

FUNKTIONALANALYSIS 2

SPEKTRALTHEORIE

ANDREAS KRIEGL

In dieser Vorlesung geht es darum lineare Operatoren zwischen Banach- und Hilbert-Räumen so explizit wie möglich zu beschreiben. Den geeigneten Rahmen dieser Untersuchung bilden die Banach- und C^* -Algebren, mit denen wir uns vor allem in den ersten beiden Kapiteln beschäftigen. Ich habe mich bei der Ausarbeitung dieses Skriptums weitgehend an die Kapitel VII-X in [C] gehalten.

Mein besonderer Dank gilt Bernhard Reisecker und Gerhard Totschnig, die mir umfassende Fehlerlisten zur Vorabversion erstellt haben. Ich möchte an dieser Stelle auch Leonhard Summerer für seine ausführliche Liste von Fehlern zum 1. Teil dieses Skriptums danken. Wie immer möchte ich die Leser bitten mir die sicherlich noch immer vorhandenen Fehler mitzuteilen.

März 1992

Dies ist eine korrigierte Version, die ich an Hand extensiver Fehlerlisten von Bernhard Reisecker und Leonhard Summerer erstellt habe.

August 1992

Es wurden weitere Korrekturen auf Grund einer umfassenden Liste von Konni Rietsch durchgeführt.

Februar 1999

Weitere zahlreiche Korrekturen wurden mir von Oliver Fasching mitgeteilt.

Februar 2001

Zahlreiche erneute Korrekturen verdanke ich Simon Hochgerner.

September 2002

Mehrere weitere Korrekturen verdanke ich Harald Grobner.

September 2003

Inhaltsverzeichnis

9	SPEKTRAL- UND DARSTELLUNGSTHEORIE VON BANACH-ALGEBREN	3
	Vorbemerkungen	3
	Nötiges aus der komplexen Analysis	12
	Funktionalkalkül	21
	Abhängigkeit des Spektrums von der Algebra	25
	Kommutative Banach-Algebren	27
	Die Gruppen-Algebra einer Abelschen Gruppe	33
10	DARSTELLUNGSTHEORIE VON C^* -ALGEBREN	37
	Grundlegendes über C^* -Algebren	37
	Spektral-Theorie Abelscher C^* -Algebren	40
	Anwendungen auf Hermite'sche Elemente	42
	Ideale und Quotienten von C^* -Algebren	45
	Zyklische Darstellungen von C^* -Algebren	48
	Irreduzible Darstellungen von C^* -Algebren	53
	Gruppen-Darstellungen	55
11	SPEKTRAL-THEORIE VON OPERATOREN	70
	Darstellungen Abelscher C^* -Algebren und Spektral-Maße	70
	Spektral-Theorie normaler Operatoren	80
	Spektral-Theorie kompakter Operatoren	84
	Normale Operatoren als Multiplikations-Operatoren	88
	Kommutanten und von Neumann Algebren	91
	Multiplizitäts-Theorie für normale Operatoren	100
12	SPEKTRAL-THEORIE UNBESCHRÄNKTER OPERATOREN	105
	Unbeschränkte Operatoren	105
	Adjungierter Operator	106
	Invertierbarkeit und Spektrum	113
	Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren	115
	Spektrum symmetrischer Operatoren	118
	Symmetrische Erweiterungen	120
	Cayley-Transformation	124
	Unbeschränkte normale Operatoren	126
	1-Parameter Gruppen und infinitesimale Erzeuger	136
	LITERATUR	144
	INDEX	145

9 Spektral- und Darstellungstheorie von Banach-Algebren

Vorbemerkungen

Ziel der Spektraltheorie ist es zu einem gegebenen linearen Operator eine möglichst explizite und invariante Darstellung zu finden. Im 1-dimensionalen ist jeder lineare Operator $T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ein Multiplikations-Operator der Form $T : t \mapsto \lambda \cdot t$, wobei der Anstieg λ durch $\lambda = T(1)$ gegeben ist. Im endlich-Dimensionalen wäre nach Wahl einer Basis die Matrizendarstellung ein Analogon, bzw. im unendlich-Dimensionalen die Darstellung als Integraloperator durch einen Integralkern. Diese Darstellungen sind einerseits natürlich so explizit wie nur möglich aber andererseits nicht invariant unter Basiswechseln bzw. Bewegungen (Drehungen). Ein invarianterer Ansatz besteht darin möglichst viele Richtungen v zu finden, in denen ein Operator T als Multiplikations-Operator gegeben ist. Eine solche Richtung v erkennt man genau daran, daß der von v erzeugte Teilraum $\mathbb{K} \cdot v := \langle v \rangle$ *invariant* unter T ist, d.h. $T(\langle v \rangle) \subseteq \langle v \rangle$ erfüllt. Dann gilt für die Einschränkung T_v von T auf $\langle v \rangle$: $T(t \cdot v) = T_v(t) \cdot v$, und $T_v : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ist linear, hat also die Form $T_v(t) = \lambda_v \cdot t$ mit $\lambda_v := T_v(1)$, d.h. $T(w) = \lambda \cdot w$ für alle $w \in \mathbb{K} \cdot v$. Insbesondere muß also ein $\lambda \in \mathbb{K}$ existieren mit $T(v) = \lambda \cdot v$, d.h. $v \in E$ ist ein EIGENVEKTOR zum EIGENWERT $\lambda \in \mathbb{K}$.

Eigenvektoren sind also genau jene Vektoren auf welchen der Operator als skalar-Multiplikation wirkt, und Eigenwerte sind also jene Zahlen λ , für die der Operator $T - \lambda \cdot \text{id}$ nicht injektiv ist. Im endlich-Dimensionalen ist das damit äquivalent, daß $T - \lambda \cdot \text{id}$ nicht invertierbar ist, und das kann durch die polynomiale Gleichung $\det(T - \lambda \cdot \text{id}) = 0$ ausgedrückt werden. Es genügt also die Nullstellen λ des charakteristischen Polynoms $x \mapsto \det(T - x \cdot \text{id})$ zu bestimmen, und dann für jede Nullstelle λ den Kern von $T - \lambda \cdot \text{id}$.

Die Existenz genügend vieler solcher Richtungen sollte nun wohl heißen, daß der Operator durch die Einschränkungen auf diese Richtungen schon eindeutig gegeben ist. In der linearen Algebra lernt man, daß dies für normale Operatoren in komplexen endlich-dimensionalen Vektorräumen wirklich möglich ist, d.h. jeder solche Operator diagonalisierbar ist. Er wirkt also nach Wahl einer Basis wie der Multiplikations-Operator $(x_i)_i \mapsto (\lambda_i x_i)_i$, $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\lambda} \mathbb{R}^n$.

Wie sieht das nun aber für unendlich-dimensionale Räume aus? Für selbstadjungierte kompakte Operatoren auf Hilbert-Räumen haben wir in (6.14) gesehen, daß die Eigenwerte eine Folge λ_k bilden, für die eine orthonormal-Basis von Eigenvektoren u_k existiert, und $T(x) = \sum_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k$ ist. Dies stimmt auch für nicht selbstadjungierte normale kompakte Operatoren, siehe (11.25).

Beispiele nicht kompakter Operatoren. 1. Der links-Translations-Operator $S : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, definiert durch $S : (x_k)_{k \geq 0} \mapsto (x_{k+1})_{k \geq 0}$. Die Gleichung $S(x) = \lambda x$ ist in Koordinaten das Gleichungssystem $(x_{k+1} = \lambda x_k)_{k \geq 0}$. Die einzig mögliche Lösung ist $x = (x_0 \lambda^k)_{k \geq 0}$. Für $|\lambda| < 1$ ist dieser Vektor $x \in \ell^2$ und somit λ ein Eigenwert. Für $|\lambda| \geq 1$ und $x_0 \neq 0$ ist $x \notin \ell^2$, also λ kein Eigenwert. Die Menge der Eigenwerte ist also die offene Einheitskreis in \mathbb{C} , und somit nicht mehr abzählbar, also T nicht als Reihe wie oben darstellbar.

Wir werden in (9.26) sehen, daß für alle $|\lambda| > \|S\| = 1$ der Operator $\lambda - S$ inver-

tierbar ist. Da die Menge der invertierbaren Operatoren offen ist, ist die Menge der λ , für welche $\lambda - S$ nicht invertierbar, ist genau die abgeschlossene Einheitssscheibe. Wir sehen also, daß für $|\lambda| = 1$ der Operator $\lambda - S$ zwar injektiv aber nicht invertierbar ist.

2. Der adjungierte Operator $S^* : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ zu S ist gerade der rechts-Translations-Operator $S^* : (x_0, x_1, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$, denn

$$\langle S^*(x), y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_{k-1} \cdot \overline{y_k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot \overline{y_{k+1}} = \langle x, S(y) \rangle.$$

Da S^* eine Isometrie ist folgt aus $S^*x = \lambda x$ für ein $x \neq 0$, daß $|\lambda| = 1$ ist und somit aus $0 = \lambda x_0$, $x_0 = \lambda x_1$, ... rekursiv $x_k = 0$ für alle k . Es gibt also keinen einzigen Eigenwert von S^* .

Wie zuvor folgt, daß für jedes $|\lambda| > 1$ die Abbildung $\lambda - S^*$ invertierbar ist. Sei nun $\lambda - S^*$ invertierbar mit $|\lambda| \leq 1$. Es sei T die Inverse von $\lambda - S^*$. Dann ist T^* eine Inverse zu $(\lambda - S^*)^* = \overline{\lambda} - S$, ein Widerspruch zu dem über S Gesagten. Also ist $\lambda - S^*$ genau dann nicht invertierbar, wenn $|\lambda| \leq 1$.

3. Als nächstes Beispiel betrachten wir den unitären (rechts-)Translations-Operator $T : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ definiert durch $T : (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k-1})_{k \in \mathbb{Z}}$. Dann kommen wieder nur λ mit $|\lambda| = 1$ als Eigenwerte in Frage. Kein solches λ kann aber Eigenwert sein, denn die Gleichung $T(x) = \lambda x$ ist äquivalent zum System $(x_{k-1} = \lambda x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Es wäre also $|x_{k-1}| = |x_k|$ für alle k und somit $x \notin \ell^2$ für $x \neq 0$. Andererseits ist für $|\lambda| = 1$ die Abbildung $\lambda - T$ nicht invertierbar, denn der 0-te Einheitsvektor e_0 liegt nicht im Bild: Sei nämlich $(\lambda - T)(x) = e_0$, dann wäre $\lambda x_k - x_{k-1} = 0$ für $k \neq 0$. Also wäre $|x_k| = |x_{k-1}|$ für $k \neq 0$ und damit $x = 0$, ein Widerspruch zu $\lambda x_0 - x_{-1} = 1$.

Die Fourier-Reihenentwicklung $\mathcal{F} : L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ aus (5.9) übersetzt den Operator T in den Multiplikations-Operator M_f mit $f : x \mapsto e^{ix}$, denn in (5.10) haben wir gezeigt: $\mathcal{F}(M_f g) = T(\mathcal{F}g)$. Also ist $\lambda - T$ genau dann invertierbar, wenn $\lambda - M_f = M_{\lambda - f}$ es ist. Für $|\lambda| \neq 1$ ist die 2π -periodische Funktion $\lambda - f$ nirgends verschwindend, also ist $f_\lambda : x \mapsto \frac{1}{\lambda - f(x)}$ auch eine stetige 2π -periodische Funktion, und der Multiplikations-Operator M_{f_λ} mit f_λ der Inverse Operator zu $M_{\lambda - f}$. Die λ , für welche also $\lambda - T$ nicht invertierbar ist, sind genau jene am Einheitskreis S^1 . Das zeigt auch, daß der Operator T bis auf einen Isomorphismus \mathcal{F} ein Multiplikations-Operator auf $L^2(S^1, \mathbb{C}) \cong L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C})$ ist.

Wir sehen also, daß der Begriff Eigenwert im unendlich-Dimensionalen zu strikt ist. Besser geeignet zu sein scheint die (im endlich-Dimensionalen äquivalente) Bedingung “ $\lambda - T$ ist nicht invertierbar”. Man nennt solch ein λ einen SPEKTRAL-WERT von T , und die Menge aller Spektral-Werte wird als SPEKTRUM $\sigma(T)$ bezeichnet.

Im Falle, daß der Raum E , auf welchen der Operator T wirkt, nicht normierbar ist, ist selbst dieser Begriff zu schwach und es gibt auch keine vernünftige Spektral-Theorie für Operatoren auf beliebigen SNR'en:

4. Sei z.B. E der Raum aller $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, für welche $x_k = 0$ für k hinreichend klein. Wir versehen E mit der strikt induktiven Limes-Struktur mit den Stufen $E_n := \{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} : x_k = 0 \text{ für } k < n\} \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Sei T die links-Translation $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto (x_{k+1})_{k \in \mathbb{Z}}$. Dann ist T offensichtlich ein stetig linearer Operator, da $T|_{E_n} : E_n \rightarrow E_{n-1}$ ein Isomorphismus ist. Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $T - \lambda \cdot \text{id}$ invertierbar, da für $y \in E_n$

die Gleichung $T(x) - \lambda \cdot x = y$ eine eindeutige Lösung $x \in E_{n+1} \subset E$ existiert. Diese kann rekursiv aus $x_{k+1} = \lambda x_k + y_k$ berechnet werden, da $x_{k+1} = \lambda x_k$ und somit $x_{k+1} = 0$ für $k < n$ gilt. Also folgt die Stetigkeit der Inversen. Das Spektrum von T ist also leer. Man beachte, daß $E^* \cong E$ vermöge der Spiegelung $(x_k)_k \mapsto (x_{-k})_k$ und die rechts-Translation T^* entspricht bezüglich dieses Isomorphismuses gerade der links-Translation T . D.h. T ist selbstadjungiert bzgl. der Paarung $\langle -, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$, $(x, y) \mapsto \sum_k x_k y_{-k}$.

Im Unterschied zu Eigenwerten sieht man sofort, daß es für obige Definitionen für Spektral-Werte und Spektrum von T die Vektoren in E keine Rolle spielen. Es genügt die Ausdrücke $T - \lambda \cdot \text{id}$ bilden zu können um von der Invertierbarkeit dieser Ausdrücke sprechen zu können. Für ersteres sollte T in einem Vektorraum liegen und für zweiteres sollte dieser Vektorraum eine Algebra mit 1 sein. Damit wir Invertierbarkeit gut kontrollieren können sollte die absolut konvergente geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ konvergieren, d.h. T in einer Banach-Algebra liegen. Wir werden also die Spektral-Theorie für Elemente abstrakter Banach-Algebren (siehe (3.6)) durchführen. Rufen wir uns dazu nochmals die wichtigsten Beispiele in Erinnerung:

9.1 Beispiele.

- 1 Für jeden Banachraum E ist $L(E) := L(E, E)$ eine Banach-Algebra mit 1 bezüglich der Komposition als Multiplikation, siehe (3.6)
- 2 Für jeden kompakten Raum X ist $C(X, \mathbb{K})$ eine kommutative Banach-Algebra mit 1 bezüglich der punktweisen Multiplikation. Allgemeiner gilt dies auch für den Raum $B(X, \mathbb{K})$ der beschränkten Funktionen auf einer Menge X , siehe (3.5).
- 3 Somit ist auch der Banach-Raum $L^\infty(X, \Omega, \mu)$ für jeden σ -endlichen Maßraum (X, Ω, μ) eine kommutative Banach-Algebra mit 1 bezüglich der punktweisen Operationen, siehe (4.14).
- 4 Weiters sind $\ell^1(\mathbb{N})$ und $\ell^1(\mathbb{Z})$ bezüglich Faltung kommutative Banach-Algebren mit 1.

9.1a Bemerkung über die Invertierbarkeit in einer Banach-Algebra. Wir haben in (3.7) gezeigt, daß bezüglich der invertierbaren Elemente $a \in \text{Inv}(A)$ folgendes gilt:

- 1 Ist $\|a - 1\| < 1$, so ist $a \in \text{Inv}(A)$ und $a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - a)^k$, die absolut konvergente geometrische Reihe.
- 2 Ist $a_0 \in \text{Inv}(A)$ und $\|a - a_0\| < \frac{1}{\|a_0^{-1}\|}$ so ist nach (1) auch $a = (a a_0^{-1}) a_0 \in \text{Inv}(A)$; insbesondere ist $\text{Inv}(A)$ offen in A .
- 3 Ist $a_1 a_2 = a_2 a_1 \in \text{Inv}(A)$, so ist auch $a_1, a_2 \in \text{Inv}(A)$.
- 4 $a \mapsto a^{-1}$ ist eine (komplex-)differenzierbare Abbildung $\text{inv} : \text{Inv}(A) \rightarrow \text{Inv}(A)$ und für die Ableitung gilt: $\text{inv}'(a)(h) = -a^{-1} h a^{-1}$.

(3) gilt in jeder Halbgruppe, denn sei $a_1 a_2$ invertierbar mit Inversen $b := (a_1 a_2)^{-1}$. Dann ist $a_1 a_2 b = 1 = b a_1 a_2 = b a_2 a_1$, also $r := a_2 b$ ein Rechtsinverses zu a_1 und $l := b a_2$ ein Linksinverses zu a_1 , also $r = l a_1 r = l$, d.h. $r = l$ das eindeutige beidseitige Inverse zu a_1 .

Die Ableitung in (4) läßt sich durch Differenzieren der impliziten Gleichung $a^{-1} a = 1$ erhalten: Sei dazu mit $\text{mult} : A \times A \rightarrow A$ die bilineare Multiplikation bezeichnet. Dann folgt durch Differenzieren von $1 = \text{mult} \circ (\text{inv}, \text{id})$ an der Stelle

$a \in \text{Inv}(A)$ in Richtung h , daß

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1 \text{mult}(\text{inv}(a), \text{id}(a)) (\text{inv}'(a)(h)) + \partial_2 \text{mult}(\text{inv}(a), \text{id}(a)) (\text{id}'(a)(h)) \\ &= \text{mult}(\text{inv}'(a)(h), \text{id}(a)) + \text{mult}(\text{inv}(a), \text{id}'(a)(h)) \\ &= \text{inv}'(a)(h) \cdot a + a^{-1} \cdot h \end{aligned}$$

und somit $\text{inv}'(a)(h) = \text{inv}'(a)(h) \cdot a \cdot a^{-1} = -a^{-1} \cdot h \cdot a^{-1}$. Daß inv differenzierbar mit dieser Ableitung ist läßt sich auch direkt wie folgt nachrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\|(a+h)^{-1} - a^{-1} + a^{-1} h a^{-1}\|}{\|h\|} &= \frac{\|a^{-1} \left((1 + h a^{-1})^{-1} - 1 + h a^{-1} \right)\|}{\|h\|} \\ &\leq \|a^{-1}\| \sum_{k \geq 2} \frac{\|(h a^{-1})^k\|}{\|h\|} \\ &\leq \|a^{-1}\| \|h\| \sum_{k \geq 0} (\|h\| \|a^{-1}\|)^k \|a^{-1}\|^2 \\ &\leq \|h\| \|a^{-1}\|^3 \frac{1}{1 - \|h\| \|a^{-1}\|} \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

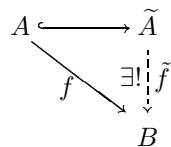
Bevor wir nun in die Spektral-Theorie von Banach-Algebren einsteigen, sollten wir uns noch überlegen, was wir machen können, wenn die betreffende Algebra nicht alle Axiome einer Banach-Algebra erfüllt.

9.2 Vervollständigung.

Beispiele unvollständiger Algebren.

- 1 Die Polynome auf einer kompakten Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ bilden bezüglich der ∞ -Norm eine nicht-vollständige Teil-Algebra von $C(K)$.
- 2 Die stetigen Funktionen auf \mathbb{R} mit kompakten Träger bilden bezüglich der 1-Norm und der Faltung eine nicht-vollständige Banach-Algebra. Ebenso die stetigen Funktionen auf S^1 .
- 3 Die endlich-dimensionalen Operatoren eines Hilbert-Raums H bilden eine unvollständige Teilalgebra von $L(H)$.

Proposition. *Es sei A eine normierter Algebra, d.h. ein normierter Raum mit einer Algebra-Struktur \bullet , so daß $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie) eindeutige Banach-Algebra \tilde{A} und eine isometrische Einbettung $\iota : A \rightarrow \tilde{A}$ mit folgender universeller Eigenschaft:*



wobei f und \tilde{f} stetige Algebra-Homomorphismen sind und B eine vollständige Algebra ist.

Beweis. Es sei A eine normierte Algebra. Dann existiert nach (4.12) ein Banach-Raum \tilde{A} mit der universellen Erweiterungseigenschaft für stetige lineare Abbildungen. Wir wollen nun die Multiplikation $\mu : A \times A \rightarrow A$ zu einer Abbildung

$\tilde{\mu} : \tilde{A} \times \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ erweitern. Dazu betrachten wir die assoziierte Abbildung $\check{\mu} : A \rightarrow L(A, A)$. Die natürliche isometrische Abbildung $\iota : A \rightarrow \tilde{A}$ liefert uns eine Isometrie $L(A, E) \cong L(\tilde{A}, E)$ für jeden Banachraum E . Folglich erhalten wir eine isometrische Einbettung $L(A, A) \xrightarrow{\iota^*} L(A, \tilde{A}) \cong L(\tilde{A}, \tilde{A})$. D.h. wir können $\check{\mu}$ auffassen als stetige Abbildung (Kontraktion) von A in $L(\tilde{A}, \tilde{A})$. Nach der universellen Eigenschaft besitzt diese eine Erweiterung $\tilde{\check{\mu}} : \tilde{A} \rightarrow L(\tilde{A}, \tilde{A})$. Die assoziierte Abbildung $\tilde{\mu} : \tilde{A} \times \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ ist dann die gewünschte Multiplikation auf \tilde{A} , denn alle nötigen (stetigen) Gleichungen gelten auf dem dichten Teilraum $A \times A$ und somit überall.

Man beachte, daß der wesentliche Punkt besagt, daß multi-lineare stetige Abbildungen $E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ sich eindeutig zu solchen auf $\tilde{E}_1 \times \dots \times \tilde{E}_n \rightarrow \tilde{F}$ erweitern lassen.

Nun zur universellen Eigenschaft.

Da wir wissen, daß $\|f\| = \|\tilde{f}\|$, müssen wir nur nachrechnen, daß \tilde{f} multiplikativ ist:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{\mu}(\tilde{a}, \tilde{b})) &= \tilde{f}(\tilde{\mu}(\lim_n a_n, \lim_m b_m)) = \tilde{f}(\lim_{n,m} \tilde{\mu}(a_n, b_m)) = \lim_{n,m} \tilde{f}(\tilde{\mu}(a_n, b_m)) \\ &= \lim_{n,m} f(\mu(a_n, b_m)) = \lim_{n,m} f(a_n) \cdot f(b_m) = \lim_n f(a_n) \cdot \lim_m f(b_m) \\ &= \lim_n \tilde{f}(a_n) \cdot \lim_m \tilde{f}(b_m) = \tilde{f}(\lim_n a_n) \cdot \tilde{f}(\lim_m b_m) \\ &= \tilde{f}(\tilde{a}) \cdot \tilde{f}(\tilde{b}). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Vervollständigung in obigen Beispielen ist:

- 1 Die Banach-Algebra der stetigen Funktionen nach dem Satz (3.8) von Weierstraß;
- 2 Die Banach-Algebra L^1 mit der Faltung, da die C_c -Funktionen darin dicht liegen, siehe (4.15);
- 3 Die kompakten Operatoren nach (6.13).

9.3 Adjunktion einer 1.

Beispiele von Algebren ohne 1.

- 1 $L^1(\mathbb{R})$ und $L^1(S^1)$ mit der Faltung. Die Einheit wäre die Delta-Distribution.
- 2 Die Algebra der kompakten Operatoren auf einem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum. Die Einheit wäre die Identität.
- 3 Für jeden lokal-kompakten Raum X die Algebra $C_0(X)$, der bei ∞ -verschwindenden stetigen Funktionen. Die Einheit wäre die konstante Funktion 1.

Proposition. *Es sei A eine Banach-Algebra ohne 1. Dann existiert eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Banach-Algebra A_1 mit 1 sowie eine isometrische Einbettung $\iota : A \rightarrow A_1$ mit folgender universeller Eigenschaft:*

$$\begin{array}{ccc} A & \hookrightarrow & A_1 \\ & \searrow f & \downarrow \exists! f_1 \\ & & B \end{array}$$

wobei f und f_1 stetige Algebra-Homomorphismen sind, B eine Banach-Algebra mit 1 ist und f_1 die Eins erhält.

Beweis. Es sei also A eine Banach-Algebra (nicht notwendig mit 1). Sei $A_1 := A \oplus \mathbb{K}$. Die Multiplikation sei durch $(a \oplus \lambda) \bullet (b \oplus \mu) := (a \bullet b + \mu a + \lambda b) \oplus \lambda \mu$ definiert. Dann ist leicht nachzurechnen, daß A_1 eine Algebra mit $1 = 0 \oplus 1$ ist, und $\iota : A \rightarrow A_1, a \mapsto a \oplus 0$ ein Algebra-Homomorphismus ist. Wir definieren eine Norm auf A_1 durch $\|a \oplus \lambda\| := \|a\| + |\lambda|$. Dann ist $\|1\| = \|0\| + |1| = 1$ und

$$\begin{aligned} \|(a \oplus \lambda) \bullet (b \oplus \mu)\| &= \|(a \bullet b + \mu a + \lambda b) \oplus \lambda \mu\| = \|a \bullet b + \mu a + \lambda b\| + |\lambda \mu| \\ &\leq \|a\| \cdot \|b\| + |\mu| \cdot \|a\| + |\lambda| \cdot \|b\| + |\lambda| \cdot |\mu| \\ &= (\|a\| + |\lambda|) \cdot (\|b\| + |\mu|) \\ &= \|a \oplus \lambda\| \cdot \|b \oplus \mu\|. \end{aligned}$$

Nun zur universellen Eigenschaft:

Ein f_1 , welches das Diagramm kommutativ macht, muß $f_1(a \oplus \lambda) = f_1(a) + \lambda \cdot f_1(1) = f(a) + \lambda$ erfüllen. Und das dadurch definierte f_1 ist multiplikativ, denn:

$$\begin{aligned} f_1((a \oplus \alpha) \bullet (b \oplus \mu)) &= f_1((ab + \lambda b + \mu a) \oplus \lambda \mu) \\ &= f(ab + \lambda b + \mu a) + \lambda \mu \\ &= f(a) f(b) + \lambda f(b) + \mu f(a) + \lambda \mu \\ &= (f(a) + \lambda) (f(b) + \mu) \\ &= f_1(a \oplus \alpha) \cdot f_1(b \oplus \mu). \end{aligned}$$

Da ι eine Isometrie ist, gilt $\|f\| = \|f_1 \circ \iota\| \leq \|f_1\| \cdot \|\iota\| = \|f_1\|$. Andererseits ist $\|f_1\| = \sup\{|f(a) + \lambda| : \|a \oplus \lambda\| \leq 1\} \leq \sup\{\|f\| \|a\| + |\lambda| : \|a\| + |\lambda| \leq 1\} \leq \max\{\|f\|, 1\}$. Also ist f genau dann eine Kontraktion (bzw. stetig) wenn f_1 es ist. Man beachte aber, daß nicht $\|f\| = \|f_1\|$ gilt: Sei z.B. $f = 0$, dann ist $f_1 = \text{pr}_2$ und $\|f_1\| = 1$. \square

Bemerkung. Bezüglich obiger Beispiele gilt:

- 1 Eine Banach-Algebra mit 1 , welche $L^1(G)$ umfaßt, ist die Algebra der regulären Borel-Maße auf G mit der Faltung, siehe [C,193]. Diese kann wegen des Ries'schen Darstellungssatzes (7.18) mit $C_0(G)^*$ identifiziert werden. Die Faltung entspricht dabei der Abbildung $(\mu, \nu) \mapsto (f \mapsto (\mu \otimes \nu)(f \circ m))$, wobei $m : G \times G \rightarrow G$ die Multiplikation bezeichnet und $\mu \otimes \nu$ die Fortsetzung von $f \star g \mapsto \mu(f) \nu(g)$ auf $C_0(G \times G) \supseteq C_0(G) \times C_0(G)$ ist.
- 2 Die Operatoren der Form $1 + K$ mit kompaktem K , sind die sogenannten Fredholm-Operatoren, siehe [C,Chapt.XI] und (11.27).
- 3 Die Algebra $C_0(X)_1$ besteht gerade aus jenen stetigen Funktionen f auf X , für die $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert, das sind genau die Einschränkungen von stetigen Funktionen auf der 1-Punkt Kompaktifizierung X_∞ von X , d.h. $C_0(X)_1 \cong C(X_\infty)$.

Als nächstes wollen wir untersuchen inwieweit man die Stetigkeitsbedingung $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ abschwächen kann.

9.4 Proposition (Submultiplikativität). *Es sei A ein Banachraum und eine assoziative Algebra mit 1 , s.d. die Multiplikation $\mu : A \times A \rightarrow A$ getrennt stetig ist.*

Dann existiert eine äquivalente Norm, die A zu einer Banach-Algebra macht. Auf Elementen x mit $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle y stimmt sie mit der gegebenen Norm überein.

Beweis. O.B.d.A. ist $\|1\| = 1$, ansonsten ersetze $\|\cdot\|$ durch $\frac{1}{\|1\|} \|\cdot\|$. Es ist μ nach (5.5) stetig, d.h. $\|\mu\| := \sup\{\|x \bullet y\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\} < \infty$. Wir betrachten die Abbildung $L : A \rightarrow L(A, A)$, die jedem $x \in A$ die Linksmultiplikation $L_x : A \rightarrow A$, $y \mapsto x \bullet y$ zuordnet. Wegen $\|L_x\| = \sup\{\|x \bullet y\| : \|y\| \leq 1\} \leq \|\mu\| \cdot \|x\|$ hat L Werte in $L(A, A)$ und ist eine stetig lineare Abbildung $A \rightarrow L(A, A)$. Für jeden Banachraum A ist aber $L(A, A)$ eine Banach-Algebra (siehe (3.6)). Die Abbildung L ist auch ein Algebra-Homomorphismus, denn $L_{x_1 \bullet x_2}(y) = (x_1 \bullet x_2) \bullet y = x_1 \bullet (x_2 \bullet y) = (L_{x_1} \circ L_{x_2})(y)$. Außerdem ist $\|L_x\| = \sup\{\|x \bullet y\| : \|y\| \leq 1\} \geq \|x \bullet 1\| = \|x\|$, da $\|1\| = 1$. Also ist L ein Homöomorphismus von A auf sein Bild A_0 in $L(A, A)$, d.h. A_0 ist auch vollständig und somit abgeschlossen in $L(A, A)$ und damit ist $L : A \rightarrow A_0$ ein topologischer Algebra-Isomorphismus auf die Banach-Algebra A_0 .

Eine zweite Möglichkeit zu zeigen, daß A_0 abgeschlossen ist, besteht darin die Gleichung $A_0 = \{T \in L(A, A) : \forall y \in A : TR_y = R_yT\}$ zu zeigen, wobei $R_y : A \rightarrow A$ die Rechtsmultiplikation $x \mapsto x \bullet y$ bezeichnet: Denn einerseits gilt $(L_x \circ R_y)(z) = x \bullet z \bullet y = (R_y \circ L_x)(z)$ und andererseits folgt aus $TR_y = R_yT$ mit $x := T1$, daß $L_x(y) = x \bullet y = (T1)y = R_y(T1) = T(R_y1) = T(y)$ ist. Nun folgt der Rest aus dem Open-Mapping-Theorem.

Man beachte, daß das bedeutet, daß man die Norm $\|\cdot\|$ durch die äquivalente aber submultiplikative Norm $x \mapsto \|L_x\| := \sup\{\|x \bullet y\| : \|y\| \leq 1\}$ ersetzt. Falls für ein $x \in A$ die Ungleichung $\|x \bullet y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ für alle y gilt, so wird seine Norm dadurch nicht verändert, denn es folgt $\|L_x\| \leq \|x\|$ und $\|x\| \leq \|L_x\|$ gilt immer. \square

9.5 Komplexifizieren reeller Banach Algebren.

Beispiele reeller Algebren.

- 1 Für jeden kompakten Raum X ist $C(X; \mathbb{R})$ eine reelle kommutative Banach-Algebra.
- 2 Für jeden reellen Banach-Raum E ist $L(E)$ eine reelle Banach-Algebra.

In (6.2) haben wir die Komplexifizierung $E_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E \cong E \times E$ reeller Banach-Räume E behandelt. Die Multiplikation von $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $w = u + iv := (u, v) \in E_{\mathbb{C}}$ war dabei durch $(x + iy)(u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu)$ gegeben und die Norm durch

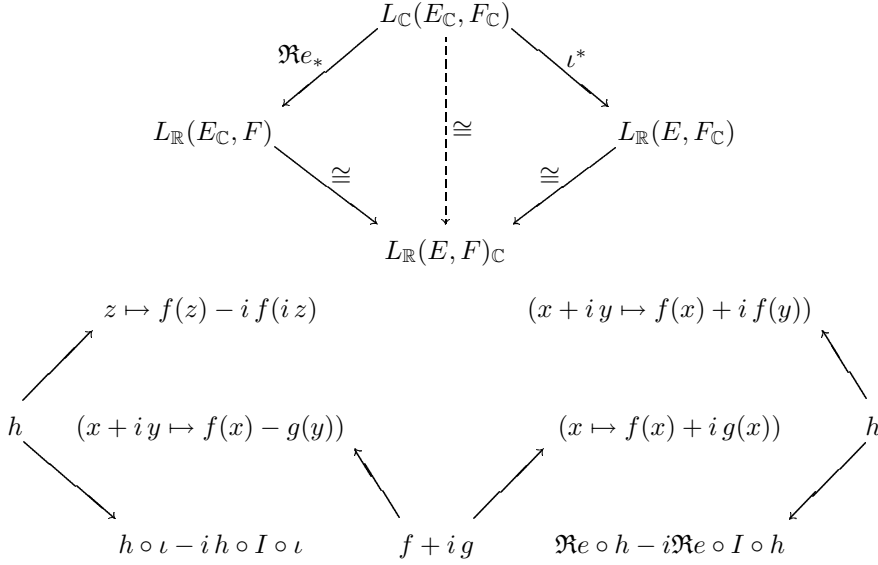
$$p_{\mathbb{C}}(w) := \max\{\|\Re(zw)\| : |z| = 1\} = \max\{\|xu - yv\| : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Weiters hatten wir zwei universelle Eigenschaften, die besagten, daß für jeden komplexen Banach-Raum G die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Re_* : L_{\mathbb{C}}(G, E_{\mathbb{C}}) &\rightarrow L_{\mathbb{R}}(G, E) \\ \iota^* : L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, G) &\rightarrow L_{\mathbb{R}}(E, G) \end{aligned}$$

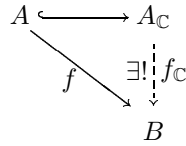
topologische lineare Isomorphismen sind, und erstere sogar eine Isometrie. In der Folge hatten wir dann für reelle Banach-Räume ein kommutatives Diagramm aus

lauter topologischen linearen Isomorphismen:



Dabei sind die schräg nach links gehenden Abbildungen Isometrien und der Diagonal-Isomorphismus $L_{\mathbb{R}}(E, F)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\cong} L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, F_{\mathbb{C}})$ ist durch $f + i g \mapsto (x + iy \mapsto (f(x) - g(y)) + i(f(y) + g(x)))$ gegeben.

Proposition (Komplexifizierung). *Es sei A eine reelle Banach-Algebra (mit 1). Dann existiert eine (bis auf Isomorphie eindeutige) komplexe Banach-Algebra $A_{\mathbb{C}}$ (mit 1 und) mit folgender universellen Eigenschaft:*



wobei B eine beliebige komplexe Banach-Algebra ist, f ein stetiger \mathbb{R} -Algebra-Homomorphismus (der die 1 bewahrt) und $f_{\mathbb{C}}$ ein stetiger \mathbb{C} -Algebra-Homomorphismus (der die 1 bewahrt).

Beweis. Klarerweise sollte $A_{\mathbb{C}}$ als Vektorraum gerade die Komplexifizierung des reellen Banach-Raums A sein. Wir müssen nun die Multiplikation $\mu : A \times A \rightarrow A$ zu einer bilinearen Abbildung $\mu_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \times A_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$ ausdehnen. Wir brauchen also die universelle Eigenschaft der Komplexifizierung eines Banach-Raums auch für stetig bilineare Abbildungen. Dazu betrachten wir wieder die lineare Kontraktion $\tilde{\mu} : A \rightarrow L_{\mathbb{R}}(A, A) \subseteq L_{\mathbb{R}}(A, A)_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}})$, mit $x_1 \mapsto (x_2 \oplus i y_2 \mapsto \mu(x_1, x_2) \oplus i \mu(x_1, y_2))$. Diese hat wegen der universellen Eigenschaft eine komplex-lineare Fortsetzung $(\tilde{\mu})_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \rightarrow L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}})$, welche gegeben ist durch:

$$x_1 \oplus i y_1 \mapsto \left(x_2 \oplus i y_2 \mapsto (\mu(x_1, x_2) - \mu(y_1, y_2)) \oplus i (\mu(x_1, y_2) + \mu(y_1, x_2)) \right).$$

Die assoziierte Abbildung $\mu_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \times A_{\mathbb{C}} \rightarrow A_{\mathbb{C}}$,

$$(x_1 \oplus i y_1, x_2 \oplus i y_2) \mapsto (\mu(x_1, x_2) - \mu(y_1, y_2)) \oplus i (\mu(x_1, y_2) + \mu(y_1, x_2))$$

ist dann die gewünschte Multiplikation. Folgende einfache Rechnung zeigt die Assoziativität (und offensichtlich ist $1 \in A \subset A_{\mathbb{C}}$ eine Einheit):

$$\begin{aligned} & \left((x_1 \oplus i y_1) \bullet (x_2 \oplus i y_2) \right) \bullet (x_3 \oplus i y_3) \\ &= \left((x_1 x_2 - y_1 y_2) \oplus i (x_1 y_2 + y_1 x_2) \right) \bullet (x_3 \oplus i y_3) \\ &= \left((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + y_1 x_2) y_3 \right) \oplus i \left((x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3 + (x_1 y_2 + y_1 x_2) x_3 \right) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - y_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 x_3) \oplus i (x_1 x_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + y_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 y_3). \end{aligned}$$

Man beachte daß $A_{\mathbb{C}}$ kommutativ ist, falls A es ist.

Die in (6.2) definierte Norm $p_{\mathbb{C}}$ ist im allgemeinen nicht submultiplikativ. Sei nämlich $A = \mathbb{R}^2$ mit der Multiplikation von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und der Euklidischen Norm. Dann gilt für $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in A_{\mathbb{C}}$ die Identität

$$w \bullet w = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}^2 \right) \oplus 2i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2w$$

und da

$$p_{\mathbb{C}}(w) := \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \right\| : x^2 + y^2 = 1 \right\} = 1$$

erhalten wir aus

$$p_{\mathbb{C}}(w \bullet w) = 2 p_{\mathbb{C}}(w) = 2 > 1 = p_{\mathbb{C}}(w)^2$$

einen Widerspruch.

Folglich kann auch keiner der übrigen Isomorphismen in dem rautenförmigen Diagramm eine Isometrie sein. Wäre nämlich einer von Ihnen eine Isometrie, so auch alle anderen wegen der Kommutativität. Dann wäre aber $\check{\mu} : A \rightarrow L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}})$ eine Kontraktion und somit auch $(\check{\mu})_{\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \rightarrow L_{\mathbb{C}}(A_{\mathbb{C}}, A_{\mathbb{C}})$ eine, also $\|\mu_{\mathbb{C}}\| \leq 1$, d.h. $p_{\mathbb{C}}$ submultiplikativ.

Es ist aber möglich eine äquivalente submultiplikative Erweiterung der Norm von A auf $A_{\mathbb{C}}$ zu finden. Sei nämlich $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ die nach (9.4) existente äquivalente submultiplikative Norm zu $p_{\mathbb{C}}$. Sie stimmt auf A mit $p_{\mathbb{C}}$ und damit mit $p := \|\cdot\|$ überein, denn für $a \in A \subseteq A_{\mathbb{C}}$, $w \in A_{\mathbb{C}}$ und $|z| = 1$ haben wir

$$\begin{aligned} p_z(a w) &:= p(\Re(z a w)) = p(a \Re(z w)) \leq p(a) p(\Re(z w)) \\ &\leq p_{\mathbb{C}}(a) p_{\mathbb{C}}(w) \end{aligned}$$

und somit $p_{\mathbb{C}}(a \cdot w) \leq p_{\mathbb{C}}(a) \cdot p_{\mathbb{C}}(w)$.

Nun zur universellen Eigenschaft: Sei dazu $f_{\mathbb{C}}$ die eindeutige \mathbb{C} -lineare Fortsetzung. Dann ist $f_{\mathbb{C}}$ auch ein Algebra-Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} & f_{\mathbb{C}}((u_1 \oplus i v_1) \bullet (u_2 \oplus i v_2)) \\ &= f_{\mathbb{C}}((u_1 u_2 - v_1 v_2) \oplus i (u_1 v_2 + v_1 u_2)) \\ &= f(u_1 u_2 - v_1 v_2) + i f(u_1 v_2 + v_1 u_2) \\ &= f(u_1) f(u_2) - f(v_1) f(v_2) + i f(u_1) f(v_2) + i f(v_1) f(u_2) \\ &= (f(u_1) + i f(v_1)) \cdot (f(u_2) + i f(v_2)) \\ &= f_{\mathbb{C}}(u_1 \oplus i v_1) \cdot f_{\mathbb{C}}(u_2 \oplus i v_2). \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Komplexifizierungen der obigen Beispiele sind offensichtlich die folgenden:

$$\begin{aligned} C(X, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} &\cong C(X, \mathbb{C}) \\ L_{\mathbb{R}}(E, E)_{\mathbb{C}} &\cong L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) \end{aligned}$$

Wir können also von nun an annehmen, daß alle Banach-Algebren über \mathbb{C} sind, eine 1 besitzen, und $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ und $\|1\| = 1$ erfüllen. Damit zurück zur Spektral-Theorie.

