^2 x \sin(\omega t) = \omega^2 \sin(\omega t) \cdot \sum_0^{\infty} x_k \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5},$$

где

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{2}{5} \int_0^5 x \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5} dx = -\frac{2}{5} \frac{5}{(k + \frac{1}{2})\pi} \int_0^5 5x d \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5} = \\ &= -\frac{5}{(k + \frac{1}{2})\pi} \left[x \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5} \Big|_0^5 - \int_0^5 \cos \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5} dx \right] = \\ &= \frac{2 \cdot 5}{((k + \frac{1}{2})\pi)^2} \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5} \Big|_0^5 = \frac{10}{((k + \frac{1}{2})\pi)^2} \cdot (-1)^k. \end{aligned} \quad (8.11)$$

В. Подставляя (8.10) – (8.11) в уравнение (8.9), находим уравнения для временных функций $T_k(t)$:

$$T_k''(t) = -16 \left(\frac{(k + \frac{1}{2})\pi}{5} \right)^2 T_k(t) + \omega^2 \sin(\omega t) \cdot x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.12)$$

Из начальных условий (8.9) находим $T_k(0) = 0$ и, учитывая (8.11), получаем:

$$T'_k(0) = -\omega \frac{2}{5} \int_0^5 x \sin \frac{(k + \frac{1}{2})\pi x}{5} dx = -\omega \frac{10 \cdot (-1)^k}{((k + \frac{1}{2})\pi)^2}. \quad (8.13)$$

Задача (8.12) – (8.13) решается так же, как в §7. Здесь тоже возможны два случая — резонансный и нерезонансный.

Доведите решение задачи (8.1) до конца и запишите ответ.

Замечание 8.1. Для задачи (8.9) условие аналогичное (6.14) не выполняется. Тем не менее, построенная функция $w(x, t)$ удовлетворяет начальным и краевым условиям в обычном смысле. Лишь первое уравнение (8.9) выполняется в смысле теории обобщенных функций (см. ниже §8 этой главы).

Задача. Найдите условие резонанса в задаче (8.7).

Ответ. При некотором $m = 0, 1, 2, \dots$

$$\omega = \frac{4(m + \frac{1}{2})\pi x}{5}$$

§9. Метод Фурье для уравнения Лапласа.

1. Краевые задачи в прямоугольнике.

А. Рассмотрим краевую задачу в прямоугольнике $\Omega = [0, a] \times [0, b]$:

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0; \\ u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x). \end{cases} \quad (9.1)$$

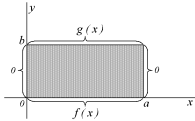


Рис. 71

Это краевая *задача Дирихле*, когда функция u задана на границе области.

Решение. Задача (9.1) решается методом §7, причем роль переменной t сейчас играет переменная y , как видно из сравнения задач (9.1) и (7.1). Ищем решение в виде:

$$u(x, y) = \sum_1^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (9.2)$$

Тогда краевые условия при $x = 0$ и $x = a$ в (9.1) выполняются автоматически. Подставляем (9.2) в уравнение (9.1). Это дает уравнения для $Y_k(y)$:

$$-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) + Y_k''(y) = 0, \quad 0 < y < b. \quad (9.3)$$

Подстановка в краевые условия (9.1) при $y = 0$ и $y = b$ дает

$$\begin{cases} Y_k(0) = f_k \equiv \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx, \\ Y_k(b) = g_k \equiv \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx. \end{cases} \quad (9.4)$$

Общее решение уравнения (9.3) имеет вид:

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi}{a}y} + B_k e^{-\frac{k\pi}{a}y}. \quad (9.5)$$

Константы A_k и B_k находятся из краевых условий (9.4):

$$A_k + B_k = f_k, \quad A_k e^{\frac{k\pi}{a}b} + B_k e^{-\frac{k\pi}{a}b} = g_k. \quad (9.6)$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} A_k = \frac{1}{e^{\frac{k\pi}{a}b} - e^{-\frac{k\pi}{a}b}} (g_k - f_k e^{-\frac{k\pi}{a}b}), \\ B_k = \frac{1}{e^{\frac{k\pi}{a}b} - e^{-\frac{k\pi}{a}b}} (f_k e^{\frac{k\pi}{a}b} - g_k). \end{cases} \quad (9.7)$$

Итак, решение задачи (9.1) дается формулами (9.2), (9.5), (9.7).

Проверка решения (9.2). Нужно обосновать возможность почленного дифференцирования ряда (9.2). Если $f(x)$ и $g(x)$ — суммируемые функции, то $f(x)$ и $g(x)$ ограничены:

$$|f_k| \leq \frac{2}{a} \int_0^a |f(x)| dx, \quad |g_k| \leq \frac{2}{a} \int_0^a |g(x)| dx.$$

Но тогда из (9.7) видно, что

$$|A_k| \leq \frac{c}{e^{\frac{k\pi}{a}b}}, \quad |B_k| \leq \text{const.}$$

Поэтому из (9.5) вытекает

$$|Y_k(y)| \leq c e^{-\frac{k\pi}{a}(b-y)} + c e^{-\frac{k\pi}{a}y}.$$

Следовательно, при $0 < \varepsilon < y < b - \varepsilon$

$$|Y_k(y)| \leq ce^{-\frac{k\pi}{a}\varepsilon},$$

и ряд (9.2) при этих y мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_1^{\infty} ce^{-\frac{k\pi}{a}\varepsilon}.$$

Легко видеть, что производные второго порядка по x и y от ряда (9.2) мажорируются рядом

$$\sum_1^{\infty} ck^2 e^{-\frac{k\pi}{a}\varepsilon},$$

который также сходится. Аналогично и для производных любого порядка по x и y .

Вывод. Решение задачи Дирихле (9.1) — бесконечно дифференцируемая функция внутри прямоугольника Ω . Предположим, что, как и в (4.5), $f(x), g(x) \in C_0^2[0, a]$. Тогда аналогично (4.4) $f_k, g_k = O(\frac{1}{k^2})$ и, следовательно, $|Y_k(y)| \leq \frac{c}{k^2}$, $y \in [0, b]$. Поэтому ряд (9.2) сходится равномерно в прямоугольнике $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ и его сумма — непрерывная функция в этом прямоугольнике, удовлетворяющая краевым условиям в (9.1).

Б. Более общая краевая задача Дирихле в прямоугольнике

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b; \\ u(0, y) = \varphi(y), & u(a, y) = \psi(y); \\ u(x, 0) = f(x), & u(x, b) = g(x). \end{cases} \quad (9.8)$$

решается разложением u на два слагаемых:

$$u = u_1 + u_2. \quad (9.9)$$

Здесь u_1 — решение задачи (9.1), а u_2 — задачи

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b; \\ u_2(0, y) = \varphi(y), & u_2(a, y) = \psi(y); \\ u_2(x, 0) = 0, & u_2(x, b) = 0. \end{cases} \quad (9.10)$$

Эта задача не отличается по виду от (9.1), если x и y поменять местами. Поэтому u_2 нужно искать в виде (сравните с (9.2)):

$$u_2(x, y) = \sum_1^{\infty} X_k(x) \sin \frac{k\pi y}{b}. \quad (9.11)$$

Если $f, g \in C_0^2[0, a]$, а $\varphi, \psi \in C_0^2[0, b]$, то по сказанному выше, u_1 и u_2 , а следовательно, и u — непрерывные функции в Ω , удовлетворяющие соответствующим краевым условиям.

В общем же случае для непрерывности $u(x, y)$ в Ω очевидно необходимы следующие условия согласования:

$$f(0) = \varphi(0), \quad \varphi(b) = g(0), \quad g(a) = \psi(b), \quad \psi(0) = f(a). \quad (9.11')$$

Задача. Докажите, что задача (9.8) имеет решение, непрерывное в Ω , если $f, g \in C^2[0, a]$, а $\varphi, \psi \in C^2[0, b]$, и выполняются условия согласования (9.11').

Указание. Подберите решение уравнения $\Delta v = 0$ в Ω , совпадающее с краевыми функциями f, g, φ и ψ в угловых точках области Ω . Тогда разность $u - v$ можно найти методом (9.9), как указано выше.

В. Рассмотрим неоднородное уравнение Лапласа (уравнение Пуассона).

Упражнение. Решим краевую задачу

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = x^2 y, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ u(0, y) = 0, & u(a, y) = 0; \\ u(x, 0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0. \end{cases} \quad (9.12)$$

Отметим, что здесь при $x = 0$, $x = a$ и $y = 0$ задано краевое условие Дирихле, а при $y = b$ — условие Неймана (т. е. нормальная производная от решения).

Решение. Однородные краевые условия при $x = 0$, и $x = a$ позволяют искать решение в виде ряда по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля:

$$u(x, y) = \sum_1^{\infty} Y_k(x) \sin \frac{k\pi y}{a}. \quad (9.13)$$

Правую часть также разложим по этим функциям:

$$x^2 y = y \cdot \sum_1^{\infty} g_k \sin \frac{k\pi y}{a}, \quad g_k = \frac{2}{a} \int_0^a x^2 \sin \frac{k\pi y}{a} dx. \quad (9.14)$$

Подставляя эти разложения в уравнения (9.12), получаем для $\forall k = 1, 2, \dots$

$$-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) + Y_k''(y) = y g_k, \quad 0 < y < b; \quad Y_k(0) = Y_k'(b) = 0. \quad (9.15)$$

Отсюда

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{a}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{a}} + \frac{y g_k}{-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2}. \quad (9.16)$$

Константы A_k и B_k находятся при подстановке этого решения в краевые условия в (9.15):

$$\begin{cases} A_k + B_k = 0, \\ A_k \frac{k\pi}{a} e^{\frac{k\pi}{a}b} + B_k \left(-\frac{k\pi}{a}\right) e^{-\frac{k\pi}{a}b} + \frac{g_k}{-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2} = 0. \end{cases} \quad (9.17)$$

Решая эту алгебраическую систему, находим A_k и B_k .

Ответ: решение дается формулами (9.13), (9.16).

2. Краевые задачи в кольце и круге.

А. Решим краевую задачу Дирихле в *кольце* между окружностями радиусов r_1 и r_2 :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2; \\ u|_{x^2+y^2=r_1^2} = f_1(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi; \\ u|_{x^2+y^2=r_2^2} = f_2(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (9.18)$$

Здесь f_1 и f_2 - заданные функции от угловой переменной φ .

Решение. Перейдем к полярным координатам r, φ :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi = y/x. \quad (9.19)$$

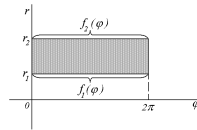
Задача. Докажите, что в этих координатах задача (9.18) принимает вид

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, & r_1 < r < r_2; \\ u|_{r=r_1} = f_1(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ u|_{r=r_2} = f_2(\varphi). \end{cases} \quad (9.20)$$

Это - задача в прямоугольнике $[0, 2\pi] \times [r_1, r_2]$ (рис. 72).

Краевые условия заданы на нижней и верхней сторонах прямоугольника.

Вопрос. Имеются ли здесь краевые условия на боковых сторонах прямоугольника?



Ответ. Да, это условия периодичности по φ :

Рис. 72

$$\begin{cases} u(0, r) = u(2\pi, r), \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(0, r) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(2\pi, r). \end{cases} \quad (9.21)$$

вытекающие из совпадения точек плоскости (x, y) с полярными координатами $(0, r)$ и $(2\pi, r)$. Аналогичные условия периодичности по φ выполняются также для $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial r^3}, \dots$ — всех производных от u по r и φ .

Задача. Покажите, что условия (9.21) вместе с уравнением (9.20) гарантируют также периодичность по φ всех производных от u по r и φ , если $u(\varphi, r)$ — бесконечно дифференцируемая функция в прямоугольнике $[0, 2\pi] \times [r_1, r_2]$.

Задача Штурма-Лиувилля, соответствующая однородным краевым условиям (9.21), имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi(\varphi)}{\partial \varphi^2} = \lambda \Phi(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi, \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi), & \Phi'(0) = \Phi'(2\pi). \end{cases} \quad (9.22)$$

Решая эту задачу, находим:

$$\lambda_k = -k^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \Phi_k(\varphi) = A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi). \quad (9.23)$$

Таким образом, для каждого $k \neq 0$ имеются две линейно-независимые собственные функции: $\cos(k\varphi)$ и $\sin(k\varphi)$, а при $k=0$ только одна: $\Phi_0(\varphi) \equiv 1$.

Эти собственные функции образуют полную систему в $L_2(0, 2\pi)$, как известно из теории рядов Фурье, и ортогональны между собой:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \Phi_0^2(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi, \\ \int_0^{2\pi} \cos^2(k\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(k\varphi) d\varphi = \pi, & k \neq 0. \end{cases} \quad (9.24)$$

Метод Фурье для задачи (9.20) в кольце состоит в том, что решение мы ищем в виде ряда по собственным функциям задачи (9.22):

$$u(\varphi, r) = \sum_0^{\infty} R_k(r) \cos(k\varphi) + \sum_1^{\infty} S_k(r) \sin^2(k\varphi). \quad (9.25)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (9.20), получаем для “радиальных” функций $R_k(r)$ уравнения

$$R_k'' + \frac{1}{r} R_k' + \frac{1}{r^2} R_k(-k^2) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.26)$$

и такие же уравнения для S_k :

$$S_k'' + \frac{1}{r} S_k' + \frac{1}{r^2} S_k(-k^2) = 0, \quad r_1 < r < r_2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (9.27)$$

Решим *радиальные* уравнения (9.26)—(9.27). Это уравнения Эйлера (см. [15]). Подставляя в (9.26) $R_k = r^\lambda$, получаем

$$\lambda(\lambda - 1)r^{\lambda-2} + \lambda r^{\lambda-2} - k^2 r^{\lambda-2} = 0, \quad (9.28)$$

откуда вытекает характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm k. \quad (9.29)$$

Если $k \neq 0$, то корни простые, и общее решение (9.26) имеет вид:

$$R_k = A_k r^k + B_k r^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.30)$$

Аналогично, для (9.27):

$$S_k = C_k r^k + D_k r^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9.31)$$

При $k = 0$ корень уравнения $\lambda = 0$ имеет кратность 2 \Rightarrow

$$\Rightarrow R_0 = A_0 + B_0 \ln r. \quad (9.32)$$

Подставляя (9.30)—(9.32) в (9.25), получаем общее решение однородного уравнения Лапласа в кольце:

$$\begin{aligned} u(\varphi, r) = & A_0 + B_0 \ln r + \sum_1^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k}) \cos(k\varphi) \\ & + \sum_1^{\infty} (C_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Замечание 9.1. Это общий вид гармонической функции в кольце, подобный ряду Лорана для аналитических функций в кольце.