Wie wir bereits angedeutet haben geben wir folgende

9.6 Definition. Es sei A eine Banach-Algebra mit 1 und $a \in A$. Dann nennt man die Menge

$$\sigma_A(a) := \sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \text{ ist nicht invertierbar in } A\}$$

das SPEKTRUM von a . Das Komplement

$$\rho(a) := \mathbb{C}_{\infty} \setminus \sigma(a) = \{\infty\} \cup (\mathbb{C} \setminus \sigma(a)),$$

in $\mathbb{C}_{\infty} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ heißt RESOLVENTEN-MENGE von a und die Abbildung

$$r_a : \rho(a) \rightarrow A, \quad \lambda \mapsto \begin{cases} (\lambda 1 - a)^{-1} & \text{für } \lambda \neq \infty \\ 0 & \text{für } \lambda = \infty \end{cases}$$

heißt RESOLVENTEN-FUNKTION von a . Beachte, daß die Definition $r_a(\infty) := 0$ vernünftig ist wegen

$$\begin{aligned} \|r_a(\lambda)\| &= \|(\lambda 1 - a)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(1 - \frac{1}{\lambda} a\right)^{-1} \right\| \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\lambda} a\right)^{-1} \right\| \\ &\leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{\lambda} a \right\|^n \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \left\| \frac{1}{\lambda} a \right\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|} \rightarrow 0 \text{ für } |\lambda| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Beispiele.

- 1 Es sei $A = C(X, \mathbb{C})$. Dann ist $f \in A$ genau dann invertierbar, wenn $0 \notin f(X)$. Folglich ist $\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 \in (\lambda - f)(X)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in f(X)\} = f(X)$.
- 2 Es sei $A = L(E) := L(E, E)$. Dann ist $a \in A$ nach dem offenen Abbildungssatz genau dann invertierbar, wenn a bijektiv ist. Also ist $\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ id} - a \text{ ist nicht bijektiv}\}$.

Wir wollen die Holomorphie von $r_a : \mathbb{C}_{\infty} \supseteq \rho(a) \rightarrow A$ beweisen. Dazu und für das Folgende benötigen wir etwas Instrumentarium aus der Funktionentheorie.

Nötiges aus der komplexen Analysis

In diesem Abschnitt fassen wir die benötigten Resultate aus der komplexen Analysis zusammen. Dabei sei F ein Folgen-vollständiger SNR. Die klassischen Sätze beziehen sich auf den Fall $F = \mathbb{C}$ und wir werden zunächst die Beweise für diesen Fall skizzieren. Wie man die Vektor-wertigen Resultate daraus erhält skizzieren wir am Ende dieses Abschnitts.

9.7 Differentialformen und Kurvenintegrale. Es sei F ein Folgen-vollständiger SNR und $U \subseteq E$ offen in einen SNR E . Eine F -wertige 1-FORM auf $U \subseteq E$ ist eine Abbildung $\omega : E \supseteq U \rightarrow L(E, F)$.

Ist ω stetig und $c : [a, b] \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve so ist das KURVEN-INTEGRAL durch das Vektor-wertige Riemann-Integral

$$\int_c \omega := \int_a^b \omega(c(t))(c'(t)) dt$$

definiert. Dieses ist unter Reparametrisierungen von c invariant und für normierte Räume E und F gilt

$$\left\| \int_c \omega \right\| \leq (b - a) \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|\omega(c(t))\| \cdot \sup_{t \in [a, b]} \|c'(t)\|.$$

Bekanntlich läßt sich diese Definition mittels Vektor-wertigen RIEMANN-STIELTJES INTEGRAL auch auf REKTIFIZIERBARE KURVEN in normierten Räumen ausdehnen, und es ist dann $\|\int_c \omega\| \leq (b - a) \sup\{\|\omega(c(t))\| : t \in [a, b]\} V(c)$, wobei $V(c) := \sup\{\sum_{k=1}^n \|c(t_k) - c(t_{k-1})\| : a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b\}$ die TOTALE VARIATION von c ist.

Jede differenzierbare Abbildung $f : E \supseteq U \rightarrow F$ zwischen Banach-Räumen E und F hat als Ableitung $f' : E \supseteq U \rightarrow L(E, F)$ eine 1-Form die auch als df bezeichnet wird und TOTALES DIFFERENTIAL von f genannt wird. Falls f affin ist, so ist df konstant.

Wegen des Satzes von Schwarz erfüllt diese Differentialform für $f \in C^2$ folgende Symmetriebedingung:

$$(df)'(x)(v)(w) = f''(x)(v, w) = f''(x)(w, v) = (df)'(x)(w)(v),$$

d.h. df ist geschlossen im folgenden Sinn: Eine GESCHLOSSENE 1-FORM ist eine stetig differenzierbare 1-Form, deren ÄUSSERE ABLEITUNG $d\omega$ verschwindet, wobei $d\omega : E \supseteq U \rightarrow L(E, L(E, F)) \cong L(E, E; F)$ gegeben ist durch $d\omega(x)(v, w) = \omega'(x)(v)(w) - \omega'(x)(w)(v)$. Man sagt anstelle von "ω ist geschlossen" auch, daß die INTEGRABILITÄTSBEDINGUNG $\omega'(x)(v)(w) = \omega'(x)(w)(v)$ erfüllt ist.

Umgekehrt kann man für sternförmige oder allgemeiner für einfach zusammenhängende Mengen U zeigen, daß jede geschlossene 1-Form $\omega : U \rightarrow L(E, F)$ EXAKT ist, d.h. eine differenzierbare Abbildung $f : E \supseteq U \rightarrow F$ existiert mit $df = \omega$.

Als Konsequenz ist das Kurvenintegral geschlossener 1-Formen lokal Kurven-unabhängig und folglich global längs homotoper Kurven gleich. Dabei heißen zwei Kurven c_0 und c_1 HOMOTOP, falls eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ existiert mit $H(j, t) = c_j(t)$ für alle $j \in \{0, 1\}$ und alle $t \in [a, b]$.

9.8 Holomorphe Funktionen. Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ heißt \mathbb{C} -DIFFERENZIERBAR oder üblicherweise auch HOLOMORPH, falls für alle $z \in U$ folgender Limes existiert

$$f'(z) := \lim_{\mathbb{C} \ni w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w} \in F.$$

Wenn $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph ist, so ist f auch \mathbb{R} -differenzierbar als Abbildung $f_{\mathbb{R}}$ von $U \subseteq \mathbb{R}^2$ in den reellen Vektorraum $F_{\mathbb{R}}$ und die Ableitung $(f_{\mathbb{R}})'(z) \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, F_{\mathbb{R}})$ ist dann \mathbb{C} -linear und stimmt mit $w \mapsto f'(z) \cdot w$ überein, denn

$$\lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{\|f(z+w) - f(z) - f'(z) \cdot w\|}{\|w\|} = \lim_{w \rightarrow 0} \left\| \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - f'(z) \right\| = 0.$$

Es gilt aber auch die Umkehrung: Sei dazu $F = \mathbb{C}$. Die \mathbb{C} -Linearität der Ableitung $(f_{\mathbb{R}})'(z) \in L_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ einer \mathbb{R} -differenzierbaren Abbildung $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$, bedeutet, daß $(f_{\mathbb{R}})'(z)$ durch Multiplikation mit einer Zahl in \mathbb{C} gegeben ist, die wir mit $f'(z)$ bezeichnen. Für diese ist

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\|w\| \rightarrow 0} \frac{\|f(z+w) - f(z) - f'(z) \cdot w\|}{\|w\|} = \lim_{\|w\| \rightarrow 0} \left\| \frac{f(z+w) - f(z) - f'(z) \cdot w}{w} \right\| \\ &= \lim_{w \rightarrow 0} \left\| \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - f'(z) \right\|, \end{aligned}$$

also $f'(z) = \lim_{w \rightarrow 0} \frac{f(z+w) - f(z)}{w}$.

In reellen Koordinaten können wir die \mathbb{C} -Linearität der Ableitung auch wie folgt beschreiben: Dazu zerlegen wir f in Real- und Imaginärteil, d.h. $f = g + i h$, und ebenso $z = (x, y) = x + i y$ und $w = (u, v) = u + i v$. Dann ist

$$(f_{\mathbb{R}})'(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x + iy) & \frac{\partial g}{\partial y}(x + iy) \\ \frac{\partial h}{\partial x}(x + iy) & \frac{\partial h}{\partial y}(x + iy) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

genau dann \mathbb{C} -linear, wenn

$$\begin{pmatrix} bu - av \\ du - cv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot i \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -cu - dv \\ au + bv \end{pmatrix}$$

für alle $u + iv \in \mathbb{C}$ gilt, d.h. (mittels Koeffizientenvergleich) wenn $d = a$ und $c = -b$ gilt. Dies sind genau die CAUCHY-RIEMANN'SCHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= -\frac{\partial h}{\partial x}. \end{aligned}$$

Wenn $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph ist, so ist $\omega : U \rightarrow L(\mathbb{R}^2, F_{\mathbb{R}})$, definiert durch $\omega(z) := f'(z) dz$, eine geschlossene 1-Form, wobei dz die (konstante) Ableitung der \mathbb{C} -linearen Funktion $\text{id} : z \mapsto z$ bezeichnet, denn die reelle Ableitung von $f(z) dz$ an der Stelle z ist durch $v \mapsto (w \mapsto f'(z) \cdot v \cdot w)$ gegeben, und somit symmetrisch in v und w .

Es seien weiters dx und dy die Ableitungen der \mathbb{R} -linearen Funktionen $\Re : x + iy \mapsto x$ und $\Im : x + iy \mapsto y$. Dann gilt offensichtlich $dz = dx + i dy$ und analog $d\bar{z} = dx - i dy$, wobei $d\bar{z}$ die Ableitung von $z \mapsto \bar{z}$ bezeichnet. Also ist $\{dz, d\bar{z}\}$ eine zu $\{dx, dy\}$ äquivalente Basis des komplexen Vektorraums $L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{R})_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Für jedes \mathbb{R} -differenzierbare $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$ haben wir

$$df(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z) dy.$$

Folglich muß es auch eine Darstellung bzgl. der Basis $\{dz, d\bar{z}\}$ geben, deren Koeffizienten wir in Analogie mit $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ bezeichnen, d.h.

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Wegen $2 dx = dz + d\bar{z}$ und $2i dy = dz - d\bar{z}$ können wir diese Koeffizienten auch leicht berechnen:

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dz + d\bar{z}}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{=\frac{\partial f}{\partial z}} dz + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} d\bar{z}, \end{aligned}$$

d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Da dz \mathbb{C} -linear und $d\bar{z}$ konjugiert \mathbb{C} -linear ist, ist f genau dann holomorph, wenn $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ ist. Analog ist f genau dann ANTI-HOLOMORPH, d.h. \bar{f} holomorph, wenn $\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$, denn

$$d\bar{f} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} d\bar{z} = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)} dz + \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)} d\bar{z}.$$

9.9 Cauchy'scher Integralsatz. Ist $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph und c_0 und c_1 zwei Kurven $I \rightarrow U$ die relativ $\partial I = \{0, 1\}$ in U homotop sind (d.h. die Homotopie erfüllt neben $H(j, t) = c_j(t)$ zusätzlich $H(s, k) = c_j(k)$ für alle $j, k \in \{0, 1\}$ und alle t und s) so ist

$$\int_{c_0} f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz.$$

Ist insbesondere $c : S^1 \rightarrow U$ eine geschlossene Kurve, welche in U homotop zu einer konstanten Kurve ist (dann heißt sie 0-HOMOTOP), so ist $\int_c f(z) dz = 0$.

Beweis. Der erste Teil ist eine Konsequenz der Geschlossenheit der 1-Form $z \mapsto f(z) dz$.

Für den zweiten Teil beachte man, daß aus einer (freien) Homotopie H zwischen c und einer konstanten Kurve konst_x sich eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ von c mit der Hintereinandersetzung der Kurven $c_1 : t \mapsto H(t, 1)$, der konstanten Kurve konst_x und der umgekehrt durchlaufenen Kurve $c_1^{-1} : t \mapsto H(1 - t, 1)$ konstruieren läßt. Also ist $\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz - \int_{c_1^{-1}} f(z) dz = 0$. \square

9.10 Windungszahl. Es sei c eine geschlossene C^1 -Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, so heißt

$$n(c, z) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z} dw$$

die WINDUNGSZAHL (oder auch UMLAUFZAHL) von c um z ist. Für einen Kreis $c : t \mapsto z + r e^{2\pi i t}$ mit Mittelpunkt z und Radius r erhalten wir offensichtlich

$$\begin{aligned} n(c, z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{c'(t)}{c(t) - z} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi i t}}{r e^{2\pi i t}} dt \\ &= \int_0^1 1 dt = 1. \end{aligned}$$

Da $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ ist, ist dieses Integral Homotopie-invariant und folglich konstant für z laufend in einer Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$ (In der Tat ist

$$n(c, z_s) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z_s} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{c_s} \frac{1}{w} dw$$

für jede Kurve $s \mapsto z_s$ inj $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$ wobei $c_s(t) := c(t) - z_s$ eine Homotopie beschreibt).

Für eine geschlossene Kurve c , die in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotop zum k -mal durchlaufenem Kreis ist, gilt folglich $n(c, z) = k$, denn $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ ist offensichtlich holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z\}$. In der algebraischen Topologie zeigt man, daß die Windungszahl eine topologische Invariante ist, d.h. auch für geschlossene stetige Kurve wohldefiniert ist, Homotopie-Invariant ist und in $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C}$ liegt. Weiters zeigt man, daß jede geschlossene Kurve in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ homotop zum $n(c, z)$ -fach durchlaufenen Einheits-Kreis mit Mittelpunkt z ist.

9.11 Cauchy'sche Integralformeln. Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph, K eine abgeschlossene Kreisscheibe in U und z im Inneren von K . Dann ist

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w - z} dw,$$

wobei ∂K den positiv (d.h. $n(\partial K, z) = +1$) parametrisierten Rand von K bezeichnet.

Weiters ist f unendlich oft \mathbb{C} -differenzierbar und es gilt

$$f^{(p)}(z) = \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w - z)^{p+1}} dw.$$

Beweis. Es sei $g(w) := \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$. Dann ist g holomorph auf $U \setminus \{z\}$ und auf K beschränkt, da f bei z differenzierbar ist. Nach dem Cauchy'schen Integralsatz

ist $\int_{\partial K} g = \int_{\partial K_\varepsilon} g$, wobei K_ε eine Kreisscheibe von Radius $\varepsilon > 0$ um z ist. Nun verwendet man $\|\int_{K_\varepsilon} g\| \leq 2\pi\varepsilon\|g\|_\infty \rightarrow 0$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und erhält $0 = \int_{\partial K} g = \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw - f(z) \cdot 1$.

Daß f unendlich oft differenzierbar ist, folgt, indem man die Ableitung mit den Integral vertauscht:

$$\begin{aligned} f^{(p)}(z) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^p \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(w) \left(\frac{d}{dz}\right)^p \frac{1}{w-z} dw \\ &= \frac{p!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{(w-z)^{p+1}} dw. \quad \square \end{aligned}$$

9.12 Cauchy-Abschätzung. Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph und K eine Kreisscheibe mit Radius r und Mittelpunkt z in U . Dann gilt:

$$\left\| \frac{f^{(n)}(z)}{n!} \right\| \leq \frac{\|f|_{\partial K}\|_\infty}{r^n}.$$

Insbesondere ist die Taylorreihe von f im Punkt z auf K gleichmäßig konvergent.

Beweis. Die Ungleichung folgt durch Abschätzen des Integrals, und die absolute und gleichmäßige Konvergenz der Taylorreihe, indem man für eine die Ungleichung für eine etwas größere Kreisscheibe K_R mit Radius $R > r$ wie folgt abschätzt:

$$\left\| \sum_k \frac{w^k}{k!} f^{(k)}(z) \right\| \leq \sum_k |r|^k \frac{\|f^{(k)}(z)\|}{k!} \leq \|f|_{K_R}\|_\infty \sum_k \left(\frac{r}{R}\right)^k. \quad \square$$

9.13 Identitätssatz. Es sei $f : U \rightarrow F$ holomorph auf der offenen zusammenhängenden Menge U und verschwinde auf einer in U konvergenten nicht schließlich konstanten Folge. Dann ist $f = 0$.

Beweis. Für konvergente Potenzreihe um den Grenzwert gilt das klarerweise, also ist f lokal um den Grenzwert 0. Eine maximale offene zusammenhängende Menge $W \subseteq U$ auf der f verschwindet existiert also. Sie muß aber auch abgeschlossen in U sein und damit mit U übereinstimmen. \square

9.14 Hebbare Singularität. Es sei $z \in U$ und $f : U \setminus \{z\} \rightarrow F$ holomorph und f lokal um z beschränkt. Dann ist f auf U holomorph erweiterbar.

Beweis. Es K eine Kreisscheibe um z in U auf welcher f beschränkt ist. Es sei $z' \in K \setminus \{z\}$. Wie im Beweis der Cauchy'schen Integral-Formel (9.11) zeigt man, daß für die auf $U \setminus \{z, z'\}$ holomorphe und auf K beschränkte Funktion $w \mapsto \frac{f(w)-f(z')}{w-z'}$ gilt: $0 = \int_{\partial K} \frac{f(w)-f(z')}{w-z'} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z'} dw - f(z')$. Das letzte Integral ist aber holomorph in z' im Inneren von K , also gilt gleiches für f . \square

9.15 Satz von Liouville. Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow F$ holomorph und beschränkt, dann ist f konstant.

Beweis. Es ist $|f'(z)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{r}$ für alle r und alle $z \in \mathbb{C}$ also ist $f' = 0$ und damit f konstant. \square

9.16 Maximum-Modulus-Prinzip. *Es sei U offen und zusammenhängend sowie $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph und nicht konstant. Dann besitzt $z \mapsto \|f(z)\|$ kein Maximum.*

Beweis. Es sei $F = \mathbb{C}$. Angenommen es gäbe ein Maximum bei $z_0 \in U$, d.h. $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in U$. Wir zeigen zuerst, daß daraus die Konstanz von $z \mapsto |f(z)|$ folgt. Angenommen dies wäre nicht der Fall, dann gäbe ein $z_1 \in U$ mit $|f(z_0)| > |f(z_1)|$. Da U zusammenhängend ist können wir z_0 mit z_1 durch einer Kurve $t \mapsto z(t)$ verbinden. Wir wählen t_0 maximal mit $|f(z_{t_0})| = |f(z_0)|$. Dann existieren beliebig nahe an z_{t_0} Punkte z_t mit $|f(z_0)| > |f(z_t)|$. Wir wählen eine Kreis $K \subseteq U$ um z_{t_0} dessen Peripherie solch einen Punkt z_{t_1} enthält. Dann ist $|f(z_{t_1})| < |f(z_0)|$ und $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ für alle $z \in \partial K$. Aus der Cauchy'schen-Integralformel (9.11) erhalten wir somit $|f(z_{t_0})| < |f(z_0)|$, einen Widerspruch.

Falls die Konstante $|f|$ gerade 0 ist sind wir fertig. Andernfalls folgt durch Differenzieren der Konstante $|f|^2$ die Gleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f \cdot \bar{f})(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \cdot \bar{f}(z) + f(z) \cdot \frac{\partial \bar{f}(z)}{\partial \bar{z}} = 0 + f(z) \cdot \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)}$$

Wegen $|f| \neq 0$ folgt $0 = \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$, d.h. f ist konstant. \square

9.17 Differenzierbare Struktur von \mathbb{C}_∞ . Um nun für Funktionen wie r_a auf offenen Teilmengen von \mathbb{C}_∞ von Differenzierbarkeit sprechen zu können, müssen wir \mathbb{C}_∞ mit einer differenzierbaren Struktur versehen. Dazu identifizieren wir \mathbb{C}_∞ mit der Einheitssphäre $S^2 := \{(y, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |y|^2 + t^2 = 1\}$ in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$. Die Einbettung von \mathbb{C} in S^2 wird vermittelt durch die Inverse der stereographischen Projektion der Äquator-Ebene $\mathbb{C} \times \{0\} \cong \mathbb{C}$ mit dem Nordpol $N := \{0, 0, 1\}$ als Zentrum. Es entsprechen sich dabei der Nordpol $N \in S^2$ und der Punkt $\infty \in \mathbb{C}_\infty$. Der Strahlensatz $z : 1 = y : (1 - t)$ zeigt, daß die stereographische Projektion durch

$$\mathbb{C} \times \mathbb{R} \supset S^2 \setminus \{N\} \ni (y, t) \mapsto \frac{1}{1-t}y \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\}$$

gegeben ist und ihre Inverse ist

$$\varphi_+ : \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{|z|^2 + 1}(2z, |z|^2 - 1) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R},$$

da der zweite Schnittpunkt der Geraden $t \mapsto z + t(N - z)$ durch N und z mit der Sphäre durch die Lösung $t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$ der Gleichung $1 = \|tN + (1 - t)z\|^2 = t^2 + (1 - t)^2\|z\|^2$ gegeben ist

Diese liefert also eine "Karte" von S^2 . Wir können auch eine Karte um N definieren, indem wir auf analoge Weise die Inverse φ_- der stereographische Projektion $(y, t) \mapsto (y, -t) \mapsto \frac{1}{1+t}y$ um den Südpol $S := -N$ verwenden.

Nun können wir Differenzierbarkeits-Definitionen auf Funktionen $f : S^2 \supseteq U \rightarrow F$ übertragen, indem wir verlangen, daß die beiden Zusammensetzungen $f \circ \varphi_j : \mathbb{C} \subseteq \varphi_j^{-1}(U) \rightarrow U \rightarrow F$ für $j \in \{+, -\}$ diese haben. Man sollte aber noch überprüfen, daß für Punkte $(x, t) \in S^2$ in gemäßigten Breiten, d.h. solche in $\varphi_+(\mathbb{C}) \cap \varphi_-(\mathbb{C})$, die Differenzierbarkeit von $f \circ \varphi_+$ bei $\varphi_+^{-1}(x, t)$ gleichbedeutend ist mit jener von

$f \circ \varphi_-$ bei $\varphi_-^{-1}(x, t)$. Wegen $f \circ \varphi_- = (f \circ \varphi_+) \circ (\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)$ genügt zu zeigen, daß der Kartenwechsel $\varphi_+^{-1} \circ \varphi_- : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist. Dieser ist durch

$$z \mapsto \frac{1}{|z|^2 + 1} (2z, -(|z|^2 - 1)) \mapsto \frac{1}{1 - \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2}} \frac{2z}{|z|^2 + 1} = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$$

gegeben. Dies ist die Spiegelung am Einheitskreis, wie auch mittels elementar geometrischer Überlegungen leicht einzusehen ist. Diese Abbildung ist glatt und antiholomorph, also sollten wir die zweite Karte noch mit der Konjugation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ zusammensetzen, um als neuen Kartenwechsel die holomorphe Abbildung $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ zu erhalten.

Zusammenfassend bedeutet dies also, daß eine Abbildung $f : \mathbb{C}_\infty \supseteq U \rightarrow F$ holomorph genannt wird, wenn sowohl $f|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C} \cap U \rightarrow F$ holomorph ist, als auch $z \mapsto f(\frac{1}{\bar{z}})$ von $\{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{\bar{z}} \in U\} \rightarrow F$ es ist.

Bemerkung. Jordan-Kurven. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Unter einer JORDAN-KURVE in U versteht man eine injektive Kurve $c : S^1 \rightarrow U$ (man sagt auch eine EINFACH GESCHLOSSENE KURVE). Da S^1 kompakt ist, ist diese ein Homöomorphismus auf ihr Bild $c(S^1)$.

Jordan'sche Kurvensatz. *Es sei c eine stetige Jordan-Kurve in \mathbb{C} . Dann besitzt $\mathbb{C}_\infty \setminus c(S^1)$ genau zwei Zusammenhangskomponenten. Diese haben jeweils $c(S^1)$ als Rand. Die Komponente, die ∞ enthält heißt das ÄUSSERE $\text{Äuß}(c)$ von c , die andere das INNERE $\text{Inn}(c)$ von c . Die Spur von $\text{Äuß}(c)$ auf \mathbb{C} ist die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus c(S^1)$ und jene von $\text{Inn}(c)$ ist die beschränkte Komponente.*

Eine stärkere Formulierung ist das

9.18 Schönflies'sche Theorem. *Es sei $c : S^1 \rightarrow S^2$ eine Jordan-Kurve, dann existiert eine Erweiterung $\tilde{c} : S^2 \rightarrow S^2$, die ein Homöomorphismus ist. Dabei ist S^1 als Äquator in S^2 eingebettet.*

Folglich sieht jede Jordan-Kurve in S^2 bis auf Homöomorphie wie $S^1 \subseteq S^2$ aus. Insbesondere sind die Komponenten von $S^2 \setminus c(S^1)$ homöomorph zu jenen von $S^2 \setminus S^1$ also zu \mathbb{D} und damit einfach zusammenhängend, d.h. jede geschlossene Kurve ist homotop zu einer konstanten Kurve.

Für einen Beweis siehe man [M, 10.3, S.71].

Da die Windungszahl unter Orientierungs-erhaltenden Homöomorphismen erhalten bleibt, ist sie für Jordan-Kurven c am Inneren konstant ± 1 und am Äußeren natürlich 0, d.h.

$$\begin{aligned} \text{Inn}(c) &= \{z \in \mathbb{C} \setminus c(S^1) : n(c, z) = \pm 1\} \\ \text{Äuß}(c) &= \{z \in \mathbb{C} \setminus c(S^1) : n(c, z) = 0\} \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

In [C2, VIII.2.2, S.202] findet sich folgendes:

9.19 Riemann'sche Abbildungssatz. [C2, VIII.2.2, S.202] *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ zusammenhängend. Dann sind äquivalent*

- 1 $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ ist zusammenhängend;
- 2 Die Polynome liegen dicht in $H(U)$;
- 3 $\int_c f = 0$ für alle $f \in H(U)$ und $c \in C(S^1, U)$;

- 4 Jedes $f \in H(U)$ besitzt eine Stammfunktion $\varphi \in H(U)$, d.h. mit $\varphi' = f$;
- 5 $\forall f \in H(U), 0 \notin f(U) \exists g \in H(U): f = \exp \circ g$;
- 6 $\forall f \in H(U), 0 \notin f(U) \exists g \in H(U): f = g^2$;
- 7 Es existiert ein (holomorpher) Homöomorphismus $\mathbb{D} \cong U$;
- 8 U ist einfach zusammenhängend;
- 9 $n(c, z) = 0$ für alle $c \in C(S^1, U)$, $z \in \mathbb{C} \setminus U$.

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) Dies ist die Folgerung aus Runge's Theorem in (7.21).

((2) \Rightarrow (3)) Seien f_n Polynome mit $f_n \rightarrow f$. Es ist $c \sim 0$ in \mathbb{C} und somit $\int_c f_n = 0$. Also auch $\int_c f = 0$.

((3) \Rightarrow (4)) Man setzt $\varphi(z) := \int_{c_z} f$, wobei c_z eine Kurve sei die z mit einem fix gewählten Punkt z_0 in U verbindet. Dann sieht man leicht, daß φ eine Stammfunktion ist (Integrabilitätskriterium).

((4) \Rightarrow (5)) Es sei $\varphi' := \frac{f'}{f}$ und somit $f = \exp \circ (\varphi + c)$ für eine geeignete Konstante c . In der Tat ist $h := \exp \circ \varphi$ holomorph mit $h' = \varphi' \cdot h = \frac{f'h}{f}$ und somit ist

$$\left(\frac{f}{h}\right)' = \frac{hf' - h'f}{h^2} = 0,$$

also $f = c \cdot h$ für ein $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, und damit $f = \exp \circ (\varphi + c')$ für c' mit $c = e^{c'}$.

((5) \Rightarrow (6)) Aus $f = \exp \circ \varphi$ folgt $f = (\exp \circ \frac{\varphi}{2})^2$.

((6) \Rightarrow (7)) Dies ist der Kernteil des Riemann'schen Abbildungssatzes, siehe [C2, VII.4.3, S.161]. Falls $U = \mathbb{C}$ so können wir nur einen Diffeomorphismus, z.B. $x \mapsto \frac{1-\|x\|^2}{x}$, finden.

((7) \Rightarrow (8)) Offensichtlich, da \mathbb{D} einfach zusammenhängend ist.

((8) \Rightarrow (9)) Da U einfach zusammenhängend ist, ist $c \sim 0$ und somit $n(c, z) = n(0, z) = 0$.

((9) \Rightarrow (1)) Siehe unten. \square

9.20 Ketten und Zyklen. Da wir nicht nur Kreisscheiben, sondern allgemeine kompakte K verwenden wollen, müssen wir Jordan-Kurven durch etwas allgemeineres ersetzen. Dies sind sogenannte 1-KETTEN, d.h. formale linear-Kombination $c := \sum_j k_j c_j$ von Kurven $c_i : [0, 1] \rightarrow U$ mit Koeffizienten $k_i \in \mathbb{Z}$. Die Menge aller 1-Ketten bildet eine Abelsche Gruppe (aller Abbildungen $C([0, 1], U) \rightarrow \mathbb{Z}$ mit endlichen Träger) bezüglich der komponentenweisen Addition. Der Rand ∂c einer 1-Kette ist eine 0-KETTE, d.h. eine formale linear-Kombination von Punkten, die wie folgt definiert ist $\partial c := \sum_j k_j (c_j(1) - c_j(0))$. Eine 1-Kette c heißt ZYKEL, falls $\partial c = 0$ ist. Das ist insbesondere der Fall, wenn alle c geschlossene Kurven sind. Die Teilmenge der Zyklen ist eine Untergruppe der 1-Ketten. Man dehnt das Kurven-Integral von 1-Formen ω auf Zyklen c durch Linearität aus, d.h.

$$\int_c \omega = \sum_j k_j \int_{c_j} \omega$$

und definiert die Windungszahl

$$n(c, z) := \sum_j k_j n(c_j, z)$$

für alle $z \notin \text{Bild}(c) := \bigcup_j c[0, 1]$.

Ein 1-Zykel c heißt 0-HOMOLOG in U , falls $n(c, z) = 0$ für alle $z \notin U$. Zwei Zyklen c_1 und c_2 heißen HOMOLOG in U , falls $n(c_1, z) = n(c_2, z)$ für alle $z \notin U$. Die 0-homologen Zyklen bilden eine Untergruppe der Zyklen. Die Quotientengruppe $H_1(U, \mathbb{Z})$ heißt 1-te HOMOLOGIE-GRUPPE von U mit Koeffizienten in \mathbb{Z} .

Man beachte, daß zwei geschlossene Kurven die in U homotop sind, wegen der Homotopieinvarianz der Windungszahl auch homolog sind. Die Umkehrung gilt nicht, da Homotopie nicht kommutativ ist. Wir wollen nun den Cauchy'schen Integralsatz (9.9) und die Cauchy'sche Integralformel (9.11) darauf verallgemeinern.

9.21 Verallgemeinerter Cauchy'scher Integralsatz und Integralformel. *Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ holomorph. Für beliebige in U homologe Zyklen c_1 und c_2 gilt*

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz.$$

Ist c ein 0-homologer Zykel in U , so gilt

$$f(z) n(c, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w - z} dw \text{ für alle } z \in U \setminus \text{Bild}(c).$$

Beweis. Zuerst zum zweiten Teil. Dazu betrachten wir die Abbildung $\varphi : (z, w) \mapsto \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$ für $z \neq w$ und $\varphi : (z, z) \mapsto f'(z)$. Es ist $\varphi : U \times U \rightarrow F$ stetig (und in der Tat sogar holomorph, nach Hartogs' Theorem und dem Satz (9.14) über hebbare Singularitäten). Für $z \in U$ sei

$$\begin{aligned} h(z) &:= \frac{1}{2\pi i} \int_c \varphi(z, w) dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_c \frac{1}{w - z} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) n(c, z). \end{aligned}$$

Es ist also zu zeigen, daß $h = 0$ ist. Man sieht leicht, daß $h : U \rightarrow F$ durch

$$h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w - z} dw \text{ für } z \in U_1 := \{z \notin \text{Bild}(c) : n(c, z) = 0\} \supseteq \mathbb{C} \setminus U.$$

holomorph auf \mathbb{C} fortsetzbar ist. Da für $z \rightarrow \infty$ dieses Integral gegen 0 geht, ist h beschränkt und somit nach dem Satz (9.15) von Liouville identisch $f(\infty) = 0$.

Nun zum ersten Teil. Dazu genügt offensichtlich zu zeigen, daß $\int_c f(z) dz = 0$ ist für den 0-homologen Zykel $c := c_1 - c_2$. Für $z \in U \setminus \text{Bild } c$ sei $f_z(w) := (w - z) f(w)$. Dann gilt nach dem zweiten Teil, daß

$$0 = f_z(z) n(c, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f_z(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_c f(w) dw \quad \square$$

9.22 Lemma. Einfangen von Löchern. *Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $K \subseteq U$ kompakt. Dann existiert ein 1-Zykel $c = \sum_j c_j$ von glatten geschlossenen Kurven c_j in $U \setminus K$ mit paarweise disjunkten Bildern und so daß $n(c, z) \in \{0, 1\}$ für alle $z \notin \text{Bild}(c)$ gilt. Es sei das Innere und das Äußere von c definiert durch*

$$\begin{aligned} \text{Inn}(c) &:= \{z \notin \text{Bild}(c) : n(c, z) = 1\} \\ \text{Äuß}(c) &:= \{z \notin \text{Bild}(c) : n(c, z) = 0\}. \end{aligned}$$

Dann gilt weiters $K \subseteq \text{Inn}(c) \subseteq U$, oder äquivalent $\mathbb{C} \setminus U \subseteq \text{Äuß}(c) \subseteq \mathbb{C} \setminus K$. So einen Zykel nennen wir JORDAN-SYSTEM.

Beweis. O.B.d.A. ist U beschränkt: Ersetze U durch die beschränkte Menge $\{x \in U : d(x, K) < 1\}$.

O.B.d.A. besitzt $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten: Ersetze U durch $U_\varepsilon := \{x \in U : d(x, \mathbb{C} \setminus U) > \varepsilon\}$, wobei $\varepsilon < d(K, \mathbb{C} \setminus U)$. Dann ist $K \subseteq U_\varepsilon$ und jede Komponente von $\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon$ enthält einen offenen Ball mit Radius ε (In der Tat aus $d(x, \mathbb{C} \setminus U) \leq \varepsilon$ folgt $\exists y \in \mathbb{C} \setminus U$ mit $d(x, y) \leq \varepsilon$ und somit ist $\{z : d(z, y) \leq \varepsilon\}$ zusammenhängend in $\mathbb{C} \setminus U_\varepsilon$). Davon kann es in einer beschränkten Menge aber nur endlich viele geben.

Wir nehmen nun zusätzlich vorerst an, daß U zusammenhängend ist. Es seien $\infty \in K_0, \dots, K_N$ die (abgeschlossenen und damit kompakten) Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{C}_\infty \setminus U$. Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodaß K sowie $(K_j)^\varepsilon := \{z : \text{dist}(z, K_j) < \varepsilon\}$ noch paarweise disjunkt sind.

Es ist $\mathbb{C}_\infty \setminus K_j = U \cup \bigcup_{i \neq j} K_i$ zusammenhängend, denn $K_j \cap \partial U \neq \emptyset$ (Anderfalls besäße jedes $z \in K_j$ einen von U disjunkten Ball $B(z)$ um z . Da $K_j \cup B(z)$ zusammenhängend ist, ist $B(z) \subseteq K_j$, also K_j offen, ein Widerspruch). Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz (9.19) ist somit $\mathbb{C}_\infty \setminus K_j$ einfach zusammenhängend und es existiert (falls K_j kein Punkt ist) ein (orientierungserhaltender) Diffeomorphismus $f_j : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}_\infty \setminus K_j$. Da $\mathbb{C}_\infty \setminus (K_j)^\varepsilon \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_j$ kompakt ist, existiert ein $0 < \delta < 1$, s.d. $\mathbb{C}_\infty \setminus (K_j)^\varepsilon \subseteq f_j(\delta \mathbb{D})$ und somit $f_j(\delta S^1) \subseteq (K_j)^\varepsilon \setminus K_j$. Die Zusammensetzung von f mit einer Parametrisierung des Kreises δS^1 liefert also eine glatte Jordan-Kurve $c_j : S^1 \rightarrow f(\delta S^1) \subseteq (K_j)^\varepsilon \setminus K_j$ für welche $f_j(\delta \mathbb{D})$ eine Zusammenhangskomponente des Komplements ist, und zwar genau für $j = 0$ die Innere, da $\infty \in K_0 \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus (K_i)^\varepsilon$ für $i \neq 0$. Wir wählen die Orientierung der Parametrisierung so, daß für $z \in \text{Inn}(c_j)$ gilt:

$$n(c_j, z) = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0 \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. wegen

$$K \cup \bigcup_{i \neq j} (K_i)^\varepsilon \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus (K_j)^\varepsilon \subseteq f_j(\delta \mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_j$$

folgt

$$\begin{aligned} j = 0 : \quad & \mathbb{C}_\infty \setminus (K_0)^\varepsilon \subseteq \text{Inn}(c_0) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_0, \text{ äquivalent } K_0 \subseteq \text{Äuß}(c_0) \subseteq (K_0)^\varepsilon \\ j \neq 0 : \quad & \mathbb{C}_\infty \setminus (K_j)^\varepsilon \subseteq \text{Äuß}(c_j) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_j, \text{ äquivalent } K_j \subseteq \text{Inn}(c_j) \subseteq (K_j)^\varepsilon \end{aligned}$$

Sei nun $c := \sum_{j \geq 0} c_j$. Dann sind die Bilder der c_j enthalten in den $(K_j)^\varepsilon$ und somit paarweise disjunkt und enthalten in $(K_j)^\varepsilon \setminus K_j \subseteq U \setminus K$.

Falls $n(c_j, z) \neq 0$ für ein $j > 0$, so ist $z \in \text{Inn}(c_j) \subseteq (K_j)^\varepsilon \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus (K_0)^\varepsilon \subseteq \text{Inn}(c_0)$ und somit ist nur noch $n(c_0, z) \neq 0$, d.h. $n(c, z) = n(c_0, z) + n(c_j, z) = 1 - 1 = 0$. Also ist $n(c, z) \in \{0, 1\}$ für alle z . Aus $n(c, z) = 1$ folgt $z \in \text{Inn}(c_0) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_0$ und $z \in \text{Äuß}(c_j) \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K_j$ für $j \neq 0$. Also ist $z \in \mathbb{C}_\infty \setminus \bigcup_j K_j = U$. Schließlich folgt aus $z \in K \subseteq \text{Inn}(c_0) \cap \bigcap_{j \geq 1} \text{Äuß}(c_j)$, daß $n(c, z) = 1$ ist, d.h. $z \in \text{Inn}(c)$.

Falls nun U nicht zusammenhängend ist, so überdecken endlich viele der Zusammenhangskomponenten U^i die kompakte Menge K . Jedes $K^i := K \cap U^i$ ist dann kompakt in U^i (denn U_i ist abgeschlossen in U und somit ist K_i abgeschlossen in K) und besitzt nach obigen ein Jordan-System c^i in $U^i \setminus K^i$ mit $K^i \subseteq \text{Inn}(c^i) \subseteq U^i$. Dann ist $\sum_i c^i$ ein Jordan-System von $K \subseteq U$ mit $K \subseteq \text{Inn}(c^i) \subseteq U$, denn für x im Komplement ist $n(c^i, x) \in \{0, 1\}$ und $n(c^i, x) = 0$ falls $x \in U^j$ mit $j \neq i$. \square

Beweis von $9 \Rightarrow 1$ in (9.19). Angenommen $\mathbb{C}_\infty \setminus U$ ist nicht zusammenhängend, d.h. es existieren abgeschlossene nicht leere Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ und $A \cup B = \mathbb{C}_\infty \setminus U$. O.B.d.A. $\infty \in B$. Also ist $A \subseteq \mathbb{C}$ kompakt und enthalten in der offenen Menge $U \cup A = \mathbb{C}_\infty \setminus B$. Nach (9.22) existiert ein Jordan-System c in $(U \cup A) \setminus A = U$ mit $A \subseteq \text{Inn}(c)$, ein Widerspruch zu $n(c, z) = 0$ für alle $z \in A \subseteq \mathbb{C} \setminus U$ nach (9). \square

Um diese Sätze für Vektorwertige Funktionen zu erhalten, kann man erfolgreich folgendes Lemma verwenden.

9.23 Lemma. *Es sei F ein Folgen-vollständiger SNR. Dann ist $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F$ genau dann holomorph, wenn $\ell \circ f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow F \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist für alle $\ell \in F^*$.*

Beweis. (\Rightarrow) Ist offensichtlich, da $\ell \in F^*$ als lineare stetige Abbildung mit Limiten und Differenzenquotienten-Bildung vertauscht.

(\Leftarrow) Es gilt:

$$\begin{aligned} \ell \left(\frac{f(z) - f(0)}{z} - \frac{f(w) - f(0)}{w} \right) &= \frac{(\ell \circ f)(z) - (\ell \circ f)(0)}{z} - \frac{(\ell \circ f)(w) - (\ell \circ f)(0)}{w} \\ &= \int_0^1 (\ell \circ f)'(tz) - (\ell \circ f)'(tw) dt \\ &= (z - w) \int_0^1 \int_0^1 t (\ell \circ f)''(tw + ts(z - w)) ds dt. \end{aligned}$$

Da $\ell \circ f$ holomorph ist, ist $\ell \circ f$ 2-mal stetig differenzierbar und somit der Integrand für $t, s \in [0, 1]$ und z, w nahe 0 gleichmäßig beschränkt. Also ist auch das Integral lokal in z und w nahe 0 beschränkt, und somit ist

$$\frac{1}{w - z} \left(\frac{f(z) - f(0)}{z} - \frac{f(w) - f(0)}{w} \right)$$

skalarbeschränkt und nach (5.5) sogar beschränkt. Damit konvergiert aber das Netz $\frac{f(z) - f(0)}{z} - \frac{f(w) - f(0)}{w} \rightarrow 0$ für $w, z \rightarrow 0$, d.h. $w \mapsto \frac{f(w) - f(0)}{w}$ ist ein Cauchy-Netz und konvergiert folglich. D.h. f ist holomorph. \square

Mittels diesem Lemmas lassen sich nun alle oben angeführten Resultate aus der komplexen Analysis auf den Vektorwertigen Fall übertragen.

Für den Satz (9.15) von Liouville geht das z.B. wie folgt: Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow F$ holomorph und beschränkt. Dann ist $\ell \circ f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt, also

nach dem klassischen Satz konstant, für alle $\ell \in F^*$. Da diese ℓ Punkte-trennend sind, ist f selbst konstant.

Für den Cauchy'sche Integralsatz (9.9) und die Integralformel (9.11), bzw. (9.21), z.B. beachte man:

$$\ell \left(\int_c f \right) = \int_c \ell \circ f \text{ und } \ell \circ f' = (\ell \circ f)'.$$

9.24 Lemma. Für $a \in A$ gilt:

- 1 Ist $\lambda \in \rho(a)$, so ist $\text{dist}(\lambda, \sigma(a)) \geq \|(\lambda - a)^{-1}\|^{-1}$.
- 2 Für $\lambda, \mu \in \rho(a)$ gilt die Resolventengleichung:

$$\frac{r_a(\lambda) - r_a(\mu)}{\lambda - \mu} = -r_a(\lambda) r_a(\mu) = -r_a(\mu) r_a(\lambda).$$

Beweis. (1) Es sei $\lambda \in \rho(a)$ und $|\mu| < \|(\lambda - a)^{-1}\|^{-1}$. Dann ist $\lambda + \mu \in \rho(a)$ und somit gilt $\text{dist}(\lambda, \sigma(a)) \geq \frac{1}{\|(\lambda - a)^{-1}\|}$, denn $\lambda + \mu - a$ ist nach (3.7) invertierbar da $\|(\lambda + \mu - a) - (\lambda - a)\| = |\mu| < \|(\lambda - a)^{-1}\|^{-1}$.

(2) Mit $x := \lambda - a$ und $y := \mu - a$ gilt

$$\begin{aligned} r_a(\lambda) - r_a(\mu) &= x^{-1} - y^{-1} = x^{-1} (y - x) y^{-1} \\ &= (\lambda - a)^{-1} (\mu - \lambda) (\mu - a)^{-1} = (\mu - \lambda) (\lambda - a)^{-1} (\mu - a)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda) r_a(\lambda) r_a(\mu). \quad \square \end{aligned}$$

9.25 Satz. Es sei $a \in A$. Dann ist das Spektrum $\sigma(a)$ von a kompakt und nicht-leer. Die Resolventen-Funktion ist holomorph von der offenen Teilmenge $\rho(a)$ der Riemannschen Zahlenkugel \mathbb{C}_∞ nach A .

Beweis. Für $|\lambda| > \|a\|$ gilt: $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda}a)$ und $\|1 - (1 - \frac{1}{\lambda}a)\| = \|\frac{1}{\lambda}a\| = \frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1$, also ist $1 - \frac{1}{\lambda}a$ invertierbar, und damit auch $\lambda 1 - a = \lambda(1 - \frac{1}{\lambda}a)$, d.h. $\lambda \in \rho(a)$. Also ist $\sigma(a) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq \|a\|\}$ und folglich beschränkt.

Es ist $\rho(a) \cap \mathbb{C} := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda 1 - a \in \text{Inv}(A)\}$. Da die affine Abbildung $\lambda \mapsto \lambda 1 - a$ stetig ist, ist ihr inverses Bild der offenen Menge $\text{Inv}(A)$ ebenfalls offen. Also ist $\rho(a) \cap \mathbb{C}$ offen in \mathbb{C} .

Folglich ist $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus (\rho(a) \cap \mathbb{C})$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Also ist $\sigma(a)$ auch in \mathbb{C}_∞ kompakt, und damit $\rho(a) = \mathbb{C}_\infty \setminus \sigma(a)$ offen in \mathbb{C}_∞ .

Die Abbildung $\lambda \mapsto (\lambda 1 - a) \mapsto (\lambda 1 - a)^{-1}$ ist als Zusammensetzung einer affinen mit einer komplex-differenzierbaren Abbildung, selbst eine komplex differenzierbare Abbildung $r_a : \rho(a) \cap \mathbb{C} \rightarrow \text{inv}(A) \subseteq A$ und für die Ableitung gilt wegen der Kettenregel:

$$r'_a(\lambda) = \text{inv}'(\lambda 1 - a) \cdot 1 = -(\lambda - a)^{-1} 1 (\lambda - a)^{-1} = -(\lambda - a)^{-2}.$$

Will man nicht die komplexe Differenzierbarkeit der Inversion verwenden, so läßt sich dies mittels Resolventengleichung (9.24.2) auch direkt leicht nachrechnen.

Für die Holomorphie bei ∞ müssen wir die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{z} \mapsto r_a(\frac{1}{z})$ nahe 0 studieren. Für $z \neq 0$ ist diese holomorph da $\rho(a)$ eine Umgebung von ∞ ist und wegen $\lim_{z \rightarrow \infty} r_a(z) = 0$ ist r_a vermöge $r_a(\infty) := 0$ holomorph bei 0 nach (9.14).

Direkt sieht man das auch daraus, daß diese Abbildung sich für $\|za\| < 1$, d.h. für $|z| < \frac{1}{\|a\|}$, wie folgt in eine konvergente Potenzreihe entwickeln läßt

$$\begin{aligned} r_a \left(\frac{1}{z} \right) &= \left(\frac{1}{z} - a \right)^{-1} = \left(\frac{1}{z} (1 - za) \right)^{-1} = z (1 - za)^{-1} \\ &= z \sum_{k=0}^{\infty} (za)^k = z \sum_{k=0}^{\infty} z^k a^k. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß das Spektrum nicht-leer ist.

Andernfalls wäre $r_a : \mathbb{C}_{\infty} \rightarrow A$ eine auf ganz \mathbb{C}_{∞} holomorphe (also beschränkte) Funktion und somit nach dem Satz (9.15) von Liouville konstant. Wegen $r_a(\infty) = 0$ wäre also $r_a = 0 \notin \text{Inv}(A)$, ein Widerspruch. \square

9.26 Lemma und Definition. *Unter dem SPEKTRAL-RADIUS $r(a)$ von $a \in A$ versteht man*

$$r(a) := \max\{|z| : z \in \sigma(a)\}.$$

Für ihn gilt:

$$r(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Beweis. Da $r_a : \rho(a) \rightarrow A$ nach (9.25) holomorph ist, ist $z \mapsto r_a(\frac{1}{z})$ für $\frac{1}{z} \in \rho(a)$ holomorph, also konvergiert die Taylorreihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} a^k$ dieser Funktion im Inneren der größten Scheibe welche in $\{z : \frac{1}{z} \in \rho(a)\}$ enthalten ist. Diese hat nach Definition gerade den Radius $\inf\{|z| : \frac{1}{z} \notin \rho(a)\} = \frac{1}{\sup\{|z| : z \in \sigma(a)\}} = \frac{1}{r(a)}$. Da für $|z| > \frac{1}{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}}}$ diese Potenzreihe divergent ist (Mehr noch, ihr Konvergenzradius ist gerade $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}}$) ist somit $\frac{1}{r(a)} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}}$, d.h.

$r(a) \geq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|a^n\|}}$ (und es gilt sogar Gleichheit).

Bleibt zu zeigen, daß dieser Limes-superior sogar ein Limes ist. Mittels der Ungleichung $\|a^{n+m}\| \leq \|a^n\| \|a^m\|$ kann man das direkt zeigen, siehe [H2, 169]. Ein anderer Beweis geht wie folgt:

Für $z \in \sigma(a)$ ist $z - a \notin \text{Inv}(A)$. Da $z^n - a^n = (z - a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1})$ und die beiden Faktoren kommutieren miteinander ist auch $z^n - a^n \notin \text{Inv}(A)$ nach (9.1a.3), also $|z|^n \leq \|a^n\|$ nach (9.1a.1) und damit $|z| \leq \|a^n\|^{1/n}$. Somit ist $r(a) \leq \inf_n \|a^n\|^{1/n} \leq \overline{\lim_n} \|a^n\|^{1/n} \leq r(a)$. \square

Funktionenkalkül

Bemerkung. In der endlich-dimensionalen Spektral-Theorie spielt für Operatoren T die Algebra $\{p(T) : p \text{ ist ein Polynom}\}$ eine große Rolle. Man denke nur an den Satz von Cayley-Hamilton und an die Rolle die das minimal-Polynom spielt. Im unendlich-Dimensionalen werden wohl Polynome nicht mehr ausreichen. Die nahe-liegendste Verallgemeinerung sind konvergente Potenzreihen. Wir haben in (3.6) gezeigt, daß die Konvergenz für alle $|z| < R$ einer Potenzreihe $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ mit Koeffizienten $f_k \in \mathbb{C}$ auch die Konvergenz der Reihe $f(a) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k a^k$ in A für alle $a \in A$ mit $\|a\| < R$ impliziert. Dies funktioniert also, wenn der Konvergenzradius größer als $\|a\|$ ist. Die Reihe $f(a) := \sum_{k=0}^{\infty} f_k a^k$ konvergiert aber

nach Wurzelkriterium auch dann (absolut), wenn ihr Konvergenzradius größer als $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a^n\|^{1/n} = r(a)$ ist. Unter diesen Voraussetzungen ist $z \mapsto f(z)$ eine holomorphe Funktion auf einer offenen Kreisscheibe die $\sigma(a)$ enthält. Wir wollen nun versuchen $f(a)$ auch für Funktionen f zu definieren, die holomorph auf einer Umgebung von $\sigma(a)$ sind. Dabei können wir nicht mehr die Potenzreihenentwicklung verwenden, denn diese braucht nur im Inneren der größten ganz im Definitionsbereich von f liegenden Kreisscheibe konvergieren. Um eine Definition von $f(a)$ auch in diesen Fall zu erhalten, geben wir zuert eine andere Beschreibung von $f(a)$ für Potenzreihen f mit Konvergenzradius $R > \|a\|$. Nach der Cauchy'schen Integralformel (9.21) für $f : z \mapsto z^k$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(w)}{w-z} dw,$$

wobei c einen Kreis mit Radius $r < R$ parametrisiert. Analog können wir nun versuchen $f(a)$ als

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_c f(w) (w-a)^{-1} dw$$

zu definieren, wobei wir voraussetzen müssen, daß die Kurve c ganz in $\rho(a)$ verläuft, damit $(w-a)^{-1}$ einen Sinn macht für $w \in \text{Bild } c$.

Wegen der Cauchy'schen Integralformel (9.21) ist $\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{w^k}{w-z} dw = z^k$, folglich sollte analog $\frac{1}{2\pi i} \int_c w^k (w-a)^{-1} dw = a^k$ sein. Dies ist in der Tat der Fall, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_c w^k (w-a)^{-1} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_c w^{k-1} \left(1 - \frac{1}{w} a\right)^{-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_c w^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{w^j} a^j dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_c w^{k-1} \frac{1}{w^j} dw \right) a^j \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left(\int_c w^{k-(j+1)} dw \right)}_{2\pi i \delta_k^j} a^j = a^k \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_c f(w) (w-a)^{-1} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_c \sum_{j=0}^{\infty} f_j w^j (w-a)^{-1} dw \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j \frac{1}{2\pi i} \int_c w^j (w-a)^{-1} dw = \sum_{j=0}^{\infty} f_j a^j \end{aligned}$$

Diese Definition von $f(a)$ als Kurven-Integral macht nun auch Sinn, wenn c nicht notwendig ein Kreis ist, sondern irgendeine 1-Kette c in $\rho(a) \cap U$ und $f \in H(U)$ ist. Wir definieren also wie folgt:

9.27 Definition. Für $a \in A$ sei $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph auf einer offenen Umgebung U von $K := \sigma(a)$ in \mathbb{C} und c ein Jordan-Zykel wie in (9.22). Dann sei

$$f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_c f(w) (w-a)^{-1} dw.$$

Lemma. *Diese Definition hängt nicht von der Wahl der 1-Kette ab.*

Beweis. Es seien $c = \sum_{j=1}^n c_j$ und $d = \sum_{j=1}^m d_j$ zweite Jordan-Zykel wie im Lemma (9.22). Mit c_{n+j} für $j \in \{1, \dots, m\}$ bezeichnen wir die negativ durchlaufene Kurve d_j . Für $z \notin U \setminus \sigma(a)$ ist entweder $z \notin U$ oder $z \in \sigma(a)$. Im ersten Fall ist $\sum_{j=1}^{n+m} n(c_j, z) = n(c, z) - n(d, z) = 0 - 0 = 0$ und im zweiten ist $\sum_{j=1}^{n+m} n(c_j, z) = n(c, z) - n(d, z) = 1 - 1 = 0$. Also ist $\Gamma := \sum_{j=1}^{n+m} c_j$ ein Zykel geschlossener Kurven in $U \setminus \sigma(a)$ und für alle $z \notin U \setminus \sigma(a)$ ist $n(\Gamma, z) = 0$ und da $w \mapsto f(w)(w-a)^{-1}$ holomorph ist auf $U \setminus \sigma(a)$, folgt aus dem Cauchy'schen Integralsatz (9.21), daß

$$0 = \int_{\Gamma} f(w)(w-a)^{-1} dw = \int_c f(w)(w-a)^{-1} dw - \int_d f(w)(w-a)^{-1} dw. \quad \square$$

9.28 Keime. Da wir gerade gesehen haben, daß $f(a)$ nicht von der Auswahl des Jordan-Zykels c in $U \setminus \sigma(a)$ abhängt, ist $f_1(a) = f_2(a)$ falls f_1 und f_2 auf irgendeiner Umgebung U von $K := \sigma(a)$ übereinstimmen. Wir benötigen also folgende

Definition. Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Unter einem HOLOMORPHEN KEIM auf K verstehen wir eine Äquivalenz-Klasse von holomorphen Funktionen f , welche auf offenen Umgebungen $U \subseteq \mathbb{C}$ von K definiert sind. Dabei ist die Äquivalenz-Relation wie folgt gegeben: $f_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$ und $f_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$ heißen äquivalent, wenn eine offene Umgebung $U \subseteq U_1 \cap U_2$ von K existiert mit $f_1|_U = f_2|_U$. Mit $H(K) := H(K, \mathbb{C})$ bezeichnen wir die Menge aller holomorphen Keime auf K . Dies ist eine \mathbb{C} -Algebra, wenn wir die Operationen repräsentantenweise definieren.

Die Abbildungen $H(U, \mathbb{C}) \rightarrow H(K)$, $f \mapsto [f]$, sind injektiv, falls jede Zusammenhangskomponente von U mindestens einen Punkt aus K enthält, denn dann folgt aus dem Eindeutigkeitsatz (siehe (9.12)), daß zwei holomorphe Funktionen auf U die auf einer Umgebung von K übereinstimmen schon identisch sind. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß alle auftretenden Umgebungen U diese Eigenschaft haben, und somit daß $H(U, \mathbb{C})$ ein Teilraum ist von $H(K, \mathbb{C})$. Nach Definition ist $H(K)$ die Vereinigung dieser Teilräume, und wir können folglich $H(K)$ mit der finalen Struktur versehen.

9.29 Theorem (holomorpher Funktionenkalkül). *Für $a \in A$ definiert $[f] \mapsto f(a)$ den eindeutig bestimmten stetigen Algebra-Homomorphismus $H(\sigma(a)) \rightarrow A$, der id auf a abbildet, also die Polynom-Auswertung $\sum_k f_k z^k \mapsto \sum_k f_k a^k$ erweitert,*

Beweis. Zuerst die Existenz-Aussage:

Nach obigem Lemma ist $f(a) := \frac{1}{2\pi i} \int_c f(w)(w-a)^{-1} dw$ wohldefiniert und hängt nicht von der Wahl von c und dem Repräsentanten des Keims f ab.

Klarerweise ist $f \mapsto f(a)$ linear.

Wir zeigen, daß dies auch ein Algebra-Homomorphismus ist. Seien dazu f und g zwei auf einem offenen $U \supseteq \sigma(a)$ definierte holomorphe Funktionen. Es sei Λ ein

passender Jordan-Zykel in U und Γ ein solcher in $\text{Inn}(\Lambda)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\Gamma} f(w) (w-a)^{-1} dw \right) \left(\int_{\Lambda} g(z) (z-a)^{-1} dz \right) \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Lambda} f(w)g(z) (w-a)^{-1} (z-a)^{-1} dz dw \\ &\stackrel{(9.24)}{=} -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} \int_{\Lambda} f(w)g(z) \frac{(w-a)^{-1} - (z-a)^{-1}}{z-w} dz dw \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma} f(w) \left(\int_{\Lambda} \frac{g(z)}{z-w} dz \right) (w-a)^{-1} dw + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Lambda} g(z) \left(\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{z-w} dw \right) (z-a)^{-1} dz. \end{aligned}$$

Für alle $z \in \text{Bild}(\Lambda) \subseteq \text{Äuß}(\Gamma)$ gilt nach dem Cauchy'schen Satz (9.21), daß $\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{z-w} dw = 0$. Für alle $w \in \text{Bild}(\Gamma) \subseteq \text{Inn}(\Lambda)$ gilt $\int_{\Lambda} \frac{g(z)}{z-w} dz = 2\pi i g(w)$, also ist

$$f(a)g(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(w)g(w) (w-a)^{-1} dw = (fg)(a).$$

Nun zur Stetigkeit. Wir müssen nur zeigen, daß $f \mapsto f(a)$ von $H(U) \rightarrow A$ stetig ist, bzw. da $H(U)$ ein Fréchet-Raum ist mit der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder kompakten Teilmenge von U , daß diese Abbildung beschränkt ist. Sei also $\mathcal{F} \subseteq H(U)$ beschränkt. Dann ist \mathcal{F} gleichmäßig beschränkt auf dem Bild von c , also existiert eine Konstante K mit $\|f|_{\text{Bild}(c)}\|_{\infty} \leq K$ für alle $f \in \mathcal{F}$. Weiters ist $r_a(\text{Bild}(c))$ kompakt, also beschränkt und folglich existiert eine Konstante K_1 mit $\|(w-a)^{-1}\| \leq K_1$ für alle $w \in \text{Bild}(c)$. Insgesamt ist folglich $\|f(a)\| \leq \frac{1}{2\pi} K K_1 V(c)$, und somit ist $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ beschränkt.

Sei schließlich $f(z) = \sum_k f_k z^k$ ein Polynom, oder eine Potenzreihe, die auf einer Umgebung von $\sigma(a)$ konvergiert. Dann ist $f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k a^k$, wie wir bereits oben gezeigt haben.

Nun zur Eindeutigkeits-Aussage:

Sei τ solch ein Algebra-Homomorphismus. Als Algebra-Homomorphismus der id auf a abbildet gilt $\tau(f) = f(a)$ für alle Polynome $f \in \mathbb{C}[z]$. Sei nun $f = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit Polen außerhalb $\sigma(a)$. Also dürfen wir annehmen, daß q ein auf $\sigma(a)$ nicht verschwindendes Polynom ist, und somit $\frac{1}{q} \in H(\sigma(a))$ liegt. Dann gilt aber $1 = \tau(1) = \tau(q \frac{1}{q}) = \tau(q) \tau(\frac{1}{q})$, also ist $\tau(\frac{1}{q}) = \tau(q)^{-1}$ und somit gilt $\tau(\frac{p}{q}) = \tau(p) \cdot \tau(q)^{-1} = p(a) \cdot q(a)^{-1} = \frac{p}{q}(a) = f(a)$.

Sein nun $f \in H(\sigma(a))$ beliebig, d.h. o.B.d.A. $f \in H(U, \mathbb{C})$ für eine offene Umgebung U von $\sigma(a)$. Sei $K \subseteq U$ eine kompakte Menge, welche $\sigma(a)$ in ihrem Inneren enthält. Nach dem Runge'schen Approximations-Satz (7.21) existiert eine Folge rationaler Funktionen mit Polen außerhalb U , welche auf K gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergieren aber die Keime $[f_n]$ gegen jenen von f , und aus der Stetigkeits-Aussage folgt $f(a) = \lim f_n(a) = \lim \tau(f_n) = \tau(f)$. \square

9.30 Spektral-Abbildungssatz. Für $f \in H(\sigma(a))$ gilt $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.

Beweis. (\supseteq) Es sei $f \in H(U)$ mit offenen $U \supseteq \sigma(a)$ und $z \in \sigma(a)$. Dann ist $g : w \mapsto \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ eine holomorphe Funktion auf U . Angenommen $f(z) \notin \sigma(f(a))$.

Dann wäre $f(z) - f(a) = (z - a)g(a)$ invertierbar und da die beiden Faktoren miteinander kommutieren damit auch $z - a$, d.h. $z \notin \sigma(a)$, ein Widerspruch.

(\subseteq) Umgekehrt sei $z \notin f(\sigma(a))$. Dann ist $g : w \mapsto (z - f(w))^{-1}$ eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von $\sigma(a)$ mit $1 = g(a)(z - f(a))$. Also wäre $z - f(a)$ invertierbar, d.h. $z \notin \sigma(f(a))$. \square

10.16b Lemma. Sei A eine Banach-Algebra und $a, b \in A$. Dann ist $\sigma(ab) \cup \{0\} = \sigma(ba) \cup \{0\}$.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß $\lambda - ab \in \text{inv}(A) \Leftrightarrow \lambda - ba \in \text{inv}(A)$ für alle $\lambda \neq 0$. O.B.d.A. sei $\lambda = 1$ und $1 - ab$ invertierbar mit $u := (1 - ab)^{-1}$. Wir behaupten, daß $1 - ba$ invertierbar ist und $(1 - ba)^{-1} = 1 + bua$:

$$\begin{aligned} (1 - ba)(1 + bua) &= 1 - ba + bua - babua = 1 + b(-1 + u - abu)a \\ &= 1 + b((1 - ab)u - 1)a = 1 \\ (1 + bua)(1 - ba) &= 1 + bua - ba - buaba = 1 + b(u - 1 - uab)a \\ &= 1 + b(u(1 - ab) - 1)a = 1. \quad \square \end{aligned}$$

11.43 Definition. Kommutante. Wir bezeichnen die Menge der mit allen b in einer Menge $B \subseteq A$ kommutierenden Elemente als KOMMUTANTE $B^k := \{x \in A : xb = bx \forall b \in B\}$ von B . In der Algebra sagt man dafür auch ZENTRALISATOR von B in A .

Es ist $B \mapsto B^k$ eine antitone Abbildung auf der Potenzmenge von A und es gilt $B_1 \subseteq B_2^k \Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1^k$, denn beide Seiten bedeuten, daß $\forall b_1, b_2 b_1 \in B_1, b_2 \in B_2 : b_1 b_2 = b_2 b_1$.

Somit ist $B \subseteq (B^k)^k =: B^{kk}$ wegen $B^k \subseteq B^k$.

Außerdem gilt immer $B^k = B^{kkk}$, denn aus $B \subseteq B^{kk}$ folgt $B^k \supseteq (B^{kk})^k$ und andererseits gilt $B^k \subseteq (B^k)^{kk}$.

Beachte, daß B^k eine abgeschlossene (bzgl. jeder Topologie für die die Multiplikation getrennt stetig ist) Teilalgebra von A für jede Teilmenge $B \subseteq A$ ist, denn $x_1 x_2 b = x_1 b x_2 = b x_1 x_2$.

Weiters ist $B^k = B_1^k$, falls B_1 den Abschluß der von B erzeugten Teilalgebra in einer Topologie bzgl. welcher die Multiplikation getrennt stetig ist bezeichnet.

Schließlich ist klarerweise B genau dann kommutativ, wenn $B \subseteq B^k$ gilt. Somit ist für kommutative B auch B^{kk} kommutativ, denn $B \subseteq B^k \Rightarrow B^{kk} \subseteq B^k \Rightarrow B^{kk} \subseteq B^{kkk} = (B^{kk})^k$.

9.31 Folgerung. Für $f \in H(\sigma(a))$ kommutiert $f(a)$ mit allen $b \in A$, die mit a kommutieren, d.h. $f(a) \in (\{a\}^k)^k$, bzw. auch $\{f(a) : f \in H(\sigma(a))\}^k = \{a\}^k$.

Beweis. Die von $\{a\}$ erzeugte Algebra liegt wegen dem Approximationssatz (7.18) von Runge dicht in $H(\sigma(a))$, also ist $\{a\}^k = \{f(a) : f \in H(\sigma(a))\}^k$ und somit $f(a) \in \{a\}^{kk}$ für alle $f \in H(\sigma(a))$. \square

Im endlich-dimensionalen verwendet man die Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Primfaktoren um eine direkte Summenzerlegung (diagonale Blockdarstellung) des Operators zu erhalten. Dies können wir nun auf Banach-Algebren übertragen. Da wir da allerdings keinen Raum zur Verfügung haben, auf denen die Elemente operieren, und wir die Summanden also nicht auf invariante Teilräume einschränken können enthält das Spektrum der Summanden die 0.

9.32 Folgerung. *Es sei $a \in A$ und $\sigma(a) = K_1 \sqcup K_2$ eine Zerlegung in abgeschlossene, disjunkte nicht-leere Mengen. Dann gibt es ein idempotentes $e \in \{a\}^{kk}$ (d.h. $e^2 = e$) und für $a_1 := ae$ und $a_2 := a(1 - e)$ gilt $a = a_1 + a_2$, $a_1 a_2 = 0 = a_2 a_1$ und $\sigma(a_j) = K_j \cup \{0\}$ für $j \in \{1, 2\}$.*

Beweis. Die Beweisidee besteht darin dies zuerst für das Urbild $\text{id} \in H(\sigma(a))$ unter den Algebra-Homomorphismus $H(\sigma(a)) \rightarrow \{a\}^{kk} \subseteq A$ aus (9.29) zu zeigen und dann diesen anzuwenden. Für $j \in 1, 2$ seien U_j zwei disjunkte offene Umgebungen von K_j . Dann ist die charakteristische Funktion $\chi_{U_1} \in H(U_1 \cup U_2)$. Also ist $e := \chi_{U_1}(a) \in A$ wohldefiniert. Nach obiger Folgerung (9.31) kommutiert e mit allen b , welche mit a kommutieren, insbesondere mit a selbst. Wegen $\chi_{U_1}^2 = \chi_{U_1}$ ist e idempotent. Weiters ist $1 - e = (1 - \chi_{U_1})(a) = \chi_{U_2}(a)$. Es ist $1 = e + (1 - e)$ und $e(1 - e) = e - e^2 = e - e = 0$ also gelten alle behaupteten Gleichungen für $a_1 := ae = ea$ und $a_2 := a(1 - e) = (1 - e)a$. Aus dem Spektral-Abbildungssatz (9.30) folgt $\sigma(a_j) = \sigma(\text{id} \cdot \chi_{U_j}(a)) = (\text{id} \cdot \chi_{U_j})(K_1 \sqcup K_2) = \text{id}(K_j) \cup \{0\} = K_j \cup \{0\}$. \square

Abhängigkeit des Spektrums von der Algebra

Es sei A eine Banach-Algebra und B eine Teil-Banachalgebra mit $a \in B$. Dann ist offensichtlich $\rho_B(a) \subseteq \rho_A(a)$ und somit $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_B(a)$. Wir wollen nun untersuchen inwieweit die beiden Spektren verschieden sein können. Dazu vorerst ein eher typisches Beispiel.

9.33 Beispiel. *Abhängigkeit des Spektrums von der Algebra.* Es sei $A := C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$ und B die Teil-Banach-Algebra die von der Identität $a : z \mapsto z$ erzeugt wird. Dann ist $\sigma_A(a) = \partial\mathbb{D}$ und $\sigma_B(a) = \overline{\mathbb{D}}$:

Für $a = \text{id} \in A$ gilt $\sigma_A(a) = a(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Da $\|a\|_\infty = 1$ ist $\sigma_B(a) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$. Angenommen es gäbe ein $\lambda \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \sigma_B(a)$, d.h. $\exists b \in B$ mit $(\lambda - a)b = 1$ also $(\lambda - z)b(z) = 1$ für alle $z \in \partial\mathbb{D}$. Wegen $b \in B$ existiert eine Folge von Polynomen b_n , welche auf $\partial\mathbb{D}$ gleichmäßig gegen b konvergiert. Nach dem Maximum-Modulus Prinzip (9.16) bilden die b_n eine Cauchyfolge in $C(\overline{\mathbb{D}})$ konvergieren also gegen ein $\tilde{b} \in C(\overline{\mathbb{D}})$, welches holomorph auf \mathbb{D} ist und mit b auf $\partial\mathbb{D}$ übereinstimmt. Auf die gleiche Weise erhalten wir, daß $(\lambda - z)b_n(z) - 1 \rightarrow 0$ gleichmäßig für $z \in \overline{\mathbb{D}}$, also gilt $(\lambda - z)\tilde{b}(z) = 1$ für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Für $z := \lambda$ erhalten wir folglich den Widerspruch $0 = (\lambda - \lambda)\tilde{b}(z) = 1$. Also gilt $\sigma_B(a) = \overline{\mathbb{D}}$.

9.34 Definition. Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist die *polynomial konvexe Hülle* \hat{K} von K definiert durch:

$$\hat{K} := \{z \in \mathbb{C} : |p(z)| \leq \|p|_K\|_\infty \forall p \in \mathbb{C}[z]\},$$

also die Menge aller Punkte auf denen kein Polynom vom Betrag größere Werte annimmt als auf K . Die Menge K heißt *polynomial konvex* falls $K = \hat{K}$.

Das Komplement $S^2 \setminus K$ hat als offene Teilmenge von S^2 nur abzählbar viele Komponenten: Einerseits die in \mathbb{C} unbeschränkte Komponente, also jene welche ∞ enthält, und die in \mathbb{C} beschränkten Komponenten, die sogenannten LÖCHER von K .

Lemma. *Es sei $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt. Dann ist das Komplement $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ von \hat{K} die unbeschränkte Komponente des Komplements $\mathbb{C} \setminus K$ von K . Also entsteht \hat{K} durch*

Ausfüllen aller Löcher von K . Und K ist genau dann polynomial konvex, wenn das Komplement von K zusammenhängend ist.

Beweis. Es sei $S^2 \setminus K = U_\infty \sqcup \bigsqcup_k U_k$ die Zerlegung in die Zusammenhangskomponenten. Dabei sei U_∞ die unbeschränkte Komponente. Es sei $L := S^2 \setminus U_\infty = K \sqcup \bigsqcup_k U_k$.

Wir behaupten $L \subseteq \widehat{K}$:

Wegen $L = K \sqcup \bigsqcup_k U_k$ und $K \subseteq \widehat{K}$ genügt zu zeigen $U_k \subseteq \widehat{K}$ für $k \neq \infty$. Sei dazu vorerst $x \in \partial U_k = \overline{U_k} \setminus U_k \subseteq \mathbb{C} \setminus U_k$. Und da auch $x \notin U_j$ für $j \neq k$ ist (da U_j offen und disjunkt zu U_k ist), gilt $x \in K$. Nach dem Maximum-Modulus Prinzip (9.16) ist $U_k \subseteq \widehat{K}$.

Angenommen $L \subset \widehat{K}$:

Sei $z \in \widehat{K} \setminus L$. Dann ist $w \mapsto \frac{1}{w-z}$ eine holomorphe Funktion auf einer Umgebung von L . Nach dem Runge'schen Approximations-Satz existiert eine Folge von Polynomen p_n mit $\sup_{w \in L} |p_n(w) - \frac{1}{w-z}| \rightarrow 0$, da $\mathbb{C}_\infty \setminus L = U_\infty$ zusammenhängend ist. Es sei $q_n : w \mapsto (w-z)p_n(w)$. Dann gilt $\|(q_n - 1)|_L\|_\infty \rightarrow 0$. Wegen $|q_n(z) - 1| = |0 - 1| = 1$ folgt $z \notin \widehat{K}$, denn andernfalls wäre $1 = |q_n(z) - 1| \leq \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in \widehat{K}\} = \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in K\} \leq \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in L\} \rightarrow 0$, ein Widerspruch. \square

9.35 Theorem. Es sei A eine Banach-Algebra, B eine Teil-Banach-Algebra, und $a \in B$. Dann entsteht $\sigma_B(a)$ durch vollständiges Ausfüllen einiger Löcher von $\sigma_A(a)$. Insbesondere gilt:

- 1 $\sigma_B(a) \supseteq \sigma_A(a)$;
- 2 $\partial\sigma_B(a) \subseteq \partial\sigma_A(a)$;
- 3 $\widehat{\sigma_B(a)} = \widehat{\sigma_A(a)}$.
- 4 Falls B als Banach-Algebra von a erzeugt wird, so ist $\sigma_B(a) = \widehat{\sigma_A(a)}$.

Beweis. (1) ist offensichtlich, da ein Inverses zu $z - a$ in B auch ein solches in A ist.

(2) Sei $z \in \partial\sigma_B(a)$. Angenommen $z \notin \sigma_A(a)$. Dann existiert $(z - a)^{-1} \in A$. Da $z \in \partial\sigma_B(a)$ existiert eine Folge $z_n \notin \sigma_B(a)$ mit $z_n \rightarrow z$. Also existiert $(z_n - a)^{-1} \in B$ und wegen der Stetigkeit der Inversion in A gilt $(z_n - a)^{-1} \rightarrow (z - a)^{-1}$. Da aber B abgeschlossen ist, folgt $(z - a)^{-1} \in B$, d.h. $z \notin \sigma_B(a) \supseteq \partial\sigma_B(a)$, ein Widerspruch. Damit muß aber $z \in \partial\sigma_A(a)$ liegen, denn das Innere von $\sigma_A(a) \subseteq \sigma_B(a)$ muß im Inneren von $\sigma_B(a)$ und somit von $\mathbb{C} \setminus \partial\sigma_B(a)$ liegen.

(3) Wegen $\widehat{\sigma_B(a)} \supseteq \sigma_A(a)$ gilt $\widehat{\sigma_B(a)} \supseteq \widehat{\sigma_A(a)}$. Sei nun angenommen, daß $\mathbb{C} \setminus \widehat{\sigma_B(a)} \subset \mathbb{C} \setminus \widehat{\sigma_A(a)}$. Dann trifft nach (9.34) die unbeschränkte Komponente $\mathbb{C} \setminus \widehat{\sigma_A(a)}$ von $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$ die Menge $\widehat{\sigma_B(a)}$ und somit den Rand $\partial\sigma_B(a) \subseteq \partial\sigma_A(a) \subseteq \sigma_A(a)$, ein Widerspruch.

(4) Es gilt immer $\sigma_A \subseteq \sigma_B \subseteq \widehat{\sigma_B} = \widehat{\sigma_A}$. Angenommen es gäbe ein $z \in \widehat{\sigma_A} \setminus \sigma_B$. Dann existiert $(z - a)^{-1} \in B \subseteq A$. Da B der Abschluß der Polynome in a ist, existiert eine Folge von Polynomen p_n mit $p_n(a) \rightarrow (z - a)^{-1}$. Es sei $q_n : w \mapsto (z - w)p_n(w)$. Dann gilt $q_n(a) = (z - a)p_n(a) \rightarrow (z - a)(z - a)^{-1} = 1$. Nach dem Spektral-Abbildungssatz (9.30) gilt: $\sigma_A((q_n - 1)(a)) = (q_n - 1)(\sigma_A(a))$, und somit

$$\begin{aligned} \|q_n(a) - 1\| &\geq \sup\{|w| : w \in \sigma_A(q_n(a) - 1) = q_n(\sigma_A(a)) - 1\} \\ &= \sup\{|q_n(w) - 1| : w \in \sigma_A(a)\} \\ &\geq |q_n(z) - 1| = 1, \end{aligned}$$

da $z \in \widehat{\sigma_A(a)}$, und somit ein Widerspruch zu $q_n(a) \rightarrow 1$.

Bleibt noch z.z. daß $\sigma_B(a)$ durch vollständiges Ausfüllen gewisser Löcher von $\sigma_A(a)$ entsteht.

Sei dazu U ein Loch von $\sigma_A(a)$. Dann ist $U = U_1 \sqcup U_2$, wobei $U_1 := U \cap \sigma_B = U \cap (\sigma_B \setminus \partial\sigma_B)$, denn $\partial\sigma_B \subseteq \partial\sigma_A \subseteq \sigma_A \subseteq \mathbb{C} \setminus U$, und $U_2 := U \cap \rho_B$. Somit ist U_1 und U_2 offen. Da U als Loch zusammenhängend ist, ist eine der beiden Mengen leer, also gehört das ganze Loch U zu σ_A und zu $\mathbb{C} \setminus \sigma_A$. \square

Kommutative Banach-Algebren

Wir wollen nun eine Dualitätstheorie für Banach-Algebren A entwickeln. Anstatt der linearen Funktionale sollten wir nun wohl Banach-Algebra-Homomorphismen verwenden. Sei $X := \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ der Raum aller Algebra-Homomorphismen von A nach \mathbb{C} . Dieser ist kein Vektorraum mehr, denn die Summe zweier Algebra-Homomorphismen ist zumeist nicht multiplikativ. Die übliche natürliche Abbildung in den bidual-Raum, $\iota : a \mapsto \text{ev}_a$, liefert also für jedes $a \in A$ eine \mathbb{C} -wertige Funktion auf $X = \text{Alg}(A, \mathbb{C})$. Um die Frage nach der Stetigkeit von ι stellen zu können, sollten die Werte wieder in einer Banach-Algebra liegen. Hier drängt sich die Algebra $C(X, \mathbb{C})$ der stetigen Funktionen auf. Dazu müssen wir $X = \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ mit einer kompakten Topologie versehen.

Wir sollten also damit beginnen, Algebra-Homomorphismen zu studieren. Da Stetigkeit linearer Funktionale nach (4.6) durch Abgeschlossenheit des Kerns beschrieben werden kann, sollten wir insbesondere die Kerne von Algebra-Homomorphismen studieren.

9.36 Definition (Ideale). Eine Teilmenge $I \subseteq A$ einer (Banach-)Algebra A heißt Ideal, falls I ein linearer Teilraum ist und mit $i \in I$ und $a \in A$ auch $ia \in I$ und $ai \in I$.

Ein Ideal heißt **ECHT**, falls $I \neq A$, oder äquivalent falls $1 \notin I$, oder weiters äquivalent $\text{inv}(A) \cap I = \emptyset$: Die Richtungen (\Leftarrow) sind offensichtlich. Umgekehrt sei $i \in I$ invertierbar und $a \in A$ beliebig. Dann ist $a = i^{-1}ia \in I$.

Der Kern jedes Algebra-Homomorphismus ist klarerweise ein (wegen $f(1) = 1$) echtes Ideal, und umgekehrt definiert jedes Ideal $I \subset A$ einer Algebra A eine Algebra A/I und einen Algebra-Homomorphismus $\pi : A \rightarrow A/I$ mit Kern I : Damit die Projektion $\pi : A \rightarrow A/I$ ein Algebra-Homomorphismus wird, muß man die Multiplikation durch $(a + I) \cdot (b + I) := a \cdot b + I$ definieren. Da I ein Ideal ist, macht diese Definition Sinn, denn $(a + i) \cdot (b + j) = a \cdot b + a \cdot j + i \cdot b + i \cdot j \in a \cdot b + A \cdot I + I \cdot A + I \cdot I \subseteq a \cdot b + I$ für $i, j \in I$.

Ein Ideal I in A heißt *maximal*, falls es maximal unter allen echten Idealen bezüglich der Inklusion ist.

Lemma. Die maximalen Ideale einer kommutativen Algebra sind genau die Kerne von surjektiven Algebra-Homomorphismen mit Werten in Divisions-Algebren (d.h. wo jedes Element ungleich 0 invertierbar ist).

Beweis. Sei $f : A \rightarrow B$ ein surjektiver Algebra-Homomorphismus (zwischen nicht notwendig kommutativen Algebren) und jedes $0 \neq b \in B$ sei invertierbar. Dann ist $\text{Ker } f$ ein maximales Ideal, denn wenn $I \supset \text{Ker } f$ ein Ideal ist, dann ist leicht zu sehen, daß $f(I) \neq \{0\}$ ein Ideal in B ist, also ein invertierbares Element $b = f(i)$

mit $i \in I$ enthält. Es sei $f(a) = b^{-1}$. Dann ist $f(1 - ai) = 0$, d.h. $1 \in \text{Ker } f + ai \subseteq I$, also ist $I = A$.