Произвольные постоянные в (9.33) находятся из краевых условий (9.20):

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln r_1 + \sum_1^{\infty} (A_k r_1^k + B_k r_1^{-k}) \cos(k\varphi) + \\ + \sum_1^{\infty} (C_k r_1^k + D_k r_1^{-k}) \sin(k\varphi) = f_1(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ A_0 + B_0 \ln r_2 + \sum_1^{\infty} (A_k r_2^k + B_k r_2^{-k}) \cos(k\varphi) + \\ + \sum_1^{\infty} (C_k r_2^k + D_k r_2^{-k}) \sin(k\varphi) = f_2(\varphi), 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (9.34)$$

Отсюда с учетом ортогональности собственных функций задачи Штурма-Лиувилля (9.22) и соотношений (9.24) получаем

$$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln r_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi, \\ A_0 + B_0 \ln r_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi, \end{cases} \quad (9.35)$$

и аналогично, при $\forall k = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{cases} A_k r_1^k + B_k r_1^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi, \\ A_k r_2^k + B_k r_2^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \cos(k\varphi) d\varphi; \end{cases} \quad (9.36)$$

$$\begin{cases} C_k r_1^k + D_k r_1^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi, \\ C_k r_2^k + D_k r_2^{-k} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) \sin(k\varphi) d\varphi. \end{cases} \quad (9.37)$$

Из системы (9.35) находим A_0 и B_0 , из (9.36) — A_k и B_k , из (9.37) — C_k и D_k , и задача (9.18) решена.

Задача. Докажите, что решение (9.33) задачи (9.18) — бесконечно дифференцируемая функция внутри кольца.

Упражнение. Решим задачу Дирихле в кольце

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & 4 < x^2 + y^2 < 9; \\ u|_{x^2+y^2=4} = x, & u|_{x^2+y^2=9} = y. \end{cases} \quad (9.38)$$

Решение. Здесь $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, так что

$$f_1(\varphi) = 2 \cos \varphi, f_2(\varphi) = 3 \sin \varphi. \quad (9.39)$$

Поэтому правые части в (9.35) равны нулю и $A_0 = B_0 = 0$. Аналогично, правые части систем (9.36) и (9.37) равны нулю при всех $k \neq 1$. Следовательно,

$$A_k = B_k = 0, \quad C_k = D_k = 0 \quad \text{при } k \neq 1. \quad (9.40)$$

Таким образом, ряд (9.33) содержит всего два слагаемых:

$$u = (A_1 r + B_1 r^{-1}) \cos \varphi + (C_1 r + D_1 r^{-1}) \sin \varphi. \quad (9.41)$$

Оставшиеся коэффициенты находятся из систем уравнений

$$\begin{cases} A_1 2 + B_1 \frac{1}{2} = 2, & C_1 2 + D_1 \frac{1}{2} = 0, \\ A_1 3 + B_1 \frac{1}{3} = 0, & C_1 3 + D_1 \frac{1}{3} = 3, \end{cases} \quad (9.42)$$

которые получаются непосредственно из (9.39). А именно, (9.42) получается подстановкой (9.39) в (9.34) и сравнением коэффициентов Фурье в левой и правой частях получившихся равенств, а не вычислением интегралов в (9.36) — (9.37). Из (9.42) находим

$$\begin{cases} B_1 = \frac{36}{5}, \\ A_1 = -\frac{4}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} D_1 = -\frac{36}{5}, \\ C_1 = \frac{9}{5}. \end{cases} \quad (9.43)$$

Окончательно, из (9.41), (9.43) получаем ответ:

$$u = \left(-\frac{4}{5}r + \frac{36}{5}r^{-1}\right) \cos \varphi + \left(\frac{9}{5}r - \frac{36}{5}r^{-1}\right) \sin \varphi. \quad (9.44)$$

Б. Теперь рассмотрим задачу Дирихле в круге радиуса R^2 :

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 < R^2; \\ u|_{x^2+y^2=R^2} = f(\varphi), & 0 < \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (9.45)$$

Решение этой задачи также имеет вид (9.33), поскольку круг $x^2 + y^2 < R^2$ содержит в себе кольцо $0 < x^2 + y^2 < R^2$. Однако круг еще содержит точку $(0,0)$, в которой решение должно быть конечным:

$$|u(0, 0)| < \infty. \quad (9.46)$$

Можно показать [14], что для этого необходимо и достаточно отсутствие в (9.33) слагаемых, имеющих особенности в точке $(0,0)$ типа $\ln r$ и r^{-k} . Это означает, что $B_0 = B_k = D_k = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, (9.33) принимает вид

$$u(x, y) = A_0 + \sum_1^{\infty} r^k (A_k \cos(k\varphi) + C_k \sin(k\varphi)). \quad (9.47)$$

Это есть аналог ряда Тейлора для гармонических функций в круге. Коэффициенты ряда (9.47) находятся из краевого условия задачи (9.45). Упражнение. Решим задачу Дирихле в круге

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 < 4; \\ u|_{x^2+y^2=4} = x^2. \end{cases} \quad (9.48)$$

Решение. Ищем решение u в виде (9.47). Подстановка этого ряда в краевое условие дает:

$$A_0 + \sum_1^{\infty} 2^k (A_k \cos(k\varphi) + C_k \sin(k\varphi)) = 2 + 2 \cos(2\varphi), \quad (9.49)$$

поскольку

$$x^2|_{r=2} = (2 \cos \varphi)^2 = 4 \cos^2 \varphi = 4 \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2} = 2 + 2 \cos(2\varphi).$$

Из (9.49) сравнением коэффициентов Фурье левой и правой частей получаем, что все A_k и C_k при $k \neq 0$ и $k \neq 2$ равны нулю,

$$\begin{cases} A_0 = 2 \\ 4A_2 = 2, \quad C_2 = 0. \end{cases} \quad (9.50)$$

Отсюда $A_2 = \frac{1}{2}$ и по формуле (9.47) получается ответ:

$$u = 2 + r^2 \frac{1}{2} \cos(2\varphi) = 2 + \frac{r^2}{2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 2 + \frac{x^2 - y^2}{2}. \quad (9.51)$$

Задача. Решите задачу Дирихле в кольце

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = x^2, & 9 < x^2 + y^2 < 16; \\ u|_{x^2+y^2=9} = 0, & u|_{x^2+y^2=16} = 0. \end{cases} \quad (9.52)$$

Указание. Здесь исконое решение и правую часть уравнения нужно разложить в ряд вида (9.25). Уравнения для радиальных функций R_k и S_k будут неоднородными уравнениями Эйлера.

Задача. Решите задачу Неймана в круге

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & x^2 + y^2 < 9; \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{x^2+y^2=9} = y. \end{cases}$$

Указание. Решение нужно искать в виде ряда (9.47); кроме того, в полярных координатах $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial r}$.

Заключение. Уравнения теплопроводности, волновое и уравнение Лапласа обладают различными свойствами. Как следует из результатов главы II, решения однородного уравнения Лапласа и теплопроводности бесконечно дифференцируемы внутри области, даже если граничные функции разрывны. В то же время решения однородного волнового уравнения могут быть разрывными, если, например, начальные данные являются разрывными функциями.

ГЛАВА III. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. МЕТОД ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА ОТРЕЗКЕ.

[3, с.82–125, 198, 336–345]; [9, с. 120–130]; [11]; [12, с.274–300]; [14, с.267–275].

§1. Различные способы задания функций.

Непрерывные функции $u(x) \in C(\mathbb{R})$ можно задавать следующими тремя способами.

1. Непрерывная функция однозначно задается своими значениями

$$\{u(x)\}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

2. Можно задать ее коэффициентами Фурье (если она 2π -периодическая):

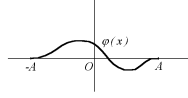
$$u(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k e^{ikx}. \quad (1.2)$$

Здесь

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} u(x) dx. \quad (1.3)$$

Последовательность

$$\{u_k \quad k \in \mathbf{Z}\}, \quad (1.4)$$



однозначно определяет непрерывную (периодическую) функцию по формуле (1.2).

Рис. 73

3. Введем сначала пространство так называемых пробных, или основных функций: $C_0^\infty(\mathbb{R})$ — пространство гладких, финитных функций, т. е.

1) $\varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$

2) $\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq A$, где $A \geq 0$ зависит от φ (рис. 73).

Для любой непрерывной функции $u(x)$ определим скалярное произведение u с $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\langle u(x), \varphi(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\varphi(x) dx. \quad (1.5)$$

Этот интеграл сходится, поскольку $\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq A$:

$$\langle u(x), \varphi(x) \rangle = \int_{-A}^A u(x)\varphi(x) dx. \quad (1.6)$$

Для фиксированной непрерывной функции $u(x)$ рассмотрим набор чисел

$$\{\langle u, \varphi \rangle, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}. \quad (1.7)$$

Вопрос. Определяется ли непрерывная функция $u(x)$ этим набором однозначно?

Ответ. Да (докажите это!).

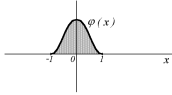
Вопрос. Можно ли написать формулу для восстановления непрерывной функции $u(x)$ по набору чисел (1.7)?

Ответ. Да:

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \varphi_\varepsilon^x(y), u(y) \rangle. \quad (1.8)$$

Здесь $\varphi_\varepsilon^x(y) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$; $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ — функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\varphi(y) \equiv 0$ при $|y| \geq 1$,



2) $\int_{-1}^1 \varphi(y) dy = 1$ (рис. 74). Докажем формулу (1.8). Сделаем замену переменной интегрирования $\frac{x-y}{\varepsilon} = z$. Тогда (1.8) принимает вид

Рис. 74

$$u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \varphi(z) u(x - \varepsilon z) dz. \quad (1.9)$$

В таком виде эта формула очевидно вытекает из непрерывности функции u в точке x :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \varphi(z) u(x - \varepsilon z) dz &= \int_{-1}^1 \varphi(z) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x - \varepsilon z) dz = \\ &= \int_{-1}^1 \varphi(z) u(x) dz = u(x) \int_{-1}^1 \varphi(z) dz = u(x). \end{aligned}$$

Вопрос. В чем состоит существенное различие между тремя описанными выше способами задания функции $u(x)$?

Ответ.

1. Набор чисел $\{u(x), x \in \mathbb{R}\}$ может быть более или менее произвольным: в любом конечном множестве точек $x_k \in \mathbb{R}$ значения $u(x_k)$ могут быть произвольными.
2. Набор чисел $\{u_k, k \in \mathbb{Z}\}$ может быть любым, если только $|u_k|$ убывают при $|k| \rightarrow \infty$ так, что, например,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |u_k| < \infty. \quad (1.10)$$

3. Числа $\{\langle u, \varphi \rangle, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$ не произвольны: они связаны алгебраическими соотношениями

$$\langle u, \varphi_1 + \varphi_2 \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle + \langle u, \varphi_2 \rangle, \quad (1.11)$$

как видно из (1.5), при $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

Вывод. Чтобы некоторому абстрактному набору чисел $\{l_\varphi \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$, соответствовала хотя бы одна функция $u(x) \in C(\mathbb{R})$ такая, что

$$l_\varphi = \langle u, \varphi \rangle, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad (1.12)$$

необходимо, чтобы этот набор удовлетворял условиям согласования (1.11):

$$l_{\varphi_1+\varphi_2} = l_{\varphi_1} + l_{\varphi_2}, \quad \forall \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.13)$$

Определение. Сходимость $\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C_0^\infty} \varphi$ означает следующее: 1) $\varphi_n(x)$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$ сходится к $\varphi(x)$ и то же верно для производных любого порядка: $\forall k = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_n^{(k)}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi^{(k)}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (1.14)$$

2) все φ_n “имеют общий носитель” $[-A, A]$: $\exists A \geq 0, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

$$\varphi_n(x) \equiv 0 \quad \text{при } |x| \geq A. \quad (1.15)$$

Вопрос. Достаточны ли условия согласования (1.13) для существования функции $u(x) \in C(\mathbb{R})$, соответствующей набору $\{l_\varphi\}$ в смысле тождества (1.12)?

Ответ. Нет, недостаточны. Нужны еще условия типа непрерывности:

$$\langle u, \varphi_n \rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle u, \varphi \rangle, \quad \text{если } \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C_0^\infty} \varphi \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (1.16)$$

При условиях (1.14)—(1.15) сходимость (1.16) следует из теоремы о предельном переходе под знаком (собственного) интеграла:

$$\langle u, \varphi_n \rangle \equiv \int_{-A}^A u(x) \varphi_n(x) dx \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-A}^A u(x) \varphi(x) dx = \langle u, \varphi \rangle, \quad (1.17)$$

поскольку $u(x) \varphi_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(x) \varphi(x)$ при $x \in [-A, A]$, $n \rightarrow \infty$.

Итак, для существования функции $u(x) \in C(\mathbb{R})$, соответствующей набору $\{l_\varphi\}$ в смысле (1.12), необходимо (кроме (1.13) условие:

$$l_{\varphi_n} \rightarrow l_\varphi \quad \text{при } \varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{C_0^\infty} \varphi \quad (1.18)$$

Вопрос. Достаточно ли условий (1.13) и (1.18) для существования $u(x) \in C(\mathbb{R})$, дающей представление (1.12)?

Ответ. Нет.

Задача. Привести пример набора $\{l_\varphi\}$, удовлетворяющего условиям (1.13) и (1.18), которому не соответствует никакая функция $u(x) \in C(\mathbb{R})$ (см. [3], с.97).

Ответ.

$$l_\varphi = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.19)$$

Вывод. Набор чисел $\{l_\varphi\}$ однозначно определяет функцию $u(x) \in C(\mathbb{R})$, удовлетворяющую тождеству (1.12), если только такая функция $u(x)$ существует, однако для набора $\{l_\varphi\}$ она может не существовать. Условия (1.13), (1.18) необходимы для существования непрерывной функции $U(x)$, но не достаточны.

§2. Обобщенные функции.

Определение. Обобщенной функцией называется любой набор $l = \{l_\varphi, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$, удовлетворяющий условиям (1.13) и (1.18).

Для краткости обозначим

$$D = D(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

Замечание 2.1. Набор $\{l_\varphi\}$, удовлетворяющий условиям (1.13), (1.18) (т. е. обобщенная функция) с точки зрения функционального анализа есть линейный непрерывный функционал на $D(\mathbb{R})$, т. е. элемент сопряженного пространства $D'(\mathbb{R})$:

$$l = \{l_\varphi\} \in D'(\mathbb{R}); \quad l(\varphi) \equiv l_\varphi, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.2)$$

Итак, $D'(\mathbb{R})$ — пространство всех обобщенных функций.

Обозначение. Для обобщенной функции $\{l_\varphi\}$ значение $\{l_\varphi\}$ функционала l на пробной функции φ будем обозначать $l(\varphi)$, а также $\langle l(x), \varphi(x) \rangle$ и будем называть его скалярным произведением обобщенной функции $l(x)$ с пробной функцией $\varphi(x)$:

$$l_\varphi = l(\varphi) = \langle l, \varphi \rangle = \langle l(x), \varphi(x) \rangle \quad (2.3)$$

Отметим, что при этом $l(x)$ — не значение функции l в точке x , а просто символ.

Пример. Обобщенная функция (1.19) называется δ -функцией Дирака:

$$\delta_\varphi = \delta(\varphi) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}). \quad (2.4)$$

Замечание 2.2. Каждой непрерывной функции $u(x) \in C(\mathbb{R})$ формула (1.5) сопоставляет обобщенную функцию:

$$u(x) \mapsto \{\langle u(x), \varphi(x) \rangle, \varphi \in D(\mathbb{R})\}. \quad (2.5)$$

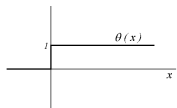
Это отображение является вложением согласно (1.8):

$$C(\mathbb{R}) \subset D'(\mathbb{R}). \quad (2.6)$$

Однако не каждая обобщенная функция получается по формуле (1.5) из некоторой непрерывной функции (например, $\delta(x)$).