Sei umgekehrt $I \subset A$ ein maximales Ideal. Und sei $\pi : A \rightarrow A/I$ die kanonische Quotienten-Abbildung. Weiters sei $0 \neq b \in A/I$. Dann existiert ein $a \in A \setminus I$ mit $\pi(a) = b$. Es sei I_a das von I und a erzeugte Ideal. Wegen der Kommutativität ist $I_a = I + Aa$. Aus der Maximalität von I folgt $1 \in I_a$, d.h. es gibt $i \in I$ und $a' \in A$ mit $1 = i + a'a$, also gilt $1 = 0 + \pi(a')b$ in A/I . Folglich ist b invertierbar. \square

9.37 Satz von Gelfand-Mazur. *Es sei A eine Banach-Algebra mit $\text{inv}(A) = A \setminus \{0\}$ (also eine Divisions-Algebra). Dann ist $A = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $a \in A$. Dann ist $\sigma(a) \neq \emptyset$. Sei also $z \in \sigma(a)$. Dann hat $z1 - a$ kein Inverses, also ist $z1 - a = 0$, d.h. $a \in \mathbb{C}1$. \square

9.38 Proposition. Automatische Stetigkeit. *Es sei A eine Banach-Algebra und $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus. Dann ist f stetig und $\|f\| = 1$.*

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß $|f(a)| \leq \|a\|$. Angenommen nicht: Dann existiert $b := (1 - \frac{1}{f(a)}a)^{-1}$ mit $1 = b(1 - \frac{1}{f(a)}a) = b - \frac{1}{f(a)}ba$ und somit $1 = f(1) = f(b) - \frac{1}{f(a)}f(b)f(a) = 0$, ein Widerspruch. Gleichheit gilt, da $f(1) = 1$ ist. \square

9.39 Lemma. *Es sei A eine Abelsche Banach-Algebra. Dann existiert eine Bijektion*

$$\begin{aligned} \text{Alg}(A, \mathbb{C}) &\rightleftharpoons \{I \triangleleft A : I \text{ ist maximal}\} \\ f &\mapsto \text{Ker}(f) \end{aligned}$$

Dabei ist das einem maximalen Ideal zugeordnete $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ durch $f(a) \cdot 1 = \pi(a)$ mit der kanonischen Projektion $\pi : A \rightarrow A/I$ festgelegt.

Beweis. (\mapsto) ist wohldefiniert nach dem Lemma in (9.36).

(\leftarrow) Sei nun I ein maximales Ideal. Dann ist $\text{Inv}(A) \cap I = \emptyset$ und, da $\text{inv}(A)$ offen ist, ist auch $\text{Inv}(A) \cap \bar{I} = \emptyset$. Da \bar{I} klarerweise wieder ein Ideal ist, folgt aus der Maximalität, daß $I = \bar{I}$, d.h. daß I abgeschlossen ist.

Wir behaupten nun daß für jedes abgeschlossene echte Ideal $I \triangleleft A$ der Banach-Raum A/I eine Banach-Algebra ist.

Nach (9.36) definiert $(a + I) \cdot (b + I) := a \cdot b + I$ eine Multiplikation die A/I zu einer Algebra macht und $\pi : A \rightarrow A/I$ zu einen Algebra-Homomorphismus. Die Quotienten-Norm ist submultiplikativ, denn

$$\begin{aligned} \|(a + I) \cdot (b + I)\| &= \|a \cdot b + I\| \\ &= \inf\{\|a \cdot b + i\| : i \in I\} \\ &\leq \inf\{\|a \cdot b + k\| : k = a \cdot j + i \cdot b + i \cdot j \text{ mit } i, j \in I\} \\ &= \inf\{\|(a + i) \cdot (b + j)\| : i, j \in I\} \\ &\leq \inf\{\|a + i\| \cdot \|b + j\| : i, j \in I\} \\ &= \inf\{\|a + i\| : i \in I\} \cdot \inf\{\|b + j\| : j \in I\} \\ &= \|a + I\| \cdot \|b + I\| \end{aligned}$$

Es ist $\|1 + I\| = \inf\{\|1 + i\| : i \in I\} \leq \|1 + 0\| = 1$. Angenommen $\|1 + I\| < 1$. Dann wäre $\|1 + I\| = \|(1 + I)^2\| \leq \|1 + I\|^2 < \|1 + I\|$ ein Widerspruch.

Da I maximal und A Abel'sch ist, ist A/I eine Divisionsalgebra nach (9.36), und somit $A/I = \mathbb{C} \cdot 1 \cong \mathbb{C}$ nach (9.37).

Offensichtlich sind die beiden Abbildungen invers zueinander, denn einerseits ist $\text{Ker}(\pi) = I$ und andererseits sind zwei Algebra-Homomorphismen f_1 und f_2 von $A \rightarrow B$ die gleichen Kern besitzen ident, denn $f_2(a) = f_2(a - f_1(a)1) + f_2(f_1(a)1) = f_1(a)f_2(1) = f_1(a)$, da $a - f_1(a)1 \in \text{Ker}(f_1) = \text{Ker}(f_2)$. \square

9.40 Lemma. Abelisierung von Banach-Algebren. *Es sei A eine Banach-Algebra. Mit A' bezeichnen wir das von $\{ab - ba : a, b \in A\}$ erzeugte abgeschlossene Ideal von A . Dann ist $A_{\text{Abel}} := A/A'$ eine kommutative Banach-Algebra und die natürliche Projektion $A \rightarrow A_{\text{Abel}}$ ein Banach-Algebra-Homomorphismus mit folgender universeller Eigenschaft: Zu jedem Banach-Algebra-Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ mit Werten in einer kommutativen Banach-Algebra B existiert genau ein Banach-Algebra-Homomorphismus $f_{\text{Abel}} : A_{\text{Abel}} \rightarrow B$ welcher folgendes Diagramm kommutativ macht:*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\pi} & A_{\text{Abel}} \\
 & \searrow f & \swarrow \exists! f_{\text{Abel}} \\
 & & B
 \end{array}$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, daß A/A' eine Banach-Algebra ist, da A' ein abgeschlossenes Ideal ist. Offensichtlich ist A/A' kommutativ, denn $(a+A')(b+A') - (b+A')(a+A') = (ab - ba) + A' \subseteq A'$. Sei also B eine kommutative Banach-Algebra und $f : A \rightarrow B$ ein Banach-Algebra-Homomorphismus. Dann ist $f(ab - ba) = f(a)f(b) - f(b)f(a) = 0$ und, da f stetig ist, auch $A' \subseteq \text{Ker } f$. Also faktorisiert f zu einer eindeutigen stetigen linearen Abbildung $f_{\text{Abel}} := \tilde{f} : A/A' \rightarrow B$. Es ist \tilde{f} ein Algebra-Homomorphismus, denn $\tilde{f}((a+A')(b+A')) = \tilde{f}(ab + A') = f(ab) = f(a)f(b) = \tilde{f}(a+A')\tilde{f}(b+A')$. \square

9.41. Wir wollen nun feststellen, inwieweit man aus allen Algebra-Homomorphismen $A \rightarrow \mathbb{C}$ die Algebra A zurückgewinnen kann. Da alle diese Homomorphismen über die Abelisierung faktorisieren, können wir höchstens Abelsche Banach-Algebren aus ihren \mathbb{C} -wertigen Homomorphismen zurückgewinnen. Sehen wir uns also vorerst unser Erzbeispiel $A = C(X, \mathbb{C})$ einer kommutativen Banach-Algebra an und versuchen wir die Algebra-Homomorphismen $A = C(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ möglichst explizit zu beschreiben. Klarerweise definiert jedes $x \in X$ einen solchen Homomorphismus $\text{ev}_x : A = C(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\text{ev}_x(f) = f(x)$. Diese Zuordnung $\delta : x \mapsto \text{ev}_x$ ist injektiv, da die stetigen Funktionen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ auf kompakten Räumen X Punkte-trennend sind (Spezialfall des Lemmas von Urysohn).

Wir zeigen nun, daß die Zuordnung δ surjektiv ist:

Es sei dazu $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus. Wir suchen einen Punkt $x \in X$ mit $\varphi(f) = f(x)$ für alle $f \in A$. Sei dazu $I := \text{Ker } \varphi$. Für jedes $f \in I$ betrachten wir die abgeschlossene Nullstellen-Menge $f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Diese ist nicht leer, denn sonst wäre f invertierbar in A , d.h. $1 \in I$. Diese Familie der Nullstellen-Mengen hat die endliche Durchschnitts-Eigenschaft, denn $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f\bar{f} + g\bar{g})^{-1}(0)$ und mit $f, g \in I$ ist auch $f\bar{f} + g\bar{g}$ in diesem Ideal. Da X kompakt ist, ist folglich der Durchschnitt $\bigcap_{f \in I} f^{-1}(0) \neq \emptyset$. Sei also $x \in \bigcap_{f \in I} f^{-1}(0)$ für alle $f \in I$. Für beliebiges $f \in A$ ist dann $f - \varphi(f)1 \in I = \text{Ker}(\varphi)$ und somit $0 = (f - \varphi(f)1)(x) = f(x) - \varphi(f)$, d.h. $\varphi = \text{ev}_x$.

Wir können also die Punkte von X mit den \mathbb{C} -wertigen Algebra-Homomorphismen auf $A := C(X, \mathbb{C})$ identifizieren. Wenn wir die Algebra A zurückgewinnen wollen, so müssen wir $\text{Alg}(A, \mathbb{C})$ so mit einer Hausdorff-Topologie versehen, daß die Abbildung $X \rightarrow \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ stetig ist (dann ist sie automatisch ein Homöomorphismus da X kompakt ist). Es muß also aus $x_i \rightarrow x$ folgen, daß $\text{ev}_{x_i} \rightarrow \text{ev}_x$. Punktweise bei $f \in A$ ist das erfüllt, denn $f(x_i) = \text{ev}_{x_i}(f) \rightarrow f(x)$.

Wir haben also folgendes gezeigt:

Proposition. *Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $A := C(X, \mathbb{C})$. Wenn wir $\text{Alg}(A, \mathbb{C})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, also als Teilraum von $\mathbb{C}^A = \prod_{a \in A} \mathbb{C}$ auffassen, so ist die Abbildung $\delta : X \rightarrow \text{Alg}(A, \mathbb{C}) = \text{Alg}(C(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ ein Homöomorphismus. \square*

Für die Banach-Algebra $A := C(X, \mathbb{C})$ erhalten wir somit einen Isomorphismus $\delta^* : C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \cong C(X, \mathbb{C}) = A$. Beachte, daß $(\delta^*)^{-1} : A \rightarrow C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ gegeben ist durch $\delta : a \mapsto \text{ev}_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$, denn

$$(\delta^* \circ \delta)(f)(x) = \delta^*(\delta(f))(x) = \delta(f)(\delta(x)) = \delta(x)(f) = f(x)$$

Wir wollen dies nun soweit wie möglich auf beliebige (kommutative) Banach-Algebren A verallgemeinern. Dazu versehen wir $\sigma(A) := \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ ebenfalls mit der Topologie der punktweisen Konvergenz.

9.42 Gelfand'scher Darstellungssatz. *Es sei A eine kommutative Banach-Algebra. Dann ist $X := \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ein kompakter Hausdorff-Raum. Die GELFAND-TRANSFORMATION*

$$\mathcal{G} = \delta : A \rightarrow C(X, \mathbb{C}) = C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}), \quad a \mapsto \text{ev}_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$$

ist ein Banach-Algebra Homomorphismus mit dem Radikal von A als Kern

$$\text{Ker}(\mathcal{G}) = \text{Rad}(A) := \bigcap \{I : I \text{ ist maximales Ideal von } A\}.$$

Für $a \in A$ gilt $\sigma_A(a) = \sigma_{C(X, \mathbb{C})}(\mathcal{G}(a))$ und $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a)$.

Beweis. Offensichtlich ist $X := \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ abgeschlossen in \mathbb{C}^A , denn aus $X \ni \varphi_i \rightarrow \varphi$ folgt $\varphi(ab) = \lim \varphi_i(ab) = \lim \varphi_i(a) \varphi_i(b) = \lim_i \varphi_i(a) \lim_j \varphi_j(b) = \varphi(a) \varphi(b)$ und ähnlich zeigt man die Linearität. Weiters ist X beschränkt in \mathbb{C}^A , denn für $a \in A$ und $\varphi \in X$ gilt $|\text{pr}_a(\varphi)| = |\varphi(a)| \leq \|a\|$ nach (9.38). Nach dem Satz von Tychonoff ist somit X kompakt.

Die Abbildung \mathcal{G} hat Werte in $C(X, \mathbb{C})$, denn $\mathcal{G}(a)$ ist stetig, weil $\varphi_i \xrightarrow{\text{pktw.}} \varphi$ zur Folge hat, daß $\mathcal{G}(a)(\varphi_i) = \varphi_i(a) \rightarrow \varphi(a) = \mathcal{G}(a)(\varphi)$.

Offensichtlich ist \mathcal{G} ein Algebra-Homomorphismus, da $\text{ev}_\varphi \circ \mathcal{G} = \varphi$ einer ist für alle $\varphi \in X$.

Bezüglich des Kerns von \mathcal{G} gilt:

$$\begin{aligned} a \in \text{Ker } \mathcal{G} &\Leftrightarrow 0 = \mathcal{G}(a) \\ &\Leftrightarrow \forall \varphi \in X : 0 = \mathcal{G}(a)(\varphi) = \varphi(a) \\ &\Leftrightarrow a \in \bigcap_{\varphi \in X} \text{Ker } \varphi = \bigcap_I I = \text{Rad}(A), \end{aligned}$$

wobei der letzte Durchschnitt über alle maximalen Ideale I von A zu nehmen ist.

Nun zur Aussage über das Spektrum für $a \in A$:

Dazu beachte man, daß $\sigma_{C(X, \mathbb{C})}(\mathcal{G}(a)) = \{\mathcal{G}(a)(\varphi) = \varphi(a) : \varphi \in X\}$ gilt.

(\supseteq) Einerseits ist $\varphi(a)1 - a \in \text{Ker } \varphi$ und somit nicht invertierbar, d.h. $\varphi(a) \in \sigma_A(a)$.

(\subseteq) Andererseits sei $z \in \sigma_A(a)$, d.h. $z1 - a$ ist nicht invertierbar. Dann ist das von $z1 - a$ erzeugte Ideal $A \cdot (z1 - a)$ ein echtes Ideal. Somit existiert nach dem Lemma von Zorn ein maximales Ideal I , welches $z1 - a$ enthält. Sei $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ der Algebra-Homomorphismus mit Kern I . Dann ist $0 = \varphi(z1 - a) = z - \varphi(a)$, d.h. $z \in \sigma_{C(X, \mathbb{C})}(\mathcal{G}(a))$.

Bezüglich der Norm haben wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}(a)\|_\infty &= \sup\{|\mathcal{G}(a)(\varphi)| = |\varphi(a)| : \varphi \in X\} = \sup\{|z| : z \in \sigma_A(a)\} \\ &= r(a) \leq \|a\|. \quad \square \end{aligned}$$

Eine kommutative Banach-Algebra heißt HALBEINFACH, falls $\text{Rad}(A) = \{0\}$, d.h. der Gelfand-Homomorphismus injektiv ist.

Wegen $\sigma(a) = \sigma(\mathcal{G}(a)) = \{\varphi(a) : \varphi \in \sigma(A)\}$ ist $\text{ev}_a : \sigma(A) \rightarrow \sigma(a)$ injektiv und nach Definition der Topologie auf $\sigma(A)$ auch stetig, also eine Quotienten-Abbildung.

9.43 Proposition. *Es sei A eine Banach-Algebra, die von einem $a \in A$ als Banach-Algebra erzeugt wird, d.h. $\{p(a) : p \in \mathbb{C}[z]\}$ liegt dicht in A . Dann ist die Abbildung $\text{ev}_a : \sigma(A) := \text{Alg}(A, \mathbb{C}) \rightarrow \sigma(a)$ ein Homöomorphismus und folgendes Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} C(\sigma(A), \mathbb{C}) & \xleftarrow[\cong]{(ev_a)^*} & C(\sigma(a), \mathbb{C}) \\ \mathcal{G} \uparrow & & \uparrow (-)|_{\sigma(a)} \\ A & \xleftarrow[ev_a]{} & H(\sigma(a)). \end{array}$$

Beweis. Nach (9.42) ist $\text{ev}_a : \sigma(A) \rightarrow \sigma(a)$ surjektiv. Die Abbildung ist auch stetig, denn $\varphi_i \rightarrow \varphi$ punktweise impliziert, daß $\text{ev}_a(\varphi_i) = \varphi_i(a) \rightarrow \varphi(a) = \text{ev}_a(\varphi)$. Sie ist auch injektiv, denn für $\varphi_j \in \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ mit $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ gilt $\varphi_1(p(a)) = \varphi_2(p(a))$ für alle Polynome $p \in \mathbb{C}[z]$ und – da die Menge $\{p(a) : p \in \mathbb{C}[z]\}$ nach Voraussetzung dicht liegt in A – gilt $\varphi_1 = \varphi_2$. Da $\text{Alg}(A, \mathbb{C})$ kompakt ist, ist folglich ev_a ein Homöomorphismus.

Das Diagramm kommutiert, denn es genügt die Kommutativität für $\text{id} : z \mapsto z$ nachzuweisen, weil alle Pfeile Algebra-Homomorphismen sind:

$$(ev_a)^*(\text{id}|_{\sigma(a)})(\varphi) = (\text{id} \circ ev_a)(\varphi) = \text{id}(\varphi(a)) = \varphi(a) = \mathcal{G}(a)(\varphi). \quad \square$$

Beispiel. Es sei

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Das ist die 2-dimensionale kommutative Teil-Banach-Algebra von $L(\mathbb{C}^2)$ welche von $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ erzeugt wird. Einziger Eigenwert von T ist 0, also ist $\sigma(T) = \{0\}$ und existiert nur ein Algebra-Homomorphismus $\varphi \in \sigma(A)$ mit $\text{ev}_T(\varphi) = 0$, d.h.

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \varphi(a \text{id} + bT) = a.$$

Das einzige maximale Ideal ist somit $M = \ker(\varphi) = \mathbb{C} \cdot T$ und somit ist $\text{Rad}(A) = M \neq \{0\}$, d.h. A ist nicht halbeinfach. Somit ist $\mathcal{G} : A \rightarrow C(\sigma(A), \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ die Abbildung

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto \pi_M \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a.$$

Beispiel. Eine kontinuierliche Verallgemeinerung des letzten Beispiels ist wie folgt gegeben. Es sei

$$(Kf)(x) := \int_0^1 k(x, y) f(y) dy = \int_0^x k(x, y) f(y) dy$$

mit meßbarem Integralkern $k \in L^\infty([0, 1]^2)$ und $k(x, y) = 0$ für $x < y$. Dann ist $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ ein sogenannter Volterra-Operator mit Norm $\|K\| \leq \|k\|_\infty$ und weiters ist $\|K^n\| \leq \frac{1}{n!} \|k\|_\infty^n$. Für all dies siehe (3.9). Folglich ist $\|K^n\|^{1/n} \leq \frac{\|k\|_\infty}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$. Also ist der Spektral-Radius $r(K)$ gleich 0, und somit $\sigma(K) = \{0\}$, d.h. die von K erzeugte Banach-Algebra besitzt also nach (9.43) genau ein maximales Ideal $\{p(K) : p \in \mathbb{C}[z] \text{ und } p(0) = 0\}$ und ist somit nicht halb-einfach.

Beispiel. Der Gelfand-Homomorphismus \mathcal{G} ist im allgemeinen nicht surjektiv. Sei nämlich A der Abschluß der Polynome in $C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$, also die von $\text{id} : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ erzeugte Teil-Banach-Algebra von $C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C})$. Dann ist nach obiger Proposition (9.43) $\text{Alg}(A, \mathbb{C}) \cong \sigma_A(\text{id}) = \overline{\mathbb{D}}$ nach (9.33). Wir haben dort auch gezeigt, daß jedes $f \in A$ eine stetige Erweiterung \tilde{f} auf $\overline{\mathbb{D}}$ besitzt, welche auf \mathbb{D} holomorph ist. Nach (9.43) sind die stetigen Algebra-Homomorphismen $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$ gerade die Punktevaluationen bei $z \in \overline{\mathbb{D}}$ und

$$\mathcal{G} : C(\partial\mathbb{D}, \mathbb{C}) \supseteq A \rightarrow C(\sigma(A), \mathbb{C}) \cong C(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{C}), \quad f \mapsto \tilde{f}.$$

Als eine erste Anwendung der Gelfand-Transformation beweisen wir die Existenz der Stone-Čech-Kompaktifizierung:

9.44 Stone-Čech Kompaktifizierung. Zu jedem topologischen Raum X existiert ein kompakter Raum βX , die sogenannte STONE-ČECH-KOMPAKTIFIZIERUNG und eine stetige Abbildung $\delta : X \rightarrow \beta X$ mit folgender universellen Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\delta} & \beta X \\ & \searrow f & \swarrow \exists! \tilde{f} \\ & & K \end{array}$$

wobei K kompakt ist und sowohl f als auch \tilde{f} stetig sind.

Beweis. Es sei $A := C_b(X, \mathbb{C})$ die Banach-Algebra der stetigen beschränkten Funktionen auf X mit der ∞ -Norm und den punktweisen Operationen. Es sei $\beta X := \text{Alg}(A, \mathbb{C})$. Die Abbildung $\delta_X : X \rightarrow \beta X$, $x \mapsto \text{ev}_x$ ist nach Definition der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $\text{Alg}(A, \mathbb{C})$ stetig.

Sei nun K ein kompakter Raum. Nach (9.41) ist $\delta : K \rightarrow \text{Alg}(C(K, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ ein Homöomorphismus. Jedes stetige $f : X \rightarrow K$ induziert einen Algebra-Homomorphismus $f^* : C(K, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C})$, $g \mapsto g \circ f$ und da K kompakt ist, hat dieser

Werte in der Teilalgebra $C_b(X, \mathbb{C})$. Durch erneutes Dualisieren erhalten wir also eine stetige Abbildung $f^{**} : \text{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow \text{Alg}(C(K, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ und somit eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \text{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow K$ mit $\delta \circ \tilde{f} = f^{**}$. Diese erfüllt $\tilde{f} \circ \delta = f$, denn

$$\begin{aligned} (\delta \circ \tilde{f} \circ \delta)(x)(\varphi) &= (f^{**} \circ \delta)(x)(\varphi) = f^{**}(\delta(x))(\varphi) = \delta(x)(f^*(\varphi)) = (f^*(\varphi))(x) \\ &= \varphi(f(x)) = \delta(f(x))(\varphi) = (\delta \circ f)(x)(\varphi). \end{aligned}$$

Für die Eindeutigkeit von \tilde{f} genügt die Dichtheit des Bildes von $\delta : X \rightarrow \text{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ zu zeigen. Sei also $\varphi \in \text{Alg}(C_b(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$. Eine typische Umgebung von φ ist durch

$$\mathcal{U} := \{\psi : |(\psi - \varphi)(f_i)| < \varepsilon \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$$

mit endlich vielen $f_1, \dots, f_n \in C_b(X, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir müssen ein $x \in X$ finden mit $\text{ev}_x \in \mathcal{U}$. Betrachte dazu die Funktion $f := \sum_{i=1}^n |f_i - \varphi(f_i)|^2 = \sum_{i=1}^n (f_i - \varphi(f_i)) \overline{(f_i - \varphi(f_i))} \in C_b(X, \mathbb{C})$. Offensichtlich ist $\varphi(f) = 0$. Angenommen für kein $x \in X$ ist $\text{ev}_x \in \mathcal{U}$ und somit ist $f(x) > \varepsilon^2$ für alle $x \in X$ und damit auch $\frac{1}{f} \in C_b(X, \mathbb{C})$, also f in $C_b(X, \mathbb{C}) \cap \ker(\varphi)$ invertierbar, ein Widerspruch. \square

10 Darstellungstheorie von C^* -Algebren

Grundlegendes über C^* -Algebren

Wir wollen nun jene kommutativen Banachalgebren A finden, für die der Gelfand-Homomorphismus $\mathcal{G} : A \rightarrow C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ aus (9.42) ein Isomorphismus ist. Dazu beachten wir, daß die punktweise Konjugation $C(X, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C})$, $f \mapsto \bar{f}$ eine Involution definiert, d.h. eine konjugiert lineare Isometrie, deren Quadrat die Identität ist und die $\overline{f \cdot g} = \bar{f} \cdot \bar{g}$ erfüllt. Wegen $\bar{f} \cdot f = |f|^2$, gilt für die ∞ -Norm zusätzlich $\|\bar{f} \cdot f\| = \|f\|^2$.

Allgemeiner hat für σ -endliche Maßräume (X, \mathcal{A}, μ) auch die Konjugation auf $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ diese Eigenschaften.

Wie sieht es nun mit nicht kommutativen Beispielen aus: Für jeden komplexen Hilbertraum H hat Adjungieren $(\cdot)^* : L(H) \rightarrow L(H)$ dieselben Eigenschaften, allerdings mit $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, denn

$$\begin{aligned} \|fx\|^2 &= \langle fx, fx \rangle = \langle f^*fx, x \rangle \leq \|f^*f\| \cdot \|x\|^2 \leq \|f^*\| \cdot \|f\| \cdot \|x\|^2 \\ &\Rightarrow \|f\|^2 \leq \|f^*f\| \leq \|f^*\| \cdot \|f\| \\ &\Rightarrow \|f\| \leq \|f^*\| \leq \|(f^*)^*\| = \|f\| \\ &\Rightarrow \|f^*\| = \|f\| \\ &\Rightarrow \|f\|^2 \leq \|f^*f\| \leq \|f\|^2. \end{aligned}$$

10.1 Definition. Eine C^* -ALGEBRA ist eine Banach-Algebra A zusammen mit einer INVOLUTION, d.h. einer konjugiert linearen Abbildung $(\cdot)^* : A \rightarrow A$, mit $(a \bullet b)^* = b^* \bullet a^*$ und $(a^*)^* = a$, welche zusätzlich $\|a^* \bullet a\| = \|a\|^2$ erfüllt. Wir sagen für die letzte Gleichung auch, daß $\|\cdot\|$ eine $*$ -NORM ist.

Falls A eine 1 besitzt, so ist $1^* = 1$, denn $1 = 1^* \bullet 1 = 1^* \bullet 1^{**} = (1^* \bullet 1)^* = 1^*$.

Eine Algebra-Homomorphismus welcher mit der Involution vertauscht heißt $*$ -HOMOMORPHISMUS

10.1a Lemma. Es sei A eine C^* -Algebra (möglicherweise ohne 1) und $a \in A$. Dann gilt

$$\|a^*\| = \|a\| = \max\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\} = \max\{\|xa\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Weiters ist die Gleichung $\|a^* \cdot a\| = \|a\|^2$ äquivalent zu $\|a \cdot a^*\| = \|a\|^2$.

Beweis. Es ist $\|a\|^2 = \|a^*a\| \leq \|a^*\| \|a\|$, also ist $\|a\| \leq \|a^*\|$. Ersetzen wir a durch $b := a^*$ so erhalten wir $\|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$, also gilt das erste Gleichheitszeichen und somit auch

$$\|a \cdot a^*\| = \|b^* \cdot b\| = \|b\|^2 = \|a^*\|^2 = \|a\|.$$

Es sei $\alpha := \sup\{\|ax\| : \|x\| \leq 1\}$. Wegen $\|ax\| \leq \|a\| \|x\|$ gilt $\alpha \leq \|a\|$. Es sei $x := \frac{1}{\|a\|}a^*$. Dann gilt $\|x\| = 1$ nach dem 1.ten Teil und $\|ax\| = \frac{1}{\|a\|}\|a^*a\| = \|a\|$, also ist $\|a\| = \alpha$ und das Supremum ein Maximum. Also gilt auch das zweite Gleichheitszeichen. Das dritte folgt aus Symmetrie-Gründen. \square

10.2 Folgerung (Adjunktion einer 1). *Es sei A eine C^* -Algebra ohne 1, dann ist durch $A_1 := \{L_a + \lambda \cdot id : a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}$ mit $L_a : b \mapsto ab$ eine Teil-Algebra von $L(A)$ definiert, welche bezüglich $(L_a + \lambda \cdot id)^* := L_{a^*} + \bar{\lambda} \cdot id$ eine C^* -Algebra ist und die kanonische Abbildung $\iota : A \rightarrow A_1, a \mapsto L_a$ ist eine Isometrie mit folgender universellen Eigenschaft:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad} & A_1 \\ & \searrow f & \downarrow \exists! f_1 \\ & & B \end{array}$$

wobei f und f_1 $*$ -Homomorphismen sind, B eine C^* -Algebra mit 1 ist und f_1 die Eins erhält.

Vergleiche das mit (9.3). Die dort definierte Norm ist aber keine $*$ -Norm. Die Zuordnung $f \mapsto f_1$ ist keine Isometrie, denn $0 \mapsto 0_1 \neq 0$.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß die Operatornorm A_1 zu einer C^* -Algebra macht. Klarerweise ist der durch $(L_a + \lambda \cdot id)^* := L_{a^*} + \bar{\lambda} \cdot id$ definierte Stern eine Involution und wir müssen nur die C^* -Bedingung nachrechnen.

Sei dazu $a \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\|x\| = 1$ mit

$$\begin{aligned} \|L_a + \lambda \cdot id\|^2 - \varepsilon^2 &\leq \|ax + \lambda x\|^2 = \|(ax + \lambda x)^*(ax + \lambda x)\| \\ &= \|(x^*a^* + \bar{\lambda}x^*)(ax + \lambda x)\| \\ &= \|x^*(L_{a^*} + \bar{\lambda} \cdot id)(L_a + \lambda \cdot id)x\| \\ &\leq \|x^*\| \|(L_a + \lambda \cdot id)^*(L_a + \lambda \cdot id)\| \|x\| \\ &= \|(L_a + \lambda \cdot id)^*(L_a + \lambda \cdot id)\| \\ &\leq \|(L_a + \lambda \cdot id)^*\| \cdot \|L_a + \lambda \cdot id\|. \end{aligned}$$

Wir müssen also nur mehr zeigen, daß $\|(L_a + \lambda \cdot id)^*\| \leq \|L_a + \lambda \cdot id\|$ ist. Für $x, y \in A$ ist

$$\begin{aligned} \|y(L_a + \lambda \cdot id)^*x\| &= \|ya^*x + \bar{\lambda}yx\| \\ &= \|(ya^*x + \bar{\lambda}yx)^*\| \\ &= \|x^*ay^* + \lambda x^*y^*\| \\ &= \|x^*(L_a + \lambda \cdot id)y^*\| \\ &\leq \|x^*\| \|L_a + \lambda \cdot id\| \|y^*\| \\ &= \|x\| \|L_a + \lambda \cdot id\| \|y\|. \end{aligned}$$

Bilden wir nun das Supremum über alle $\|y\| \leq 1$, so erhalten wir $\|(L_a + \lambda \cdot id)^*x\| \leq \|L_a + \lambda \cdot id\| \|x\|$ nach (10.1a) und somit $\|(L_a + \lambda \cdot id)^*\| \leq \|L_a + \lambda \cdot id\|$.

Die universelle Eigenschaft folgt sofort, da ein $*$ -Homomorphismus $f : A \rightarrow B$ als einzige mögliche Ausdehnung $\tilde{f}(L_a + \lambda \cdot id) = f(a) + \lambda \cdot 1$ besitzt. Diese Ausdehnung ist in der Tat ein Algebra-Homomorphismus, da $(L_a + \lambda \cdot id)(L_b + \mu \cdot id) = L_{ab + \mu a + \lambda b} + \lambda \mu \cdot id$ ist. Er ist auch ein $*$ -Homomorphismus, denn $\tilde{f}((L_a + \lambda \cdot id)^*) = \tilde{f}(L_{a^*} + \bar{\lambda} \cdot id) = f(a^*) + \bar{\lambda} \cdot 1 = f(a)^* + (\lambda \cdot 1)^* = \tilde{f}(L_a + \lambda \cdot id)^*$. \square

10.4 Definition. Es sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$.

Das Element a heißt HERMITE'SCH (oder SELBST-ADJUNGIERT) : $\Leftrightarrow a = a^*$.

Das Element a heißt NORMAL : $\Leftrightarrow a^*a = aa^*$.

Das Element a heißt UNITÄR : $\Leftrightarrow a^*a = 1 = aa^*$.

Beispiel. Für $a \in A = C(X, \mathbb{C})$ mit kompakten X gilt:

- 1 a ist automatisch normal.
- 2 a ist Hermite'sch $\Leftrightarrow \sigma(a) = a(X) \subseteq \mathbb{R}$.
- 3 a ist unitär $\Leftrightarrow \sigma(a) = a(X) \subseteq S^1$.

10.36 Lemma. Es sei H ein Hilbertraum, dann entsprechen den stetigen linearen Operatoren $T \in L(H)$ in bijektiver und isometrischer Weise die stetigen sesqui-linearen Formen $b : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ vermöge der Relation

$$b(x, y) = \langle Tx, y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Es ist T genau dann selbstadjungiert, wenn b konjugiert-symmetrisch ist, und T genau dann positiv, wenn b es ist.

Beweis. Es sei \overline{H} der zu H konjugierte Hilbertraum, d.h. er unterscheidet sich von H einzig in der Definition der skalar-Multiplikation $\lambda \cdot a := \overline{\lambda} \cdot a$. Nach dem

Riesz'schen Satz (6.7) ist $\iota : H \rightarrow \overline{H}^*$, $x \mapsto \langle x, _ \rangle$ eine surjektive \mathbb{C} -lineare Isometrie, und somit auch $\iota_* : L(H, H) \rightarrow L(H, \overline{H}^*) \cong L(H, \overline{H}; \mathbb{C})$. Der letzter Raum ist aber gerade jener der stetigen sesqui-linearen Formen auf H . Dabei entspricht $T \in L(H, H)$ genau jenem $b : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ mit $b(x, y) := \langle Tx, y \rangle$. Der Operator T ist genau dann selbstadjungiert, wenn $b(x, y) = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \overline{\langle Ty, x \rangle} = \overline{b(y, x)}$ ist, d.h. b konjugiert symmetrisch ist; und analog für Positivität. \square

10.3 Proposition. Es sei $b : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ sesqui-linear. Dann gilt:

- 1 Die Parallelogramm-Gleichung:

$$b(x + y, x + y) + b(x - y, x - y) = 2 \left(b(x, x) + b(y, y) \right) \quad \forall x, y \in H$$

- 2 Die Polarisierungsgleichung:

$$4b(x, y) = b(x + y, x + y) - b(x - y, x - y) \\ + ib(x + iy, x + iy) - ib(x - iy, x - iy),$$

d.h. b ist durch seine Werte auf der Diagonale $\{(x, x) : x \in H\}$ bereits eindeutig bestimmt.

- 3 $b = 0 \Leftrightarrow \forall x \in H : b(x, x) = 0$.
- 4 b ist konjugiert symmetrisch $\Leftrightarrow \forall x \in H : b(x, x) \in \mathbb{R}$.
- 5 Ist b positiv (d.h. $b(x, x) \geq 0$ für alle $x \in H$), so gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$$|b(x, y)|^2 \leq b(x, x) b(y, y) \quad \forall x, y \in H.$$

Beachte, daß (3) besagt, daß ein Operator $B \in L(H)$ genau dann der 0-Operator ist, wenn die zugehörige sesqui-lineare Form b auf der Diagonale verschwindet, d.h. $\forall x \in H : Bx \perp x$ gilt. Im reellen ist dies offensichtlich falsch!

Beweis. (1) haben wir in (6.4) gezeigt.

(2) folgt ebenso durch Ausmultiplizieren.

(3) folgt sofort aus der Polarisierungsgleichung (2).

(4) Die sesqui-lineare Form $(x, y) \mapsto b(x, y) - \overline{b(y, x)}$ verschwindet nach (3) genau dann, wenn sie auf (x, x) verschwindet für alle x , d.h. $b(x, x) \in \mathbb{R}$ ist für alle x .

(5) Das haben wir in (6.3) gezeigt. \square

10.3a Proposition. *Es sei H ein Hilbertraum und $a \in L(H)$, dann gilt:*

1 a ist Hermite'sch $\Leftrightarrow \forall x \in H : \langle ax, x \rangle \in \mathbb{R}$.

3 a ist normal $\Leftrightarrow \forall x \in H : \|ax\| = \|a^*x\|$.

2 $a^*a = 1 \Leftrightarrow \forall x \in H : \|ax\| = \|x\| \Leftrightarrow \forall x, y \in H : \langle ax, ay \rangle = \langle x, y \rangle$, d.h. a ist eine Isometrie.

4 a ist unitär $\Leftrightarrow a$ ist eine surjektiv Isometrie.

Beweis. (1) Es ist $a = a^*$ genau dann, wenn die konjugiert lineare Form $b(x, y) := \langle ax, y \rangle$ konjugiert symmetrisch ist. Das ist nach (4) in (10.3) genau dann der Fall, wenn $\langle ax, x \rangle = b(x, x)$ reell ist für alle x .

(2) Es ist $a^*a = 1 \Leftrightarrow \forall x, y \in H : \langle x, y \rangle = \langle a^*ax, y \rangle = \langle ax, ay \rangle$ und wegen der Polarisierungs-Gleichung bzw. (10.3.3) ist das äquivalent zu $\forall x \in H : \|x\|^2 = \|ax\|^2$.

(3) Es ist $b := a^*a - aa^*$ nach (10.3.3) genau dann 0, wenn $0 = \langle bh, h \rangle = \langle (a^*a - aa^*)h, h \rangle = \|ah\|^2 - \|a^*h\|^2$ ist für alle $h \in H$.

(4) Aus $a^*a = 1$ folgt $aa^*a = a = 1a$ und daraus vermöge der Surjektivität von a die Gleichung $aa^* = 1$. Umgekehrt folgt aus $aa^* = 1$ direkt die Surjektivität von a . \square

10.5 Lemma. *Es sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$. Dann gilt:*

1 Ist a invertierbar, so auch a^* und es gilt $(a^*)^{-1} = (a^{-1})^*$. Allgemeiner ist $\sigma(a^*) = \overline{\sigma(a)}$ für alle $a \in A$.

2 Es existiert eine eindeutige Zerlegung $a = \Re e(a) + i \Im m(a)$, wobei $\Re e(a) := \frac{a+a^*}{2}$ und $\Im m(a) := \frac{a-a^*}{2i}$ Hermite'sch sind.

3 Das Element a ist normal $\Leftrightarrow \Re e(a) \Im m(a) = \Im m(a) \Re e(a)$.

5 Ist a Hermite'sch, so ist $\|a\| = r(a)$.

Beweis. (1) Anwenden der Involution auf $a^{-1}a = 1 = aa^{-1}$ liefert $a^*(a^{-1})^* = 1 = (a^{-1})^*a^*$. Somit ist $\lambda - a$ genau dann invertierbar, wenn $(\lambda - a)^* = \bar{\lambda} - a^*$ es ist.

(2) Es sei $a = a_1 + ia_2$ eine Zerlegung in Hermite'sche Elemente a_1 und a_2 . Dann ist $a^* = a_1 - ia_2$ und somit $a_1 = \Re e(a)$ und $a_2 = \Im m(a)$. Andererseits gilt offensichtlich $a = \Re e(a) + i \Im m(a)$ und $(\Re e(a))^* = \frac{a^*+a^{**}}{2} = \Re e(a)$ sowie $(\Im m(a))^* = \frac{a^*-a^{**}}{-2i} = \Im m(a)$.

(3) Es ist $a^* = \Re e(a) - i \Im m(a)$ und folglich ist

$$a^*a = (\Re e(a))^2 - i \Im m(a) \Re e(a) + i \Re e(a) \Im m(a) + (\Im m(a))^2$$

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

sowie

$$a a^* = (\Re e(a))^2 + i \Im m(a) \Re e(a) - i \Re e(a) \Im m(a) + (\Im m(a))^2$$

und somit $a^* a = a a^* \Leftrightarrow \Im m(a) \Re e(a) = \Re e(a) \Im m(a)$.

(5) Für Hermite'sches a gilt $\|a^2\| = \|a^* a\| = \|a\|^2$ und somit durch Induktion $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$. Also ist $r(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_n \|a^{2^n}\|^{1/2^n} = \|a\|$. \square

Spektral-Theorie Abelscher C^* -Algebren

Wir wollen nun den Gelfand-Homomorphismus für C^* -Algebren studieren. Dazu müssen wir zuerst die \mathbb{C} -wertigen Algebra-Homomorphismen untersuchen.

10.6 Lemma. *Es sei A eine C^* -Algebra und $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ein Algebra-Homomorphismus. Dann ist f ein $*$ -Homomorphismus.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß f Selbstadjungiertheit erhält. Sei also $a^* = a \in A$ und $t \in \mathbb{R}$. Wegen $\|f\| = 1$ nach (9.38) ist

$$\begin{aligned} |f(a + it)|^2 &\leq \|a + it\|^2 = \|(a + it)^*(a + it)\| = \|(a - it)(a + it)\| \\ &= \|a^2 + t^2\| \leq \|a\|^2 + t^2. \end{aligned}$$

Falls $f(a) = \alpha + i\beta$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil ist, so erhalten wir:

$$\|a\|^2 + t^2 \geq |f(a + it)|^2 \geq |\alpha + i(\beta + t)|^2 = \alpha^2 + (\beta + t)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2,$$

also ist $\|a\|^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t$. Falls $\beta \neq 0$ so folgt mit $|t| \rightarrow \infty$ ein Widerspruch. Also ist $\beta = 0$, d.h. $f(a) = \alpha \in \mathbb{R}$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Es ist

$$\begin{aligned} f(a^*) &\stackrel{(10.5.2)}{=} f(\Re e(a) - i \Im m(a)) = f(\Re e(a)) - i f(\Im m(a)) \stackrel{(10.6.1)}{=} \overline{f(\Re e(a)) + i f(\Im m(a))} \\ &\stackrel{(1)}{=} \overline{f(\Re e(a) + i \Im m(a))} = \overline{f(a)}, \end{aligned}$$

da $f(\Re e(a))$ und $f(\Im m(a))$ nach Obigem reell sind. \square

10.8 Satz von Gelfand-Naimark. *Genau für jene Banach-Algebren A ist der Gelfand-Homomorphismus $\mathcal{G} : A \rightarrow C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ aus (9.42) ein $(*)$ -Isomorphismus, die durch Angabe einer Involution zu einer kommutativen C^* -Algebra gemacht werden können.*

Beweis. (\Rightarrow) Falls \mathcal{G} ein Isomorphismus von Banach-Algebren ist, so können wir durch ihm die Involution $f \mapsto \bar{f}$ von $C(\text{Alg}(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ auf A zurückziehen und somit A zu einer kommutativen C^* -Algebra machen.

(\Leftarrow) Umgekehrt sei A eine kommutative C^* -Algebra. Dann gilt $\mathcal{G}(a^*)(f) = f(a^*) = \overline{f(a)} = \overline{\mathcal{G}(a)(f)}$ für alle $f \in \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ nach (10.6), also ist \mathcal{G} ein $*$ -Homomorphismus.

Nach (9.42) ist $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a) \leq \|a\|$ für alle $a \in A$ und für Hermite'sche Elemente a gilt $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty = r(a) = \|a\|$ nach (10.5). Insbesondere ist $\|\mathcal{G}(a)\|_\infty^2 =$

$\|\mathcal{G}(a^*a)\|_\infty = \|a^*a\| = \|a\|^2$ für alle $a \in A$, also \mathcal{G} eine Isometrie und insbesondere injektiv.

Da \mathcal{G} als Isometrie abgeschlossenes Bild hat, genügt für Surjektivität die Dichtigkeit des Bildes zu zeigen. Es ist $\mathcal{G}(A)$ eine Teilalgebra von $C(X, \mathbb{C})$ mit $X := \text{Alg}(A, \mathbb{C})$, welche die Konstanten enthält und unter dem Stern abgeschlossen ist. Sie ist auch Punkte-trennend: Sei nämlich $f_1 \neq f_2$ in $X = \text{Alg}(A, \mathbb{C})$, dann existiert nach Definition ein $a \in A$ mit $\mathcal{G}(a)(f_1) = f_1(a) \neq f_2(a) = \mathcal{G}(a)(f_2)$. Nach dem Satz von Stone-Weierstraß (3.8) ist also $\mathcal{G}(A)$ dicht. \square

Resuméé. Man kann also mit Elementen einer C^* -Algebra so rechnen, als wären sie stetige Funktionen auf einem kompakten Raum, solange man dabei in einer kommutativen Teilalgebra bleibt.

10.60 Bemerkung. Für jede Menge X ist der Raum $A := B(X, \mathbb{C})$ der beschränkten \mathbb{C} -wertigen Funktionen auf X eine kommutative C^* -Algebra, also nach (10.8) via Gelfand-Homomorphismus isomorph zu $C(X, \mathbb{C})$ für den kompakten Raum $X = \sigma(A)$. Es ist $\sigma(A)$ die Stone-Čech-Kompaktifizierung βX des diskreten Raums X , denn $B(X, \mathbb{C}) = C_b(X, \mathbb{C}) \cong C(\beta X, \mathbb{C})$.

Insbesondere ist $\sigma(\ell^\infty) = \sigma(B(\mathbb{N}, \mathbb{C})) = \beta(\mathbb{N})$, vgl. mit [Topologie??].

10.9 Proposition. *Es sei A als C^* -Algebra von einem normalen $a \in A$ erzeugt wird. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ.*

$$\begin{array}{ccc} C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}) & \xleftarrow[\cong]{(ev_a)^*} & C(\sigma(a), \mathbb{C}) \\ \mathcal{G} \uparrow \cong & & \uparrow (-)|_{\sigma(a)} \\ A & \xleftarrow{ev_a} & \mathbb{C}[z, \bar{z}]. \end{array}$$

Beweis. Da a normal ist, ist die dichte Teil-Algebra $\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\}$ kommutativ und somit auch A selbst. Nach (10.8) ist also \mathcal{G} ein Isomorphismus. Daß $ev_a : \text{Alg}(a, \mathbb{C}) \rightarrow \sigma(a)$ ein Homomorphismus ist, sieht man wie im Beweis von (9.43) (Achtung A muß nicht als Banach-Algebra von a erzeugt sein): Nach (9.42) ist ev_a surjektiv und aus $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$ folgt $\varphi_1(p(a, a^*)) = p(\varphi_1(a), \varphi_1(a)^*) = p(\varphi_2(a), \varphi_2(a)^*) = \varphi_2(p(a, a^*))$ für alle $p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ und schließlich $\varphi_1 = \varphi_2$, da $\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\}$ dicht in A liegt.

Da alle auftretenden Abbildungen $*$ -Homomorphismen sind, und $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ von der Identität als $*$ -Algebra erzeugt wird, genügt es die Kommutativität auf $id : z \mapsto z$ zu überprüfen, dies geschah bereits in der Proposition (9.43) \square

Im Unterschied zu Banach-Algebren ist das Spektrum eines Elements einer C^* -Algebra nicht von der Algebra abhängig:

10.7 Proposition. *Es sei A eine C^* -Algebra, B eine Teil- C^* -Algebra und $b \in B$. Dann ist $\sigma_B(b) = \sigma_A(b)$.*

Beweis. Sei vorerst $b \in B$ Hermite'sch und $C^*(b)$ die von b erzeugte Teil-Banach-Algebra von B . Da diese eine Abel'sche C^* -ALgebra ist, ist $\sigma_{C^*(b)}(b) = \{\varphi(b) : \varphi \in \text{Alg}(C^*(b), \mathbb{C})\} \subseteq \mathbb{R}$ nach (9.42) und (10.6). Nach Theorem (9.35) ist also $\sigma_B(b) \stackrel{(1)}{\subseteq} \sigma_{C^*(b)}(b) \stackrel{\sigma \subseteq \mathbb{R}}{\subseteq} \partial \sigma_{C^*(b)}(b) \stackrel{(2)}{\subseteq} \partial \sigma_B(b) \subseteq \sigma_B(b)$ und damit $\sigma_B(b) = \sigma_{C^*(b)}(b)$. Gleiches gilt natürlich für A , also ist $\sigma_B(b) = \sigma_{C^*(b)}(b) = \sigma_A(b)$.

Nun sein $b \in B$ beliebig. Es bleibt zu zeigen, daß aus der Invertierbarkeit in A von b die Invertierbarkeit in B folgt, d.h. $\text{Inv}(B) = \text{Inv}(A) \cap B$. Sei also $ab = 1 = ba$ für ein $a \in A$. Dann ist $(b^*b)(aa^*) = b^*(ba)a^* = b^*a^* = (ab)^* = 1^* = 1$ und analog $(aa^*)(b^*b) = 1$. Da b^*b Hermite'sch und invertierbar in A ist, folgt aus dem ersten Teil, daß b^*b auch in B invertierbar ist, und wegen der Eindeutigkeit des Inversen, daß aa^* in B liegt. Also ist $a = a1 = a(a^*b^*) = (aa^*)b^* \in B$. \square

Folgerung. Es sei $a \in A$ normal. Dann gilt $\|a\| = r(a)$.

Beweis. Da die von a erzeugte C^* -Algebra $C^*(a)$ kommutativ ist, ist $\|a\| = \mathcal{G}(a) = r(a)$ nach (10.8) und (9.42). \square

10.10 Definition. Es sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$ normal. Dann definieren wir vermöge (10.9) und (10.7) eine $*$ -Isometrie $\rho : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \rightarrow A$, durch die Zusammensetzung

$$\begin{array}{ccc} C(\text{Alg}(C^*(a), \mathbb{C}), \mathbb{C}) & \xleftarrow[\cong]{(ev_a)^*} & C(\sigma(a), \mathbb{C}) \\ \mathcal{G} \uparrow \cong & \swarrow \rho & \\ A \supseteq C^*(a) & & \end{array}$$

wobei $C^*(a)$ die von a erzeugte (kommutative) Teil- C^* -Algebra von A bezeichnet. Diese Abbildung heißt **FUNKTIONEN-KALKÜL** für $a \in A$.

Theorem (Funktionen Kalkül). Es sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$ normal. Dann ist der Funktionen-Kalkül die eindeutige $*$ -Isometrie $\rho : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \rightarrow A$, welche den Riesz-Funktionen-Kalkül aus (9.29) erweitert, d.h. folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} & C[z] & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ H(\sigma(a)) & \xrightarrow{(-)|_{\sigma(a)}} & C(\sigma(a), \mathbb{C}) \\ \text{Riesz} \searrow & & \swarrow \rho \\ & A & \end{array}$$

Beweis. Da ρ durch Zusammensetzen von C^* -Isomorphismen gewonnen wurde, ist auch ρ eine (nicht notwendig surjektive) $*$ -Isometrie. Wegen Proposition (10.9) stimmt ρ mit dem Riesz-Kalkül auf Polynomen aus $\mathbb{C}[z]$ überein. Da ρ nach (9.29) dadurch eindeutig festgelegt ist kommutiert das untere Dreieck.

Nun zur Eindeutigkeit. Sei $\tau : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \rightarrow A$ ein $*$ -Homomorphismus, welcher den Riesz-Kalkül erweitert. Für jedes $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ existiert nach dem Satz von Stone-Weierstraß (3.8) eine Folge von Polynomen $f_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ welche auf $\sigma(a)$ gleichmäßig gegen f konvergieren. Es ist $\mathbb{C}[\Re(z), \Im(z)] \cong \mathbb{C}[z, \bar{z}]$, vermöge $\Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $\Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Auf der Identität $z \mapsto z$ ist ρ durch $\rho(\text{id}) = a$ gegeben und somit als $*$ -Homomorphismus auf der von id erzeugten $*$ -Algebra $\mathbb{C}[z, \bar{z}]$ eindeutig festgelegt. Wegen Stetigkeit ist somit ρ auf $C(\sigma(a), \mathbb{C})$ eindeutig bestimmt. \square

Folgerung. *Es sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$ normal.*

- 1 a Hermite'sch $\Leftrightarrow \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
- 2 a unitär $\Leftrightarrow \sigma(a) \subseteq S^1$.

Beweis. Da a normal ist, haben wir den $*$ -Homomorphismus $\rho : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(a) \subseteq A$. Somit gilt:

- (1) $\rho(\text{id}) = a = a^* = \rho(\overline{\text{id}}) \Leftrightarrow \text{id} = \overline{\text{id}}$ auf $\sigma(a)$, also $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.
- (2) $\rho(\overline{\text{id}})\rho(\text{id}) = a^*a = 1 = \rho(1) \Leftrightarrow |\text{id}|^2 = \overline{\text{id}}\text{id} = 1$ auf $\sigma(a)$, also $\sigma(a) \subseteq S^1$. \square

10.11 Spektral-Abbildungssatz. *Es sei A eine C^* -Algebra und $a \in A$ normal. Dann gilt für jedes $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ die Gleichung*

$$\sigma(f(a)) = f(\sigma(a)).$$

Beweis. Es sei $\rho : C(\sigma(a), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(a) \subseteq A$ der Funktionen-Kalkül $f \mapsto f(a)$. Da ρ ein $*$ -Isomorphismus ist, gilt $\sigma(f(a)) = \sigma_A(\rho(f)) = \sigma_{C^*(a)}(\rho(f)) \stackrel{(10.7)}{=} \sigma(f) = f(\sigma(a))$. \square

10.12 Folgerung. *Es sei $a \in A$ normal und $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$. Dann ist $f(a) \in \{a, a^*\}^{kk}$, der Doppelkommutante von $\{a, a^*\}$. Äquivalent, $\{a, a^*\}^k = \{f(a) : f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})\}^k$.*

Vgl. (9.32), (11.39) und (11.40)

Beweis. Nach dem Satz (3.8) von Stone-Weierstraß liegt die von $\{a, a^*\}$ erzeugte Teilalgebra $\{p(a, a^*) : p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\}$ (denn a ist normal) dicht in $\{f(a) : f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})\}$, also ist nach den Bemerkungen in (9.31) $\{a, a^*\}^k = \{f(a) : f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})\}^k$ und somit $f(a) \in \{a, a^*\}^{kk}$ für alle $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$. \square

Anwendungen auf Hermite'sche Elemente

Wir wollen nun einige Anwendungen des Funktionen-Kalküls für normale Elemente von C^* -Algebren geben.

10.13 Definition. Wir bezeichnen mit $\Re(A) := \{a \in A : a = a^*\}$ den linearen Teilraum der Hermite'schen Elemente. Wir haben in (10.5) gesehen, daß $A = \Re(A) \oplus i \cdot \Re(A)$.

Ein $a \in A$ heißt "POSITIV" und wir schreiben $a \geq 0$ falls a Hermite'sch ist und $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Die Menge der positiven Elemente bezeichnen wir mit A_+ . Ein $f \in C(X, \mathbb{C})$ ist genau dann positiv, wenn $\forall x \in X : f(x) \geq 0$, denn $\sigma(f) = f(X)$ nach (9.6a).

Wir schreiben $a \geq b$ für Hermite'sche Elemente a und b , falls $a - b \geq 0$ ist. Man beachte, daß $\|a\| \geq a$ für alle Hermite'schen a gilt, denn $\sigma(\|a\| - a) = \|\|a\| - a\| \subseteq [0, +\infty)$.

10.14 Proposition (positiver und negativer Teil). *Es sei $a \in \Re(A)$. Dann existieren eindeutige Elemente $a_+, a_- \in A_+$ mit $a = a_+ - a_-$ und $a_+a_- = 0 = a_-a_+$.*

Beweis. Die Idee ist dies auf $a \in C(X)$ zurückzuspielen. Existenz: Es sei $\text{id}_\pm(t) := \max\{\pm t, 0\}$. Dann ist $\text{id}_\pm \in C(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ mit $\text{id} = \text{id}_+ - \text{id}_-$ und $\text{id}_+ \text{id}_- = 0$. Mittels Spektral-Abbildungssatz (10.11) folgt $a_\pm := \text{id}_\pm(a) \geq 0$ und $a = \text{id}(a) = (\text{id}_+ - \text{id}_-)(a) = a_+ - a_-$ sowie $a_+a_- = \text{id}_+(a) \text{id}_-(a) = (\text{id}_+ \text{id}_-)(a) = 0(a) = 0$.

Eindeutigkeit: Sei dazu $a = b_+ - b_-$ eine zweite Zerlegung mit $b_{\pm} \geq 0$ und $b_+ b_- = 0 = b_- b_+$. Die von a_+ , a_- , b_+ und b_- erzeugte Teilalgebra ist eine kommutative $*$ -Algebra, denn $ab_+ = (b_+ - b_-)b_+ = b_+ b_+ = b_+(b_+ - b_-) = b_+ a$ und somit $a_{\pm} b_{\pm} = b_{\pm} a_{\pm}$ nach (10.12). Und analog $a_{\pm} b_{\mp} = b_{\mp} a_{\pm}$. Nach (10.8) ist diese Teilalgebra isomorph zu $C(X, \mathbb{C})$ für einen kompakten Raum X und dort ist die Zerlegung von \mathbb{R} -wertigen Funktionen in positiven und negativen Teil eindeutig, d.h. $b_{\pm} = a_{\pm}$. \square

10.15 Proposition (Wurzel). *Es sei $a \in A_+$ und $n \geq 1$, dann existiert ein eindeutiges Element $\sqrt[n]{a} \in A_+$ mit $a = (\sqrt[n]{a})^n$.*

Beweis. Wie in der vorigen Proposition verwendet man den Funktionen-Kalkül um nun $\sqrt[n]{a}$ durch $\sqrt[n]{a} := f(a)$ mit $f(t) := \sqrt[n]{|t|}$ zu definieren und wegen (10.12) kommutiert $f(a)$ mit jeder anderen "n-te Wurzel" b von a , da diese mit a kommutiert. Wegen (10.8) und der Eindeutigkeit der n-ten positiven Wurzel für $0 \leq a \in C(X, \mathbb{C})$, folgt die Eindeutigkeit von $\sqrt[n]{a}$. \square

10.16 Lemma. *Für $a \in \Re(A)$ sind äquivalent:*

- 1 $a \geq 0$;
- 2 $\|t - a\| \leq t$ für alle $t \in [\|a\|, +\infty)$;
- 3 $\|t - a\| \leq t$ für ein $t \in [\|a\|, +\infty)$.

Diese Beschreibung vermeidet das Spektrum, welches sich kompliziert auf Summen und Produkten verhält.

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) Es sei $a \geq 0$ und $t \geq \|a\|$, dann ist $0 \leq t - s \leq t$ für alle $s \in \sigma(a) \subseteq [0, \|a\|]$. Folglich ist via Funktional-Kalkül $\|t - a\| = \|t - \text{id}\|_{\infty} \leq \|t\|_{\infty} = t$.

((2) \Rightarrow (3)) ist trivial.

((3) \Rightarrow (1)) Da $a = a^*$ ist $C^*(a)$ Abelsch und somit isomorph zu $C(X, \mathbb{C})$ wobei $X = \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Nach Voraussetzung ist folglich $|t - s| \leq t$ für ein $t \geq \|a\|$ und alle $s \in \sigma(a)$. Kein solches s kann aber negativ sein, sonst wäre $|t - s| = t - s > t$. \square

Folgerung. *Die Menge A_+ der positiven Elemente einer C^* -Algebra ist ein abgeschlossener Kegel.*

Dabei verstehen wir unter einen KEGEL K eine konvexe Teilmenge $K \subseteq A$, die $\lambda a \in K$ für $0 \neq a \in K$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ genau dann erfüllt, wenn $\lambda \geq 0$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß A_+ abgeschlossen ist. Sei also $a_n \in A_+$ mit $a_n \rightarrow a$. Dann ist wegen der Stetigkeit von $*$ auch a Hermite'sch. Und aus $\|a_n - \|a_n\|\| \leq \|a_n\|$ folgt $\|a - \|a\|\| \leq \|a\|$, d.h. nach obigen Lemma (10.16) ist $a \geq 0$.

Falls $a \in A_+$ und $\lambda \geq 0$, dann ist offensichtlich $\lambda a \in A_+$. Weiters ist $A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$, denn aus $a \in A_+$ folgt $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$ und aus $a \in -A_+$ folgt $\sigma(a) \subseteq (-\infty, 0]$. Also ist $\sigma(a) = \{0\}$ und $\|a\| = r(a) = 0$, d.h. $a = 0$.

Falls also $\lambda a \in A_+$ mit $\lambda < 0$, so ist $-\lambda a \in A_+$, d.h. $\lambda a \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$, d.h. $a = 0$.

Es bleibt zu zeigen, daß mit $a, b \in A_+$ auch $a + b \in A_+$. Es ist $\| \|a\| + \|b\| - (a + b) \| \leq \| \|a\| - a \| + \| \|b\| - b \| \leq \|a\| + \|b\|$ und $\|a\| + \|b\| \geq \|a + b\|$, also nach (10.16) auch $a + b \geq 0$. \square

Bemerkung. Es seien $a, b \in A_+$. Dann ist $ab \in A_+ \Leftrightarrow ab = ba$.

Es ist $ab \in \Re(A) \Leftrightarrow ab = (ab)^* = b^* a^* = ba$. Und unter diesen äquivalenten Bedingungen sind nach Funktionen-Kalkül $a, b \in C(X, \mathbb{R}_+)$ und damit auch $ab \geq 0$.

10.16a Folgerung. *Es seien $a_i \in A_+$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ und $0 = a_1 + \dots + a_n$. Dann ist $a_i = 0$ für alle i .*

Beweis. Es ist $-a_1 = a_2 + \dots + a_n \geq 0$ nach (10.16). Also $a_1 \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$ und wegen Symmetrie ist $a_i = 0$ für alle i . \square

10.17 Folgerung. *Für $a \in A$ sind äquivalent:*

- 1 $a \geq 0$;
- 2 $a = b^2$ für ein $b \in \Re(A)$;
- 3 $a = x^*x$ für ein $x \in A$.

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) ist (10.15) für $n = 2$.

((2) \Rightarrow (3)) ist offensichtlich mit $x := b$.

((3) \Rightarrow (1)) Sei also $a = x^*x$ mit $x \in A$. Dann ist offensichtlich $a^* = a$. Es sei $a = a_+ - a_-$ die Zerlegung in positiven und negativen Teil nach (10.14). Wir müssen zeigen: $a_- = 0$. Sei $x\sqrt{a_-} = b + ic$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist $(x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-}) = (b - ic)(b + ic) = b^2 + c^2 + i(bc - cb)$ und andererseits $(x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-}) = \sqrt{a_-}x^*x\sqrt{a_-} = \sqrt{a_-}(a_+ - a_-)\sqrt{a_-} = -(a_-)^2$. Die Eindeutigkeit der Zerlegung in Real- und Imaginärteil impliziert folglich: $bc = cb$ und $b^2 + c^2 = -(a_-)^2$. Also ist die von den Hermite'schen Elementen b und c erzeugte C^* -Algebra kommutativ und somit isomorph zu $C(X)$ für ein kompaktes X . In $C(X)$ ist aber jede Summe von Quadraten ≥ 0 , und damit ist $b^2 + c^2 \in A_+$ nach (10.16). Ein entsprechendes Argument zeigt, daß auch $(a_-)^2 \in A_+$. Also ist $(a_-)^2 \in A_+ \cap (-A_+) = \{0\}$, d.h. $(a_-)^2 = 0$ und wegen der Eindeutigkeit der Wurzel das positive Element $a_- = 0$.

Neuer Beweis: ((1) \Leftarrow (2)) Sei $b \in \Re(A)$ und $a = b^2$. Wegen Spektralabbildungssatz ist $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2 \subseteq \mathbb{R}^2 = [0, +\infty)$, also $a \in A_+$.

((1) \Leftarrow (3)) Sei also $a = x^*x$ mit $x \in A$. Dann ist offensichtlich $a^* = a$. Es sei $a = a_+ - a_-$ die Zerlegung in positiven und negativen Teil nach (10.14). Wir müssen zeigen: $a_- = 0$. Sei $x\sqrt{a_-} = b + ic$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist $-(x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-}) = -\sqrt{a_-}x^*x\sqrt{a_-} = -\sqrt{a_-}(a_+ - a_-)\sqrt{a_-} = (a_-)^2 \geq 0$. Also nach obigen Lemma auch $(x\sqrt{a_-})(x\sqrt{a_-})^* \geq 0$ und somit

$$\begin{aligned} 2 \left(\underbrace{b^2}_{\geq 0} + \underbrace{c^2}_{\geq 0} \right) + \underbrace{(-x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-})}_{\geq 0} + \underbrace{(x\sqrt{a_-})(-x\sqrt{a_-})^*}_{\geq 0} = \\ = 2(b^2 + c^2) - (b - ic)(b + ic) - (b + ic)(b - ic) = 0, \end{aligned}$$

also ist $b^2 = c^2 = 0$ nach (10.16a) und somit $b = c = 0$ nach (10.15). Damit ist $x\sqrt{a_-} = b + ic = 0$ und $(a_-)^2 = -(x\sqrt{a_-})^*(x\sqrt{a_-}) = 0$, also $a_- = 0$ und schließlich $a = a_+ \geq 0$. \square

Proposition. *Es sei H ein Hilbertraum und $a \in L(H)$. Dann ist a genau dann positiv, wenn $\langle ax, x \rangle \geq 0$ für alle $x \in H$.*

Vgl. mit (10.4.1).

Beweis. (\Rightarrow) Falls $a \geq 0$, so ist $a = b^*b$ für ein $b \in L(H)$ nach (10.17). Also ist $\langle ax, x \rangle = \langle b^*bx, x \rangle = \langle bx, bx \rangle = \|bx\|^2 \geq 0$.

(\Leftarrow) Nach (10.4) folgt $a = a^*$ und es bleibt zu zeigen, daß $\sigma(a) \subseteq [0, +\infty)$. Für $t < 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|(a - t)h\|^2 &= \|ah\|^2 - t\langle ah, h \rangle - t\langle h, ah \rangle + t^2\|h\|^2 \\ &\geq 0 - 2t\langle ah, h \rangle + t^2\|h\|^2 \geq 0 + t^2\|h\|^2. \end{aligned}$$

— Andreas Kriegel, Universität Wien —

Also ist $\text{Ker}(a - t) = \{0\}$ und $\text{Bild}(a - t)$ abgeschlossen und auf dem Bild von $a - t$ ist eine stetige Inverse b zu $a - t$ eindeutig festgelegt. Wir erweitern diese durch $b|_{(\text{Bild}(a-t))^\perp} = 0$ und erhalten $b \circ (a - t) = 1$ und somit $1 = (b \circ (a - t))^* = (a - t)^* \circ b^* = (a - t) \circ b^*$. Also besitzt $a - t$ sowohl ein links- wie auch ein rechts-Inverses und ist somit invertierbar, d.h. $t \notin \sigma(a)$. \square

10.18 Proposition. Für Elemente jeder C^* -Algebra gilt:

- 1 Aus $a \leq b$ folgt $x^*ax \leq x^*bx$.
- 2 Aus $0 \leq a \leq b$ und a invertierbar folgt b invertierbar und $0 \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$.

Beweis. (1) Es ist $b - a \geq 0$ und somit $\exists y : b - a = y^*y$ nach (10.17). Folglich ist $x^*bx - x^*ax = x^*(b - a)x = (xy)^*(xy) \geq 0$, i.e. $x^*bx \geq x^*ax$.

(2) Indem man alles auf stetige Funktionen auf $\sigma(b) \subseteq [0, \|b\|]$ zurückführt zeigt man folgende kommutativen Spezial-Fälle:

- 1 Ist $b \geq 0$ invertierbar, so ist \sqrt{b} invertierbar und $\frac{1}{b} \geq 0$;
- 2 Ist $b \geq 1$, so ist b invertierbar und $\frac{1}{b} \leq 1$.

Nun sei $a \geq 0$ invertierbar. Dann ist $0 \leq b - a$ und somit $0 \leq (\frac{1}{\sqrt{a}})^*(b - a)\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}b\frac{1}{\sqrt{a}} - 1 =: b_1 - 1$. Also ist $b_1 \geq 1$ und somit invertierbar mit $\frac{1}{b_1} \leq 1$. Dann ist aber auch $b = \sqrt{ab_1}\sqrt{a}$ invertierbar und $\frac{1}{b} = (\frac{1}{\sqrt{a}})^*\frac{1}{b_1}\frac{1}{\sqrt{a}} \leq (\frac{1}{\sqrt{a}})^*1\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a}$. \square

10.19 Proposition (Polarzerlegung). Es seien H_1 und H_2 zwei Hilberträume und $a \in L(H_1, H_2)$. Dann existiert ein eindeutiges positives $|a| \in L(H_1)$ und eine eindeutige, partielle Isometrie $u \in L(H_1, H_2)$ mit $a = u \cdot |a|$ und $(\text{Bild } |a|)^\perp = \text{Ker } u$.

Weiters gilt: $\text{Ker } a = \text{Ker } |a| = \text{Ker } u$ und $\overline{\text{Bild } a} = \overline{\text{Bild } u}$ sowie $\overline{\text{Bild } |a|} = (\text{Ker } |a|)^\perp$.

Dabei heißt ein $u \in L(H_1, H_2)$ PARTIELLE ISOMETRIE, falls $u|_{\text{Ker}(u)^\perp}$ eine Isometrie ist. Den Teilraum mit $\text{Init } u := (\text{Ker } u)^\perp$ auf welchem u als Isometrie wirkt, nennt man INITIAL-RAUM von u . Der Raum $\text{Fini } u := \text{Bild } u = \overline{\text{Bild } u}$ heißt auch FINAL-RAUM von u .

Es ist das positive Element $|a|$ auch für a in einer abstrakten C^* -Algebra durch $|a| := \sqrt{a^*a}$ gegeben.

Beweis. Existenz: Wir definieren $|a| := \sqrt{a^*a}$. Für $h \in H_1$ gilt

$$\|ah\|^2 = \langle ah, ah \rangle = \langle a^*ah, h \rangle = \langle |a|^2h, h \rangle = \langle |a|h, |a|h \rangle = \||a|h\|^2.$$

Folglich ist $\text{Ker } |a| = \text{Ker } a$ und die Abbildung $u : \text{Bild } |a| \rightarrow \text{Bild } a$ durch $u(|a|h) := ah$ eine wohldefinierte Isometrie. Folglich läßt sie sich zu einer Isometrie $u : \overline{\text{Bild } |a|} \rightarrow \overline{\text{Bild } a}$ ausdehnen. Und wenn wir $u|_{\text{Ker } a} = 0$ setzen, wegen $(\text{Ker } a)^\perp = (\text{Ker } |a|)^\perp = \overline{\text{Bild } |a|}$ nach (7.14), zu einer partiellen Isometrie mit $a = u|a|$.

$$\begin{array}{ccc}
 H_1 & \overset{u}{\dashrightarrow} & H_2 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Bild}(|a|) & \overset{u}{\dashrightarrow} & \text{Bild}(a) \\
 & \swarrow |a| \quad \searrow a & \\
 & H_1 &
 \end{array}$$

Es gilt also $\text{Ker } a = \text{Ker } |a| = \text{Ker } u$ und $\overline{\text{Bild } a} = \overline{\text{Bild } u}$ sowie $\overline{\text{Bild } |a|} = (\text{Ker } |a|)^\perp$, da $|a|$ Hermite'sch ist, nach (7.14).

Eindeutigkeit: Sei $a = wp$ mit $p \in L(H_1)$, $p \geq 0$ und einer partielle Isometrie $w \in L(H_1, H_2)$ mit $\text{Ker } w = (\text{Bild } p)^\perp$. Dann ist w^*w die orthogonal-Projektion auf $(\text{Ker } w)^\perp = \overline{\text{Bild } p}$, denn $w_1 := w|_{(\text{Ker } w)^\perp} : \text{Init } w \rightarrow \text{Fini } w$ ist eine surjektive Isometrie, und somit gilt $w_1^*w_1 = 1$ wie in (10.4). Bezüglich der orthogonalen Zerlegungen $H_1 := \text{Init } w \oplus \text{Ker } w$ und $H_2 := \text{Fini } w \oplus (\text{Fini } w)^\perp$ ist

$$w = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad w^* = \begin{pmatrix} w_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit

$$w^*w = \begin{pmatrix} w_1^*w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

die orthogonal-Projektion auf $\text{Init } w$. Somit ist $a^*a = pw^*wp = p^2$, d.h. $p = |a|$ wegen der Eindeutigkeit der positiven Wurzel $|a| = \sqrt{a^*a}$ nach (10.15). Weiters ist $w|a| = wp = a = u|a|$, d.h. auf $\text{Bild } |a|$ gilt $w = u$ und dieses Bild liegt nach Voraussetzung dicht in $(\text{Ker } w)^\perp = (\text{Ker } u)^\perp$ also gilt $w = u$. \square

Ideale und Quotienten von C^* -Algebren

Unser Ziel ist auch nicht-kommutative C^* -Algebren A zu behandeln. Kommutative können wir nach dem Satz (10.8) von Gelfand-Naimark völlig durch ihre Algebra-Homomorphismen $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ beschreiben. Für allgemeines A faktorisieren die Algebra-Homomorphismen $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ aber über die Abelisierung $A \rightarrow A/A' = A_{\text{Abel}}$ und liefern somit zuwenig Information über A . Wir sollten also statt dessen Algebra-Homomorphismen $f : A \rightarrow B$ in allgemeinere C^* -Algebren B (wie z.B. $B = L(H)$) anstelle \mathbb{C} diskutieren und somit Ideale $I := \ker(f)$, die nicht notwendig maximal sind (siehe (9.39)).

10.20 Lemma. *Es sei I ein abgeschlossenes (einseitiges) Ideal einer C^* -Algebra A , weiters sei $a \in I$ Hermite'sch und $f \in C(\sigma(a), \mathbb{C})$ mit $f(0) = 0$. Dann ist $f(a) \in I$. Insbesondere gehört a_+ , a_- , $|a|$ und $\sqrt{|a|}$ zu I .*

Beweis. O.B.d.A. sei $I \neq A$. Dann ist $0 \in \sigma(a)$, denn $a \in I$ darf nicht invertierbar sein. Da a Hermite'sch vorausgesetzt ist, gilt $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$. Sei nun f_n eine Folge von Polynomen, welche auf $\sigma(a)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Da $f_n(0) \rightarrow f(0) = 0$ konvergiert können wir f_n durch $f_n - f_n(0)$ ersetzen und somit o.B.d.A. annehmen, daß $f_n(0) = 0$ ist. Dann ist aus $f_n(t)$ ein t heraushebbar, und somit $f_n(a) \in I$. Da I abgeschlossen ist, ist somit auch $f(a) \in I$.

Alle die Elemente a_+ , a_- , $|a|$ und $\sqrt{|a|}$ sind mittels Funktional-Kalkül als $f(a)$ dargestellt mit $f(0) = 0$ und gehören somit nach dem 1.ten Teil zu I . \square

10.21 Theorem (approximierende Einheit). *Es sei I ein Ideal in einer C^* -Algebra A . Dann existiert ein monoton wachsendes Netz $j \mapsto u_j$ in I mit $0 \leq u_j \leq 1$ und $\|a u_j - a\| \rightarrow 0$ für jedes $a \in I$.*

Beweis. Die Indexmenge des Netzes sei $\{j : \emptyset \neq j \subseteq I, j \text{ endlich}\}$ mit der Inklusion als partielle Ordnung. Für $j \subseteq I$ sei $v_j := \sum_{x \in j} x^*x \geq 0$. Klarerweise ist $v_j \in I$ und für $j \subseteq j'$ gilt $v_{j'} - v_j = \sum_{x \in j' \setminus j} x^*x \geq 0$, d.h. $v_j \leq v_{j'}$.

Es sei $u_j := v_j \left(\frac{1}{|j|} + v_j \right)^{-1} = f_{1/|j|}(v_j)$, wobei $f_t(s) := \frac{s}{t+s}$ für $s \geq 0$ und $t > 0$. Wegen $0 \leq f_t(s) \leq 1$ ist $0 \leq u_j \leq 1$ und $u_j \in I$ weil I ein Ideal ist. Ist $0 < t' \leq t$ und $0 \leq u \leq u'$, so ist $f_t(u') \leq f_{t'}(u')$ und $f_t(u) \leq f_t(u')$, denn einerseits ist $f_t(s) \leq f_{t'}(s)$ für alle $s \geq 0$, also $f_t(u') \leq f_{t'}(u')$, und andererseits ist $t \leq t+u \leq t+u'$ und somit $\frac{1}{t+u'} \leq \frac{1}{t+u}$ nach (10.18) und folglich $f_t(u) = u \frac{1}{t+u} = 1 - t \frac{1}{t+u} \leq 1 - t \frac{1}{t+u'} = u' \frac{1}{t+u'} = f_t(u')$. Insgesamt ist also $u_j \leq u_{j'}$ für $j \subseteq j'$.

Bleibt noch die Konvergenz zu zeigen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \sum_{x \in j} (x(u_j - 1))^* (x(u_j - 1)) &= (u_j - 1) \left(\sum_{x \in j} x^* x \right) (u_j - 1) = (u_j - 1) v_j (u_j - 1) \\ &= \frac{1}{|j|^2} v_j \left(\frac{1}{|j|} + v_j \right)^{-2} \\ &= \frac{1}{|j|^2} g_{1/|j|}(v_j) \quad (\text{mit } g_t(s) := \frac{s}{(t+s)^2}), \end{aligned}$$

denn

$$u_j - 1 = v_j \left(\frac{1}{|j|} + v_j \right)^{-1} - \left(\frac{1}{|j|} + v_j \right) \left(\frac{1}{|j|} + v_j \right)^{-1} = -\frac{1}{|j|} \left(\frac{1}{|j|} + v_j \right)^{-1}.$$

Die Ableitung g'_t bei s ist $1(t+s)^{-2} - 2s(t+s)^{-3} = \frac{t-s}{(t+s)^3}$. Also liegt das Maximum bei $s = t$ und es ist $g_t(s) \leq g_t(t) = \frac{1}{4t}$ für $s \geq 0$ und $t > 0$. Folglich ist $(a(u_j - 1))^* (a(u_j - 1)) \leq \sum_{x \in j} (x(u_j - 1))^* (x(u_j - 1)) \leq \frac{1}{|j|^2} g_{1/|j|}(v_j) \leq \frac{1}{4|j|}$ für $a \in j$. Also ist $\|a(u_j - 1)\|^2 = \|(a(u_j - 1))^* (a(u_j - 1))\| \leq \frac{1}{4|j|}$, und damit folgt $\|au_j - a\| \rightarrow 0$. \square

Folgerung. *Es sei I ein abgeschlossenes Ideal einer C^* -Algebra A . Dann ist I auch $*$ -abgeschlossen, d.h. $a \in I \Rightarrow a^* \in I$.*

Beweis. Es sei $a \in I$. Wegen obigen Theorems (10.21) existiert ein Netz $u_i \in I$ mit $0 \leq u_i \leq 1$ und $\|u_i^* a^* - a^*\| = \|a u_i - a\| \rightarrow 0$. Mit $u_i \geq 0$ gilt $u_i = u_i^*$ und somit ist $u_i^* a^* = u_i a^* \in I$ und damit auch $a^* \in I$. \square

10.22 Proposition. *Es sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^* -Algebra A . Dann ist A/I eine C^* -Algebra und $\pi : A \rightarrow A/I$ ein $*$ -Homomorphismus.*

Beweis. Wir wissen bereits, daß A/I eine Banach-Algebra ist, siehe (9.39). Da I unter $*$ -abgeschlossen ist, induziert $*$ eine Involution auf A/I durch $(a + I)^* := a^* + I$.

Um die C^* -Eigenschaft der Quotienten-Norm nachzuweisen benötigen wir folgendes

Sublemma. *Es sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^* -Algebra A . Für $a \in A$ gilt $\|a + I\| = \lim_i \|a - au_i\|$, wobei u_i eine approximierende Einheit wie in (10.21) ist.*

Beweis. Wegen $u_i \in I$ ist auch $au_i \in I$ und somit $\|a - au_i\| \geq \inf\{\|a - y\| : y \in I\} =: \|a + I\|$, also gilt $\|a + I\| \leq \inf_i \|a - au_i\|$.

Sei $y \in I$, dann gilt $\|yu_i - y\| \rightarrow 0$ und somit

$$\begin{aligned} \limsup_i \|a - au_i\| &= \limsup_i (\|a - au_i\| - \|yu_i - y\|) \\ &\leq \limsup_i \|a - au_i - yu_i + y\| \\ &= \limsup_i \|(a + y) - (a + y)u_i\| \\ &\leq \limsup_i \|a + y\| \cdot \|1 - u_i\| \\ &\leq \|a + y\|, \quad \text{da } 0 \leq 1 - u_i \leq 1 \Rightarrow \|1 - u_i\| \leq 1 \end{aligned}$$

also ist $\limsup_i \|a - au_i\| \leq \|a + I\| = \inf\{\|a + y\| : y \in I\}$.

Somit ist $\lim_i \|a - au_i\| = \|a + I\|$. \square

Nun können wir den Beweis der Proposition beenden. Für $y \in I$ ist:

$$\begin{aligned} \|a + I\|^2 &= \lim_i \|a - au_i\|^2 \\ &= \lim_i \|(a - au_i)^*(a - au_i)\| \\ &= \lim_i \|(1 - u_i)a^*a(1 - u_i)\| \\ &= \lim_i \|(1 - u_i)(a^*a + y)(1 - u_i)\| \quad (\text{da } \|y(1 - u_i)\| \rightarrow 0) \\ &\leq \|a^*a + y\| \quad (\text{da } \|1 - u_i\| \leq 1) \\ \Rightarrow \|a + I\|^2 &\leq \inf_{y \in I} \|a^*a + y\| = \|a^*a + I\| = \|(a + I)^*(a + I)\| \leq \|a + I\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

10.23 Theorem. *Es sei $f : A \rightarrow B$ ein $*$ -Homomorphismus zwischen C^* -Algebren. Dann ist $\|f\| = 1$ und das Bild von f ist abgeschlossen. Ist f zusätzlich injektiv, so ist f eine Isometrie.*

Beweis. ($\|f\| = 1$) Für $a \in A$ gilt $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a)$, denn aus $b(a - \lambda) = 1 = (a - \lambda)b$ folgt $f(b)(f(a) - \lambda) = (f(a) - \lambda)f(b)$, d.h. $\rho(a) \subseteq \rho(f(a))$. Also ist $r(f(a)) \leq r(a)$. Wenden wir dies auf das Hermite'sche Element a^*a an, so erhalten wir wegen (10.5.5): $\|f(a)\|^2 = \|f(a)^*f(a)\| = \|f(a^*a)\| = r(f(a^*a)) \leq r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Also ist $\|f\| \leq 1$. Da f die 1 erhält, gilt $\|f\| = 1$.

Sei nun f injektiv. Falls a Hermite'sch ist, so ist $f(a)^* = f(a)$ und $\sigma(f(a)) \subseteq \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ und folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ C^*(a) & \xrightarrow{f} & C^*(b) \\ \text{cong} \uparrow & & \text{cong} \uparrow \\ C(\sigma(a)) & \xrightarrow{\text{inkl}^*} & C(\sigma(f(a))) \end{array}$$

Also ist auch inkl^* injektiv und nach dem Lemma von Urysohn ist inkl surjektiv, d.h. $\sigma(a) = \sigma(f(a))$. Also ist $\|a\| \stackrel{(10.5.5)}{=} r(a) = \sup\{|t| : t \in \sigma(a)\} = \sup\{|t| : t \in \sigma(f(a))\} = r(f(a)) = \|f(a)\|$.

Sei nun $a \in A$ beliebig. Dann gilt $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|f(a^*a)\| = \|f(a)^*f(a)\| = \|f(a)\|^2$, d.h. f ist eine Isometrie.