Рассмотрим примеры обобщенных функций.

$$1. \quad \langle \delta_k(x), \varphi(x) \rangle = \varphi^{(k)}(0), \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (2.7)$$



Проверьте, что $\delta_k(x) \in D'(\mathbb{R})$ (т. е. проверьте условия (1.13), (1.16)). 2. Функция Хевисайда (рис. 75).

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0: \end{cases} \quad (2.8)$$

Рис. 75

$$\langle \Theta(x), \varphi(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x), \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2.9)$$

Проверьте, что $\Theta(x) \in D'(\mathbb{R})$.

§3. Действия над обобщенными функциями.

1. Сложение обобщенных функций.

Заметим сначала, что для непрерывных функций $u_1(x), u_2(x)$ и их суммы $u_1(x) + u_2(x)$ имеем в силу (1.15)

$$\langle u_1(x) + u_2(x), \varphi(x) \rangle = \langle u_1, \varphi \rangle + \langle u_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (3.1)$$

Определение. Для $l^1, l^2 \in D'(\mathbb{R})$ положим

$$(l^1 + l^2)_\varphi = l^1_\varphi + l^2_\varphi, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}). \quad (3.2)$$

Замечание 3.1. При таком определении сложение непрерывных функций $u_1(x), u_2(x)$ совпадает со сложением соответствующих им обобщенных функций, как видно из (3.1) и (3.2).

Упражнение. Проверьте, что $l^1 + l^2 \in D'(\mathbb{R})$.

2. Умножение обобщенных функций на число.

Заметим, что для $u(x) \in C(\mathbb{R})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ в силу (1.5) имеем

$$\langle \alpha u(x), \varphi \rangle = \alpha \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (3.3)$$

Определение. Для $l(x) \in D'(\mathbb{R})$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ положим

$$\langle \alpha l(x), \varphi \rangle = \alpha \langle l, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}). \quad (3.4)$$

3. Умножение обобщенных функций на гладкую функцию.

Возьмем $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Если $u(x) \in C(\mathbb{R})$, то, как видно из (1.5),

$$\langle g(x)u(x), \varphi \rangle = \langle u g(x)\varphi(x) \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (3.5)$$

Определение. Для $l(x) \in D'(\mathbb{R})$ положим

$$\langle g(x)l(x), \varphi \rangle = \langle l, g(x)\varphi(x) \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (3.6)$$

Замечание 3.2. Правая часть (3.6) имеет смысл, поскольку

$$g(x)\varphi(x) \in D(\mathbb{R})!$$

Задачи.

1. Проверьте, что $g(x)l(x) \in D'(\mathbb{R})$
2. Вычислите $x\delta(x)$.
3. Докажите, что

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x). \quad (3.7)$$

4. “Сдвиг” обобщенных функций.

Для $u(x) \in C(\mathbb{R})$ и $a \in (\mathbb{R})$

$$\int u(x-a)\varphi(x) dx = \int u(y)\varphi(y+a) dy, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

Определение. Для $l(x) \in D'(\mathbb{R})$ положим

$$\langle l(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle l(y), \varphi(y+a) \rangle. \quad (3.8)$$

Пример.

$$\langle \delta(x-a), \varphi(x) \rangle = \langle \delta(y), \varphi(y+a) \rangle = \varphi(a). \quad (3.9)$$

5. “Замена масштаба” в аргументе обобщенных функций.

Для $u(x) \in C(\mathbb{R})$ и $k \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(kx)\varphi(x) dx = \frac{1}{|k|} \int_{-\infty}^{+\infty} u(y)\varphi\left(\frac{y}{k}\right) dy. \quad (3.10)$$

Определение. Для $f(x) \in D(\mathbb{R})$ положим при $k \neq 0$

$$\langle f(kx), \varphi(x) \rangle = \frac{1}{|k|} \langle f(y), \varphi\left(\frac{y}{k}\right) \rangle. \quad (3.11)$$

Задача. Докажите, что

$$\delta(kx) = \frac{1}{|k|} \delta(x), \quad k \neq 0 \quad (3.12)$$

В частности, δ - функция четная:

$$\delta(-x) = \delta(x). \quad (3.13)$$

Замечание 3.3. Из определения (3.9) получаем:

$$\langle \delta(y-x), \varphi(y) \rangle = \varphi(x). \quad (3.14)$$

Это означает, что $\delta(y-x)$ — интегральное ядро единичного оператора $I\varphi = \varphi$. В линейной алгебре матрица единичного оператора есть δ -символ Кронекера δ_{ij} . Именно ввиду такой аналогии Дирак назвал функционал (2.4) δ -функцией.

Задача. Напишите формулу для общей замены переменной $x = g(y)$ в обобщенной функции, где $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкий диффеоморфизм.

6. Сходимость обобщенных функций.

Определение. Обобщенные функции $u_n(x) \in D'(\mathbb{R})$ сходятся (слабо) к $u(x) \in D'(\mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$, если для $\forall \varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \equiv D(\mathbb{R})$

$$\langle u_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.15)$$

Обозначают это так: $u_n(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} u(x)$ при $n \rightarrow \infty$.

Примеры сходящихся последовательностей обобщенных функций:

1. Если $u_n(x) \in C(\mathbb{R})$ и $U_n(x) \xrightarrow{\longrightarrow} u(x)$ при $n \rightarrow \infty$, то $u_n \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} u$ при $n \rightarrow \infty$. (Доказать!)

2. Если $u_n(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $u_n \rightarrow u$ в $L_2(\mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$, то $u_n \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} u$. (Доказать!)

3. $\sin kx \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} 0$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно, интегрируя по частям, получаем, что

$$\langle \sin kx, \varphi(x) \rangle = \int \frac{\cos kx}{k} \varphi'(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

4. Аналогично, $k^2 \sin kx \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Замечание. Последовательности функций $\sin kx$ и $k^2 \sin kx$ не сходятся ни в пространстве $C(\mathbb{R})$, ни в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, но сходятся в $D'(\mathbb{R})$.

5. “ δ -образные” последовательности. Рассмотрим “ступеньки Стеклова”

$$u_n(x) = \begin{cases} n, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \notin [0, \frac{1}{n}], \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Очевидно, $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x) dx = 1, \quad \forall n = 1, 2, 3, \dots$

Задача. Доказать, что

$$u_n(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} \delta(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \quad (3.17)$$

Указание. Применить к интегралу $\int_{-\infty}^{+\infty} u_n(x)\varphi(x) dx$ теорему о среднем.

Аналогично, слабо сходятся гауссовские распределения

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}} \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} \delta(x) \quad \text{при } \sigma \rightarrow 0+$$

(Доказать!).

7. Дифференцирование обобщенных функций.

Для $u(x) \in C^1(\mathbb{R})$, интегрируя по частям, получаем ($\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| \geq A$):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u'(x)\varphi(x) dx = u\varphi|_{-A}^A - \int_{-A}^A u(x)\varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\varphi'(x) dx, \quad (3.18)$$

поскольку $\varphi(A) = \varphi(-A) = 0$, так что подстановка равна нулю.

Определение. Для $u(x) \in D'(\mathbb{R})$ положим

$$\langle u'(x), \varphi(x) \rangle = -\langle u(x), \varphi'(x) \rangle, \quad \forall \varphi \in D(\mathbb{R}) \quad (3.19)$$

Задача. Докажите, что $u'(x) \in D'(\mathbb{R})$.

Таким образом, любая обобщенная функция имеет производную, а следовательно и производные всех порядков!

Рассмотрим примеры дифференцирования обобщенных функций.

1. $(\sin x)' = \cos x$.

2. Найдем $\Theta'(x)$ (см. (2.8)—(2.9)): по определению (3.19)

$$\begin{aligned} \langle \Theta(x), \varphi(x) \rangle &= -\langle \Theta(x), \varphi'(x) \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \\ &= -\varphi(x)|_0^{+\infty} = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Отсюда видно, что $\Theta'(x) = \delta(x)$.

8. Непрерывность оператора дифференцирования относительно сходимости обобщенных функций.

Лемма 3.1. Оператор $\frac{d}{dx} : D'(\mathbb{R}) \rightarrow D'(\mathbb{R})$ непрерывен.

Доказательство. Пусть $u_n(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} u(x)$. Тогда для $\forall \varphi \in D(\mathbb{R})$

$$\langle u'_n(x), \varphi(x) \rangle \equiv -\langle u_n(x), \varphi'(x) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\langle u(x), \varphi'(x) \rangle \equiv -\langle u'(x), \varphi(x) \rangle$$

Следовательно, $u'_n(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} u'(x)$ по определению (3.15), ч. т. д.

Задача. Доказать, что для $\forall u(x) \in D'(\mathbb{R})$

$$\frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \xrightarrow{D'(\mathbb{R})} u'(x) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

§4. Дифференцирование кусочно-гладких функций и дифференцирование произведения.

1. Дифференцирование кусочно-гладких функций.

Лемма. Пусть функция $u(x) \in C^1$ при $x < a$ и при $x > a$, а в точке $x = a$ имеет разрыв первого рода, т. е. существуют односторонние пределы $u(a \pm 0)$ (и $u'(a \pm 0)$ для простоты также пусть существуют):

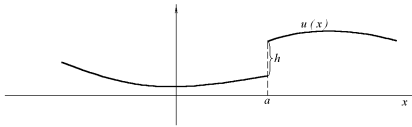


Рис. 76

Тогда справедлива формула

$$u'(x) = \{u'(x)\} + h \cdot \delta(x - a); \quad h = u(a + 0) - u(a - 0). \quad (4.1)$$

Здесь в левой части $u'(x)$ — обобщенная производная обобщенной функции $u(x)$, а в правой части $\{u'(x)\}$ — непрерывная при $x \neq a$ функция, равная обычной производной функции $u(x)$ в тех точках, где эта производная существует. Соответствующая функции $\{u'(x)\}$ по формуле (1.5) обобщенная функция называется регулярной частью обобщенной производной $u'(x)$.

Пример. Для $u(x) = \Theta(x)$ имеем: $a = 0, \{\Theta'(x)\} \equiv 0$, поскольку $\Theta'(x) = 0$ при $x \neq 0$, $h = \Theta(0+) - \Theta(0-) = 1$. Поэтому формула (4.1) дает

$$\Theta'(x) = \delta(x), \quad (4.2)$$

что согласуется с (3.20).

Упражнение. Вычислим $|x|''$.

Решение. По формуле (4.1)

$$|x|' = \{|x|\}' + 0 \cdot \delta(x) = \text{Sgn}(x) \equiv \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Опять по той же формуле

$$|x|'' = (\text{Sgn } x)' = \{\text{Sgn}' x\} + 2 \cdot \delta(x) = 2\delta(x). \quad (4.4)$$

Ответ: $|x|'' = 2\delta(x)$.

Упражнение. Докажем формулу (4.1).

Решение. Для $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle u', \varphi \rangle &= -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^a u \varphi' dx - \int_a^{+\infty} u \varphi' dx = -u\varphi|_{-\infty}^{a-0} - u\varphi|_{a+0}^{+\infty} + \\ &+ \int_{x \neq a} u' \varphi dx = -u(a)\varphi(a-0) + u(a)\varphi(a+0) + \langle \{u'\}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

что эквивалентно (4.1).

2. Дифференцирование произведения.

Для $g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $u(x) \in D'(\mathbb{R})$ определено произведение $g(x)u(x)$ (см. определение (3.6)). Оказывается, справедлива обычная по виду формула

$$(g(x)u(x))' = g'(x)u(x) + g(x)u'(x). \quad (4.5)$$

Задача. Докажите формулу (4.5).

Упражнение. При помощи формулы (4.5) вычислим

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)(\Theta(x)e^{-\lambda x}). \quad (4.6)$$

Решение. По формулам (4.5) и (3.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{-\lambda x}\Theta(x)) &= -\lambda e^{-\lambda x}\Theta(x) + e^{-\lambda x}\Theta'(x) = \\ &= -\lambda e^{-\lambda x}\Theta(x) + \delta(x). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Прибавляя сюда $\lambda\Theta(x)e^{-\lambda x}$, получаем, что (4.6) равняется $\delta(x)$:

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)(\Theta(x)e^{-\lambda x}) = \delta(x). \quad (4.8)$$

Упражнение. Вычислим (при $\omega \neq 0$):

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)(\Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}) = ? \quad (4.9)$$

Решение. По формулам (4.5) и (3.7)

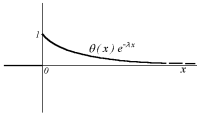
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin \omega x}{\omega} \cdot \Theta(x)\right) = \cos \omega x \cdot \Theta(x) + \frac{\sin \omega x}{\omega} \cdot \Theta'(x) = \cos \omega x \cdot \Theta(x). \quad (4.10)$$

Пользуясь опять теми же формулами, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\sin \omega x}{\omega} \cdot \Theta(x)\right) &= \frac{d}{dx}(\cos \omega x \cdot \Theta(x)) = -\omega \sin \omega x \cdot \Theta(x) + \\ &+ \cos \omega x \cdot \Theta'(x) = -\omega \sin \omega x \cdot \Theta(x) + \delta(x). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Прибавляя сюда $\omega^2\Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}$, получаем $\delta(x)$:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)(\Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}) = \delta(x). \quad (4.12)$$



Упражнение. Докажем (4.8) и (4.12) при помощи формулы (4.1) вместо (4.5).

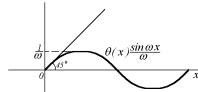
Докажем (4.8). Нарисуем график $\Theta(x)e^{-\lambda x}$ (рис. 77).

По формуле (4.1) ($a = 0$ и $h = 1$)

Рис. 77

$$\frac{d}{dx}(\Theta(x)e^{-\lambda x}) = \Theta(x)(-\lambda)e^{-\lambda x} + \delta(x). \quad (4.13)$$

Прибавляя сюда $\lambda\Theta(x)e^{-\lambda x}$, получаем (4.8). Докажем (4.12). Нарисуем график $\Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}$:



По формуле (4.1) ($a = 0$ и $h = 0$)

$$\frac{d}{dx}\left(\Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}\right) = \Theta(x) \cos \omega x.$$

Рис. 78

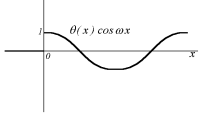
График $\Theta(x) \cos \omega x$ смотри на рис. 79. По формуле (4.1) ($a = 0$ и $h = 1$):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}\right) = \frac{d}{dx}(\Theta(x) \cos \omega x) = \Theta(x)(\sin \omega x)(-\omega) + \delta(x). \quad (4.15)$$

Прибавляя сюда $\omega^2 \Theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}$, получаем (4.12).