Sei schließlich f wieder beliebig. Dann induziert f einen injektiven $*$ -Homomorphismus von $A/\text{Ker } f \rightarrow B$ nach (10.22). Dieser ist nach dem vorigen Teil eine Isometrie und somit ist Bild f abgeschlossen. \square

10.23a. Es sei X ein topologischer Raum. Wir betrachten die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned}\Phi : \{A : A \subseteq X\} &\rightarrow \{I : I \subseteq C(X, \mathbb{C})\}, & A &\mapsto \{f : f|_A = 0\}, \\ \Psi : \{I : I \subseteq C(X, \mathbb{C})\} &\rightarrow \{A : A \subseteq X\}, & I &\mapsto \{x : f(x) = 0 \forall f \in I\}.\end{aligned}$$

Diese beschreiben eine Galois-Beziehung, d.h. sie sind antiton zwischen den durch Inklusion partiell geordneten Mengen $\{A : A \subseteq X\}$ und $\{I : I \subseteq C(X, \mathbb{C})\}$ erfüllen $I \subseteq \Phi(A) \Leftrightarrow A \subseteq \Psi(I)$, denn

$$\begin{aligned}I \subseteq \Phi(A) &\Leftrightarrow \forall f \in I : f \in \Phi(A), \text{ d.h. } f|_A = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall f \in I \forall a \in A : f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A \forall f \in I : f(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A : a \in \Psi(I) \\ &\Leftrightarrow A \subseteq \Psi(I).\end{aligned}$$

Jede Galois-Beziehung induziert eine Bijektion zwischen dem Bild von Φ und Bild von Ψ gegeben durch $\Phi : \text{Bild}(\Psi) \rightarrow \text{Bild}(\Phi)$ mit Inverser $\Psi : \text{Bild}(\Phi) \rightarrow \text{Bild}(\Psi)$:

Aus obiger Äquivalenz folgt sofort $I \subseteq \Phi(\Psi(I))$ und $A \subseteq \Psi(\Phi(A))$ für alle I und A und daraus für $I = \Phi(A)$ durch Anwenden von Ψ weiters $\Phi(A) \subseteq \Phi(\Psi(\Phi(A))) \subseteq \Phi(A)$. Also gilt $\Phi \circ \Psi = \text{id}$ auf $\text{Bild}(\Phi)$ und aus Symmetriegründen $\Psi \circ \Phi = \text{id}$ auf $\text{Bild}(\Psi)$.

Proposition. *Es sei X kompakt. Dann stehen die abgeschlossenen Ideale von $C(X)$ in bijektiver Beziehung zu den abgeschlossenen Teilmengen von X . Dabei wird jedem Ideal I von $C(X, \mathbb{C})$ die abgeschlossene Teilmenge $\Psi(I) := \{x \in X : f(x) = 0 \forall f \in I\}$ von X zu geordnet. Und umgekehrt wird jeder Teilmenge A von X das Ideal $\Phi(A) = \{f \in C(X, \mathbb{C}) : f|_A = 0\}$ zugeordnet. Weiters ist $C(X, \mathbb{C})/I = C(\Psi(I), \mathbb{C})$.*

Beweis. Es bleibt nur zu zeigen, daß das Bild von Φ gerade aus den abgeschlossenen Idealen von $C(X, \mathbb{C})$ und jenes von Ψ aus den abgeschlossenen Teilmengen von X besteht.

Daß die Bilder aus abgeschlossenen Mengen bestehen ist offensichtlich, denn $\Psi(I) = \bigcap_{f \in I} f^{-1}(0)$ und $\Phi(A) = \{f : 0 = f(a) = \delta(a)(f) \forall a \in A\} = \bigcap_{a \in A} \delta(a)^{-1}(0)$, wobei $\delta : X \rightarrow \text{Alg}(C(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ der Homöomorphismus aus (9.41) ist. Da $\delta_a : C(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ Algebra-Homomorphismen sind ist $\Phi(A)$ ein Ideal.

Sei nun umgekehrt $A \subseteq X$ abgeschlossen. Es ist nach obigen $A \subseteq \Psi(\Phi(A))$. Angenommen $A \neq \Phi(\Psi(A))$. Nach dem Lemma von Urysohn existiert ein $f \in C(X, [0, 1])$ mit $f|_A = 0$ und $f|_{\Phi(\Psi(A))} \neq 0$, d.h. $f \in \Psi(A)$ aber $f \notin \Psi(\Phi(\Psi(A))) = \Psi(A)$, ein Widerspruch.

Sei nun $I \subseteq C(X, \mathbb{C})$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $C(X, \mathbb{C})/I$ eine kommutative C^* -Algebra nach (10.22), also isomorph zu $C(Y, \mathbb{C})$ für den kompakten Raum $Y = \sigma(C(X, \mathbb{C})/I)$. Die kanonische Quotienten-Abbildung induziert somit

einen $*$ -Homomorphismus $\pi : C(X, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C})/I \cong C(Y)$. Dieser ist α^* für eine stetige Abbildung $\alpha : Y \rightarrow X$: Sei nämlich $\alpha : Y \rightarrow X$ die durch

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}(C(Y, \mathbb{C}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Alg}(C(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \\ \cong \uparrow \delta & & \cong \uparrow \delta \\ Y & \xrightarrow{\alpha} & X \end{array}$$

gegebene stetige Abbildung. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha^*(f)(y) &= (f \circ \alpha)(y) = f(\alpha(y)) = \delta(\alpha(y))(f) \\ &= (\delta \circ \alpha)(y)(f) = (\pi^* \circ \delta)(y)(f) = (\pi^*(\delta(y)))(f) \\ &= (\delta(y) \circ \pi)(f) = \delta(y)(\pi(f)) = \pi(f)(y). \end{aligned}$$

Somit ist $I = \text{Ker}(\pi) = \text{Ker}(\alpha^*) = \{f : 0 = \alpha^*(f) = f \circ \alpha\} = \{f : f|_{\alpha(Y)} = 0\} = \Phi(\alpha(Y))$, d.h. $I \in \text{Bild}(\Phi)$. \square

10.23b Proposition. *Es sei I ein abgeschlossenes Ideal in $L(H)$ mit $I \neq \{0\}$. Dann enthält I das Ideal der kompakten Operatoren.*

Wir werden später zeigen, daß das auch schon das einzige nicht-triviale Ideal ist falls H separabel ist. Die Quotienten-Algebra $L(H)/K(H)$ heißt CALKIN-ALGEBRA. Die Operatoren, deren Restklasse in der Calkin-Algebra invertierbar sind, heißen FREDHOLM OPERATOREN, siehe [C].

Beweis. Es sei $I \neq \{0\}$ und $0 \neq a \in I$. Dann existiert ein $h_0 \neq 0$ mit $h_1 := a(h_0) \neq 0$. Es sei $g_0 \neq 0$ beliebig. Dann ist $b_0 : h \mapsto \frac{\langle h, g_0 \rangle}{\|g_0\|^2} h_0$ ein stetiger linearer Operator mit $b_0(g_0) = h_0$ und $b_0(h) = 0$ für $h \perp g_0$. Für $g_1 \neq 0$ sei $b_1 : h \mapsto \frac{\langle h, h_1 \rangle}{\|h_1\|^2} g_1$. Dann ist b_1 ebenfalls ein stetiger linearer Operator mit $b_1(h_1) = g_1$. Also bildet $b_1 a b_0 \in I$ den Vektor g_0 auf g_1 ab und g_0^\perp auf 0. Daraus folgt leicht, daß alle endlich-dimensionalen Operatoren in I liegen, denn diese lassen sich als $h \mapsto \sum_{j=1}^n \langle h, h_j \rangle k_j$ mit einer orthonormalen Familie h_j schreiben: In der Tat sei $\{k_1, \dots, k_n\}$ eine orthonormalbasis des endlich dimensionalen Bildes von T . Dann läßt sich $T(h)$ als $T(h) = \sum_{i=1}^n T_i(h) k_i$ schreiben, wobei $\langle h, T^*(k_j) \rangle = \langle T(h), k_j \rangle = T_j(h)$ ist. Nun Orthonormalisieren wird die $T^*(k_j)$ und erhalten ein orthonormal-System $\{h_1, \dots, h_n\}$, wobei $T^*(k_j) = \sum_i t_{i,j} h_i$ mit $h_{i,j} \in \mathbb{C}$ ist. Damit ist

$$\begin{aligned} T(h) &= \sum_{i=1}^n T_i(h) k_i = \sum_i \langle h, T^*(k_i) \rangle k_i \\ &= \sum_i \left\langle h, \sum_j t_{i,j} h_j \right\rangle k_i = \sum_j \langle h, h_j \rangle \sum_i t_{i,j} k_i, \end{aligned}$$

wie gewünscht.

Da I abgeschlossen ist, liegen auch alle kompakten Operatoren als Abschluß der endlich-dimensionalen in I . \square

Zyklische Darstellungen von C^* -Algebren

Wir wollen nun die Struktur von nicht-kommutativen C^* -Algebren näher untersuchen. Für kommutative C^* -Algebren haben wir in (10.8) gesehen, daß die $*$ -Homomorphismen nach \mathbb{C} die Algebra völlig beschrieben haben, und wir damit einen isometrischen $*$ -Homomorphismus auf $C(X, \mathbb{C})$ für ein geeignetes kompaktes X erhalten haben. Unser Erzbeispiel für nicht kommutative C^* -Algebren ist $L(H)$ für jeden Hilbertraum H . Es liegt folglich nahe $*$ -Homomorphismen $A \rightarrow L(H)$ zu untersuchen.

10.24 Definition (Darstellungen und invariante Teilräume). Es sei A eine C^* -Algebra. Unter einer Darstellung von A (auf einem Hilbertraum H) versteht man einen $*$ -Homomorphismus $\rho : A \rightarrow L(H)$.

Ein Teilraum $N \subseteq H$ heißt INVARIANTER TEILRAUM der Darstellung, falls $\rho(a) \cdot N \subseteq N$ für alle $a \in A$. Falls N invariant ist, so ist offensichtlich auch der Abschluß \overline{N} und das orthogonale Komplement N^\perp invariant ($h \perp N \Rightarrow \langle \rho(a)h, k \rangle = \langle h, \rho(a^*)k \rangle = 0$ für $k \in N$ und somit auch $\rho(a^*)k \in N$).

Durch Einschränken induziert jede Darstellung $\rho : A \rightarrow L(H)$ eine Darstellung $\rho_N : A \rightarrow L(N)$, definiert durch $\rho_N(a) := \rho(a)|_N$.

Für $h \in H$ ist $\rho(A)h$ ein invarianter Teilraum.

Die ORTHOGONALE SUMME einer Familie von Darstellungen $\{\rho_i : A \rightarrow L(H_i)\}_{i \in I}$ ist die Darstellung $\rho := \bigoplus_i \rho_i : A \rightarrow L(H)$ am Hilbertraum

$$H := \bigoplus_{i \in I} H_i := \left\{ h = (h_i) \in \prod_{i \in I} H_i : \|h\|^2 := \sum_{i \in I} \|h_i\|^2 < \infty \right\},$$

gegeben durch $\rho(a)(h) = (\rho_i(a)(h_i))_{i \in I}$.

Zwei Darstellungen $\rho_i : A \rightarrow L(H_i)$ mit $i \in \{1, 2\}$ heißen ÄQUIVALENT falls eine surjektive Isometrie $U : H_1 \rightarrow H_2$ existiert, die die Wirkungen austauscht, d.h. $\forall a \in A : \rho_2(a) \circ U = U \circ \rho_1(a)$.

Ist N ein invarianter Teilraum, so ist ρ äquivalent zur orthogonalen Summe von $\rho|_{\overline{N}}$ und $\rho|_{N^\perp}$.

Eine Darstellung $\rho : A \rightarrow L(H)$ heißt irreduzibel falls es genau(!) zwei abgeschlossene invarianten Teilräume gibt, nämlich $\{0\} \neq H$.

Es liegt nun nahe zu versuchen den Darstellungs-Raum H einer Darstellung ρ soweit in invariante Teilräume N zu zerlegen, daß diese nicht weiter zerlegt werden können, also die Einschränkung ρ_N irreduzibel ist, und ρ bis auf Äquivalenz als orthogonale Summe dieser irreduziblen Darstellungen zu schreiben. Dies geht aber im allgemeinen nicht. Um jede Darstellung in einfachere Teil-Darstellungen zu zerlegen benötigen wir einen schwächeren Begriff als irreduzibel, nämlich zyklisch:

Ein $h \in H$ heißt ZYKLISCHER VEKTOR falls der ORBIT (die BAHN) $\rho(A)h$ von h in H dicht liegt.

Eine Darstellung $\rho : A \rightarrow L(H)$ heißt ZYKLISCH falls sie einen zyklischen Vektor besitzt.

Klarerweise ist jeder Vektor $h \neq 0$ einer irreduziblen Darstellung ein zyklischer Vektor, und die Darstellung somit zyklisch.

Hauptbeispiel. Für einen σ -endlichen Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) definiert $\rho : L^\infty(X) \rightarrow L(L^2(X))$, $\rho(f)(g) := f \cdot g$ eine Darstellung, denn

$$\langle h, \rho(f^*)(g) \rangle = \langle h, \overline{f} \cdot g \rangle = \int_X h \cdot \overline{f} \cdot g \, d\mu = \langle h \cdot f, g \rangle = \langle \rho(f)(h), g \rangle = \langle h, \rho(f)^*(g) \rangle$$

Diese Darstellung ist zyklisch:

Falls $\mu(X) < \infty$, so können wir als zyklischen Vektor $h := \chi_X$ verwenden, denn da nach (4.14) die elementaren Funktionen $g \in L^\infty(X)$ in L^2 dicht liegen, ist auch $\{gh : g \in L^\infty\}$ dicht in L^2 . Falls $\mu(X) = \infty$, so wählen wir eine Zerlegung $X = \bigsqcup_n A_n$ mit $\mu(A_n) < \infty$ und setzen $h := \sum_n \frac{1}{\sqrt{2^n \mu(A_n)}} \chi_{A_n}$. Dann ist $h \in L^2$ ein zyklischer Vektor, denn jedes $f \in L^2$ wird nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz durch $\sum_n f \cdot \chi_{A_n}$ in L^2 approximiert und diese Partialsummen lassen sich nach dem ersten Teil durch $\{g \cdot h : g \in L^\infty(X)\}$ approximieren.

Die Darstellung $\rho : L^\infty(X) \rightarrow L(L^2(X))$ ist aber nach (10.35) nur dann irreduzibel, wenn $L^2(X) \cong \mathbb{C}$.

Für ein positives Borel-Maß μ auf einem kompakten Raum X induziert das eine Darstellung: $\rho|_{C(X, \mathbb{C})} : C(X, \mathbb{C}) \rightarrow L(L^2(X))$, $\rho(f)(g) := f \cdot g$.

10.25 Theorem. *Jede Darstellung einer C^* -Algebra ist äquivalent zu einer orthogonalen Summe von zyklischen Darstellungen.*

Beweis. Es sei \mathcal{M} die Menge aller Teilmengen $M \subseteq H \setminus \{0\}$ mit $\rho(A)h_1 \perp \rho(A)h_2$ für alle $h_1, h_2 \in M$ mit $h_1 \neq h_2$. Mittels Zorn's Lemma erhalten wir ein bezüglich der Inklusion maximales Element $M \in \mathcal{M}$. Angenommen der von $\rho(A)M$ erzeugte Teilraum von H ist nicht dicht. Sei $k \neq 0$ ein Element des orthogonalen Komplements. Dann ist $\langle \rho(a)k, \rho(b)h \rangle = \langle k, \rho(a^*b)h \rangle = 0$ für alle $a, b \in A$ und $h \in M$, d.h. $\rho(A)k \perp \rho(A)h$, ein Widerspruch zur Maximalität. Für $h \in H$ sei H_h der invariante Teilraum $\overline{\rho(A)h}$ von H und ρ_h die Einschränkung der Darstellung ρ auf diesen Teilraum. Es ist ρ_h klarerweise zyklisch, mit zyklischem Vektor h . Weiters ist $U : \bigoplus_{h \in M} H_h \rightarrow H$, $x = (x_h) \mapsto \sum_h x_h$ eine surjektive (da $\langle \rho(A)M \rangle$ dicht liegt) Isometrie (nach Pythagoras), bezüglich welcher $\bigoplus_{h \in M} \rho_h$ äquivalent zu ρ ist. \square

10.26 Von zyklischen Darstellungen zu positiven Funktionalen. Wir sollten also zyklische Darstellungen genauer studieren. Sei $\rho : A \rightarrow L(H)$ eine (zyklische) Darstellung mit einem (zyklischen) Vektor $h \in H$. Dann ist

$$f : A \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(a) := \langle \rho(a)h, h \rangle$$

ein beschränktes lineares Funktional mit $\|f\| = \|h\|^2$, denn für $\|a\| \leq 1$ ist auch $\|\rho(a)\| \leq 1$ und damit $|f(a)| = |\langle \rho(a)h, h \rangle| \leq \|\rho(a)h\| \cdot \|h\| \leq \|h\|^2$. Dieses Funktional wird wohl sehr viel Information der Darstellung tragen. Allgemein definiert jedes stetige Funktional $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer C^* -Algebra eine sesqui-lineare Form $g : A \times A \rightarrow \mathbb{C}$ durch $g(a, b) := f(b^*a)$. Für obiges f liefert dies eine positive (und somit Hermite'sche) Form

$$g(a, a) = f(a^*a) = \langle \rho(a^*a)h, h \rangle = \langle \rho(a)h, \rho(a)h \rangle = \|\rho(a)h\|^2 \geq 0.$$

Folglich definieren wir:

Definition. Ein lineares Funktional $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer C^* -Algebra heißt POSITIV, falls $f(a) \geq 0$ für alle $a \in A_+$. Dann ist f monoton, d.h. aus $a \leq b$ folgt $f(a) \leq f(b)$. Die zu einem positiven Funktional f gehörende sesqui-lineare Form $g : (a, b) \mapsto f(b^*a)$ ist somit eine positive sesqui-lineare Form.

Das Funktional f heißt ZUSTAND, falls zusätzlich $\|f\| = 1$ gilt.

Beispiel. Die positiven linearen Funktionale auf $C(X, \mathbb{C})$ sind genau die positiven Baire-Maße, und die Zustände genau die Wahrscheinlichkeitsmaße μ , d.h. $\mu(X) = 1$.

Proposition. *Ein lineares Funktional $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer C^* -Algebra ist genau dann positiv, wenn $\|f\| = f(1)$ gilt (und es somit beschränkt ist).*

Beweis. (\Rightarrow) Für Hermite'sche x ist $x \leq \|x\|$ und somit $f(x) \leq f(\|x\|) = f(1) \|x\|$.

Für beliebige x erhalten wir aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (6.6) für g die Ungleichung

$$|f(x)|^2 = |g(x, 1)|^2 \leq g(1, 1)g(x, x) = f(1) f(x^*x) \leq f(1)^2 \|x^*x\| = (f(1) \|x\|)^2,$$

d.h. $\|f\| \leq f(1)$. Wegen $|f(1)| = f(1) \cdot \|1\|$ gilt Gleichheit.

(\Leftarrow) Dazu nehmen wir o.B.d.A. an, daß $1 = \|f\| = f(1)$ ist. Wir müssen zeigen, daß $f(a^*a) \geq 0$ ist. Es gilt $\sigma(a^*a) \subseteq [0, \|a^*a\|]$. Dieses Intervall ist der Durchschnitt aller Kreisscheiben $\lambda_0 + K_r := \lambda_0 + \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq r\}$ mit $r > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ die es enthalten. Es genügt folglich z.z., daß $f(a^*a) - \lambda_0 \in K_r$ für diese $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$. Dies ist in der Tat der Fall, denn $|f(a^*a) - \lambda_0| = |f(a^*a - \lambda_0)| \leq \|f\| \|a^*a - \lambda_0\| \leq r(a^*a - \lambda_0) = r$, da $\sigma(a^*a - \lambda_0) = \sigma(a^*a) - \lambda_0 \subseteq K_r$. \square

10.27 Erweiterungssatz für Zustände. *Es sei A eine C^* -Algebra und B eine Teil- C^* -Algebra. Dann läßt sich jeder Zustand von B zu einem von A erweitern.*

Beweis. Es sei $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ ein positives Funktional, also ein lineares Funktional mit $\|f\| = f(1)$. Nach dem Satz (7.4) von Hahn-Banach existiert eine lineare Erweiterung $\tilde{f} : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\|\tilde{f}\| = \|f\| = f(1) = \tilde{f}(1)$. Folglich ist \tilde{f} ebenfalls ein positives Funktional. \square

10.28 Rekonstruktion der Darstellung aus dem positiven Funktional. Es sei $\rho : A \rightarrow L(H)$ eine Darstellung einer C^* -Algebra A . Wir wollen versuchen diese Darstellung aus dem Funktional $f : a \mapsto \langle \rho(a)h, h \rangle$ zurückzugewinnen. Dafür sollte wohl h ein zyklischer Vektor sein.

Versuchen wir zuerst den Hilbertraum H zu rekonstruieren. Es sei $U : A \rightarrow H$ die stetig lineare Abbildung $a \mapsto \rho(a)h$. Da h zyklisch ist, hat sie dichtes Bild. Weiters gilt: $\langle U(a), U(b) \rangle = \langle \rho(a)h, \rho(b)h \rangle = \langle \rho(b^*a)h, h \rangle = f(b^*a)$, d.h. insbesondere ist der Kern von U die Menge $I_f := \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ und H ist vermöge U isometrisch isomorph zu der Vervollständigung H_f von A/I_f bezüglich der Norm $\|a + I_f\|^2 := f(a^*a)$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{U} & L(H) \\ \pi \downarrow & & \uparrow \cong \tilde{U} \\ A/I_f & \hookrightarrow & H_f \end{array}$$

Nun zur Rekonstruktion der Darstellung:

Die via \tilde{U} auf H_f durch ρ indizierte Darstellung ρ_f ist durch

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\rho_f(a)(b + I_f)) &:= \rho(a)(\tilde{U}(b + I_f)) = \rho(a)(U(b)) = \rho(a)(\rho(b)h) = \rho(ab)h \\ &= U(ab) = \tilde{U}(ab + I_f) \end{aligned}$$

gegeben, also ist $\rho_f(a) : b + I_f \mapsto ab + I_f$ von der Linksmultiplikation mit a in A induziert. Dem zyklischen Vektor $h \in H$ entspricht via \tilde{U} offensichtlich $h_f := 1 + I_f \in H_f$.

Sei nun A kommutativ, d.h. o.B.d.A. $A = C(X)$ für ein kompaktes X . Da $f : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional ist, ist nach dem Riesz'schen Darstellungssatz $f(g) = \int_X g d\mu$ für ein positives Baire-Maß μ und alle $g \in C(X)$.

Bezüglich des Maßes μ ist

$$I_f = \{g : \|g\|_2^2 := \int_X g \bar{g} d\mu = 0\} = \{g \in C(X) : g = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}\},$$

d.h. H_f ist isomorph zu $L^2(X, \mu)$.

Die induzierte Darstellung ρ_f ist also nichts anderes als die Darstellung von $C(X)$ auf $L^2(X, \mu)$ durch Multiplikation. Wir haben also folgendes gezeigt:

Proposition. *Bis auf Äquivalenz sind die zyklischen Darstellungen einer kommutativen C^* -Algebra $A = C(X)$ genau die Darstellungen $M : C(X) \rightarrow L(L^2(\mu))$ mit Baire-Maßen μ auf X . \square*

Nun wollen wir das auf beliebige C^* -Algebren verallgemeinern:

10.29 Theorem (Gelfand-Naimark-Segal). *Es sei A eine C^* -Algebra. Dann existiert eine bijektive Zuordnung zwischen positiven linearen Funktionalen (Zuständen) auf A und Äquivalenzklassen von zyklischen Darstellungen mit ausgezeichneten zyklischen (normierten) Vektoren. Diese Zuordnung ist wie folgt gegeben:*

- \Leftarrow Sei $\rho : A \rightarrow L(H)$ ein Darstellung mit zyklischen Vektor h , dann ist $f = f_{\rho, h} : a \mapsto \langle \rho(a)h, h \rangle$ ein positives lineares Funktional auf A .
 \mapsto Sei $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional, dann sei $I_f := \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ und H_f die Vervollständigung von A/I_f bezüglich der sesqui-linearen Form $\langle a + I_f, b + I_f \rangle := f(b^*a)$. Die assoziierte Darstellung $\rho_f : A \rightarrow L(H_f)$ ist durch $\rho_f(a)(b + I_f) := ab + I_f$ gegeben und $h_f := 1 + I_f$ ist ein ausgezeichneter zyklischer Vektor.

Beweis. (\Leftarrow) Dies ist (10.26).

(\mapsto) Es sei $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional und $g : (x, y) \mapsto f(y^*x)$ die dazugehörige positive sesqui-lineare Form. Dann ist $I_f := \{a : f(a^*a) = g(a, a) = 0\} = \{a : g(a, b) = 0 \text{ für alle } b \in A\}$ ein abgeschlossener linearer Teilraum, denn die Gleichung gilt, da $|g(a, b)|^2 \leq g(a, a)g(b, b)$. Folglich faktorisiert g zu einer positiv-definiten sesqui-linearen Form \tilde{g} auf A/I_f gegeben durch $\tilde{g}(a + I_f, b + I_f) := g(a, b) = f(b^*a)$. Es sei H_f der Hilbertraum, der durch Vervollständigen aus A/I_f bezüglich des inneren Produkts \tilde{g} entsteht. Für $x \in I_f$ gilt

$$g(ax, b) = f(b^*ax) = f((a^*b)^*x) = g(x, a^*b) = 0,$$

also ist $aI_f \subseteq I_f$, und folglich

$$\rho_f : A \times (A/I_f) \rightarrow A/I_f, \quad (a, b + I_f) \mapsto ab + I_f$$

eine wohldefinierte bilineare Abbildung. Wir müssen die Stetigkeit von $b + I_f \mapsto ab + I_f$ bezüglich der Norm $\|b + I_f\|^2 := f(b^*b)$ nachrechnen:

$$\|ab + I_f\|^2 = f(b^*a^*ab) \leq \|a\|^2 f(b^*b) = \|a\|^2 \|b + I_f\|^2,$$

da $a^*a \leq \|a^*a\|$ und somit $b^*a^*ab \leq b^*\|a^*a\|b = \|a\|^2 b^*b$ nach (10.18). Somit liefert die Abbildung ρ_f durch Fortsetzen auf die Vervollständigung H_f von A/I_f

wie man leicht sieht einen Algebra-Homomorphismus $\rho_f : A \rightarrow L(H_f)$. Es ist $\rho_f : A \rightarrow L(H_f)$ ein $*$ -Homomorphismus, denn

$$\begin{aligned} g\left(\rho_f(a)(x + I_f), y + I_f\right) &= g(ax + I_f, y + I_f) = g(y^*, ax) \\ &= g(x, a^*y) = g\left(x + I_f, \rho(a^*)(y + I_f)\right). \end{aligned}$$

Außerdem ist $h_f := 1 + I_f$ ein zyklischer Vektor von ρ_f , denn nach Konstruktion ist $\rho_f(A)(1 + I_f) = \{a + I_f : a \in A\} = A/I_f$ dicht in H_f .

Es ist f gerade das zu ρ_f und h_f gehörende Funktional $a \mapsto \langle \rho_f(a)(h_f), h_f \rangle = \langle \rho_f(a)(1 + I_f), 1 + I_f \rangle = f(1^*a) = f(a)$.

Umgekehrt sei $\rho : A \rightarrow L(H)$ eine Darstellung mit zyklischem Vektor h und dazu assoziiertem $f = f_{\rho, h} : a \mapsto \langle \rho(a)h, h \rangle$. In (10.28) haben wir gezeigt, daß daraus konstruierte Darstellung $\rho_h : A \rightarrow L(H_f)$ via der surjektiven Isometrie \tilde{U} zu ρ isomorph ist. \square

10.30 Definition. Es sei $\text{Zust}(A)$ der Raum aller Zustände $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ versehen mit der punktweisen Konvergenz.

Proposition. *Es sei A eine C^* -Algebra. Dann ist der Raum $\text{Zust}(A)$ aller Zustände ein kompakter konvexer Teilraum der Einheitskugel von A^* . Und für $a \in A_+$ ist $\|a\| = \max\{f(a) : f \in \text{Zust}(A)\}$.*

Beweis. Der Raum der Zustände ist klarerweise eine abgeschlossene konvexe Menge in der Einheitskugel von A^* bezüglich der punktweisen Konvergenz, also auch kompakt.

Es sei $C^*(a)$ die von $a \geq 0$ erzeugte kommutative Teil- C^* -Algebra von A . Es existiert ein $\lambda \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ mit $|\lambda| = r(a) = \|a\|$, also ist $\lambda = \|a\|$. Dann existiert ein Algebra-Homomorphismus $f : C^*(a) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(a) = \lambda = \|a\|$. Da $\|f\| = 1 = f(1)$, ist f ein Zustand auf $C^*(a)$, und kann somit nach (10.27) zu einem Zustand $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden.

Umgekehrt gilt klarerweise $|f(a)| \leq \|f\| \|a\| = \|a\|$. \square

10.31 Theorem. *Jede C^* -Algebra A besitzt eine TREUE (d.h. injektive und nach (10.23) somit isometrische) Darstellung $\pi : A \rightarrow L(H)$ auf einen Hilbert-Raum H .*

Ist A separabel, so kann die Darstellung zyklisch gewählt werden, siehe [C,259], [B,265].

Beweis. Es sei $H = \bigoplus_{f \in \text{Zust } A} H_f$ und $\rho(a) := \bigoplus_{f \in \text{Zust } A} \rho_f(a)$. Dann ist $\rho : A \rightarrow L(H)$ eine Darstellung.

Diese ist treu: Es sei $\rho(a) = 0$ und somit $\rho_f(a) = 0$ für alle $f \in \text{Zust}(A)$. Da $a^*a \geq 0$ nach (10.17) gilt, existiert nach (10.30) ein Zustand $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ mit $f(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2$. Der zur Darstellung ρ_f gehörende zyklische Vektor $h \in H_f$ erfüllt $\|h\| = 1$ und $f(b) = \langle \rho_f(b)h, h \rangle$ für alle $b \in A$. Insbesondere ist $\|a\|^2 = f(a^*a) = \langle \rho_f(a^*a)h, h \rangle = \langle \rho_f(a)h, \rho_f(a)h \rangle = \|\rho_f(a)h\|^2 = 0$, also ist $a = 0$. \square

Irreduzible Darstellungen von C^* -Algebren

Wir sollten also (invariante) abgeschlossenen Teilräume von H genauer studieren. Jeder solche läßt sich als Bild einer orthogonalen Projektion beschreiben. Dazu die folgenden zwei Lemmas.

10.32 Lemma. *Es sei H ein Banachraum und $P \in L(H)$ IDEMPOTENT, d.h. $P^2 = P$, bzw. P ist eine PROJEKTION. Dann gilt:*

- 1 $1 - P$ ist auch idempotent;
- 2 $\text{Bild } P = \text{Ker}(1 - P)$ und $\text{Ker } P = \text{Bild}(1 - P)$;
- 3 $H = \text{Bild } P \oplus \text{Ker } P$;
- 4 Es sei $A \in L(H)$. Dann ist $P \circ A = A \circ P \Leftrightarrow \text{Bild } P$ und $\text{Ker } P$ sind A -invariant.

Beweis. (1) $(1 - P)^2 = 1 - 2P + P^2 = 1 - 2P + P = 1 - P$.

(2) $h \in \text{Bild } P \Leftrightarrow h = Pk$ für ein $k \in H \Leftrightarrow Ph = P^2k = Pk = h \Leftrightarrow h \in \text{Ker}(1 - P)$. Weiters folgt $\text{Ker } P = \text{Bild}(1 - P)$, da $1 - P$ idempotent ist.

(3) Es gilt $\text{Bild } P \cap \text{Ker } P = \{0\}$, da $h \in \text{Bild } P$ zur Folge hat, daß $Ph = h$ und andererseits ist $Ph = 0$ für $h \in \text{Ker } P$. Jedes $h \in H$ läßt sich als $h = Ph + (1 - P)h$ schreiben, mit $Ph \in \text{Bild } P$ und $(1 - P)h \in \text{Bild}(1 - P) = \text{Ker } P$.

(4) (\Rightarrow) Dies gilt für jede Abbildung $P \in L(H)$:

Es ist $A(\text{Bild } P) = A(P(H)) = P(A(H)) \subseteq P(H) = \text{Bild } P$, d.h. $\text{Bild } P$ ist A -invariant, und $P(A(\text{Ker } P)) = A(P(\text{Ker } P)) = 0$, d.h. $\text{Ker } P$ ist auch A -invariant.

(\Leftarrow) Sei nun P eine Projektion mit A -invarianten Kern und Bild. Für $x \in H$ ist nach (3) $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \text{Ker } P$ und $x_1 \in \text{Bild } P$ und somit $Ax_0 \in \text{Ker } P$ und $Ax_1 \in \text{Bild } P$, d.h. $P(Ax_0) = 0 = A(0) = A(Px_0)$ und $P(Ax_1) = Ax_1 = A(Px_1)$ zusammen also $(P \circ A)(x) = (A \circ P)(x)$. \square

10.33 Lemma. *Für ein idempotentes $P \in L(H)$ sind äquivalent:*

- 1 P ist orthogonal-Projektion, d.h. $\text{Ker } P = (\text{Bild } P)^\perp$;
- 2 $\text{Ker } P \perp \text{Bild } P$;
- 3 $\|P\| \leq 1$, d.h. P ist eine Kontraktion;
- 4 $P \geq 0$, d.h. P ist positiv.
- 5 $P^* = P$, d.h. P ist Hermite'sch;
- 6 $P^*P = PP^*$, d.h. P ist normal;

Beweis. $((1) \Rightarrow (2))$ ist trivial.

$((2) \Rightarrow (3))$ Wegen $\text{Bild } P \ni Ph \perp h - Ph \in \text{Ker } P$ ist $\|h\|^2 = \|Ph\|^2 + \|h - Ph\|^2$ und somit $\|Ph\| \leq \|h\|$.

$((1) \Leftarrow (3))$ Es ist $h - Ph = (1 - P)h \in \text{Bild}(1 - P) = \text{Ker } P$. Für $h \perp \text{Ker } P$ gilt folglich $0 = \langle h - Ph, h \rangle = \|h\|^2 - \langle Ph, h \rangle$, und damit ist $\|h\|^2 = \langle Ph, h \rangle \leq \|Ph\| \|h\| \leq \|h\|^2$. Weiters folgt $\|Ph\| = \|h\| = \sqrt{\langle Ph, h \rangle}$ und $\|h - Ph\|^2 = \|h\|^2 - 2\Re(\langle Ph, h \rangle) + \|Ph\|^2 = 0$ für diese h . D.h. $(\text{Ker } P)^\perp \subseteq \text{Ker}(1 - P) = \text{Bild } P$.

Umgekehrt sei $h \in \text{Bild } P$. Dann ist $h = h_0 + h_1$ mit $h_0 \in \text{Ker } P$ und $h_1 \in (\text{Ker } P)^\perp \subseteq \text{Bild } P$. Folglich ist $h_0 = h - h_1 \in \text{Bild } P \cap \text{Ker } P = \{0\}$, d.h. $h_0 = 0$ und $h = h_1 \in (\text{Ker } P)^\perp$. Durch Orthogonalisieren folgt die gewünschte Gleichung.

$((1) \Rightarrow (4))$ Es sei $h = h_0 + h_1$ mit $h_0 \in \text{Ker } P = (\text{Bild } P)^\perp$ und $h_1 \in (\text{Ker } P)^\perp = \text{Bild } P$. Folglich ist $\langle Ph, h \rangle = \langle Ph_1, h_1 + h_0 \rangle = \langle Ph_1, h_1 \rangle = \langle h_1, h_1 \rangle \geq 0$, d.h. P ist positiv nach (10.17).

$((4) \Rightarrow (5))$ und $((5) \Rightarrow (6))$ sind trivial.

$((6) \Rightarrow (1))$ Wegen $\|Ph\| = \|P^*h\|$ für normales P nach (10.4.3) ist $\text{Ker } P = \text{Ker}(P^*) = (\text{Bild } P)^\perp$. \square

10.34 Theorem. *Für jede *-abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq L(H)$ sind äquivalent:*

- 1 Die Menge A ist irreduzibel;

- 2 Die KOMMUTANTE $A^k := \{T \in L(H) : \forall a \in A : T \circ a = a \circ T\}$ besteht nur aus den Vielfachen der Identität;
 3 $P \in A^k$, $0 \leq P \leq 1 \Rightarrow \exists \lambda \in [0, 1] : P = \lambda \cdot \text{id}$;
 4 Jede orthogonal-Projektion in A^k ist 0 oder 1.

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) Falls $b \in A^k$, so ist $\text{Ker } b$ ein invarianter Teilraum und somit gleich $\{0\}$ oder H , i.e. b ist injektiv oder $b = 0$. Also besitzt die Teil- C^* -Algebra A^k von $L(H)$ keine Nullteiler, denn für $b_1, b_2 \in A^k$ mit $b_1 \neq 0$, also b_1 injektiv, folgt nun aus $b_1 b_2 = 0$, daß $b_2 = 0$. Es sei $0 \neq b \in A^k$ Hermite'sch, dann besitzt $C^*(b) \cong C(\sigma(b))$ (nach (10.9)) keine Nullteiler und somit ist $\sigma(b)$ einpunktig und $C^*(b) \cong C(\sigma(b))$ 1-dimensional, also $C^*(b) = \mathbb{C} \cdot 1$. Da sich nach (10.5.2) jedes Element a als $\Re(a) + i\Im(a)$ mit Hermite'schen Elementen $\Re(a), \Im(a) \in A^k$ schreiben läßt, ist $A^k = \mathbb{C} \cdot 1$.

((2) \Rightarrow (3)) ist trivial, da aus $0 \leq P = \lambda \cdot 1 \leq 1$ folgt, daß $0 \leq \lambda \leq 1$ ist.

((3) \Rightarrow (4)) ist trivial, da für orthogonal-Projektionen P nach (10.33.4) und (10.13) $0 \leq P \leq \|P\| \leq 1$ gilt, und wegen $P^2 = P$ ist $\lambda^2 = \lambda$

((1) \Leftarrow (4)) Es sei N ein abgeschlossener A -invarianter Teilraum von H und es sei p die orthonormal-Projektion auf N . Dann sind $\text{Bild } p = N$ und $\text{Ker } p = N^\perp$ beide A -invariant und nach (10.32.4) somit $p \in A^k = \mathbb{C} \cdot 1$, d.h. $p = \text{id}$ oder $p = 0$, und damit $N = \{0\}$ oder $N = H$. \square

10.35 Folgerung. Ist $A \subseteq L(H)$ eine kommutative $*$ -abgeschlossene irreduzible Teilmenge, so ist H 1-dimensional.

Beweis. Da A kommutativ ist, gilt $A \subseteq A^k = \mathbb{C}$, also ist $A \subseteq \mathbb{C}$ und damit $L(H) = A^k = \mathbb{C}$. Das ist nur für 1-dimensionales H möglich. \square

Folgerung. Die irreduziblen Darstellungen einer kommutativen C^* -Algebra sind bis auf Äquivalenz genau durch die Algebra-Homomorphismen $A \rightarrow \mathbb{C} = L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ gegeben.

Beweis. Nach obiger Folgerung ist der Darstellungsraum H jeder irreduziblen Darstellung von A notwendig isomorph zu \mathbb{C} und somit die Darstellung ρ gegeben durch den Algebra-Homomorphismus $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ vermöge $f(a) := \rho(a)1$ für die $1 \in \mathbb{C}$. \square

10.37 Proposition. Es sei f eine positives Funktional auf einer C^* -Algebra A und $\rho : A \rightarrow L(H)$ die nach (10.29) assoziierte Darstellung mit ausgezeichnetem zyklischem Vektor h . Dann existiert eine Bijektion

$$\{P \in \rho(A)^k \subseteq L(H) : 0 \leq P \leq 1\} \cong \{g \in H^* : 0 \leq g \leq f\}$$

die durch die Relation

$$g(a) = \langle P(\rho(a)h), h \rangle \text{ für } a \in A$$

festgelegt ist.

Beweis. Es sei $U : A \rightarrow L(H)$ die stetig lineare Abbildung $a \mapsto \rho(a)h$ mit dichten Bild. Diese erfüllt $\langle Ua, Ub \rangle = \langle \rho(a)h, \rho(b)h \rangle = \langle \rho(b^*a)h, h \rangle = f(b^*a)$.

(\mapsto) Es sei $P \in \rho(A)^k$ mit $0 \leq P \leq 1$. Dann ist $g_P : a \mapsto \langle P(\rho(a)h), h \rangle$ ein positives lineares Funktional, denn

$$\begin{aligned} g_P(a^*a) &= \langle P(\rho(a^*a)h), h \rangle = \langle (P \circ \rho(a^*))(\rho(a)h), h \rangle \\ &= \langle (\rho(a^*) \circ P)(\rho(a)h), h \rangle = \langle \rho(a)^*(P(\rho(a)h)), h \rangle \\ &= \langle P(\rho(a)h), \rho(a)h \rangle = \langle P(Ua), Ua \rangle \geq 0, \text{ da } P \geq 0. \end{aligned}$$

Es gilt $g_P \leq f$, denn nach (10.17)

$$\begin{aligned} g_P(a^*a) &= \langle P(Ua), Ua \rangle \\ &\leq \langle Ua, Ua \rangle = f(a^*a), \text{ da } P \leq 1. \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Es sei $g \in H^*$ mit $0 \leq g \leq f$. Dann ist $(a, b) \mapsto g(b^*a)$ eine positive sesquilineare Form auf A , die wegen $g \leq f$ über $\text{Ker } U = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$ (siehe (10.28)) zu einer stetigen positiven sesquilinear-Form faktorisiert (vgl. mit (10.29)). Und, da Bild U in H dicht liegt, sich zu einer eindeutig bestimmten positiven sesquilinearen Form $\tilde{g} : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ erweitert. Diese entspricht nach (10.36) einem positiven $P_g \in L(H)$.

Es gilt $P_g \leq 1$, denn $\langle P_g Ua, Ua \rangle = \tilde{g}(Ua, Ua) = g(a^*a) \leq f(a^*a) = \langle Ua, Ua \rangle$.