Замечание 4.1. Равенство (4.8) обусловлено тем, что функция $\Theta(x)e^{-\lambda x}$ при $x \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\left(\frac{d}{dx} + \lambda\right)(\Theta(x)e^{-\lambda x}) = 0 \quad \text{при } x \neq 0, \quad (4.16)$$



а ее скачок $h = 1$. Аналогично, (4.12) получается из-за того, что функция $y(x) = \Theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega}$ при $x \neq 0$ удовлетворяет однородному уравнению

Рис. 79

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\Theta(x) \frac{\sin \omega x}{\omega} = 0 \quad \text{при } x \neq 0. \quad (4.17)$$

Кроме того, сама функция $y(x)$ непрерывна при $x = 0$, а ее первая производная $y'(x) = \Theta(x) \cos \omega x$ имеет скачок, равный 1:

$$\begin{cases} y(0-) = y(0+), \\ y'(0+) = y'(0-) + 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

Итак, регулярные части в (4.8) и (4.12) уничтожаются в силу тождеств (4.16), (4.17) соответственно.

§5. Фундаментальные решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Фундаментальные решения обыкновенных уравнений.

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами:

$$A = A\left(\frac{d}{dx}\right) = \sum_{k=0}^m a_k \frac{d^k}{dx^k}, \quad a_m \neq 0. \quad (5.1)$$

По формуле дифференцирования сложной функции для $y \in \mathbb{R}$

$$\frac{d^k}{dx^k}(u(x-y)) = u^{(k)}(x-y), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.2)$$

Следовательно,

$$A\left(\frac{d}{dx}\right)(u(x-y)) = (Au)(x-y), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Определение. Фундаментальным решением оператора A называется такая (обобщенная) Функция $e(x)$ $x \in D'(\mathbb{R})$, для которой (производные понимаются в смысле теории обобщенных функций)

$$A\left(\frac{d}{dx}\right)e(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.4)$$

Замечание 5.1. Из (5.3) следует, что

$$A\left(\frac{d}{dx}\right)e(x-y) = \delta(x-y), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.5)$$

Примеры:

1. $A = \frac{d}{dx}$: $e(x) = \Theta(x)$ (см. (4.2)).

2. $A = \frac{d^2}{dx^2}$: $e(x) = \frac{1}{2}|x|$ (см. (4.4)).

3. $A = \frac{d}{dx} + \lambda$: $e(x) = \Theta(x)e^{-\lambda x}$ (см. (4.8)).

4. $A = \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2$: $e(x) = \Theta(x)\frac{\sin \omega x}{\omega}$ (см. (4.12)).

Отметим, что для фиксированного оператора A фундаментальных решений может быть бесконечное множество.

Вопрос. Зачем нужны фундаментальные решения?

Ответ. Чтобы решать неоднородные уравнения

$$A\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.6)$$

Частное решение можно найти по формуле

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(x-y)f(y) dy \equiv (e * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(y)f(x-y) dy, \quad (5.7)$$

если $f(x) = 0$ при $|x| \geq \text{const}$, и $f(x) \in C(\mathbb{R})$ (операция $*$ в (5.7) называется сверткой e с f).

Проверка для случая $f(x) \in C^m(\mathbb{R})$: для функции (5.7) получаем из (5.4) при $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A\left(\frac{d}{dx}\right)u(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e(y)A\left(\frac{d}{dx}\right)f(x-y) dy = \\ &= \langle e(y), A\left(-\frac{d}{dy}\right)f(x-y) \rangle = \langle A\left(\frac{d}{dy}\right)e(y), f(x-y) \rangle = \langle \delta(y), f(x-y) \rangle = f(x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Примеры:

1. Для уравнения

$$\frac{d}{dx}u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.9)$$

формула (5.7) дает частное решение

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x-y)f(y) dy = \int_{-\infty}^x f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

что хорошо известно из анализа.

2. Для уравнения

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.11)$$

формула (5.7) дает частное решение

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}|x-y|f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.12)$$

что аналогично известной формуле Коши.

2. Метод построения фундаментальных решений для произвольного оператора $A(\frac{d}{dx})$ вида (5.1).

Рассмотрим функцию $u_0(x)$ при $x \geq 0$, решение задачи Коши

$$\begin{cases} A(\frac{d}{dx})u_0(x) = 0, & x > 0, \\ u_0(0) = 0, \\ \dots \\ u_0^{(m-2)}(0) = 0, \\ u_0^{(m-1)}(0) = \frac{1}{a_m}. \end{cases} \quad (5.13)$$

Тогда функция

$$e = \begin{cases} u_0(x), & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (5.14)$$

является фундаментальным решением оператора A .

Задача. Докажите (5.4) для функции (5.14), используя формулу (4.1).

Упражнение. Найдите решение уравнения

$$3u''(x) - u'(x) = \delta(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.15)$$

Решение. $3\lambda^2 - \lambda = 0 \iff \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$u_0(x) = c_1 + c_2 e^{\frac{x}{3}}. \quad (5.16)$$

Начальные условия (5.13) дают

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ \frac{1}{3}c_2 = \frac{1}{3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = -1, \end{cases} \quad (5.17)$$

Ответ:

$$u(x) = \Theta(x)(e^{\frac{x}{3}} - 1). \quad (5.18)$$

Упражнение. Найдем формулу для частного решения уравнения

$$u''(x) - 3u'(x) + 2u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (5.19)$$

где $f(x) \in C(\mathbb{R})$, $f(x) = 0$ при $|x| = \text{const}$.

Решение. Найдем фундаментальное решение:

$$e''(x) - 3e'(x) + 2e(x) = \delta(x). \quad (5.20)$$

Для этого найдем корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \iff \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \Rightarrow$$

$$e(x) = \Theta(x)(c_1 e^x + c_2 e^{2x}). \quad (5.21)$$

Начальные условия (5.13) дают

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 + 2c_2 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1, \\ c_1 = -1, \end{cases} \quad (5.22)$$

Ответ: По формуле (5.7)

$$\begin{aligned} u(x) &= \varepsilon * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(x-y)(e^{2(x-y)} - e^{x-y})f(y) dy = \\ &= \int_{-\infty}^x (e^{2(x-y)} - e^{x-y})f(y) dy. \end{aligned} \quad (5.23)$$

§6. Функция Грина для краевых задач на отрезке.

1. Функция Грина.

Найдем решение краевой задачи ($\omega \neq 0$)

$$\begin{cases} u''(x) - \omega^2 u(x) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Функция Грина этой краевой задачи — это функция $G(x, y)$ на $[0, l] \times [0, l]$, гладкая при $x \neq y$ и удовлетворяющая уравнениям

$$\begin{cases} (\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2)G(x, y) = \delta(x - y), & 0 < x < l, \\ G(0, y) = G(l, y) = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Здесь y играет роль параметра, $y \in (0, l)$. Можно сказать, что функция Грина есть фундаментальное решение, удовлетворяющее краевым условиям.

Имея функцию Грина, легко найти решение краевой задачи (6.1) по формуле

$$u(x) = \int_0^l G(x, y) f(y) dy. \quad (6.3)$$

Проверка. Краевые условия (6.1) вытекают из краевых условий (6.2): при $x = 0$

$$u(0) = \int_0^l G(0, l) f(y) dy = 0 \quad (6.4)$$

и аналогично при $x = l$. Уравнение (6.1) формально проверяется так:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)u(x) = \int_0^l \left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)G(x, y) f(y) dy = \int_0^l \delta(x - y) f(y) dy = f(x). \quad (6.5)$$

Замечание 6.1. Формула (6.3) означает, что функция Грина $G(x, y)$ является интегральным ядром оператора G , обратного к оператору $A = \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$ краевой задачи (6.1):

$$A = \frac{d^2}{dx^2} - \omega^2 : C_0^2[0, l] \rightarrow C[0, l] \quad (6.6)$$

Здесь $C_0^2[0, l]$ — пространство функций $u(x) \in C^2[0, l]$ с краевыми условиями $u(0) = u(l) = 0$.

Замечание 6.2. Оператор (6.6) - симметрический в $L_2(0, l)$, как показано в П.3.6. Следовательно, оператор $G = A^{-1}$ также симметрический в $L_2(0, l)$. Отсюда вытекает важное свойство симметрии функции Грина:

$$G(x, y) = G(y, x), \quad \forall x, y \in [0, l]. \quad (6.7)$$

2. Метод построения функции Грина для краевых задач на отрезке.

Дифференциальное уравнение (6.2) — однородное при $x \neq y$, поскольку $\delta(x - y) = 0$ при $x - y \neq 0$. Поэтому аналогично (4.17)

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2\right)G(x, y) = 0 \quad \text{при } x \neq y. \quad (6.8)$$

Следовательно,

$$G(x, y) = \begin{cases} Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}, & x < y, \\ Ce^{\omega x} + De^{-\omega x}, & x > y. \end{cases} \quad (6.9)$$

Для определения констант А, В, С и D мы имеем два краевых условия (6.2) и два условия склейки при $x = y$ (см. рис.80). Аналогично (4.18)

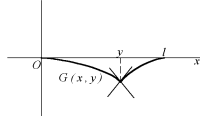


Рис. 80

$$\begin{cases} G(y-0, y) = G(y+0, y), \\ G'_x(y+0, y) = G'_x(y-0, y) + 1. \end{cases} \quad (6.10)$$

Эти четыре уравнения однозначно определяют А, В, С и D.

Задача. Выведите (6.2) из (6.8) и (6.10).

Указание. Примените формулу (4.1) (два раза) для вычисления $\frac{d^2}{dx^2}G(x, y)$. Заметим, что можно сразу учесть краевые условия (6.2), разыскивая функцию Грина в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} A \operatorname{sh} \omega x, & x < y, \\ B \operatorname{sh} \omega(x-l), & x > y. \end{cases} \quad (6.11)$$

При этом (6.9) также выполняется. Остается учесть условия склейки (6.10):

$$\begin{cases} A \operatorname{sh} \omega y = B \operatorname{sh} \omega(y-l), \\ B \omega \operatorname{ch} \omega(y-l) = A \omega \operatorname{ch} \omega y + 1. \end{cases} \quad (6.12)$$

Решая эту систему, находим

$$\begin{cases} A = \frac{\operatorname{sh} \omega(y-l)}{\omega \operatorname{sh} \omega l}, \\ B = \frac{\operatorname{sh} \omega y}{\omega \operatorname{sh} \omega l}. \end{cases} \quad (6.13)$$

Окончательно, из (6.11) находим функцию Грина задачи (6.1):

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sh} \omega(y-l) \operatorname{sh} \omega x}{\omega \operatorname{sh} \omega l}, & x < y, \\ \frac{\operatorname{sh} \omega y \operatorname{sh} \omega(x-l)}{\omega \operatorname{sh} \omega l}, & x > y. \end{cases} \quad (6.14)$$

Подставляя в (6.3), находим решение краевой задачи (6.1):

$$u(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh} \omega y \operatorname{sh} \omega(x-l)}{\omega \operatorname{sh} \omega l} f(y) dy + \int_x^l \frac{\operatorname{sh} \omega(y-l) \operatorname{sh} \omega x}{\omega \operatorname{sh} \omega l} f(y) dy. \quad (6.15)$$

Функция Грина (6.14) симметрична в полном соответствии с замечанием 6.2.

Упражнение. Найти решение краевой задачи ($\omega \neq 0$)

$$\begin{cases} u''(x) + \omega^2 u(x) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases} \quad (6.16)$$

Решение. Находим функцию Грина $G(x, y)$ при $\forall y \in [0, l]$:

$$\begin{cases} (\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)G(x, y) = \delta(x - y), & 0 < x < l, \\ G(0, y) = G(l, y) = 0. \end{cases} \quad (6.17)$$

Заменяя в (6.8) знак " - " на " + " получаем, аналогично (6.11):

$$G(x, y) = \begin{cases} A \sin \omega x, & x < y, \\ B \sin \omega(x - l), & x > y. \end{cases} \quad (6.18)$$

Подставляя G в условиях склейки (6.10), получаем, аналогично (6.13), что при $\sin \omega l \neq 0$

$$\begin{cases} A = \frac{\sin \omega(y-l)}{\omega \sin \omega l}, \\ B = \frac{\sin \omega y}{\omega \sin \omega l}. \end{cases} \quad (6.19)$$

Отсюда, подобно (6.14),

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin \omega(y-l) \sin \omega x}{\omega \sin \omega l}, & x < y, \\ \frac{\sin \omega y \sin \omega(x-l)}{\omega \sin \omega l}, & x > y. \end{cases} \quad (6.20)$$

Наконец, получаем решение задачи (6.16):

$$u(x) = \int_0^x \frac{\sin \omega y \sin \omega(x-l)}{\omega \sin \omega l} f(y) dy + \int_x^l \frac{\sin \omega(y-l) \sin \omega x}{\omega \sin \omega l} f(y) dy. \quad (6.21)$$

Отметим, что функция Грина (6.20) также симметрична.

Задача. Найдите решение

$$\begin{cases} u''(x) - \omega^2 u(x) = f(x), & 0 < x < l, \\ u(x) = u'(l) = 0. \end{cases} \quad (6.22)$$

Задача. Найдите решение

$$\begin{cases} u''(x) + \omega^2 u(x) = f(x), & 0 < x < l, \\ u'(x) = u(l) = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Задачи. Построить функции Грина и написать формулы для решений следующих краевых задач:

1. $u''(x) = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad u'(0) = u(0), \quad u'(1) = -u(1).$
2. $u''(x) + u(x) = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad u'(0) = u(0), \quad u'(1) = 3u(1).$
3. $x^2 u''(x) + 2xu'(x) = f(x), \quad 1 < x < 2; \quad u'(1) = 0, \quad u(2) + 5u'(2) = 0.$
4. $(3 + x^2)u''(x) + 2xu'(x) = f(x), \quad 0 < x < 1; \quad u'(0) = u(0), \quad u(1) = 0.$

§7. Нормальная разрешимость краевых задач.

Заметим, что формула (6.21) для решения задачи (6.16) и функция Грина (6.20) теряют смысл при $\omega l = k\pi$, $k \in Z$, поскольку тогда $\sin \omega l = 0$.

Вопрос. Можно ли было это предвидеть, не решая задачу (6.16)?

Ответ. Да. Дело в том, что при $\omega l = k\pi$ задача (6.16) имеет ненулевое решение $u_0(x)$ при $f(x) \equiv 0$: $u_0(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$,

$$\begin{cases} (\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)u_0(x) = 0, & 0 < x < l, \\ u_0(0) = u_0(l) = 0. \end{cases} \quad (7.1)$$

Следовательно, оператор $A \equiv \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 : C_0^2[0, l] \rightarrow C[0, l]$ необратим! Поэтому (левый) обратный оператор G не существует, и его интегральное ядро $G(x, y)$ также не существует.

Отметим, однако, что отсутствие обратного оператора к A не означает, что задача (6.16) не имеет решения ни при какой функции $f(x)$!

Вопрос. При каких условиях на $f(x)$ задача (6.16) имеет решение $u(x)$, и как это решение найти?

Чтобы найти ответ на этот вопрос, сделаем отступление в линейную алгебру. Дело в том, что аналогичный вопрос возникает при решении системы

$$Au = f, \quad (7.2)$$

где A — $n \times n$ матрица, а $f \in \mathbb{R}^n$. Система (7.2) имеет решение $u = A^{-1}f$, если $\det A \neq 0$. Если же $\det A = 0$, то система (7.2) может не иметь решения.