Schließlich ist $P_g \in \rho(A)^k$, denn für $a \in A$ gilt wegen $\rho(a)U(b) = U(ab)$:

$$\begin{aligned} \langle (P_g \circ \rho(a))(Ub), Uc \rangle &= \langle P_g(U(ab)), Uc \rangle = g(c^*ab) \\ &= g((a^*c)^*b) = \langle P_g(Ub), U(a^*c) \rangle = \langle P_g(Ub), \rho(a)^*(Uc) \rangle \\ &= \langle (\rho(a) \circ P_g)(Ub), (Uc) \rangle. \end{aligned}$$

($g \mapsto P \mapsto g$) Für $0 \leq g \leq f$ sei $P := P_g$. Dann ist

$$g_P(a) := \langle P_g(\rho(a)h), h \rangle = \langle P_g(Ua), U1 \rangle = g(1^*a) = g(a).$$

($P \mapsto g \mapsto P$) Für $0 \leq P \leq 1$ in $\rho(A)^k$ und $g := g_P$ ist:

$$\langle P_g(Ua), Ub \rangle = g_P(b^*a) = \langle P(\rho(b^*a)h), h \rangle = \langle P(\rho(a)h), \rho(b)h \rangle = \langle P(Ua), Ub \rangle,$$

also $P_g = P$. \square

10.38 Theorem. Für einen Zustand $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer C^* -Algebra sind äquivalent:

- 1 Die zu f gehörende Darstellung ist irreduzibel;
- 2 Für jedes $0 \leq g \leq f$ ist $g = \lambda f$ für ein $0 \leq \lambda \leq 1$.
- 3 Das Funktional f ist ein extremal-Punkt (siehe (7.30)) von $\text{Zust}(A)$;

Beweis. Es sei $\rho : A \rightarrow L(H)$ die zu f gehörende Darstellung mit zyklischem Vektor h .

((1) \Leftrightarrow (2)) Nach (10.34.3) ist ρ genau dann irreduzibel, wenn jedes $P \in \rho(A)^k$ mit $0 \leq P \leq 1$ ein Vielfaches der Identität ist. Nach (10.37) entsprechen diesen P in eindeutiger Weise die $g \in H^*$ mit $0 \leq g \leq f$ und $\lambda \cdot \text{id}$ entspricht gerade $\lambda \cdot f$.

((2) \Rightarrow (3)) Es sei $f = \lambda g + (1 - \lambda)h$ mit Zuständen h und g und $0 < \lambda < 1$. Dann ist $\lambda g \leq f$ und somit $\lambda g = \mu f$ für ein $0 \leq \mu \leq 1$ nach (2). Wegen $f(1) = 1 = g(1)$ gilt $\lambda = \mu$ und somit $g = f$ und damit auch $g = h$, i.e. f ist ein extremal-Punkt.

((3) \Rightarrow (2)) Es sei $0 \leq g \leq f$ und O.B.d.A. $g \neq 0$ und $g \neq f$. Dann ist $0 \leq f - g \neq 0$, also $0 < \|f - g\| = (f - g)(1) = f(1) - g(1)$ und somit gilt für $\lambda := \|g\|$, daß $0 < \lambda = \|g\| = g(1) < f(1) = 1$. Es sind $f_0 := \frac{1}{\lambda}g \geq 0$ und $f_1 := \frac{1}{1-\lambda}(f - g) \geq 0$ Zustände, da $f_0(1) = \frac{g(1)}{\lambda} = 1$ und $f_1(1) = \frac{f(1)-g(1)}{1-\lambda} = 1$, und klarerweise ist $f = \lambda f_0 + (1 - \lambda) f_1$, also $f = f_0 = f_1$ wegen (3), und damit $g = \lambda f_0 = \lambda f$. \square

10.39 Theorem. *Die irreduziblen Darstellungen einer C^* -Algebra sind Punktgetrennt.*

Beweis. Es sei $a \neq 0$. Dann existiert ein extremaler Zustand f mit $f(a^*a) > 0$, denn andernfalls würde die stetige lineare Abbildung $ev_{a^*a} : A^* \rightarrow \mathbb{C}$ auf $\text{Ext}(\text{Zust}(A))$ verschwinden, und damit auch auf der abgeschlossenen konvexen Hülle, welche nach Krein-Millman (7.30) mit der nach (10.30) kompakten konvexen Menge $\text{Zust}(A)$ übereinstimmt. Wir haben aber in (10.30) gesehen, daß ein Zustand $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ existiert mit $f(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2 \neq 0$, ein Widerspruch. Sei nun $\rho : A \rightarrow L(H)$ die irreduzible Darstellung mit zyklischen Vektor h , die zu dem extremalen Zustand $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ gehört. Dann ist $0 < f(a^*a) = \langle \rho(a^*a)h, h \rangle = \langle \rho(a)h, \rho(a)h \rangle = \|\rho(a)h\|^2$, i.e. $\rho(a) \neq 0$. \square

Gruppen-Darstellungen

10.40 Die Gruppen-Algebra. Es sei G eine diskrete (oder insbesondere eine endliche Gruppe). Wir wollen folgendes universelle Problem lösen: Gesucht ist eine \mathbb{K} -Algebra $\mathbb{K}(G)$ und ein Homomorphismus $\delta : G \rightarrow \mathbb{K}(G)$ bezüglich der Multiplikation der Algebra, s.d. zu jedem Homomorphismus $\tau : G \rightarrow A$ in eine Algebra A ein eindeutiger Algebra-Homomorphismus $\tilde{\tau} : \mathbb{K}(G) \rightarrow A$ existiert mit $\tilde{\tau} \circ \delta = \tau$, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{K}(G) \\ & \searrow \tau & \swarrow \exists! \tilde{\tau} \\ & & A \end{array}$$

Dazu lösen wir zuerst das universelle Problem, zur Menge G einen \mathbb{K} -Vektorraum $\mathbb{K}(G)$ und eine Abbildung $\delta : G \rightarrow \mathbb{K}(G)$ zu finden, sodaß für jede Abbildung $\tau : G \rightarrow A$ mit Werten in einem \mathbb{K} -Vektorraum eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{\tau} : \mathbb{K}(G) \rightarrow A$ mit $\tilde{\tau} \circ \delta = \tau$ existiert, d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{K}(G) \\ & \searrow \tau & \swarrow \exists! \tilde{\tau} \\ & & A \end{array}$$

Die Lösung für $\mathbb{K}(G)$ ist der freie Vektorraum $\coprod_G \mathbb{K} = \bigoplus_G \mathbb{K}$ mit der injektiven Abbildung $\delta : G \rightarrow \coprod_G \mathbb{K}$, $\delta_t := \delta(t) := (\delta_t^s)_{s \in G}$, wobei $\delta_t^s := 1$ für $t = s$ und 0 sonst.

Die Elemente $f \in \mathbb{K}(G) := \coprod_G \mathbb{K}$ lassen sich eindeutig als endliche Summe $f = \sum_{t \in G} f(t) \delta_t$ schreiben, d.h. $\mathbb{K}(G)$ läßt sich mit dem Raum aller Funktionen $f : G \rightarrow \mathbb{K}$ mit endlichem Träger identifizieren.

Die Abbildung $\tilde{\tau}$ ist durch

$$\tilde{\tau}(f) := \tilde{\tau}\left(\sum_{t \in G} f(t) \delta_t\right) = \sum_{t \in G} f(t) \tilde{\tau}(\delta_t) = \sum_{t \in G} f(t) \tau(t)$$

gegeben.

Man sieht leicht ein, daß dieser Vektorraum auch die universelle Eigenschaft für multi-lineare Abbildungen hat, d.h. jeder Abbildung $\tau : G \times \dots \times G \rightarrow A$ mit Werten in einem \mathbb{K} -Vektorraum entspricht eine multi-lineare Abbildung $\tilde{\tau} : \mathbb{K}(G) \times \dots \times \mathbb{K}(G) \rightarrow A$ mit $\tilde{\tau} \circ (\delta \times \dots \times \delta) = \tau$, welche durch $\tilde{\tau}(f^1, \dots, f^n) := \sum_{t_1, \dots, t_n \in G} f^1(t_1) \cdot \dots \cdot f^n(t_n) \tau(t_1, \dots, t_n)$ gegeben ist. Wenden wir $(\widetilde{\quad})$ auf die Multiplikation $G \times G \rightarrow G \xrightarrow{\delta} \mathbb{K}(G)$ an, so erhalten wir eine bilineare Abbildung $\star : \mathbb{K}(G) \times \mathbb{K}(G) \rightarrow \mathbb{K}(G)$, welche durch

$$\begin{aligned} f \star g &= \left(\sum_t f(t) \delta_t \right) \star \left(\sum_s g(s) \delta_s \right) = \sum_{t,s} f(t) g(s) \delta_t \star \delta_s \\ &= \sum_{t,s} f(t) g(s) \delta_{ts} = \sum_r \sum_{ts=r} f(t) g(s) \delta_r, \end{aligned}$$

d.h. durch

$$(f \star g)(r) := \sum_{ts=r} f(t) g(s) = \sum_t f(t) g(t^{-1}r)$$

gegeben ist.

Wegen der universellen Eigenschaft ist diese Multiplikation \star so wie die Multiplikation in G ebenfalls assoziativ, und δ_e ist eine 1, wobei $e \in G$ das neutrale Element der Gruppe ist. Also ist $\mathbb{K}(G)$ eine assoziative Algebra mit 1.

Falls nun $\tau : G \rightarrow A$ ein Gruppen-Homomorphismus ist, so ist leicht einzusehen, daß $\tilde{\tau}$ ein Algebra-Homomorphismus wird, und umgekehrt.

10.41 Darstellungen von G auf $\mathbb{K}(G)$. Der Gruppen-Homomorphismus $\delta : G \rightarrow \mathbb{K}(G)$ liefert auch eine Darstellung λ von G auf dem Vektorraum $\mathbb{K}(G)$, d.h. einen Gruppen-Homomorphismus $\lambda : G \rightarrow L(\mathbb{K}(G))$, definiert durch $\lambda(t)(f) := \delta_t \star f$. Diese Darstellung läßt sich auch anders ausdrücken:

$$\begin{aligned} \lambda(t)(f) &= \delta_t \star f = \delta_t \star \sum_{s \in G} f(s) \delta_s = \sum_{s \in G} f(s) \delta_t \star \delta_s \\ &= \sum_{s \in G} f(s) \delta_{ts} = \sum_{r \in G} f(t^{-1}r) \delta_r = f \circ \ell_{t^{-1}} = (\ell_{t^{-1}})^*(f), \end{aligned}$$

wobei ℓ_t die sogenannte LINKS-TRANSLATION auf der Gruppe G bezeichnet, welche durch $\ell_t(s) := ts$ definiert ist. Es ist ℓ ein Gruppen-Homomorphismus von G in die Menge der Bijektionen von G . Falls $\tilde{\tau} : \mathbb{K}(G) \rightarrow L(H)$ eine Darstellung ist, und $\tau := \tilde{\tau} \circ \delta : G \rightarrow \mathbb{K}(G) \rightarrow L(H)$ die zugehörige Darstellung von G , so ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}(G) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & L(H) \\ (\ell_{t^{-1}})^* = \lambda_t \downarrow & & \downarrow \tau(t)_* \\ \mathbb{K}(G) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & L(H), \end{array}$$

denn

$$\begin{aligned} (\tau(t)_* \circ \tilde{\tau})(f) &= \tau(t) \circ \tilde{\tau}(f) = \tilde{\tau}(\delta(t)) \circ \tilde{\tau}(f) \\ &= \tilde{\tau}(\delta(t) \star f) = \tilde{\tau}(f \circ \ell_{t^{-1}}) = \tilde{\tau}(\lambda_t(f)) \\ &= (\tilde{\tau} \circ \lambda_t)(f). \end{aligned}$$

10.42 Von $\mathbb{K}(G)$ zu $L^1(G)$. Wir wollen aber nicht rein algebraisch bleiben, und statt dessen eine universelle Eigenschaft für stetige Banach-Algebra-Homomorphismen haben. Dazu müssen wir $\mathbb{K}(G)$ mit einer Norm versehen. Es drängen sich die p -Normen $\|f\|_p := \left(\sum_{t \in G} |f(t)|^p\right)^{1/p}$ auf, für diese gilt:

$$\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ falls } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Insbesondere ist die Vervollständigung von $\mathbb{K}(G)$ bezüglich der 1-Norm eine Banach-Algebra mit Eins

$$L^1(G) := \{f : G \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_1 := \sum_{t \in G} |f(t)| < \infty\}.$$

Man beachte, daß das wirklich die integrierbaren Funktionen bezüglich des Zählmaßes $\mu : A \mapsto \sum_{g \in A} 1$ sind. Wie wir in (9.37), (10.5.6) und (10.23) gesehen haben, sind Algebra-Homomorphismen oft automatisch stetig und sogar Kontraktionen. Der assoziierte Algebra-Homomorphismus $\tilde{\tau} : \mathbb{K}(G) \rightarrow A$ mit Werten in einer Banach-Algebra ist genau dann eine Kontraktion (und läßt sich somit zu einem solchen auf $L^1(G)$ fortsetzen), wenn $\|\tau(t)\| \leq 1$ für alle $t \in G$ ist. Wegen $1 = \|1\| = \|\tau(e)\| = \|\tau(t)\tau(t^{-1})\| \leq \|\tau(t)\| \|\tau(t^{-1})\|$ gilt dann aber auch $\|\tau(t)\| \geq \frac{1}{\|\tau(t^{-1})\|} \geq 1$, also hat τ Werte in $U(A) := \{a \in \text{inv}(A) : \|a\| = 1 = \|a^{-1}\|\}$, der Menge der invertierbaren Elementen in der Einheitssphäre von A . Falls $A = L(H)$ für einen Banach-Raum H ist, dann ist $U(H) := U(L(H))$ die Menge der bijektiven Isometrien, bzw. der unitären Operatoren im Falle eines Hilbert-Raums H nach (10.4), denn aus $\|a\| = 1 = \|a^{-1}\|$ folgt

$$\|ax\| \leq \|a\| \|x\| = \|x\| = \|a^{-1}ax\| \leq \|a^{-1}\| \|ax\| = \|ax\|.$$

Wir haben also folgendes gezeigt:

Proposition. *Es sei G eine diskrete Gruppe. Dann ist $\delta : G \rightarrow L^1(G)$ ein Gruppen-Homomorphismus in eine Banach-Algebra der für jeden Banach-Raum H eine Bijektion*

$$\delta_* : \text{Hom}(L^1(G), L(H)) \cong \text{Hom}(G, U(H))$$

induziert, wobei $\text{Hom}(L^1(G), L(H))$ die Menge der kontraktiven Algebra-Homomorphismen und $\text{Hom}(G, U(H))$ die der Gruppen-Homomorphismen in

$$U(H) := \{a \in L(H) : a \text{ ist invertierbare Isometrie}\}$$

bezeichnet. Die Elemente ρ der ersten Menge heißen DARSTELLUNGEN der Banach-Algebra $L^1(G)$ auf H und die Elemente τ der zweiten Menge UNITÄRE DARSTELLUNGEN der Gruppe G auf H . Die Bijektion ist durch

$$\begin{aligned} \tau(t) &:= \rho(\delta_t) \\ \rho(f) &:= \sum_{t \in G} f(t)\tau(t) \end{aligned}$$

gegeben.

10.43 Die linksregulären Darstellungen von $L^1(G)$ und die Involution. Die Darstellung $\mathbb{K}(G)$ auf dem Vektorraum $\mathbb{K}(G)$, gegeben durch die Faltung, induziert wohldefinierte Darstellungen (die sogenannten linksregulären Darstellungen) $\tilde{\lambda}$ von $L^1(G)$ auf den Banach-Räumen $L^p(G)$, welche durch Vervollständigen von $\mathbb{K}(G)$ bezüglich der p -Norm erhalten werden. Denn die Gleichung $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ besagt, daß die Darstellungen Kontraktionen sind. Durch Zusammensetzen mit $\delta : G \rightarrow L^1(G)$ erhalten wir folglich Darstellungen λ von G auf den Banach-Räumen $L^p(G)$.

Im Falle $p = 2$ ist $H := L^2(G)$ ein Hilbert-Raum und somit $L(H)$ eine C^* -Algebra. Wir wollen nun versuchen auch $L^1(G)$ so zu einer C^* -Algebra zu machen, daß die linksreguläre Darstellung $\tilde{\lambda} : L^1(G) \rightarrow L(L^2(G))$ ein $*$ -Homomorphismus ist, d.h.

$$\langle \tilde{\lambda}(f^*)h_1, h_2 \rangle = \langle \tilde{\lambda}(f)^*h_1, h_2 \rangle = \langle h_1, \tilde{\lambda}(f)h_2 \rangle$$

für alle $f \in L^1(G)$ und $h_1, h_2 \in L^2(G)$ erfüllt. Wählen wir $h_1 := \delta_e$ und $h_2 := \delta_t$ so erhalten wir

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \langle f^* \star \delta_1, \delta_t \rangle = \langle \tilde{\lambda}(f^*)h_1, h_2 \rangle \\ &= \langle h_1, \tilde{\lambda}(f)h_2 \rangle = \langle \delta_1, f \star \delta_t \rangle = \overline{(f \star \delta_t)(1)} = \overline{f(t^{-1})}. \end{aligned}$$

und eine entsprechende Rechnung mit allgemeinen h_1 und h_2 zeigt, daß $\tilde{\lambda} : L^1(G) \rightarrow L(L^2(G))$ mit dieser Definition von f^* ein $*$ -Homomorphismus ist. Offensichtlich ist $(\cdot)^*$ eine isometrische Involution (d.h. konjugiert-linear, idempotent und ein anti-Homomorphismus). Allerdings ist $L^1(G)$ keine C^* -Algebra, wie das folgende Beispiel für $G := \mathbb{Z}$ zeigt.

Beispiel. Für die diskrete Gruppe $G = \mathbb{Z}$ und $f^*(k) := \overline{f(-k)}$ ist

$$(f^* \star f)(k) = \sum_j f^*(j) f(k-j) = \sum_j \overline{f(j)} f(k+j).$$

Es sei nun f reell-wertig und konzentriert auf $\{-1, 0, 1\}$, dann ist $f^* \star f$ konzentriert auf $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und hat folgende Werte:

$$f^* \star f : \begin{cases} -2 & \mapsto \overline{f_{+1}} f_{-1} \\ -1 & \mapsto \overline{f_0} f_{-1} + \overline{f_{+1}} f_0 \\ 0 & \mapsto \overline{f_{-1}} f_{-1} + \overline{f_0} f_0 + \overline{f_{+1}} f_{+1} \\ +1 & \mapsto \overline{f_{-1}} f_0 + \overline{f_0} f_{+1} \\ +2 & \mapsto \overline{f_{-1}} f_{+1} \end{cases}$$

Folglich ist

$$\|f^* \star f\|_1 = 2|f_{+1} f_{-1}| + 2|f_0| |f_{+1} + f_{-1}| + f_{-1}^2 + f_0^2 + f_{+1}^2$$

und

$$\|f\|_1^2 = f_{-1}^2 + f_0^2 + f_{+1}^2 + 2|f_{+1} f_{-1}| + 2|f_0 f_{-1}| + 2|f_0 f_{+1}|.$$

Falls $f_0 \neq 0$ und $f_{-1} \cdot f_{+1} < 0$ so ist

$$\|f^* \star f\|_1 < \|f\|_1^2.$$

Zusammenfassend haben wir folgendes gezeigt:

— Andreas Kriegel, Universität Wien —

Proposition. Für jede diskrete Gruppe G ist $L^1(G)$ eine B^* -ALGEBRA d.h. eine Banach-Algebra mit einer Involution $*$, welche eine Isometrie ist, aber nicht notwendig $\|f^*f\| = \|f\|^2$ erfüllt. Die Involution auf $L^1(G)$ ist dabei durch $f^*(t) := \overline{f(t^{-1})}$ gegeben. \square

Lemma. Es sei $\rho : B \rightarrow A$ ein $*$ -Homomorphismus von einer B^* -Algebra in eine C^* -Algebra, dann ist ρ eine Kontraktion.

Beweis.

$$\begin{aligned} \|\rho(f)\|^2 &= \|\rho(f)^* \rho(f)\| = r(\rho(f)^* \rho(f)) = r(\rho(f^* f)) \\ &\leq r(f^* f) \leq \|f^* f\| \leq \|f^*\| \|f\| \leq \|f\|^2 \quad \square \end{aligned}$$

10.44 Folgerung. Für jede diskrete Gruppe G entsprechen den unitären Darstellungen von G auf einem Hilbert-Raum H genau die $*$ -Homomorphismen der B^* -Algebra $L^1(G)$ nach $L(H)$.

$$\text{Hom}(G, U(H)) \cong \text{Hom}(L^1(G), L(H))$$

Beweis. Jeder $*$ -Homomorphismus $\rho : L^1(G) \rightarrow L(H)$ ist nach obigen Lemma eine Kontraktion und induziert somit nach (10.42) eine unitäre Darstellung $\tau : G \rightarrow U(H)$. Umgekehrt sei $\tau : G \rightarrow U(H)$ eine unitäre Darstellung und $\rho : L^1(G) \rightarrow L(H)$ der nach (10.42) assoziierte Homomorphismus, d.h. $\rho(f) = \sum_{t \in G} f(t)\tau(t)$. Also ist

$$\begin{aligned} \rho(f^*) &= \sum_{t \in G} \overline{f(t^{-1})}\tau(t) = \sum_{s \in G} \overline{f(s)}\tau(s)^{-1} \\ &= \sum_{s \in G} \overline{f(s)}\tau(s)^* = \left(\sum_{s \in G} f(s)\tau(s) \right)^* = \rho(f)^*, \end{aligned}$$

d.h. ρ ein $*$ -Homomorphismus. \square

10.45 Das Haarmaß lokalkompakter Gruppen. Wir wollen das alles nun soweit wie möglich auf LOKALKOMPAKTE GRUPPEN übertragen, d.h. Gruppen G , die zusätzlich lokalkompakter Hausdorff-Räume sind, und für die die Multiplikation $G \times G \rightarrow G$ und die Inversion $G \rightarrow G$ stetig sind. Um $L^1(G)$ zu konstruieren benötigen wir ein ausgezeichnetes Maß μ auf G . Wir wollen, daß die links-reguläre Darstellung ℓ (mit $\ell_t \cdot s = ts$) noch immer eine Darstellung λ von G auf $L^p(G)$ (mit $\lambda_s(f)(t) := (f \circ \ell_{s^{-1}})(t) = f(s^{-1}t)$) induziert. Also müßte insbesondere für $p = 1$ und $f \geq 0$ folgendes gelten:

$$\int_G f(s^{-1}t) d\mu(t) = \|\lambda_s(f)\|_1 = \|f\|_1 = \int_G f(t) d\mu(t).$$

D.h. das Maß muß linksinvariant sein, i.e. $\mu(sA) = \mu(A)$ für alle meßbaren A . In der Tat läßt sich zeigen, daß so ein Maß μ (das sogenannte HAARMASS) auf G immer existiert, und daß es bis auf einen konstanten positiven Faktor eindeutig ist, falls man zusätzlich verlangt, daß $\mu(U) > 0$ für alle offenen $U \neq \emptyset$. Für einen Beweis dieser Aussage siehe [HR,185]. Für $G = \mathbb{R}$ und $G = S^1$ ist es das übliche Lebesgue-Maß und für $G = \mathbb{Z}$ das Zählmaß. Wir schreiben allgemein $\int_G f(t) dt$ anstelle von $\int_G f(t) d\mu(t)$ für $f \in L^1(G) := L^1(G, \mu)$.

Definition (Faltung). Mit $L^p(G) := L^p(G, \mu)$ bezeichnen wir den Banach-Raum der Äquivalenz-Klassen aller bezüglich des Haar-Maßes μ p -integrierbaren Funktionen.

Die Faltung von zwei Funktionen ist aus Analogie zum diskreten Fall durch

$$(f \star g)(s) := \int_G f(t) g(t^{-1}s) dt = \int_G f(st) g(t^{-1}) dt$$

definiert. Sie liefert eine bilineare Abbildung $L^q(G) \times L^p(G) \rightarrow L^r(G)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ mit $\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$ (siehe [HR,20.19]).

Die Faltung von Funktionen in $L^1(G)$ ist assoziativ und somit ist $L^1(G)$ eine Banach-Algebra und die Faltung induziert Darstellungen λ von $L^1(G)$ auf $L^p(G)$, die sogenannten links-regulären Darstellungen, definiert durch $\lambda(f)(g) := f \star g$. Um die Assoziativität einzusehen verwendet man den Satz von Fubini in folgender Weise:

$$\begin{aligned} ((f \star g) \star h)(r) &= \int_G (f \star g)(t) h(t^{-1}r) dt \\ &= \int_G \int_G f(s) g(s^{-1}t) h(t^{-1}r) ds dt \\ &= \int_G \int_G f(s) g(s^{-1}t) h(t^{-1}r) dt ds \quad (t = su) \\ &= \int_G \int_G f(s) g(u) h(u^{-1}s^{-1}r) du ds \\ &= \int_G f(s) (g \star h)(s^{-1}r) ds \\ &= (f \star (g \star h))(r). \end{aligned}$$

Da $L^1(G)$ keine 1 besitzt (siehe (4.8)), gibt es auch den Gruppen-Homomorphismus $\delta : G \rightarrow L^1(G)$ aus dem diskreten Fall nicht mehr.

Trotzdem haben wir noch ein Pendant zur linksregulären Darstellung $\tilde{\lambda}$ von $L^1(G)$ auf $L^p(G)$, nämlich die unitäre Darstellung $\lambda : G \rightarrow L(L^p(G))$, $t \mapsto (f \mapsto f \circ \ell_{t^{-1}})$, welche von der Linkstranslation ℓ induziert wird. Es besteht also die Hoffnung Darstellungen von $L^1(G)$ mit unitären Darstellungen von G in bijektive Beziehung zu setzen. Da nun G nicht mehr diskret ist, sollten wir bei unitären Darstellungen Stetigkeits-Voraussetzungen machen.

10.46 Proposition (Unitäre Darstellungen). *Es sei $\tau : G \rightarrow U(H)$ ein Gruppen-Homomorphismus in die Gruppe der bijektiven Isometrien eines Banach-Raums H , dann sind äquivalent:*

- 1 Die Abbildung $\tau^\wedge : G \times H \rightarrow H$ ist stetig;
- 2 Es konvergiert $\tau(t) \rightarrow 1$ punktweise für $t \rightarrow e$;
- 3 Die Abbildung $\tau : G \rightarrow U(H)$ ist stetig, bezüglich der punktweisen Konvergenz auf $U(H)$;
- 4 Die Abbildung $\tau^\wedge : G \times H \rightarrow H$ ist getrennt stetig.

Eine Abbildung $\tau : G \rightarrow U(H)$ mit obigen äquivalenten Eigenschaften heißt UNITÄRE DARSTELLUNG der Gruppe G auf dem Banach-Raum H .

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) ist trivial.

((2) \Rightarrow (3)) Wegen $\tau(t) = \tau(t t_0^{-1} t_0) = \tau(t t_0^{-1}) \circ \tau(t_0)$ konvergiert $\tau(t) \rightarrow \tau(t_0)$ punktweise für $t t_0^{-1} \rightarrow e$, d.h. für $t = t t_0^{-1} t_0 \rightarrow e t_0 = t_0$.

((3) \Rightarrow (4)) Da vorausgesetzt ist, daß τ Werte in $U(H) \subset L(H)$ hat ist $\tau(\cdot, \cdot)$ immer stetig. Umgekehrt ist $\tau(\cdot, h) = \text{ev}_h \circ \tau$ genau dann für alle $h \in H$ stetig, wenn $\tau : G \rightarrow U(H)$ stetig ist bezüglich der punktweisen Konvergenz, denn diese ist gerade die initiale Topologie bezüglich $\text{ev}_h : L(H) \rightarrow H$ für $h \in H$.

((4) \Rightarrow (1)) Es sei $t_0 \in G$, $h_0 \in H$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen der Stetigkeit von $\tau(\cdot, h_0)$ eine Umgebung U von t_0 in G , s.d. $\|\tau(t)h_0 - \tau(t_0)h_0\| < \varepsilon$ für alle $t \in U$. Folglich gilt für alle $\|h - h_0\| < \varepsilon$ und $t \in U$ auch

$$\begin{aligned} \|\tau(t)h - \tau(t_0)h_0\| &\leq \|\tau(t)h - \tau(t)h_0\| + \|\tau(t)h_0 - \tau(t_0)h_0\| \\ &\leq \|\tau(t)\| \|h - h_0\| + \|\tau(t)h_0 - \tau(t_0)h_0\| \\ &\leq 1\varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square \end{aligned}$$

Klarerweise ist eine Abbildung $\tau : G \rightarrow L(H)$, die bezüglich der Operator-Norm auf $L(H)$ stetig ist, auch bezüglich der gröberen Topologie der punktweisen Konvergenz stetig. Daß nicht die Umkehrung gilt, zeigt folgendes

Lemma (Stetigkeit der Linkstranslation). *Die von der Linkstranslation ℓ induzierte Abbildung*

$$\begin{aligned} \lambda : G &\rightarrow U(L^1(G)) \subseteq L(L^1(G)), \\ \lambda_s(f) &:= f \circ \ell_{s^{-1}} \end{aligned}$$

ist eine unitäre Darstellung von G auf $L^1(G)$. Sie ist aber nicht stetig bezüglich der Operatornorm auf $L(L^1(G))$.

Ebenso induziert die Rechtstranslation einen Gruppen-Homomorphismus $G \rightarrow L(L^1(G))$ der aber nicht Werte in $U(L^1(G))$ hat, also keine unitäre Darstellung ist.

Beweis. Es sei $t \in G$, $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $g \in C_c(G)$ mit $\|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Da $g \in C_c$ (es sei $K := \text{Trg } g$), ist g gleichmäßig-stetig, d.h. es existiert eine 1-Umgebung U mit $|g(s) - g(r)| < \frac{\varepsilon}{6\mu(K)}$ für $rs^{-1} \in U$. Es sei $s \in V := tU$. Dann ist $s = tu$ für ein $u \in U$ und es gilt $(t^{-1}r)(s^{-1}r)^{-1} = t^{-1}s = u \in U$ und somit

$$\begin{aligned} \|\lambda_s g - \lambda_t g\|_1 &= \int_{\{r: s^{-1}r \in K \text{ oder } t^{-1}r \in K\}} |g(s^{-1}r) - g(t^{-1}r)| dr \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6\mu(K)} \mu(Ks \cup Kt) \leq \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Da das Haar-Maß links-invariant ist und somit $\|\lambda_s f - \lambda_s g\|_1 = \|f - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, gilt für $s \in V$:

$$\|\lambda_t f - \lambda_s f\|_1 \leq \|\lambda_t f - \lambda_t g\|_1 + \|\lambda_t g - \lambda_s g\|_1 + \|\lambda_s g - \lambda_s f\|_1 < \varepsilon.$$

Daß die Abbildung $\lambda : G \rightarrow U(L^1(G))$ nicht stetig bezüglich der Operatornorm ist, zeigt folgendes Beispiel: Es sei $G = \mathbb{R}$. Angenommen es gäbe ein $\delta > 0$, so daß $\|\lambda(t) - \lambda(0)\| < 1$ für $|t| \leq \delta$. Dann wäre für die charakteristische Funktion f von $(0, \delta]$ der Träger von $f = \lambda(0)f$ und $\lambda(\delta)f$ disjunkt und somit die 1-Norm von $\|\lambda(\delta)f - \lambda(0)f\|_1 = \|\lambda(\delta)f\|_1 + \|\lambda(0)f\|_1 = 2\|f\|_1 > \|f\|_1$, ein Widerspruch.

Für die Rechtstranslation beachte man, daß

$$f(st) = f((t^{-1} s^{-1})^{-1}) = Sf(t^{-1} s^{-1}) = \lambda_t(Sf) \circ \text{inv}. \quad \square$$

10.47 Die Modul-Funktion.

Die nicht rechts-Invarianz des Haar-Maßes läßt sich wie folgt beschreiben:

Lemma. *Es sei der Modul $\Delta(t)$ durch*

$$\int_G f(ts) d\mu(t) = \Delta(s) \int_G f(t) d\mu(t) \text{ für alle } f \in L^1(G)$$

definiert. Dann ist $\Delta : G \rightarrow (\mathbb{R}^+, \cdot)$ ein stetiger Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. Siehe [HR,p196]. Wegen der Dichtheit des von den positiven stetigen Funktionen mit kompaktem Träger erzeugten Teilraums, genügt es solche Funktionen zu betrachten. Es sei $\mu_s : C(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\int_G f(ts) d\mu(t)$. Dann ist μ_s ein links-invariantes Maß auf G . Folglich existiert eine positive Zahl $\Delta(s)$ mit $\mu_s(f) = \Delta(s) \mu(f)$. Weiters gilt, wobei f_t die rechtstranslatierte Funktion $s \mapsto f(st)$ bezeichnet:

$$(f_t)_s(r) = f_t(rs) = f((rs)t) = f(r(st)) = f_{st}(r)$$

und somit ist

$$\Delta(ts) \mu(f) = \mu(f_{ts}) = \mu((f_s)_t) = \Delta(t) \mu(f_s) = \Delta(t) \Delta(s) \mu(f).$$

Es sei U eine relativ-kompakte 1-Umgebung von G , weiters seien $f \neq 0$ und ω stetige positive Funktionen mit kompaktem Träger auf G mit $\omega(\text{Trg}(f) \cdot \bar{U}^{-1}) = \{1\}$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine 1-Umgebung $V \subseteq U$ mit $|f(st) - f(s)| < \frac{\varepsilon \mu(f)}{\mu(\omega)}$ für alle $t \in V$ und alle $s \in G$. Somit ist

$$\begin{aligned} |\Delta(t) - 1| \mu(f) &= |\mu(f_t) - \mu(f)| \\ &\leq \int_{st \in \text{Trg } f \text{ oder } s \in \text{Trg } f} |f(st) - f(s)| ds \\ &= \int_{s \in \omega^{-1}(1)} |f(st) - f(s)| ds \leq \varepsilon \mu(f), \end{aligned}$$

d.h. $|\Delta(t) - 1| \leq \varepsilon$ für alle $t \in V$. \square

Bezüglich der Spiegelung $S : f \mapsto (t \mapsto f(t^{-1}))$ gilt:

10.48 Lemma. *Für $f \in L^1(G)$ gilt:*

$$\int_G f(t) d\mu(t) = \int_G \Delta(t) f(t^{-1}) d\mu(t).$$

Beweis. Es sei $\nu(f) := \int_G \Delta(t) f(t^{-1}) d\mu(t) = \mu(\Delta \cdot Sf)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \nu(\lambda_s f) &= \int_G \Delta(t) f(s^{-1}t^{-1}) d\mu(t) = \int_G \Delta(t) f((ts)^{-1}) d\mu(t) \\ &= \int_G \Delta(ts) \Delta(s^{-1}) f((ts)^{-1}) d\mu(t) = \Delta(s^{-1}) \mu((\Delta Sf)_s) \\ &= \Delta(s^{-1}) \Delta(s) \mu(\Delta Sf) = \nu(f). \end{aligned}$$

— Andreas Kriegel, Universität Wien —

Also ist ν links-invariant und offensichtlich gilt $\nu(U) > 0$ für $U \neq \emptyset$, also existiert ein $c > 0$ mit $\nu = c\mu$. Wählt man eine Funktion $g \in C_c(G)$ mit $g = Sg$ und $\text{Trg}(g) \subseteq \{t : |\Delta(t) - 1| < \varepsilon\}$ so gilt: $|g(t) - g(t)\Delta(t)| \leq \varepsilon g(t)$ und folglich $|\int_G g - c \int_G g| = |\int_G g - \int_G g \Delta| \leq \varepsilon |\int_G g|$ also $|1 - c| \leq \varepsilon$, d.h. $c = 1$. Also ist

$$\int_G f(t) d\mu(t) = \int_G \Delta(t) f(t^{-1}) d\mu(t). \quad \square$$

Jede diskrete, jede Abel'sche und jede kompakte Gruppe G ist UNIMODULAR, d.h. $\Delta = 1$, bzw. das Haar-Maß ist auch rechts-invariant: Für diskretes G ist das Zählmaß offensichtlich rechts-invariant, für Abel'sches G ist das trivial, und für kompaktes G ist das Bild unter Δ eine kompakte Untergruppe von (\mathbb{R}_+, \cdot) , also gleich $\{1\}$.

Bemerkung. Man könnte analog zum diskreten Fall die Faltung auch als

$$\begin{aligned} (f \star_2 g)(r) &:= \int_G f(rs^{-1}) g(s) ds \quad (s = tr) \\ &= \Delta(r)^{-1} \int_G f(t^{-1}) g(tr) dt \quad \text{nach (10.48)} \\ &= \Delta(r)^{-1} \int_G \Delta(t) f(t) g(t^{-1}r) dt \\ &= \Delta(r)^{-1} ((\Delta f) \star g)(r) \end{aligned}$$

definieren, d.h. $\Delta \cdot (f \star_2 g) = (\Delta \cdot f) \star g$.

Für diese zweite Faltung können wir aber nicht Assoziativität erwarten, denn

$$\begin{aligned} \Delta \cdot ((f \star_2 g) \star_2 h) &= (\Delta \cdot (f \star_2 g)) \star h = ((\Delta \cdot f) \star g) \star h \\ &= (\Delta \cdot f) \star (g \star h) \\ &= \Delta \cdot (f \star_2 (g \star h)) \\ &\neq \Delta \cdot (f \star_2 (g \star_2 h)). \end{aligned}$$

10.49 Die Involution auf $L^1(G)$. Wie im diskreten Fall versuchen wir $L^1(G)$ mit einer Involution versehen, sodaß die links-reguläre Darstellung auf $L^2(G)$ eine *-Darstellung ist, d.h. $\langle h_1, f \star h_2 \rangle = \langle f^* \star h_1, h_2 \rangle$. Es ist

$$\begin{aligned} \langle h_1, f \star h_2 \rangle &= \int_G h_1(r) \int_G \overline{f(t) h_2(t^{-1}r)} dt dr \\ &= \int_G \int_G h_1(ts) \overline{f(t) h_2(s)} dt ds \\ &= \int_G \int_G \Delta(t) h_1(t^{-1}s) \overline{f(t^{-1}) h_2(s)} dt ds \end{aligned}$$

und

$$\langle f^* \star h_1, h_2 \rangle = \int_G \int_G f^*(t) h_1(t^{-1}r) \overline{h_2(r)} dt dr$$

folglich setzen wir $f^*(t) := \Delta(t) \overline{f(t^{-1})}$.

Lemma. Es ist $L^1(G)$ eine B^* -ALGEBRA (ohne 1) vermöge der Involution, die durch $f^*(t) := \Delta(t)\overline{f(t^{-1})}$ gegeben ist.

Beweis. Wegen (10.48) ist $\|f^*\|_1 = \|f\|_1$ und

$$(f^*)^*(t) = \Delta(t)\overline{f^*(t^{-1})} = \Delta(t)\overline{\Delta(t^{-1})\overline{f((t^{-1})^{-1})}} = f(t).$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} (g^* \star f^*)(s) &= \int_G g^*(t) f^*(t^{-1}s) dt = \int_G g^*(st) f^*(t^{-1}) dt \\ &= \int_G \Delta(st) \overline{g(t^{-1}s^{-1})} \Delta(t^{-1}) \overline{f(t)} dt \\ &= \Delta(s) \overline{\int_G f(t) g(t^{-1}s^{-1}) dt} = (f \star g)^*(s) \quad \square \end{aligned}$$

Als partieller Ersatz für eine 1 finden wir:

10.50 Proposition (approximierende Einheit). Es sei $f \in L^1(G)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine (kompakte) Umgebung U von e , so daß für alle $0 \leq g \in L^1(G)$ mit $\int_G g = 1$ und $g|_{G \setminus U} = 0$ die Beziehung

$$\|f \star g - f\|_1 \leq \varepsilon$$

gilt.

Insbesondere existiert eine approximierende Einheit für $L^1(G)$, d.h. ein Netz u_i mit $\|u_i\| = 1$ sowie $f \star u_i \rightarrow f$ und $u_i \star f \rightarrow f$ für alle $f \in L^1(G)$.

Beweis. Es sei g wie angegeben. Dann ist leicht einzusehen, daß $f \star g$ überall definiert ist und $f \star g \in L^1(G)$ liegt. Es gilt sogar: $|(f \star g)(t)| \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$ und $|(f \star g)(s) - (f \star g)(t)| \leq \|\lambda_{ts^{-1}} f - f\|_1 \|g\|_\infty$, denn

$$\begin{aligned} (f \star g)(s) - (f \star g)(t) &= \int_G f(r) g(r^{-1}s) - f(r) g(r^{-1}t) dr \\ &= \int_G (f(st^{-1}r) - f(r)) g(r^{-1}t) dr. \end{aligned}$$

Also ist $f \star g$ in $C_b(G)$. Da $\int_G \Delta(t) g(t^{-1}) dt = \int_G g(t) dt = 1$ ist, gilt

$$\begin{aligned} (f \star g)(s) - f(s) &= \int_G f(st) g(t^{-1}) dt - f(s) \int_G \Delta(t) g(t^{-1}) dt \\ &= \int_G \underbrace{(f(st) - \Delta(t) f(s))}_{=: F(s,t)} g(t^{-1}) dt. \end{aligned}$$

Es ist $F(s,t) = f(st)(1 - \Delta(t))g(t^{-1}) + (f(st) - f(s))\Delta(t)g(t^{-1})$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \int_G |F(s,t)| ds &\leq \|f_t\|_1 |1 - \Delta(t)| g(t^{-1}) + \|f_t - f\|_1 \Delta(t) g(t^{-1}) \\ &= \Delta(t) \|f\|_1 |1 - \Delta(t)| g(t^{-1}) + \|f_t - f\|_1 \Delta(t) g(t^{-1}) \\ &= \left(\|f\|_1 |1 - \Delta(t)| + \|f_t - f\|_1 \right) \Delta(t) g(t^{-1}). \end{aligned}$$

Dann ist $t \mapsto k(t) := \int_G |F(s, t)| ds$ eine Baire-Funktion mit

$$0 \leq k(t) \leq \left(\|f\|_1 |1 - \Delta(t)| + \|f_t - f\|_1 \right) \Delta(t) g(t^{-1}).$$

Nun sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine symmetrische Umgebung in U von e mit

$$\|f\|_1 |1 - \Delta(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \|f_t - f\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } t \in U.$$

Sei nun g wie vorausgesetzt und $S(g) : t \mapsto g(t^{-1})$. Da $g = 0$ außerhalb $U^{-1} = U$ ist, folgt $0 \leq k \leq \varepsilon \Delta S(g)$. Somit ist $k \in L^1(G)$ und $\int_G k(t) dt \leq \varepsilon \int_G \Delta(t) g(t^{-1}) dt = \varepsilon$. Also ist $\int_G \int_G |F(t, s)| ds dt \leq \varepsilon$ und damit nach Fubini $\int_G \left| \int_G F(t, s) ds \right| dt \leq \varepsilon$. Wegen $\int_G F(s, t) dt = (f \star g)(s) - f(s)$ folgt $\|f \star g - f\|_1 \leq \varepsilon$.