Необходимое и достаточное условие на f , при котором система (7.2) имеет решение, это следующее условие ортогональности (см. [8]):

$$f \perp \text{Ker} A^* \quad (7.3)$$

Здесь $\text{Ker} A^*$ — подпространство в \mathbb{R}^n , состоящее из решений сопряженной однородной системы:

$$h \in \text{Ker} A^* \iff A^*h = 0 \quad (7.4)$$

Таким образом, (7.3) означает, что

$$\langle f, h \rangle = 0, \quad \forall h \in \text{Ker} A^* \quad (7.5)$$

Докажем необходимость условия (7.3), (7.5). Если для данного вектора $f \in \mathbb{R}^n$ существует решение u системы (7.2), то для каждого вектора $h \in \text{Ker}A^*$

$$\langle f, h \rangle = \langle Au, h \rangle = \langle u, A^*h \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0. \quad (7.6)$$

Задача. Докажите достаточность условия (7.3), (7.5) для разрешимости системы (7.2).

В связи с видом условия (7.3) говорят, что система (7.2) является “нормально” разрешимой.

Оказывается, для разрешимости задачи (6.16) необходимо и достаточно условие вида (7.3)! Это мы докажем ниже.

Найдем $\text{Ker}A^*$ для оператора задачи (6.16). Поскольку $A^* = A$ (см. лемму §3 гл.II), то

$$\text{Ker}A^* = \text{Ker}A. \quad (7.7)$$

Это значит, что $\text{Ker}A^*$ совпадает с пространством решений задачи (7.1), т. е.

$$\text{Ker}A^* = \left\{ C \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad C \in \mathbb{R} \right\}. \quad (7.8)$$

Таким образом, условие ортогональности (7.6) принимает вид:

$$\langle f(x), \sin \frac{k\pi x}{l} \rangle = \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0. \quad (7.9)$$

Упражнение. Докажем необходимость условия (7.9) для разрешимости задачи (6.16) при $\omega = \frac{k\pi}{l}$.

Решение. Аналогично (7.6), в силу (II. 3.6) имеем:

$$\begin{aligned} \langle f(x), \sin \frac{k\pi x}{l} \rangle &= \langle (\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2)u(x), \sin \frac{k\pi x}{l} \rangle = \\ &= \langle u(x), (\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2) \sin \frac{k\pi x}{l} \rangle = \langle u(x), 0 \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Упражнение. Докажем достаточность условия (7.9).

Решение. Возьмем $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{l}$, но $\omega \neq \frac{k\pi}{l}$. Тогда задача (6.16) имеет решение (6.21). Оказывается, во-первых, функция (6.21) при условии (7.9) имеет предел при $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{l}$ и, во-вторых, этот предел есть решение задачи (6.16).

Докажем первое утверждение. По формуле (6.21)

$$u(x) = \frac{1}{\omega \sin \omega l} \left[\int_0^x \sin \omega y \sin \omega(x-l) f(y) dy + \int_x^l \sin \omega(y-l) \sin \omega x f(y) dy \right] \quad (7.11)$$

При $\omega = \frac{k\pi}{l}$ подынтегральные выражения в обоих интегралах имеют одинаковый вид: по формулам приведения

$$\begin{cases} \sin \omega y \cdot \sin \omega(x-l) = \sin \omega y \cdot \sin(\omega x - k\pi) = (-1)^k \sin \omega y \cdot \sin \omega x, \\ \sin \omega(y-l) \cdot \sin \omega x = \sin(\omega y - k\pi) \cdot \sin \omega x = (-1)^k \sin \omega y \cdot \sin \omega x. \end{cases} \quad (7.12)$$

Поэтому выражение в квадратных скобках в (7.11) принимает вид

$$(-1)^k \sin \omega x \int_0^l \sin \omega y f(y) dy. \quad (7.13)$$

Но при $\omega = \frac{k\pi}{l}$ интеграл (7.13) равен нулю согласно условию ортогональности (7.9)! Таким образом, при $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{l}$ числитель и знаменатель выражения (7.11) стремятся к 0, и мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$

Задача. Найдите предел выражения (7.11) при $\omega \rightarrow \frac{k\pi}{l}$. (Примените правило Лопиталя.)

Ответ:

$$\begin{aligned} u(x) = \frac{1}{\omega l \sin k\pi} & \left(\int_0^x [y \cos \omega y \cdot \sin \omega(x-l) + \sin \omega y \cdot (x-l) \cos \omega(x-l)] \times \right. \\ & \left. \times f(y) dy + \int_x^l [(y-l) \cos \omega(y-l) \cdot \sin \omega x + \sin \omega(y-l) \cdot x \cos \omega x] f(y) dy \right). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Задача. Докажите, что функция (7.14) является решением задачи (6.16) (при $\omega = \frac{k\pi}{l}$ и при условии (7.9)!).

Вопрос. Решение задачи (6.16) при $\omega = \frac{k\pi}{l}$ определено неоднозначно, т. е. к нему можно прибавить $C \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}$ с любым коэффициентом C . Какое же из этих решений дается формулой (7.14), чем это решение выделяется из всех остальных?

Ответ. Формула (7.14) дает решение задачи (6.16), удовлетворяющее условию

$$\langle u(x), \sin \frac{k\pi x}{l} \rangle = 0.$$

Задача. Найдите условие разрешимости и формулу для решения задачи (6.23) при $\omega = \frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

§8. Соболевские функциональные пространства.

Пусть Ω — некоторая область в \mathbb{R}^n , а $s = 0, 1, 2, \dots$

Определение. Пространство $H_s(\Omega)$ состоит из всех функций $u(x) \in L_2(\Omega)$, для которых

$$\partial_x^\alpha u(x) \in L_2(\Omega), \quad \text{при } |\alpha| \leq s, \quad (8.1)$$

где производные понимаются в смысле обобщенных функций. Норма Соболева $\|u\|_s$ в пространстве $H_s(\Omega)$ определяется так:

$$\|u\|_s^2 \equiv \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial_x^\alpha u(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx \quad (8.2)$$

Замечание. $H_0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$, и очевидно, $C_0^\infty(\Omega) \subset H_s(\Omega)$.

Определение. $H_s^0(\Omega)$ — замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в пространстве $H_s(\Omega)$.

Перечислим важнейшие свойства соболевских пространств.

I. $H_s(\Omega)$ — полное гильбертово пространство. Далее будем предполагать, что Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n (с компактным замыканием) и гладкой границей $\partial\Omega$. Сформулируем важнейшие *теоремы вложения Соболева*

II. $H_s(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ при $s > \frac{n}{2}$.

III. При $s_1 > s_2$ вложение $H_{s_1}(\Omega) \subset H_{s_2}(\Omega)$ является компактным отображением.

Доказательства свойств I–III имеются в [9–12]. Рассмотрим примеры соболевских пространств. Пусть $n = 1$ и $\Omega = (0, l)$, где $l > 0$. Тогда

1. $H_0((0, l)) = L_2(0, l)$, и, раскладывая $u(x) \in L_2(0, l)$ в ряд Фурье $u(x) = \sum_1^\infty u_k \sin \frac{k\pi x}{l}$, имеем по равенству Бесселя

$$\|u\|_0^2 = \frac{l}{2} \sum_1^\infty |u_k|^2 \quad (8.3)$$

2. Пространство $H_1(0, l)$ состоит из функций $u(x) \in L_2(0, l)$, для которых

$$\|u\|_1^2 \equiv \int_0^l u^2(x) dx + \int_0^l |u'(x)|^2 dx < \infty \quad (8.4)$$

3. Пространство $H_1^0((0, l))$ состоит из функций $u(x) \in C[0, l]$, для которых конечна норма (8.4) и, кроме того, $u(0) = u(l) = 0$. (Доказать!).

Задача. Доказать, что аналогично (8.3) для $u \in H_1^0((0, l))$

$$\|u\|_1^2 = \frac{l}{2} \sum_1^\infty |u_k|^2 + \frac{\pi^2}{2l} \sum_1^\infty k^2 |u_k|^2. \quad (8.5)$$

Указание. Сначала доказать (8.5) для $u(x) \in C_0^\infty(0, l)$.

Следствие. Для $u \in H_1^0((0, l))$ норма $\|u\|_1^2$ эквивалентна норме

$$\|u\|_1^2 \equiv \sum_1^\infty k^2 |u_k|_1^2 \quad (8.6)$$

Задача. Доказать, что для $u(x) \in H_1((0, l)) \setminus H_1^0((0, l))$ формула (8.5) неверна.

Задача. Доказать неравенство Фридрихса: для $u(x) \in H_1^0((0, l))$

$$\int_0^l u^2(x) dx \leq C \int_0^l |u'(x)|^2 dx, \quad (8.7)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

Указание. Выразить интегралы в (8.7) через коэффициенты Фурье u_k по системе $\{\sin \frac{k\pi x}{l}\}$.

Задача. Доказать, что ни для какой константы $C > 0$ неравенство (8.7) не может выполняться при всех $u \in H_1((0, l))$.

Упражнение. Доказать, что $H_1^0((0, l)) \subset C[0, l]$, используя конечность нормы (8.5) и разложение $u(x)$ в ряд Фурье.

Упражнение. Доказать компактность вложения $H_1^0(0, l) \subset H_0((0, l))$, используя (8.5) и (8.3).

Задача. Пусть Ω — шар $|x| < 1$ в \mathbb{R}^n . При каких $\alpha \in \mathbb{R}$

$$|x|^\alpha \in H_1(\Omega)? \quad (\sin |x|)^\alpha \in H_1(\Omega)? \quad (\ln |x|)^\alpha \in H_1(\Omega)?$$

§9. Разрешимость смешанной задачи для волнового уравнения в соболевских пространствах.

Рассмотрим задачу (6.1)–(6.3) из главы II и формулу (II.6.10) для ее решения. Предположим, что

$$\varphi(x) \in H_1^0((0, l)) \quad \text{и} \quad \psi(x) \in H_0((0, l)) \equiv L_2(0, l) \quad (9.1)$$

Проверим, что формула (II.6.10) дает решение задачи (II.6.1)–(II.6.3) при условиях (9.1).

Задача 1. Доказать, что уравнение (II.6.1) выполняется в смысле $D'((0, l) \times \mathbb{R})$.

Задача 2. Доказать, что при $\forall t \in \mathbb{R}$

$$u(x, t) \in H_1^0 \equiv H_1^0((0, l)) \quad \text{и} \quad \dot{u}(x, t) \in H^0 \equiv H_0((0, l)) \quad (9.2)$$

Задача 3. Доказать, что отображение $t \mapsto u(x, t)$ непрерывно из \mathbb{R} в $H_1^0((0, l))$, а $t \mapsto \dot{u}(x, t)$ — непрерывно из \mathbb{R} в $H_0((0, l))$, причем

$$u(\cdot, t) \xrightarrow{H_1^0} \varphi(\cdot) \quad \text{и} \quad \dot{u}(\cdot, t) \xrightarrow{H_0} \psi(\cdot) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Задача 4*. Доказать единственность решения задачи (II.6.1)–(II.6.3) в классе функций $u(x, t)$, обладающих свойствами, сформулированными в задачах 1–3.

Обозначим для $\forall t \in \mathbb{R}$ через S_t отображение

$$\varphi, \psi \mapsto (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t))$$

по формуле (II.6.10). Согласно утверждению задачи 2, отображение S_t переводит пространство $E \equiv H_1^0((0, l)) \times H_0((0, l))$ в себя.

Задача 5. Доказать, что для $\forall t \in \mathbb{R}$ отображение $S_t : E \rightarrow E$ непрерывно.

Задача 6. Доказать, что построенные отображения S_t образуют группу: $S_t S_\tau = S_{t+\tau}$, $\forall t, \tau \in \mathbb{R}$.

Задача 7. Доказать для построенного решения (II.6.10) закон сохранения энергии: $H \equiv \int [|\dot{u}(x, t)|^2 + |u'(x, t)|^2] dx = \text{const}$, $t \in \mathbb{R}$.

Замечание. Построенные решения (II.6.10) при предположениях (9.1) это в точности решения с конечной энергией. Именно для обоснования разрешимости задач типа (II.6.1)–(II.6.3) в классе решений с конечной энергией С. Л. Соболев ввел функциональные пространства типа H_s .

ГЛАВА IV. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ И ФУНКЦИЯ ГРИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ.

[3, с.198–202, 394–411, 423–430]; [10, с.255–259]; [14, с. 136–158, 171–175, 185–192, 208–228, 235–243, 301–310]; [16, с.329–364].

§1. Фундаментальные решения оператора Лапласа в \mathbb{R}^n .

Обобщенные функции от нескольких переменных x_1, \dots, x_n и операции над ними определяются аналогично случаю $n = 1$ (см. §2 и 3 гл. III). Например,

$$\langle \delta_{(n)}(x), \varphi(x) \rangle \equiv \varphi(0), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n); \quad (1.1)$$

для каждой обобщенной функции $u(x) \in D'(\mathbb{R}^n)$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_2}, \varphi(x) \right\rangle \equiv -\left\langle u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (1.2)$$

Обозначим

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad (1.3)$$

Обычно Δ_n обозначают просто через Δ .

Упражнение. Найдём фундаментальное решение оператора Δ_3 , т. е. функцию $e(x) \in D'(\mathbb{R}^3)$, для которой

$$\Delta_3 e(x) = \delta_{(3)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.4)$$

Для этого аппроксимируем $\delta_{(3)}$ -функцию ступенчатыми функциями $\delta_\rho(x)$, аналогичными ступенькам Стеклова (III.3.16):

$$\delta_\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Omega_\rho} & \text{при } |x| < \rho, \\ 0 & \text{при } |x| > \rho, \end{cases} \quad (1.5)$$

где $\Omega_\rho = \frac{4}{3}\pi\rho^3$ — объем шара радиуса $\rho > 0$.

Задача. Доказать, что (аналогично (III.3.17))

$$\delta_\rho(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^3)} \delta_{(3)}(x) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0+ . \quad (1.6)$$

Решение уравнения (1.4) найдем как предел при $\rho \rightarrow 0+$ решений e_ρ уравнения

$$\Delta_3 e_\rho(x) = \delta_\rho(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (1.7)$$

Естественно решение этого уравнения искать в виде $e_\rho(x) \equiv E_\rho(r)$, где $r = |x|$. Для этого перейдем в (1.7) к сферическим координатам.

Задача. Доказать, что

$$\Delta_3 E_\rho(r) = \frac{\partial^2 E_\rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E_\rho}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (E_\rho \cdot r). \quad (1.8)$$

Следствие. Из уравнения (1.7) следует, что

$$\frac{1}{r} (E_\rho r)''_{rr} = \delta_\rho(r) \quad \text{при } r > 0, \quad (1.9)$$

где

$$\delta_{(\rho)}(r) \equiv \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_\rho|} & \text{при } 0 < r < \rho, \\ 0 & \text{при } r > \rho, \end{cases}$$

Это уравнение легко решается двукратным интегрированием:

$$E_\rho \cdot r = \begin{cases} \frac{r^3}{6} \frac{1}{\Omega_\rho} + C_1 + C_2 r & \text{при } 0 < r < \rho \\ C_3 + C_4 r & \text{при } r > \rho. \end{cases} \quad (1.10)$$

Остается найти константы C_1, \dots, C_4 .

Учтем, что из (1.9) вытекает непрерывность $r \cdot E_\rho$ и $(r \cdot E_\rho)'$ при $\rho = r$ (это следует из формулы (III.4.1)):

$$\begin{cases} \frac{\rho^3}{6} \frac{1}{\Omega_\rho} + C_1 + C_2 \rho = C_3 + C_4 \rho, \\ \frac{\rho^2}{2} \frac{1}{\Omega_\rho} + C_2 = C_4. \end{cases} \quad (1.11)$$

Константа C_4 произвольна, поскольку очевидно к решению уравнения (1.7) (и (1.4)) можно прибавить любую постоянную. Поэтому положим $C_4 = 0$.

Тогда из (1.11) получаем, что $C_2 = -\frac{\rho^2}{2\Omega_\rho} = -\frac{3}{8\pi\rho}$, и

$$C_3 = \frac{1}{8\pi} + C_1 - \frac{3}{8\pi} = C_1 - \frac{1}{4\pi}. \quad (1.12)$$

Выберем C_1 так, чтобы $E_\rho(0) < \infty$, т. е. $C_1 = 0$. Тогда $C_3 = -\frac{1}{4\pi}$ и по формулам (1.11) получаем

$$E_\rho(r) = \begin{cases} \frac{r^2}{8\rho^3} - \frac{3}{8\rho} & \text{при } 0 < r < \rho, \\ -\frac{1}{4\pi r} & \text{при } r > \rho. \end{cases} \quad (1.13)$$

Замечание. Условие $E_\rho(0) < \infty$ привело к тому, что $e_\rho(x) \equiv E_\rho(|x|)$ — бесконечно дифференцируемая функция в шаре $|x| < \rho$:

$$e_\rho(x) = \begin{cases} \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{8\rho^3} - \frac{3}{8\rho} & \text{при } |x| < \rho, \\ -\frac{1}{4\pi|x|} & \text{при } |x| > \rho. \end{cases} \quad (1.14)$$

Поэтому она удовлетворяет уравнению (1.7) не только при $x \in \mathbb{R}^3 \setminus 0$, что вытекает из (1.9), но и в окрестности точки $x = 0$, а стало быть, и при всех $x \in \mathbb{R}^3$.

Задача. Доказать, что в смысле (слабой) сходимости в $D'(\mathbb{R}^3)$

$$e_\rho(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^3)} -\frac{1}{4\pi|x|} \quad \text{при } \rho \rightarrow 0+, \quad (1.15)$$

— см. рис. 81.

Следствие. Из (1.15) вытекает, что

$$\Delta\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right) = \delta_{(3)}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1.16)$$

Действительно, из (1.15) в силу непрерывности оператора Δ в $D'(\mathbb{R}^3)$ (см. лемму 3.1)

$$\Delta e_\rho(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^3)} \Delta\left(-\frac{1}{4\pi|x|}\right) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0+. \quad (1.17)$$

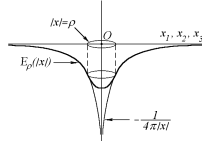
Но с другой стороны, из (1.7) и (1.6) мы получаем также, что

$$\Delta e_\rho(x) = \delta_\rho(x) \xrightarrow{D'(\mathbb{R}^3)} \delta_{(3)}(x) \quad \text{при } \rho \rightarrow 0+. \quad (1.18)$$

Из (1.17) и (1.18) вытекает (1.16).

Итак, для Δ_3 фундаментальным решением является т. н. “кулоновский” (или “ньютоновский”) потенциал

$$e(x) = \frac{1}{4\pi|x|}. \quad (1.19)$$



Ответ:

$$e(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.20)$$

Задача. Доказать, что если в (1.10) $C_1 \neq 0$, то функция $E_\rho(|x|)$ не является решением уравнения (1.7).

Указание. Использовать (1.16).

Задача. Найти фундаментальные решения для оператора Δ_2 .

Задача. Найти фундаментальные решения для операторов Δ_n , $n > 3$; для $\Delta_3 \pm k^2$, где $k > 0$.

§2. Потенциалы и их свойства.

1. Объемные потенциалы.

Зная фундаментальные решения оператора Лапласа (1.19) и (1.20), можно находить решения неоднородного уравнения Лапласа в \mathbb{R}^n при $n = 2$ и $n = 3$. Например, решением уравнения

$$\Delta_2 u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \quad (2.1)$$

является функция

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x - y| f(y) dy, \quad (2.2)$$

если $f(x) \in C(\mathbb{R}^2)$, $f(x) = 0$ при $|x| > \text{const}$. Аналогично, решением уравнения

$$\Delta_3 u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

является функция

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x - y|} f(y) dy. \quad (2.4)$$

Замечание 2.1. Интегралы вида (2.4) называют *кулоновскими* (или *ньютоновскими*) *объемными* потенциалами. Дело в том, что в электростатике интеграл (2.4) с точностью до множителя (зависящего от выбора единиц) и знака является потенциалом электрического поля объемного распределения зарядов с плотностью $f(x)$. Уравнение (2.3) для электростатического потенциала называется уравнением Пуассона. Оно принимает вид (2.1) в том частном случае, когда плотность зарядов $f(x)$ не зависит от одной координаты x_3 . Например, уравнению (2.1) удовлетворяет потенциал равномерно заряженного прямого бесконечного провода.

Из сказанного следует, что фундаментальное решение $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x|}$ из (1.19) есть потенциал точечного заряда $+1$ в точке 0 , поскольку для него $f(x) = \delta(x)$.

Упражнение. Вычислим потенциал равномерного распределения зарядов с плотностью ρ в шаровом слое $R_1 < |x| < R_2$.

Решение. Искомый потенциал можно преобразовать к виду

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{R_1 < |y| < R_2} \frac{\rho dy}{|x-y|} = \int_{R_1}^{R_2} u_r(x) dr. \quad (2.5)$$

Здесь $u_r(x)$ — потенциал вида (2.12), находится по формуле (2.14) (см. ниже):

$$u_r(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|y|=r} \frac{\rho dS(y)}{|x-y|} = \begin{cases} -\rho r, & |x| < r, \\ -\frac{\rho r^2}{|x|}, & |x| > r. \end{cases} \quad (2.6)$$

Рассмотрим три случая:

$$1) |x| < R_1 \implies u(x) = \int_{R_1}^{R_2} (-\rho r) dr = -\rho \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{R_1^2}{2} \right); \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} 2) R_1 < |x| < R_2 \implies u(x) &= \int_{R_1}^{|x|} \left(-\frac{\rho r^2}{|x|} \right) dr + \int_{|x|}^{R_2} (-\rho r) dr = \\ &= -\frac{\rho}{|x|} \left(\frac{|x|^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right) - \rho \left(\frac{R_2^2}{2} - \frac{|x|^2}{2} \right); \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$3) |x| > R_2 \implies u(x) = \int_{R_1}^{R_2} \left(-\frac{\rho r^2}{|x|} \right) dr = -\frac{\rho}{|x|} \left(\frac{R_2^3}{3} - \frac{R_1^3}{3} \right). \quad (2.9)$$

График потенциала (2.5) изображен на рис. 82.

Замечание 2.2. При $|x| > R_2$ потенциал (2.9) равен кулоновскому потенциалу точечного заряда величины, равной заряду всего шарового слоя:

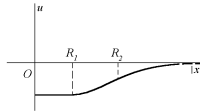


Рис. 82

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\frac{4}{3}\pi R_2^3 - \frac{4}{3}\pi R_1^3}{|x|} \quad (2.10)$$

2. Поверхностные потенциалы.

А. Потенциал *простого слоя* — это потенциал поверхностного распределения зарядов:

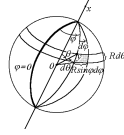
$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{1}{|x-y|} \sigma(y) dS(y). \quad (2.11)$$

Здесь S — гладкая компактная поверхность в \mathbb{R}^3 , $\sigma(y)$ — поверхностная плотность зарядов.

Упражнение. Вычислим потенциал равномерного распределения зарядов на сфере $|x| = R$ с плотностью σ .

Решение:

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{|y|=R} \frac{\sigma dS}{|x-y|} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sigma R^2 \sin \Theta d\Theta d\varphi}{\sqrt{R^2 + |x|^2 - 2R|x| \cos \Theta}}. \quad (2.12)$$



Здесь Θ, φ — сферические координаты точки y , отсчитываемые от вектора x : φ — долгота, Θ — широта. По теореме косинусов

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cdot \cos \Theta = \\ &= |x|^2 + R^2 - 2|x|R \cos \Theta. \end{aligned}$$

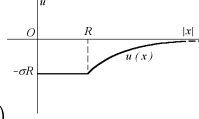
Рис. 83

Интеграл (2.12) легко вычисляется:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{\sigma R^2}{4\pi} 2\pi \int_0^\pi \frac{-d \cos \Theta}{\sqrt{R^2 + |x|^2 - 2R|x| \cos \Theta}} = \\ &= -\frac{\sigma R^2}{2} \int_1^{-1} \frac{-dt}{\sqrt{R^2 + |x|^2 - 2R|x|t}} = \frac{\sigma R^2}{2} 2 \left. \frac{\sqrt{R^2 + |x|^2 - 2R|x|t}}{-2R|x|} \right|_1^{-1} = \\ &= -\frac{\sigma R}{2|x|} (\sqrt{R^2 + |x|^2 + 2R|x|} - \sqrt{R^2 + |x|^2 - 2R|x|}) = \\ &= -\frac{\sigma R}{2|x|} (|R + |x|| - |R - |x||) = \begin{cases} -\frac{\sigma R}{2|x|} ((R + |x|) - (R - |x|)), & |x| \leq R, \\ -\frac{\sigma R}{2|x|} ((R + |x|) + R - |x|), & |x| > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Ответ (см. график на рис. 84):

$$u(x) = \begin{cases} -\sigma R, & |x| \leq R, \\ -\frac{\sigma R^2}{|x|}, & |x| > R. \end{cases} \quad (2.14)$$



Отметим, что при $|x| > R$ потенциал (2.14) совпадает с кулоновским потенциалом u_Q точечного заряда величины $Q = 4\pi R^2\sigma$, равной заряду сферы:

Рис. 84

$$u_Q(x) = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q}{|x|} = -\frac{1}{4\pi} \frac{4\pi R^2\sigma}{2|x|} = -\frac{\sigma R}{2|x|}. \quad (2.15)$$

Замечание 2.3. Потенциал простого слоя (2.14) непрерывен на сфере $|x| = R$, а его производная по нормали разрывна, причем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{|x|=R+0} - \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{|x|=R-0} = \frac{\sigma R^2}{|x|^2} \Big|_{|x|=R} = \sigma. \quad (2.16)$$

Кроме того, из (2.14) легко видеть, что

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \neq R. \quad (2.17)$$

Оказывается, что эти свойства поверхностного потенциала являются общими для интегралов вида (2.11).

Свойства потенциала *простого* слоя:

- 1) если $\sigma(y)$ — непрерывная функция, то и $u(x)$ — непрерывная функция при всех $x \in \mathbb{R}^3$, в том числе при $x \in S$;
- 2) если $\sigma(y)$ непрерывно дифференцируема, то (n — направление нормали к S в точке $x \in S$)

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x + 0 \cdot n) - \frac{\partial u}{\partial n}(x - 0 \cdot n) = \sigma(x); \quad (2.18)$$

- 3) при $x \notin S$ потенциал — гармоническая функция:

$$\Delta_3 u(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus S \quad (2.19)$$

Б. Потенциал *двойного* слоя — это потенциал поверхностного распределения *диполей*. Сначала вычислим потенциал одного диполя. Диполем в электростатике называется пара точечных зарядов (di-pole) величины $+\frac{p}{\varepsilon}$ и $-\frac{p}{\varepsilon}$ на “бесконечно малом” расстоянии ε друг от друга.

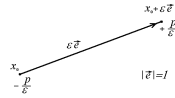


Рис. 85

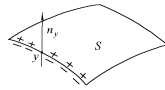
Величина p (вектор $p\vec{e}$, см. рис. 85) называется *моментом диполя*. Потенциал диполя равен

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{-\frac{p}{\varepsilon}}{|x-x_0|} + \frac{\frac{p}{\varepsilon}}{|x-x_0-\varepsilon\vec{e}|} \right) \right) = \\ &= -\frac{p}{4\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{|x-x_0-\varepsilon\vec{e}|} - \frac{1}{|x-x_0|} \right) = \\ &= -\frac{p}{4\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{|x-x_0-\varepsilon\vec{e}|} = -\frac{p}{4\pi} \frac{1}{|x-x_0|^2} \cos(x-\widehat{x_0}, \vec{e}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Итак,

$$u(x) = -\frac{p}{4\pi} \frac{1}{|x-x_0|^2} \cos(x-\widehat{x_0}, \vec{e}). \quad (2.21)$$

Знак выражения (2.20) устанавливается рассмотрением случая, когда направления векторов $x-x_0$ и \vec{e} совпадают.



Теперь найдем потенциал двойного слоя на поверхности S в \mathbb{R}^3 с плотностью диполей $p(y)$ и с моментами, направленными по нормали n_y к поверхности в каждой точке $y \in S$:

Рис. 86

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{p(y) \cos(x-\widehat{y}, n_y) dS(y)}{|x-y|^2}. \quad (2.22)$$

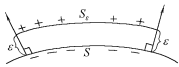


Рис. 87

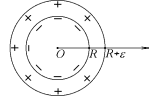
Замечание 2.4. Потенциал (2.22) можно представить как производную по ε при $\varepsilon = 0$ потенциала простого слоя на поверхности S_ε с плотностью $p(x) \frac{dS(x)}{dS_\varepsilon(x)}$. Здесь S_ε — поверхность S , “сдвинутая” на ε вдоль поля нормалей (см. рис. 87).

Упражнение. Вычислим потенциал двойного слоя на сфере с постоянной плотностью p .

Решение. Рассмотрим потенциал простого слоя на сферах радиусов $R+\varepsilon$ и R с плотностью $\frac{p\varepsilon}{\varepsilon}$ и $-\frac{p}{\varepsilon}$ соответственно (рис. 88).

Плотность p_ε найдем из того соображения, что суммарный заряд сфер равен нулю:

$$\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon} \cdot 4\pi(R + \varepsilon)^2 - \frac{p}{\varepsilon} 4\pi R^2 = 0, \quad (2.23)$$



поскольку в каждом диполе сумма зарядов равна нулю!

Отсюда

$$p_\varepsilon = p \frac{R^2}{(R + \varepsilon)^2}. \quad (2.24)$$

Рис. 88

Пользуясь формулой (2.14), получаем искомый потенциал двойного слоя:

$$u(x) \approx \begin{cases} -\frac{p_\varepsilon}{\varepsilon}(R + \varepsilon) + \frac{p}{\varepsilon}R, & |x| < R, \\ -\frac{p_\varepsilon(R + \varepsilon)^2}{\varepsilon|x|} + \frac{pR^2}{\varepsilon|x|}, & |x| > R + \varepsilon. \end{cases} \quad (2.25)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем точную формулу

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (R + \varepsilon)p_\varepsilon, & |x| < R, \\ -\frac{1}{|x|} \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} p_\varepsilon(R + \varepsilon)^2, & |x| > R. \end{cases} \quad (2.26)$$

Ответ.

$$u(x) = \begin{cases} p, & |x| < R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases} \quad (2.27)$$

Свойства потенциала двойного слоя:

1) двойной потенциал вида (2.22) — разрывная функция в точках поверхности S :

$$u(x + 0 \cdot n_x) - u(x - 0 \cdot n_x) = -p(x), \quad x \in S \quad (2.28)$$

(если функция $u(x)$ дифференцируема в точке x);

2) вне поверхности S потенциал $u(x)$ — гармоническая функция:

$$\Delta_3 u(x) = 0, \quad \text{при } x \in \mathbb{R}^3 \setminus S. \quad (2.29)$$

Пример. Потенциал (2.27) подтверждает (2.28), (2.29).

§3. Вычисление потенциалов при помощи формулы Остроградского-Гаусса.

Поскольку $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$, то уравнение Пуассона (2.3) можно записать в виде

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u(x) = f(x). \quad (3.1)$$

Интегрируя это равенство по произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, получаем по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int_{\partial\Omega} \text{grad } u(x) \cdot n_x dS(x) = \int_{\Omega} \text{div grad } u(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx. \quad (3.2)$$

В электростатике $\text{grad } u(x) = E(x)$ (с точностью до знака) есть вектор напряженности электрического поля в точке x , а $Q(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$ — заряд области Ω . Поэтому (3.2) можно записать в виде

$$\int_{\partial\Omega} E(x) \cdot n_x dS(x) = Q(\Omega). \quad (3.3)$$

Это тождество верно для каждой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Вычислим потенциал (2.12) методом Остроградского-Гаусса. Плотность зарядов в (2.12) сферически симметрична, поэтому потенциал $u(x)$ также обладает этим свойством. Следовательно,

$$u(x) = u_1(|x|). \quad (3.4)$$

Поэтому поле $E(x) = \text{grad } u(x)$ — радиальное:

$$E(x) = \frac{x}{|x|} u_1'(|x|). \quad (3.5)$$

Применяя к этому полю тождество (3.3) для шара $\{|x| < r\} = \Omega$, получаем:

$$|E(x)| \cdot 4\pi|x|^2 = \begin{cases} 0, & |x| < R, \\ 4\pi R^2\sigma, & |x| > R. \end{cases} \quad (3.6)$$

Поскольку $|E(x)| = |u_1'(|x|)|$ согласно (3.5), то из (3.6) получаем

$$u_1'(r) \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} 0, & r < R, \\ 4\pi R^2\sigma, & r > R. \end{cases} \quad (3.7)$$

Отсюда

$$u_1'(r) = \begin{cases} 0, & r < R, \\ \frac{R^2\sigma}{r^2}, & r > R. \end{cases} \quad (3.8)$$

Интегрируя, получаем

$$u_1(r) = \begin{cases} C_1, & r < R, \\ -\frac{R^2\sigma}{r} + C_2, & r > R. \end{cases} \quad (3.9)$$

Задача. Получите из (3.9) формулу (2.14).

Указание. Константы C_1 и C_2 определяются из условия непрерывности при $r = R$ и равенства

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad (3.10)$$

которое очевидно вытекает из (2.12).

Задача. При помощи метода Остроградского-Гаусса вычислите потенциал (2.5).

§4. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в трехмерных областях. Построение функций Грина методом отражений.

Задача Дирихле с нулевыми условиями на границе решается методом нечетного отражения, а задача Неймана — методом четного отражения. Это аналогично ситуации для волнового уравнения Даламбера (см. гл. I).

1. Решение задачи Дирихле в полупространстве $\mathbb{R}_+^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 > 0\}$

$$\begin{cases} \Delta_3 u(x) = f(x_1, x_2, x_3), & x_3 > 0, \\ u(x_1, x_2, 0) = 0, & -\infty < x_1, x_2 < +\infty; \quad u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

Здесь $f(x)$ — заданная функция в \mathbb{R}_+^3 , $f(x) \in C(\bar{\mathbb{R}}_+^3)$, $f(x) \equiv 0$ при $|x| > \text{const}$.

Найдем функцию Грина $G(x, y)$ для задачи (4.1). По определению (ср. (III.6.2)), G есть решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y), & x_3 > 0; \\ G((x_1, x_2, 0), y) = 0; & G(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.2)$$

гладкое при $x \neq y$.

Здесь y — произвольная фиксированная точка из \mathbb{R}_+^3 . Обозначим через $\bar{y} = (y_1, y_2, -y_3)$ точку, симметричную y относительно границы $x_3 = 0$ полупространства \mathbb{R}_+^3 :

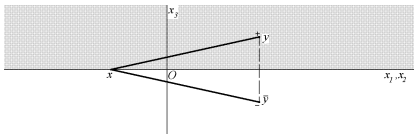


Рис. 89

Тогда решением задачи (4.2) является функция

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \bar{y}|}. \quad (4.3)$$

Согласно (1.16), $\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) - \delta(x - \bar{y})$. Отсюда вытекает первое уравнение (4.2), поскольку

$$\delta(x - \bar{y}) = 0 \quad \text{при} \quad x_3 > 0. \quad (4.4)$$

Действительно, $\delta(x - \bar{y})$ — распределение, сосредоточенное в точке \bar{y} нижнего полупространства!

Проверим краевое условие в (4.2): если $x_3 = 0$, то расстояния $|x - y|$ и $|x - \bar{y}|$ равны, как видно из рис. 89. Поэтому из (4.3) видно, что $G(x, y) = 0$. Наконец, очевидно, $G(x, y) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$.

Решение (обобщенное) краевой задачи (4.1) дается интегралом

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^3} G(x, y) f(y) dy = -\frac{1}{4\pi} \int_{y_3 > 0} \left(\frac{1}{|x - y|} - \frac{1}{|x - \bar{y}|} \right) f(y) dy. \quad (4.5)$$

Действительно, формально

$$\Delta_x u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^3} \Delta_x G(x, y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}_+^3} \delta(x - y) f(y) dy = f(x). \quad (4.6)$$

Краевое условие проверяется просто:

$$u \Big|_{x_3=0} = \int_{\mathbb{R}_+^3} G(x, y) \Big|_{x_3=0} f(y) dy = 0 \quad \text{и} \quad u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \quad (4.7)$$

2. Электростатическая интерпретация задач (4.1), (4.2). Метод отраженных зарядов.

В электростатике решение $u(x)$ краевой задачи (4.1) с точностью до знака и множителя, зависящего от выбора единиц, есть потенциал электростатического поля зарядов с плотностью $f(x)$ в верхнем полупространстве \mathbb{R}_+^3 , расположенных над проводящей поверхностью $x_3 = 0$ (например, земной поверхностью или плоской крышей, сделанной из жести). Электростатический смысл функции Грина $G(x, y)$ из (4.2) — это потенциал поля точечного заряда $+1$, находящегося в точке y над проводящей плоскостью $x_3 = 0$. Поле точечного источника перераспределяет заряды в плоскости $x_3 = 0$:

отрицательные притягивает, а положительные отталкивает (и они уходят в бесконечность):

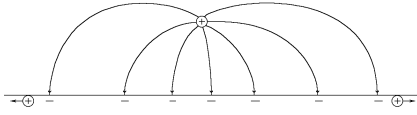


Рис. 90

При этом, как известно, силовые (интегральные) кривые поля $E(x) = \text{grad } u(x)$ (см. рис. 90) ортогональны к поверхности проводника (Земли), так как иначе свободные заряды в проводнике пришли бы в движение вдоль поверхности. Отсюда следует, что поверхность проводника является поверхностью уровня потенциала $u(x)$ — эквипотенциальной поверхностью, как говорят в электростатике.

Исходя из этого свойства силовых линий поля $E(x)$, его и можно найти. Для этого нужно вспомнить рисунок силовых линий поля двух точечных разноименных зарядов одинаковой величины (см. рис. 91). Из симметрии силовых линий относительно плоскости симметрии зарядов следует, что силовые линии перпендикулярны этой плоскости. Поэтому поле над плоскостью симметрии совпадает с искомым. Отсюда и получается формула (4.3).

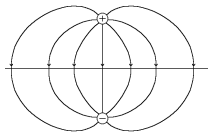
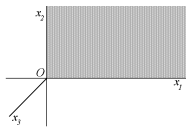


Рис. 91

3. Задача Дирихле в четверти пространства.



Четверть пространства \mathbb{R}_{++}^3 — это двугранный угол величиной 90° (см. рис. 92). Пусть $f(x) \in C(\mathbb{R}_{++}^3)$, $f(x) \equiv 0$ при $x > \text{const}$. Рассмотрим задачу Дирихле в \mathbb{R}_{++}^3

Рис. 92

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3), & x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 \in \mathbb{R}; \\ u \Big|_{x_1=0} = 0, \quad u \Big|_{x_2=0} = 0; & u(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.8)$$

Функция Грина $G(x, y)$ задачи (4.8) по определению, есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y), & x \in \mathbb{R}_{++}^3; \\ G \Big|_{x_1=0} = 0, \quad G \Big|_{x_2=0} = 0; & G(x, y) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.9)$$

Здесь параметр $y \in \mathbb{R}_{++}^3$.

Такая функция Грина также находится методом (нечетных) отражений (Рис. 93).

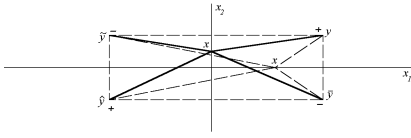


Рис. 93

Пусть $\bar{y} = (y_1, -y_2, y_3)$ — отражение точки y в плоскости $x_2 = 0$, $\tilde{y} = (-y_1, y_2, y_3)$ — в плоскости $x_1 = 0$, а $\hat{y} = (-y_1, -y_2, y_3)$ — композиция этих отражений. Поместим в точки y и \hat{y} заряды $+1$, а в \bar{y} и в \tilde{y} — заряды -1 . Тогда их электростатическое поле имеет потенциал

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \bar{y}|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \tilde{y}|} + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - \hat{y}|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|} \quad (4.10)$$

Проверим, что эта функция действительно удовлетворяет уравнениям (4.9). Во-первых, при $x \in \mathbb{R}_{++}^3$

$$\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) - \delta(x - \bar{y}) - \delta(x - \tilde{y}) + \delta(x - \hat{y}) = \delta(x - y), \quad (4.11)$$

поскольку $\delta(x - \bar{y})$, $\delta(x - \tilde{y})$ и $\delta(x - \hat{y})$ равны нулю при $x \in \mathbb{R}_{++}^3$! Поэтому первое уравнение в (4.9) выполняется.

Далее, проверим краевые условия из (4.9): а) при $x_1 = 0$ точка x равноудалена от y и \tilde{y} , а также от \bar{y} и \hat{y} (см. рис. 93). Поэтому в правой части (4.10) первое слагаемое взаимно уничтожается с третьим, а второе — с четвертым; б) при $x_2 = 0$ точка x равноудалена от y и \bar{y} ,

а также от \tilde{y} и \hat{y} (см. рис. 93). Поэтому в правой части (4.10) первое слагаемое взаимно уничтожается со вторым, а третье — с четвертым. Очевидно также, что $G(x, y) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Таким образом, краевые условия в (4.9) также выполняются.

Следовательно, $G(x, y)$ из (4.10) является функцией Грина задачи Дирихле (4.8). Поэтому решение последней можно записать в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}_{++}^3} G(x, y) f(y) dy = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}_{++}^3} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x-\bar{y}|} - \frac{1}{|x-\tilde{y}|} + \frac{1}{|x-\hat{y}|} \right) f(y) dy. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Задача. Найдите функцию Грина и напишите формулу для решения краевой задачи в четверти пространства (при тех же условиях на $f(x)$, что в (4.8)):

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad -\infty < x_3 < \infty; \\ u \Big|_{x_1=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = 0; & u(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (4.13)$$

Указание. По переменной x_1 следует применить метод нечетного отражения, а по x_2 — четного отражения.

Задача. Найдите функцию Грина и напишите формулу для решения задачи Дирихле в следующих областях:

- 1) в двугранном угле раствора $\alpha = \frac{\pi}{n}$, $n = 3, 4, 5, \dots$ (для $n = 1, 2$ это сделано выше);
- 2) в октанте трехмерного пространства: $x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0$;
- 3) в слое: $0 < x_3 < a, \quad -\infty < x_1, \quad x_2 < +\infty$ (исследуйте сходимость полученного ряда);
- 4) в “половине” слоя: $0 < x_3 < a, \quad -\infty < x_1 < \infty, \quad x_2 > 0$;
- 5) в “четверти” слоя: $0 < x_3 < a, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0$.

Замечание 4.1. В предыдущей задаче можно вместо условия Дирихле $u|_{\Gamma} = 0$ на различных участках границы рассмотреть условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0$, как в задаче (4.13). Для решения таких задач нужно применять метод четного отражения в этих участках границ.

Задача. Найти функцию Грина задачи Дирихле в следующих областях:

- 1) в шаре $|x| < R$. **Указание:** искать ее в виде суммы фундаментального решения $-\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}$ и потенциала “отраженного” заряда $\frac{q}{4\pi} \frac{1}{|x-y^*|}$ некоторой величины $q > 0$, находящегося в точке y^* , “симметричной” точке y относительно сферы:

$$y^* = \frac{R^2}{|y|^2} y$$

- 2) в полшаре $|x| < R$, $x_3 > 0$. Указание: применить метод нечетного отражения в плоскости x_3 и свести задачу к шару.
 3) в четверти шара $|x| < R$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

§5. Решение краевых задач методом функции Грина в двумерных областях. Применение конформных преобразований.

1. Задача Дирихле в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$.

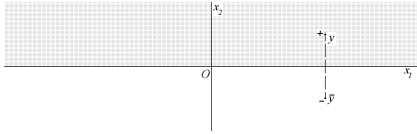


Рис. 94

$$\begin{cases} \Delta u(x_1, x_2) = f(x_1, x_2), & x_2 > 0, \quad -\infty < x_1 < \infty; \\ u \Big|_{x_2=0} = 0, & u(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\text{где } f(x) \in C(\overline{\mathbb{R}_+^2}), \quad f(x) = 0 \text{ при } |x| > \text{const}. \quad (5.1')$$

Функция Грина $G(x, y)$ этой задачи удовлетворяет уравнениям

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y), & x \in \mathbb{R}_+^2; \\ G \Big|_{x_2=0} = 0, & G(x, y) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $y \in \mathbb{R}_+^2$. Находится эта функция методом нечетного отражения, подобно (4.3), исходя из фундаментального решения (1.20) оператора Лапласа на плоскости:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} (\ln |x - y| - \ln |x - \bar{y}|), \quad \text{где } \bar{y} = (y_1, -y_2). \quad (5.3)$$

Поэтому решение задачи (5.1) имеет вид

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}_+^2} G(x, y) f(y) dy = \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{|x - y|}{|x - \bar{y}|} f(y) dy. \quad (5.4)$$

2. Функция Грина для двумерных областей.

В отличие от трехмерных краевых задач функцию Грина для многих двумерных односвязных областей можно найти при помощи конформных отображений. Это связано тем, что функция Грина $G(x, y)$ является гармонической по x при $x \neq y$, а конформные отображения переводят гармонические функции снова в гармонические.

Проиллюстрируем связь функций Грина с конформными отображениями на частном примере краевой задачи (5.1). Для этого преобразуем формулу (5.3) к виду

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{|x - y|}{|x - \bar{y}|} \right) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{x - y}{x - \bar{y}} \right|. \quad (5.5)$$

Замечание 5.1. Последнее равенство в (5.5) справедливо при условии, что $\frac{x-y}{x-\bar{y}}$ понимается как деление комплексных чисел:

$$\frac{x - y}{x - \bar{y}} = \frac{x_1 + ix_2 - y_1 - iy_2}{x_1 + ix_2 - y_1 + iy_2}. \quad (5.6)$$

При этом $\bar{y} = y_1 - iy_2$ оказывается комплексно-сопряженным числом к y . Отметим, что

1) при каждом фиксированном $y \in \mathbb{R}_+^2$ отображение

$$x \mapsto z = \Phi_y(x) \equiv \frac{x - y}{x - \bar{y}} \quad (5.7)$$

переводит конформно верхнюю полуплоскость $x_2 > 0$ в единичный круг $|z| < 1$;

2) точка y при отображении (5.7) переходит в 0:

$$y \mapsto \Phi_y(y) = 0. \quad (5.8)$$

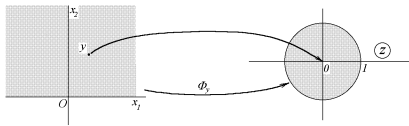


Рис. 95

Теперь рассмотрим общий случай задачи Дирихле в плоской односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, содержащей не менее двух точек:

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega; \\ u \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 & |u(x)| \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.9)$$

где $f(x) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x) = 0 \quad |x| > \text{const}(y)$.

Функция Грина этой задачи по определению удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, y) = \delta(x - y), & x \in \Omega; \\ u \Big|_{x \in \partial\Omega} = 0 & |u(x)| \rightarrow \infty, \quad x \in \Omega. \end{cases} \quad (5.10)$$

Здесь y — параметр, $y \in \Omega$. Известно из ТФКП (теорема Римана, см. [16]), что для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega$, содержащей не менее двух точек, существует конформное отображение Ω на единичный круг. При этом любая наперед заданная точка y может быть переведена в нуль. Пусть $\Phi_y(x)$ такое отображение (см. рис. 96).

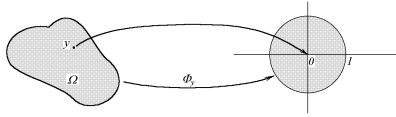


Рис. 96

Оказывается [8], функция Грина (5.10) имеет вид (5.5):

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln |\Phi_y(x)|. \quad (5.11)$$

Отсюда получаем решение задачи Дирихле (5.9):

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln |\Phi_y(x)| f(y) dy. \quad (5.12)$$

Задача. Проверьте, что функция (5.11) является решением задачи (5.10).
Указания:

а) $\ln |\Phi_y(x)| = \operatorname{Re} \ln \Phi_y(x)$ — гармоническая функция при $\Phi_y(x) \neq 0$, т. е. при $x \neq y$;

б) $\ln |\Phi_y(x)|$ при $x = y$ допускает разложение

$$\ln |\Phi_y(x)| = \ln |x - y| + O(1), \quad x \rightarrow y; \quad (5.13)$$

в) примените теорему об устранимой особенности для доказательства того, что $O(1)$ в (5.13) — гармоническая при $x = y$ функция;

г) краевое условие $G \Big|_{x \in \partial \Omega} = 0$ очевидно, поскольку

$$|\Phi_y(x)| \Big|_{x \in \partial \Omega} = 1$$

Упражнение. Найдём функцию Грина и формулу для общего решения задачи Дирихле в полосе Ω (для $f(x) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x) = 0$ при $|x| > \operatorname{const}$):

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & 0 < x_2 < a, \quad -\infty < x_1 < \infty; \\ u \Big|_{x_2=0, a} = 0, & u(x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (5.14)$$

Решение. Конформно отобразим полосу на круг (см. рис. 97).

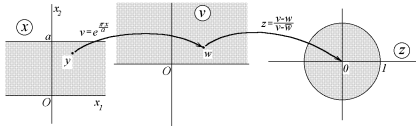


Рис. 97

При этом точку y переведем в нуль: $w = e^{\frac{\pi y}{a}}$,

$$z = \frac{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{\frac{\pi y}{a}}}{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{\frac{\pi y}{a}}} \quad (5.15)$$

Теперь по формуле (5.11)

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{\frac{\pi y}{a}}}{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{\frac{\pi y}{a}}} \right| \quad (5.16)$$

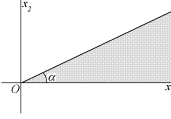
и по формуле (5.12) решение задачи (5.14) имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^a \ln \left| \frac{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{\frac{\pi y}{a}}}{e^{\frac{\pi x}{a}} - e^{\frac{\pi y}{a}}} \right| f(y) dy_2 dy_1. \quad (5.17)$$

Отметим, что

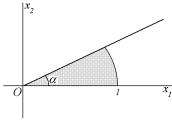
$$e^{\frac{\pi z}{a}} = e^{\frac{\pi}{a}(x_1 + ix_2)} = e^{\frac{\pi x_1}{a}} \left(\cos \frac{\pi}{a} x_2 + i \sin \frac{\pi}{a} x_2 \right). \quad (5.18)$$

Задача. Найдите функцию Грина и напишите формулу для решения задачи Дирихле в следующих областях:



- 1) угол величины α (см. рис. 98);
- 2) круг: $|x| < 1$ (получается классическая формула Пуассона);

Рис. 98



- 3) полукруг: $|x| < 1, x_2 > 0$ (примените метод нечетного отражения по x_2 для сведения к задаче 2);
- 4) сектор круга: $|x| < 1, 0 < \arg x < \alpha$ (см. рис. 99).

Рис. 99

Замечание 5.2. Зная функцию Грина задачи Дирихле в области Ω , можно, оказывается, решать однородные уравнения $\Delta u(x) = 0$ в Ω при неоднородных краевых условиях $u|_{\partial\Omega} = f(x)$: если $\partial\Omega$ класса C^2 и $f \in C^2(\partial\Omega)$, то (подробности см. в [3, с.429]; [10, с.48]):

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} f(y) dy,$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ — оператор дифференцирования вдоль внешней нормали к границе в точке $y \in \partial\Omega$. Это справедливо для области Ω любой размерности: $\Omega \subset \mathbb{R}^2, \Omega \subset \mathbb{R}^3$ и т. д.

Упражнение. Найдём формулу для решения задачи Дирихле в полуплоскости

$$\Delta u(x_1, x_2) = 0, \quad x_2 > 0; \quad u(x_1, 0) = f(x_1); \quad u(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0,$$

где $f(x_1) \in C(\mathbb{R}), f(x_1) = 0$ при $|x_1| > \text{const}$.

Решение. Функция Грина для полуплоскости имеет вид (5.3):

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} - \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2} \right). \end{aligned}$$

Учитывая, что внешняя нормаль n_y к полуплоскости $x_2 > 0$ есть вектор $(0, -1)$, получаем:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \right) \Big|_{y_2=0} = - \left(\frac{\partial}{\partial y_2} G(x, y) \right) \Big|_{y_2=0} = \\ & = \frac{1}{4\pi} \frac{2x_2}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2} + \frac{1}{4\pi} \frac{2x_2}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2} = \frac{1}{\pi} \frac{x_2}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}. \end{aligned}$$

Ответ.

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1) dy_1}{(x_1 - y_1)^2 + x_2^2}.$$

§6. Обобщенные решения гиперболических уравнений.

Напомним (см. §2 гл. I), что общее решение однородного уравнения Даламбера

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

имеет вид (II.2.3):

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at). \quad (6.2)$$

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы, то $u(x, t)$ из (6.2) также обладает этим свойством. Если же $f(x)$ или $g(x)$ разрывные функции, то $u(x, t)$ также будет разрывной. Покажем, что в этом случае $u(x, t)$ из (6.2) также будет решением уравнения (6.1), если только производные в обеих частях (6.1) понимать в смысле обобщенных функций (см. замечание 2.1 гл. I). Это значит, что

$$\left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi(x, t) \right\rangle = a^2 \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi(x, t) \right\rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (6.3)$$

Чтобы доказать тождество (6.3), напомним, что по определению обобщенных производных

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\rangle, \\ \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\rangle = \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle, \end{cases} \quad (6.4)$$

Поэтому тождество (6.3) эквивалентно

$$\left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right\rangle = a^2 \left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle, \quad (6.5)$$

или

$$\left\langle u, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle = 0. \quad (6.6)$$

В координатах $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ тождество (6.6) запишется в виде (см. (I. 2.8))

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, \eta) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta = 0. \quad (6.7)$$

Разложение (6.2) означает, что

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta). \quad (6.8)$$

Подставляя (6.8) в (6.7), получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\eta \right) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} g(\eta) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi \right) d\eta = 0. \quad (6.9)$$

Но это тождество очевидно, поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\eta &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, \eta) \Big|_{\eta=-\infty}^{\eta=+\infty} = 0, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} d\xi &= \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}(\xi, \eta) \Big|_{\xi=-\infty}^{\xi=+\infty} = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

в силу финитности $\varphi(\xi, \eta)$. Таким образом, равенство (6.3) доказано.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Классификация линейных уравнений в частных производных второго порядка.

1. Уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение в \mathbb{R}^n вида

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad a_{ij} = a_{ji}. \quad (1)$$

Приведем его к каноническому виду, в котором $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Для этого рассмотрим линейную замену переменных

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n, \\ \dots \\ y_n = c_{n1}x_1 + \dots + c_{nn}x_n, \end{cases} \quad (2)$$

или в векторном виде

$$y = Cx. \quad (3)$$

В координатах y_k имеем $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n C_{ki} \frac{\partial u}{\partial y_k}$, и также $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,l=1}^n C_{ki} C_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}$. Подставляя в (1), получаем

$$\sum_{i,j,k,l} a_{ij} C_{ki} C_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \dots = 0, \quad (4)$$

где многоточием обозначены члены, содержащие младшие производные функции u . Можно записать (4) в виде

$$\sum_{k,l=1}^n b_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \dots = 0, \quad (5)$$

где

$$b_{kl} = \sum_{i,j} a_{i,j} C_{ki} C_{lj}.$$

В матричной форме $b = CaC^*$, где a есть матрица (a_{ij}) , а C^* — транспонированная матрица к C . Эта формула напоминает закон преобразования матрицы квадратичной формы

$$(a\xi, \xi) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j. \quad (6)$$

А именно, если сделать замену

$$\xi = d\eta, \quad d = (d_{ij})_{i,j=1,\dots,n}, \quad (7)$$

то получим, если взять $d^* = C$, что

$$(a\xi, \xi) = (ad\eta, d\eta) = (d^*ad\eta, \eta) = (CaC^*\eta, \eta) = (b\eta, \eta).$$

Таким образом, если замена (7) приводит квадратичную форму к главным осям (такая замена существует, как известно из линейной алгебры) $(a\xi, \xi) = \sum_{k=1}^n b_k \eta_k^2$, то замена (3) с матрицей $C = d^*$ приводит дифференциальное уравнение (1) к виду (5) с той же диагональной матрицей b :

$$\sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \dots = 0. \quad (8)$$

При этом возможны следующие варианты:

1. $\det a \neq 0$. Тогда уравнение (1) называется невырожденным, и все b_k в (8) можно сделать равными ± 1 . Если

а) все b_k одного знака (все $+1$ или все -1), то уравнение (8) имеет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \dots = 0$ и называется эллиптическим. Пример — уравнение Лапласа (I.8.22);

б) все b_k одного знака, кроме одного, то (8) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_k^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_{n-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \dots = 0 \quad (9)$$

и называется гиперболическим. Пример — волновое уравнение (I.7.1);

в) некоторые b_k (более одного) положительны, а остальные b_k (также более одного) — отрицательны, то (8) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{n-1}^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_n^2} + \dots = 0$$

и называется ультрагиперболическим. Это возможно при $n \geq 4$.

II. $\det a = 0$. Тогда уравнение (1) называется вырожденным, или параболическим в широком смысле. Пример — уравнение теплопроводности (I.8.16).

Упражнение. Найдём канонический вид и замену переменных (2) для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0. \quad (10)$$

Решение. Составляем форму (6) и приводим ее к главным осям:

$$\xi^2 + 4\xi_1\xi_2 - 3\xi_3^2 = (\xi_1 + 2\xi_2)^2 - 4\xi_2^2 - 3\xi_3^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2 - 3\eta_3^2. \quad (11)$$

Таким образом, тип уравнения (10) — гиперболический, как в (9). Замена (7), точнее, обратная к ней, имеет вид

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + 2\xi_2, \\ \eta_2 = 2\xi_2, \\ \eta_3 = \xi_3. \end{cases} \quad (12)$$

Чтобы привести эти соотношения к виду (7), нужно обратить уравнения (12):

$$\begin{cases} \xi_2 = \frac{\eta_2}{2}, \\ \xi_3 = \eta_3, \\ \xi_1 = \eta_1 - 2\xi_2 = \eta_1 - \eta_2. \end{cases}$$

Отсюда получаем матрицу d :

$$d = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$C = d^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, замена (2) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

Канонический вид уравнения (10), в соответствии с (11), такой:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y_3^2} = 0.$$

Задача. Найдите канонический вид и замены переменных (2) для уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} &= 0. \end{aligned}$$

2. Уравнения с переменными коэффициентами.

Теперь пусть в (1) коэффициенты переменные:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots = 0. \quad (13)$$

Тогда для каждого фиксированного $x_0 \in \mathbb{R}^n$ можно рассмотреть уравнение с “замороженными” в точке x_0 постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \dots = 0.$$

Тип этого уравнения называется типом уравнения (13) в точке x_0 .

Пример — уравнение Трикоми

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

— эллиптическое в полуплоскости $y > 0$, гиперболическое в полуплоскости $y < 0$ и вырожденное на прямой $y = 0$.

Список использованной литературы.

1. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1980. 686 с.
3. * Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1982. 318 с.
5. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1982. 256 с.
6. Гельфанд И.М., Шиллов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 470 с.
7. Зоммерфельд А. Дифференциальные уравнения в частных производных физики. М.: Изд-во иностр.лит., 1950. 470 с.
8. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики: в 2-х т. М.: Гостехиздат, 1951. Т.1.
- 9*. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 424 с.
- 10*. Олейник О.А. Лекции об уравнениях с частными производными. Ч.1. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1976. 110 с.
- 11*. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961. 400 с.
- 12*. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 443 с.
- 13*. Смирнов М.М. Задачи по уравнениям математической физики. М.: Наука, 1975. 127 с.
- 14*. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
- 15*. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979. 128 с.
16. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1985. 207с.
17. Шварц Л. Математические методы для математических наук. М.: Мир, 1965. 412 с.
18. Шиллов Г.Е. Математический анализ: Второй специальный курс. М.: Изд-во Моск.ун-та, 1984. 207 с.

* Рекомендуемая литература помечена звездочками.

Оглавление.

Предисловие.	3
Глава I. Гиперболические уравнения. Метод характеристик.	4
Глава II. Метод Фурье.	67
Глава III. Обобщенные функции от одной переменной. Метод функции Грина для краевых задач на отрезке.	105
Глава IV. Фундаментальные решения и функция Грина для уравнений с частными производными.	129
Приложение.	150
Литература.	154