Um eine approximierende Einheit zu erhalten wähle man nun als Indexmenge die Umgebungsbasis von 1 (bestehend aus kompakten symmetrischen Umgebungen) und für jede solche Umgebung $i := U$, die entsprechend gewichtete charakteristische Funktion $\frac{1}{\mu(U)} \chi_U$ als u_i . Dann gilt $f \star u_i \rightarrow f$ für alle $f \in L^1(G)$. Wegen $\|u_i^*\| = \|u_i\| = 1$, $\text{Trg}(u_i^*) = \text{Trg}(u_i)^{-1} = U^{-1} = U$ und $u_i^*(t) = \Delta(t) \overline{u_i(t^{-1})} \geq 0$ gilt auch $g \star u_i^* \rightarrow g$ für alle $g \in L^1(G)$ und somit $u_i \star f = (f^* \star u_i^*)^* \rightarrow (f^*)^* = f$. \square

10.51 Theorem. Die links reguläre Darstellung $\tilde{\lambda}$ von $L^1(G)$ auf $L^2(G)$ ist ein injektiver und kontraktiver $*$ -Homomorphismus.

Beweis. Wir haben $*$ gerade so gewählt, daß $\tilde{\lambda} : L^1(G) \rightarrow L(L^2(G))$ ein $*$ -Homomorphismus ist. Er ist injektiv, denn aus $0 = \tilde{\lambda}(f)(g) = f \star g$ für alle $g \in L^2(G)$ folgt insbesondere $f \star u_i = 0$ und da $0 = f \star u_i \rightarrow f$ ist $f = 0$. In (10.43) haben wir gezeigt, daß jeder $*$ -Homomorphismus von einer B^* -Algebra (mit eins) B in eine C^* -Algebra A eine Kontraktion ist. Dies gilt auch für B^* -Algebren B ohne 1, denn sei $B_1 := B \oplus \mathbb{C}$ die nach (9.3) assoziierte Banach-Algebra mit 1. Vermöge $(x \oplus \lambda)^* := x^* \oplus \bar{\lambda}$ ist sie eine B^* -Algebra mit 1. Und jeder $*$ -Homomorphismus $\rho : B \rightarrow A$ erweitert sich zu einem eindeutigen, die 1 erhaltenden $*$ -Homomorphismus $\rho_1 : B_1 \rightarrow A$ vermöge $\rho_1(x \oplus \lambda) := \rho(x) + \lambda$. Also ist ρ_1 eine Kontraktion und damit auch $\rho := \rho_1|_B$. \square

10.52 Lemma. Mit $A(G)$ bezeichnen wir die vom Bild der links-regulären Darstellung von $L^1(G)$ auf $L^2(G)$ erzeugte C^* -Algebra. Jede Darstellung der C^* -Algebra $A(G)$ induziert eine $*$ -Darstellung von $L^1(G)$. Die Kommutanten dieser beiden Darstellungen stimmen überein, und folglich ist Irreduzibilität gleichbedeutend für sie.

Beweis. Man beachte, daß $A(G)$ der Abschluß von $\{\rho(f) + t : f \in L^1(G), t \in \mathbb{C}\}$ ist.

Es sei $\varphi : A(G) \rightarrow L(H)$ eine Darstellung und $\rho := \varphi \circ \tilde{\lambda} : L^1(G) \rightarrow A(G) \rightarrow L(H)$ die entsprechende Darstellung von $L^1(G)$, dann gilt:

- T kommutiert mit $\rho(f) = \varphi(f \star (-))$ für alle $f \in L^1(G)$
- $\Leftrightarrow T$ kommutiert mit $\rho(f) + t = \varphi(f \star (-) + t)$ für alle $f \in L^1(G)$ und $t \in \mathbb{C}$
- $\Leftrightarrow T$ kommutiert mit $\varphi(a)$ für alle $a \in A(G)$. \square

10.53 Vergleich der Darstellungen von G und von $L^1(G)$. Für lokalkompakte Gruppen G versuchen wir nun unitäre Darstellungen $\tau : G \rightarrow U(H)$ und Darstellungen $\rho : L^1(G) \rightarrow L(H)$ miteinander in Beziehung zu setzen.

$$\begin{array}{ccc} G & & L^1(G) \\ \downarrow \tau & & \downarrow \rho \\ U(H) & \longleftrightarrow & L(H) \end{array}$$

(\mapsto) Im diskreten Fall war $\rho(f) := \sum_{t \in G} f(t)\tau(t)$. Im allgemeinen Fall sollte also $\rho(f) = \int_G f(t)\tau(t) dt \in L(H)$ sein. Da unitäre Darstellungen τ nach (10.46) nicht stetig bezüglich der Operatornorm zu sein brauchen, existiert das Integral in $L(H)$ nicht, wohl aber $\int_G f(t)\tau(t)h dt \in H$ für alle $h \in H$, und somit definieren wir

$$\rho(f)h := \int_G f(t)\tau(t)h dt \in H \text{ für } f \in L^1(G) \text{ und } h \in H.$$

(\leftarrow) Umgekehrt war im diskreten Fall $\tau = \rho \circ \delta$, d.h. $\tau(t) = \rho(\delta_t)$. Im allgemeinen haben wir keine Einheit $\delta_e \in L^1(G)$ sondern nur eine approximative Einheit $u_i \in L^1(G)$, die wir Anstelle von δ_e verwenden können. Statt $\delta_t = \delta_t \star 1\delta_e = \lambda_t(\delta_e)$ sollten wir also $\lambda_t(u_i)$ verwenden und folglich $\tau(t) := \lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$ setzen, wozu wir die Existenz des Limes zeigen müssen.

Eine andere Möglichkeit ist die Identität $\tau(t)_* \circ \rho = \rho \circ \lambda_t$ für $t \in G$ des diskreten Falls zu verwenden, d.h. $\tau(t) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_t f)$. Dadurch ist τ auf $\rho(L^1(G))H$ eindeutig festgelegt. Hätte $L^1(G)$ eine 1 und erhielte ρ diese, so wäre $\rho(L^1(G)H) = H$ und τ somit festgelegt. Da aber $L^1(G)$ keine 1 hat, können Darstellungen $\rho : L^1(G) \rightarrow L(H)$ DEGENERIERT sein, dabei heißt ein Algebra-Homomorphismus $\rho : A \rightarrow L(H)$ NICHT-DEGENERIERT, falls $\rho(A)H$ einen dichten Teilraum von H erzeugt. Falls ρ ein $*$ -Homomorphismus ist, so ist das mit $\rho(A)h = 0 \Rightarrow h = 0$ äquivalent, denn

$$\begin{aligned} \langle \rho(A)H \rangle \text{ ist dicht in } H &\Leftrightarrow \left(\forall a \in A, \forall k \in H \overbrace{\langle \rho(a)k, h \rangle}^{= \langle k, \rho(a^*h) \rangle} = 0 \right) \Rightarrow h = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\rho(A)h = 0 \Rightarrow h = 0 \right). \end{aligned}$$

Der Raum $N := \{h \in H : \rho(A)h = 0\}$ ist klarerweise invariant, also auch N^\perp und $\rho := \rho|_{N^\perp} + 0|_N$, wobei $\rho|_{N^\perp}$ nicht degeneriert ist. Es ist also keine wesentliche Einschränkung, wenn wir nur nicht-degenerierte Darstellungen von $L^1(G)$ betrachten.

Nun zur Existenz von $\lim_i \rho(\lambda_t \circ u_i)$. Für die Zusammensetzung mit $\rho(f)$ ergibt sich:

$$\rho(\lambda_t(u_i)) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_t(u_i) \star f) = \rho(\lambda_t(u_i \star f)) \rightarrow \rho(\lambda_t(f)),$$

da $u_i \star f \rightarrow f$ in $L^1(G)$ und somit $(\rho \circ \lambda_t)(u_i \star f) \rightarrow (\rho \circ \lambda_t)(f)$. Da ρ eine Kontraktion ist, gilt $\|\rho(\lambda_t(u_i))\| \leq \|\lambda_t(u_i)\| = \|u_i\| = 1$, und folglich existiert $\lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$ punktweise nicht nur auf Bild von $\rho(f)$ sondern auf ganz H . Und somit ist $\tau(t) \in L(H)$ wohldefiniert durch

$$\tau(t) := \lim_i \rho(\lambda_t(u_i)) \text{ punktweise auf } H$$

und es gilt $\|\tau(t)\| \leq 1$ sowie $\tau(t) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_t f)$ für alle $f \in L^1(G)$. Wegen der letzten Gleichung sehen wir auch, daß $\tau(t)$ nicht von der Wahl der approximierenden Einheit u_i abhängt.

Theorem. Für lokalkompakte Gruppen und Hilbert-Räume H haben wir eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(G, U(H)) \cong \mathrm{Hom}(L^1(G), L(H))$$

zwischen der Menge der unitären Darstellungen τ von G auf H und jener der nicht-degenerierten Darstellungen ρ von $L^1(G)$ auf H . Letztere sind genau die nicht-degenerierten Algebra-Homomorphismen die mit $*$ vertauschen oder äquivalent die Kontraktionen sind. Es entsprechen sich dabei auch die irreduziblen Darstellungen. Es ist

$$\begin{aligned} \langle \rho(f)h, k \rangle &= \int_G f(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt \quad \forall h, k \in H, f \in L^1(G), \\ \tau(t) &= \lim_j \rho(\lambda_t u_j) \quad \forall t \in G, \end{aligned}$$

wobei u_j eine approximierende Einheit von $L^1(G)$ ist. Weiters ist $\tau(t)$ durch die Identität $\tau(t)_* \circ \rho = \rho \circ \lambda_t$ eindeutig bestimmt.

Beweis. (\mapsto) Sei $\tau : G \rightarrow L(H)$ eine unitäre Darstellung. Wie in Einleitung bemerkt wollen wir ρ durch

$$\rho(f)h := \int_G f(t) \tau(t)h dt \in H \text{ für } f \in L^1(G) \text{ und } h \in H$$

definieren. Dazu betrachten wir die sesqui-lineare Form

$$b_f(h, k) := \int_G f(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt.$$

Klarerweise gilt $\|b_f(h, k)\| \leq \|f\|_1 \|h\| \|k\|$. Also existiert ein eindeutiger Operator $\rho(f) \in L(H)$ mit $\langle \rho(f)h, k \rangle = b_f(h, k)$ und $\|\rho(f)\| \leq \|f\|_1$. Leicht zu sehen ist, daß $\rho : L^1(G) \rightarrow L(H)$ eine lineare Abbildung ist.

Weiters ist ρ multiplikativ, denn

$$\begin{aligned} \langle \rho(f \star g)h, k \rangle &= \int_G \int_G f(s) g(s^{-1}t) ds \langle \tau(t)h, k \rangle dt \\ &= \int_G f(s) \int_G g(s^{-1}t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt ds \quad (\text{Fubini}) \\ &= \int_G f(s) \int_G g(t) \langle \tau(st)h, k \rangle dt ds \quad (s^{-1}t \mapsto t) \\ &= \int_G f(s) \int_G g(t) \langle \tau(t)h, \tau(s)^*k \rangle dt ds \\ &= \int_G f(s) \langle \rho(g)h, \tau(s)^*k \rangle ds = \int_G f(s) \langle \tau(s)\rho(g)h, k \rangle ds \\ &= \langle \rho(f)\rho(g)h, k \rangle. \end{aligned}$$

Wir behaupten, daß ρ eine $*$ -Darstellung (und damit eine Kontraktion) ist:

$$\begin{aligned} \langle \rho(f)^*h, k \rangle &= \langle h, \rho(f)k \rangle = \overline{\langle \rho(f)k, h \rangle} = \overline{b_f(k, h)} \\ &= \int_G \overline{f(t) \langle \tau(t)k, h \rangle} dt = \int_G \overline{f(t)} \langle h, \tau(t)k \rangle dt \\ &= \int_G \Delta(t) \overline{f(t^{-1})} \langle h, \tau(t^{-1})k \rangle dt = \int_G f^*(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt \\ &= \langle \rho(f^*)h, k \rangle. \end{aligned}$$

Die Darstellung ρ ist nicht degeneriert: Sei nämlich $h \in H$ mit $\|h\| = 1$. Wegen $\langle \tau(1)h, h \rangle = \|h\|^2 = 1$ und weil $t \mapsto \tau(t)h$ stetig ist, existiert eine Umgebung U in G der 1 mit $|\langle \tau(t)h, h \rangle - 1| \leq \frac{1}{2}$ für alle $t \in U$. Es sei $f \in L^1(G)$ mit $f \geq 0$, $\int_G f = 1$ und $\text{Trg}(f) \subseteq U$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \rho(f)h, h \rangle - 1 &= \int_G f(t) \langle \tau(t)h, h \rangle dt - \int_G f(t) dt \\ &= \int_U f(t) (\langle \tau(t)h, h \rangle - 1) dt \end{aligned}$$

und somit $|\langle \rho(f)h, h \rangle - 1| \leq \int_U f(t) |\langle \tau(t)h, h \rangle - 1| dt \leq \frac{1}{2} \int_U f(t) dt = \frac{1}{2}$, d.h. $\langle \rho(f)h, h \rangle \neq 0$.

(\Leftarrow) Sei $\rho : L^1(G) \rightarrow L(H)$ ein nicht-degenerierter kontraktiver Algebra-Homomorphismus. Wie in der Einleitung ausgeführt, existiert $\tau(t) \in L(H)$ als punktweiser Limes $\lim_i \rho(\lambda_t(u_i))$ und erfüllt $\|\tau(t)\| \leq 1$ und $\tau(t)_* \circ \rho = \rho \circ \lambda_t$. Wegen der nicht-degeneriertheit von ρ folgt aus der letzten Gleichung sofort, daß $\tau(1) = 1$ und $\tau(t_1 t_2) = \tau(t_1) \circ \tau(t_2)$ gilt. Folglich ist $\tau(t^{-1}) = \tau(t)^{-1}$ und damit $\tau : G \rightarrow U(H)$ ein Gruppen-Homomorphismus.

Wir zeigen als nächstes, daß τ eine unitäre Darstellung ist, d.h. für $t \rightarrow e$ konvergiert $\tau(t) \rightarrow 1$ punktweise. In der Tat $\lambda_t f \rightarrow f$ und somit ist $\rho(f)h = \lim_t \rho(\lambda_t f)h = \lim_t (\tau(t) \circ \rho(f))h$. Also konvergiert $\tau(t)(\rho(f)h) \rightarrow \rho(f)h$ und, da das Erzeugnis der Vektoren $\rho(f)h$ dicht liegt und $\|\tau(t)\| \leq 1$ ist, konvergiert $\tau(t) \rightarrow 1$ punktweise.

Um zu zeigen, daß die Abbildungen invers zueinander sind, müssen wir einerseits die Gleichung

$$\langle \rho(f)h, k \rangle = \int_G f(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt \quad \forall h, k \in H, f \in L^1(G)$$

zeigen, wobei τ die zu ρ assoziierte unitäre Darstellung ist. Beide Seiten stellen stetig lineare Funktionale bezüglich f dar. Es genügt also für $\|h\| = \|k\|$, $\varepsilon > 0$ und charakteristische Funktionen $f = \chi_A$ von Baire-Mengen A mit endlichem Haar-Maß zu zeigen, daß

$$\left| \langle \rho(f)h, k \rangle - \int_G f(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt \right| \leq \varepsilon \int_G f(t) dt.$$

Es existiert eine Umgebung U von $e \in G$ mit $\|\rho(g)h - h\| \leq \varepsilon$ für alle $g \geq 0$ mit $\|g\| = 1$ und $\text{Trg}(g) \subseteq U$, denn man approximiere h durch eine Linearkombination von endlich vielen $\rho(f_i)h_i$ mit $\|h_i\| \leq 1$ und wähle U nach (10.50), so daß $\|\rho(g) \circ \rho(f_i) - \rho(f_i)\| \leq \|g \star f_i - f_i\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle i .

Sei vorerst $A^{-1}A \subseteq U$. Falls $\mu(A) = 0$ ist nichts zu zeigen. Sei also $\alpha := \mu(A) > 0$ und $g := \frac{1}{\alpha}f$. Dann ist g beschränkt und $g \geq 0$ und $\int_G g(t) dt = 1$. Für $t \in A$ hat $\lambda_{t^{-1}}g$ kompakten Träger in U , denn für $t' \notin U$ ist $t' \notin A^{-1}A$, also $At' \cap A = \emptyset$, und somit $\lambda_{t^{-1}}g(t') = g(tt') = \frac{1}{\alpha}f(tt') = \frac{1}{\alpha}\chi_A(tt') = 0$. Also ist $\|\tau(t^{-1})\rho(g)h - h\| = \|\rho(\lambda_{t^{-1}}g)h - h\| \leq \varepsilon$. Da $\tau(t^{-1})$ unitär ist, gilt $\|\rho(g)h - \tau(t)h\| \leq \varepsilon$. Aus $f = \alpha g$ und $\int_G g(t) dt = 1$ folgt, daß $\langle \rho(f)h, k \rangle - \int_G f(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt = \int_A (\langle \rho(f) - \tau(t) \rangle h, k) dt$. Also ist der Spezialfall bewiesen.

Sei nun $f = \chi_A$ mit $\mu(A) < \infty$ und sei W eine Umgebung von e mit $W^{-1}W \subseteq U$. O.B.d.A. ist W eine Baire-Menge. Sei t_n eine Folge in G mit $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} t_n W$

(überdecke A mit einer Folge kompakter Mengen und jedes dieser mit endlich vielen Translaten von W). Es sei $A_n := A \cap t_n W$. Dann ist $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und A_n sind Baire-Mengen mit $A_n^{-1} A_n \subseteq (W^{-1} t_n^{-1})(t_n W) = W^{-1} W \subseteq U$. O.B.d.A. sind diese disjunkt (man ersetze A_n durch $A_n \setminus \bigcup_{j < n} A_j$). Es sei $f_n := \chi_{A_n}$ und $s_n := \sum_{j \leq n} f_j$. Für jedes f_j gilt die gewünschte Gleichung, also ist wegen Linearität

$$\begin{aligned} \left| \langle \rho(s_n)h, k \rangle - \int_G s_n(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt \right| &= \left| \sum_{j \leq n} \left(\langle \rho(f_j)h, k \rangle - \int_G f_j(t) \langle \tau(t)h, k \rangle dt \right) \right| \\ &\leq \sum_{j \leq n} \varepsilon \int_G f_j(t) dt = \varepsilon \int_G s_n(t) dt. \end{aligned}$$

Da $s_j \nearrow f$ punktweise, gilt wegen Beppo Levi $\|s_j - f\|_1 \rightarrow 0$ und somit folgt die gewünschte Gleichung auch für f .

Für die andere Zusammensetzung sei ρ die zu τ assoziierte Darstellung. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle \rho(\lambda_t f)h, k \rangle &= \int_G \lambda_t f(s) \langle \tau(s)h, k \rangle ds = \int_G f(t^{-1}s) \langle \tau(s)h, k \rangle ds \\ &= \int_G f(s) \langle \tau(ts)h, k \rangle ds \quad (t^{-1}s \mapsto s) \\ &= \int_G f(s) \langle \tau(s)h, \tau(t)^* k \rangle ds = \langle \rho(f)h, \tau(t)^* k \rangle = \langle \tau(t)\rho(f)h, k \rangle, \end{aligned}$$

also gilt

$$\rho \circ \lambda_t = \tau(t)_* \circ \rho,$$

und somit ist τ gerade die zu ρ assoziierte unitäre Darstellung.

Schließlich gilt $\rho(L^1(G))^k = \tau(G)^k$, woraus mittels (10.34) die Aussage über Irreduzibilität folgt:

Falls $T \in L(H)$ mit allen $\tau(t)$ kommutiert, dann gilt

$$\begin{aligned} \langle T\rho(f)h, k \rangle &= \langle \rho(f)h, T^* k \rangle = \int_G f(t) \langle \tau(t)h, T^* k \rangle dt \\ &= \int_G f(t) \langle T\tau(t)h, k \rangle dt = \int_G f(t) \langle \tau(t)Th, k \rangle dt = \langle \rho(f)Th, k \rangle, \end{aligned}$$

d.h. T kommutiert mit $\rho(f)$ für jedes $f \in L^1(G)$.

Umgekehrt, konvergiere $T \in L(H)$ mit $\rho(f)$ für jedes $f \in L^1(G)$. Es sei u_i eine approximierende Einheit von $L^1(G)$. Dann gilt

$$T\tau(t)\rho(u_i) = T\rho(\lambda_t(u_i)) = \rho(\lambda_t(u_i))T = \tau(t)\rho(u_i)T$$

und da $\rho(u_i) \rightarrow 1$ punktweise, folgt $T\tau(t) = \tau(t)T$.

□

Folgerung (Gelfand-Raikov 1955). Die irreduziblen unitären Darstellungen einer lokalkompakten Gruppe sind Punkte-trennend, d.h. für jedes $e \neq s \in G$, existiert so eine Darstellung ρ auf einem Hilbertraum H mit $\rho(s) \neq 1$.

Beweis.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & h & \longrightarrow & a \\
 & & & & \\
 G & & L^1(G) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & A(G) & \hookrightarrow & L(L^2(G)) \\
 \downarrow \tau & & \downarrow \rho & \swarrow \varphi & & & \\
 U(H) & \hookrightarrow & L(H) & & & &
 \end{array}$$

Es sei $s \neq 1$ in G . Dann existiert ein $f \in C_c(G) \subseteq L^1(G)$ mit $f(s^{-1}) \neq f(e)$ und somit $\lambda_s f \neq f$. Es sei $h := \lambda_s f - f \neq 0 \in L^1(G)$. Da die Darstellung von $L^1(G)$ auf $L^2(G)$ injektiv ist, ist $0 \neq a := h \star (\cdot) \in A(G)$. Also existiert nach (10.39) eine irreduzible Darstellung $\varphi : A(G) \rightarrow L(H)$ mit $\varphi(a) \neq 0$. Die Darstellung $\rho : L^1(G) \rightarrow A(G) \rightarrow L(H)$ ist somit irreduzibel, also zyklisch und folglich nicht-degeneriert und $\rho(h) \neq 0$. Also ist auch die assoziierte Darstellung τ von G auf $L(H)$ irreduzibel und wegen $\rho(\lambda_s f) - \rho(f) = \rho(\lambda_s f - f) = \rho(h) = \varphi(a) \neq 0$, ist $\tau(s) \circ \rho(f) = \rho(\lambda_s f) \neq \rho(f)$, also $\tau(s) \neq 1$. \square

10.54 Folgerung (Irreduzible Darstellungen im Abel'schen Fall). *Es sei G eine lokalkompakte Abelsche Gruppe. Dann sind die irreduziblen unitären Darstellungen genau die Charaktere, d.h. die stetigen Gruppen-Homomorphismen $\tau : G \rightarrow S^1$. Die irreduziblen nicht-degenerierten $*$ -Darstellungen von $L^1(G)$ sind genau die \mathbb{C} -wertigen Algebra-Homomorphismen $0 \neq \rho : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$. Und die Bijektion*

$$\text{Hom}(G, S^1) \cong \text{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}) \setminus \{0\}$$

von (10.53) ist für $f \in L^1(G)$ durch

$$\rho(f) = \int_G f(t) \tau(t) dt$$

gegeben.

Beweis. Falls G Abel'sch ist, so gilt gleiches auch für $L^1(G)$.

Die irreduziblen unitären Darstellungen τ von G entsprechen nach (10.52) genau den nicht-degenerierten irreduziblen Darstellungen ρ von $L^1(G)$, und diese sind nach (10.35) 1-dimensional, d.h. $H = \mathbb{C}$. Da die punktweise Konvergenz auf $L(\mathbb{C})$ mit der Norm-Konvergenz übereinstimmt, sind die irreduziblen unitären Darstellungen von G gerade die stetigen Gruppen-Homomorphismen $\tau : G \rightarrow U(\mathbb{C}) = S^1$.

Die nicht-degenerierten Darstellungen von $L^1(G)$ auf \mathbb{C} sind nach (10.52) gerade die kontraktiven Algebra-Homomorphismen $\rho : L^1(G) \rightarrow \mathbb{C}$ die surjektiv sind. Nach (9.37) ist jeder \mathbb{C} -wertige Algebra-Homomorphismus auf einer Banach-Algebra mit 1 eine Isometrie. Also ist jeder \mathbb{C} -wertige Algebra-Homomorphismus ρ auf einer Banach-Algebra A (ohne 1) eine Kontraktion, denn $\rho_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Algebra-Homomorphismus auf $A_1 := A \oplus \mathbb{C}$ nach (9.3) und somit ist $\|\rho\| = \|\rho_1|_A\| \leq \|\rho_1\| = 1$. Eine skalar-wertige lineare Abbildung ρ ist genau dann surjektiv, wenn $\rho \neq 0$ ist.

Die Bijektion aus (10.52) ist im Falle $H = \mathbb{C}$ klarerweise durch

$$\rho(f) = \int_G f(t) \tau(t) dt$$

gegeben. \square

Wie in (9.42) zeigt man, daß $\text{Hom}(L^1(G), \mathbb{C})$ ein kompakter Raum bezüglich punktweiser Konvergenz ist ($L^1(G)$ hat keine 1, dafür verlangen wir $\|f\| \leq 1$ für alle $f \in \text{Hom}(L^1(G), \mathbb{C})$). Folglich ist $\text{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ ein lokalkompakter Raum und die Bijektion der obigen Folgerung macht auch $\text{Hom}(G, S^1)$ zu einem lokalkompakten Raum. Man kann zeigen, daß diese Topologie auf $\text{Hom}(G, S^1)$ gerade jene der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen von G ist. Offensichtlich ist $\text{Hom}(G, S^1)$ eine Gruppe bzgl. der punktweisen Multiplikation, und man sieht leicht, daß $\widehat{G} := \text{Hom}(G, S^1)$ eine topologische Gruppe ist, die sogenannte CHARAKTERGRUPPE von G , aller stetigen Gruppen-Homomorphismen $G \rightarrow S^1$, den sogenannten CHARAKTEREN. Wir wollen nun die Variablen in dem Homöomorphismus

$$\tilde{F} : \widehat{G} \rightarrow \text{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}) \setminus \{0\} \subseteq \text{Hom}(L^1(G), \mathbb{C}), \quad \tilde{F}(\tau)(f) = \int_G f(t) \tau(t) dt$$

vertauschen, d.h. die assoziierte Abbildung

$$L^1(G) \rightarrow C(\widehat{G}, \mathbb{C}), \quad f \mapsto \left(\tau \mapsto \int_G f(t) \tau(t) dt \right)$$

betrachten. Dies ist ein *-Homomorphismus, da $\tilde{F}(\tau)$ ein *-Homomorphismus ist für alle $\tau \in \widehat{G}$. Um eine bekanntere Form zu erhalten, setzen wir diesen noch mit dem *-Isomorphismus

$$\text{inv}^* : C(\widehat{G}, \mathbb{C}) \cong C(\widehat{G}, \mathbb{C}), \quad g \mapsto (\tau \mapsto g(\bar{\tau}) = g(\tau^{-1}))$$

zusammen und erhalten so folgenden *-Homomorphismus \mathcal{F} .

10.55 Theorem. *Es sei G eine lokalkompakte Abelsche Gruppe und \widehat{G} ihre Charaktergruppe. Dann existiert ein *-Homomorphismus*

$$\mathcal{F} : L^1(G) \rightarrow C(\widehat{G}, \mathbb{C}), \quad f \mapsto \left(\tau \mapsto \int_G f(t) \overline{\tau(t)} dt \right). \quad \square$$

10.56 Pontryagin's Dualitäts Satz. *Die Abbildung $\iota : G \rightarrow G^{\wedge\wedge}$, $g \mapsto \text{ev}_g$ ist ein Gruppen-Homöomorphismus.*

Für einen Beweis siehe [HR, Vol. 2].

Beispiel. Es sei $G := \mathbb{R}$. Dann ist $t \mapsto (s \mapsto e^{its})$ ein Gruppen-Homöomorphismus von \mathbb{R} mit der Charaktergruppe $\widehat{\mathbb{R}}$. Bezüglich dieses Isomorphismus sieht die Fourier-Transformation wie folgt aus

$$\mathcal{F}(f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-its} dt \text{ für } f \in L^1(\mathbb{R}) \text{ und } s \in \mathbb{R} \cong \widehat{\mathbb{R}}$$

Vergleiche dies mit der Fouriertransformation aus (8.1).

Beweis. Es sei $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ ein stetiger Gruppen-Homomorphismus. Dann existiert wegen $\varphi(0) = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\int_0^\delta \varphi(x) dx =: a > 0$. Es ist

$$a \cdot \varphi(x) = \varphi(x) \int_0^\delta \varphi(y) dy = \int_0^\delta \varphi(x+y) dy = \int_x^{x+\delta} \varphi(z) dz.$$

Da $a \neq 0$ gilt $\varphi(x) = \frac{1}{a} \int_x^{x+\delta} \varphi(y) dy$, also ist φ differenzierbar und es gilt:

$$\varphi'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \varphi(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \varphi(x) \varphi'(0).$$

Also ist $\varphi(x) = e^{\varphi'(0)x}$, weil $\varphi(0) = 1$. Es ist aber $1 = |\varphi(x)| = |e^{\varphi'(0)x}|$ und somit $\varphi'(0) \in i\mathbb{R}$, d.h. $\varphi(x) = e^{isx}$ für ein $s \in \mathbb{R}$. Folglich ist $\text{Hom}(\mathbb{R}, S^1) \cong (\mathbb{R}, +)$, und bezüglich dieses Isomorphismuses ist $\mathcal{F}(f)(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-isx} dx$. \square

Beispiel. Es sei $G := \mathbb{T}$. Dann ist $k \mapsto (z \mapsto z^k)$ ein Gruppen-Homöomorphismus von \mathbb{Z} mit der Charaktergruppe \hat{G} . Bezüglich dieses Isomorphismus und der Identifizierung $L^1(\mathbb{T}) \cong L^1[-\pi, \pi]$ sieht die Fourier-Transformation wie folgt aus

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) e^{-itk} dt \text{ für } f \in L^1([-\pi, \pi]) \text{ und } k \in \mathbb{Z} \cong \widehat{S^1}.$$

Vergleiche dies mit den Fourierkoeffizienten in (5.8).

Beweis. Es ist $h : t \mapsto e^{it}$ ein stetiger surjektiver Gruppen-Homomorphismus von $\mathbb{R} \rightarrow S^1$. Also definiert $h^* : \text{Hom}(S^1, S^1) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{R}, S^1) \cong \mathbb{R}$ einen injektiven Gruppen-Homomorphismus. Und zwar ist $s \in \mathbb{R}$ genau dann im Bild, wenn $x \mapsto e^{isx}$ 2π -periodisch ist, d.h. $s \in \mathbb{Z}$ ist. Somit ist also $\text{Hom}(S^1, S^1) \cong \mathbb{Z}$ und bezüglich dieses Homomorphismuses und $h^* : L^1(S^1) \cong L^1[-\pi, \pi]$ sieht \mathcal{F} wie folgt aus:

$$\mathcal{F}(f)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-itk} dt. \quad \square$$

10.57 Beispiel. Es sei $G := \mathbb{Z}$. Dann ist $a \mapsto (k \mapsto a^k)$ ein Gruppen-Homöomorphismus von \mathbb{T} mit der Charaktergruppe \hat{G} . Bezüglich dieses Isomorphismuses sieht die Fourier-Transformation wie folgt aus

$$\mathcal{F}(f)(a) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) a^{-k} \text{ für } f \in L^1(\mathbb{Z}) \text{ und } a \in S^1 \cong \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Vgl. dies mit der Fourierreihe in (5.8).

Beweis. Jeder Gruppen-Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow S^1$ ist eindeutig durch seinen Werte $a := \varphi(1) \in S^1$ bestimmt, denn $\varphi(k) = \varphi(\sum_{j=1}^k 1) = \varphi(1)^k$. Folglich ist $\hat{G} \cong S^1$. Bezüglich dieses Isomorphismuses sieht \mathcal{F} nun wie folgt aus:

$$\mathcal{F}(f)(a) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) a^{-k}. \quad \square$$

Satz von Parseval. Die Fourier-Transformation einer Funktion $f \in L^1(G)$ liefert also eine Funktion $\mathcal{F}(f) : \hat{G} \rightarrow \mathbb{C}$. Diese muß aber nicht integrierbar sein, siehe (5.8). Schränkt man die Fouriertransformation aber auf $L^1(G) \cap L^2(G)$ ein, so hat sie Werte in $L^1(\hat{G}) \cap C_0(\hat{G}) \subseteq L^1(\hat{G}) \cap L^2(\hat{G})$ und bei geeigneter Normierung des Haar-Maßes auf G und \hat{G} ist sie eine Isometrie bezüglich der 2-Norm. Wegen der Dichtheit von $L^1(G) \cap L^2(G)$ läßt sie sich zu einer surjektiven Isometrie

$$\mathcal{F} : L^2(G) \xrightarrow{\cong} L^2(\hat{G})$$

ausdehnen. Das ist der Satz von Parseval.

10.58 Satz von Wiener. *Es sei $f(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikt}$ eine absolut konvergente Fourierreihe. Falls f nirgends verschwindet, so ist auch $\frac{1}{f}$ in eine absolut konvergente Fourierreihe entwickelbar.*

Beweis nach Gelfand. Es ist $A := L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ bezüglich der Faltung eine kommutative Banach-Algebra mit 1. Nach dem letzten Beispiel (10.57) und (10.54) werden die Algebra-Homomorphismen $\rho \in \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ gerade durch die $a \in S^1 \cong \text{Hom}(\mathbb{Z}, S^1) =: \hat{\mathbb{Z}}$ via $\rho : f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k a^{-k}$ beschrieben. Die Gelfand-Transformation $\mathcal{G} : f \mapsto \text{ev}_f : \rho \mapsto \rho(f)$ aus (9.42) bildet also bis auf diesen Isomorphismus $f \in L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ auf $\mathcal{F}(f) : a \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k a^{-k}$ ab, ist also gerade \mathcal{F} . Es ist $\mathcal{F}(f) \in C(S^1, \mathbb{C}) \cong C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Als Element von $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist $\mathcal{F}(f)(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{-ikt}$. Falls $\mathcal{F}(f)$ nirgends verschwindet, so ist $1/\mathcal{F}(f) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ebenfalls im Bild der Gelfand-Transformation (und somit eine absolut konvergente Fourier-Reihe), denn wenn $\mathcal{G}(f)$ nirgends verschwindet, so ist $\rho(f) = \mathcal{G}(f)(\rho) \neq 0$ für alle $\rho \in \text{Alg}(A, \mathbb{C})$ und somit $0 \notin \sigma(f)$, d.h. f ist invertierbar in A und offensichtlich gilt $\mathcal{G}(f^{-1}f) = \mathcal{G}(f^{-1})\mathcal{G}(f)$, also ist $\mathcal{G}(f^{-1}) = \frac{1}{\mathcal{G}(f)}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 L^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & C(\hat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}) & \xrightarrow[\cong]{(10.57)} & C(S^1, \mathbb{C}) & \xrightarrow[\cong]{} & C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\
 \parallel & & \cong \downarrow (10.54) & & & & \\
 A & \xrightarrow{\mathcal{G}} & C(\text{Alg}(A, \mathbb{C}), \mathbb{C}) & & & & \square
 \end{array}$$

11 Spektral-Theorie normaler Operatoren

Es sei $N \in L(H)$ ein normaler Operator, dann ist die von N erzeugte Teil- C^* -Algebra $C^*(N)$ kommutativ und somit nach (10.8) isomorph zu $C(X, \mathbb{C})$, wobei $X := \sigma(N) \subseteq \mathbb{C}$ kompakt ist. Die Inverse des Gelfand Isomorphismuses \mathcal{G} liefert also eine Darstellung

$$\rho : C(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(N) \subseteq L(H),$$

den Funktionen-Kalkül aus (10.10). Eine eingehende Untersuchung dieser Darstellung sollte uns auch wesentliche Informationen über normale Operatoren liefern. Wir nehmen also zunächst das Studium der Darstellungen Abelscher C^* -Algebren wieder auf.

Darstellungen Abelscher C^* -Algebren und Spektral-Maße

In diesem Abschnitt sei X ein kompakter Raum und H ein Hilbert-Raum. Die irreduziblen $*$ -Darstellungen von $C(X, \mathbb{C})$ sind nach (10.35) 1-dimensional, d.h. Algebra-Homomorphismen $\rho : C(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ nach (10.6). Nach (9.41) sind diese genau die Punkteevaluationen ev_x mit $x \in X$. Allgemeiner entsprechen Riesz'schen Darstellungssatz (7.21) den stetig linearen Funktionalen in $C(X, \mathbb{C})'$ genau die regulären komplexen Borel-Maße auf X . Die σ -Algebra $\mathcal{B}(X)$ der Borel-Mengen wird per Definition von den kompakten (äquivalent, offenen oder abgeschlossenen Mengen) erzeugt, siehe (5.1). Ein reguläres komplexes Borel-Maß auf X , ist eine σ -additive Abbildung $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{C}$ die

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu|(K) : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\}$$

erfüllt. Dabei ist der Absolutbetrag $|\mu|$ eines komplexen Maßes μ jenes positive Maß, welches durch

$$|\mu|(B) := \sup\left\{\sum_{n=0}^{\infty} |\mu(B_n)| : B_n \in \mathcal{B}, B = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} B_n, B_n \text{ paarweise disjunkt}\right\}$$

definiert ist. Der isometrische Isomorphismus

$$C(X, \mathbb{C})' \cong M(X) := \{\mu : \mu \text{ ist reguläres komplexes Borel-Maß auf } X\},$$

ist durch $(f \mapsto \int_X f(x) d\mu(x)) \leftrightarrow \mu$ bzw. $\mu(B) := \int_X \chi_B(x) d\mu(x)$ gegeben, dazu muß man allerdings das Funktional erst auf die Funktionen χ_B erweitern. Die Variations-Norm auf $M(X)$ ist durch $\|\mu\| := |\mu|(X)$ definiert.

In Analogie zum Riesz'schen Darstellungssatz (7.18) sollte eine Darstellung $\rho : C(X, \mathbb{C}) \rightarrow L(H)$ sich als $\rho(f) = \int_X f(x) dP(x)$ für eine Art "Maß" P mit Werten in $L(H)$ sein.

11.1 Bemerkung. Es sei $\rho : \text{Borel}_b(X) \rightarrow L(H)$ eine $*$ -Darstellung, $\chi : \mathcal{B}(X) \rightarrow \text{Borel}_b(X)$ die Abbildung, die jedem $B \in \mathcal{B}(X)$ die charakteristische Funktion χ_B zuordnet und $P := \rho \circ \chi : \mathcal{B}(X) \rightarrow \text{Borel}_b(X) \rightarrow L(H)$. Es gilt $\chi_{B_1 \cap B_2} = \chi_{B_1} \cdot \chi_{B_2}$ und somit ist

$$P(B_1) \circ P(B_2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_2) \circ P(B_1).$$

Insbesondere ist $P(B) = P(B \cap B) = P(B)^2$, d.h. $P(B)$ ist idempotent, und $P(B)^* = \rho(\chi_B)^* = \rho(\overline{\chi_B}) = \rho(\chi_B) = P(B)$, d.h. $P(B)$ eine ortho-Projektion.

Orthogonal-Projektionen $P \in L(H)$ stehen in bijektiver Beziehung zu abgeschlossenen Teilräumen $E \subseteq H$, via $E = \text{Bild } P$, denn die eindeutige orthogonal-Projektion $P \in L(H)$ mit Bild E ist durch $x \mapsto x_1$ gegeben, wobei $x = x_1 + x_2$ die eindeutige orthogonale Zerlegung von H in $E \oplus E^\perp$ ist.

Wir haben Relation des Enthaltenseins für abgeschlossene Teilräume und auch eine partielle Ordnung für positive Operatoren aus (10.13). Wir setzen diese Ordnungen für orthogonal-Projektionen nun in Beziehung zueinander.

11.2 Lemma. Beschreibung der Ordnung. *Für zwei orthogonal-Projektion P_1 und P_2 sind äquivalent.*

- (1) $P_1 \leq P_2$;
- (2) $\|P_1x\|^2 \leq \|P_2x\|^2$ für alle x ;
- (3) $\text{Ker } P_1 \supseteq \text{Ker } P_2$;
- (4) $\text{Bild } P_1 \subseteq \text{Bild } P_2$;
- (5) $P_1 = P_1 \circ P_2$;

Beweis. ((1) \Leftrightarrow (2)) Nach (10.16) ist $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow \langle P_1x, x \rangle \leq \langle P_2x, x \rangle$ für alle x , und $\langle P_jx, x \rangle = \langle P_j^2x, x \rangle = \langle P_jx, P_j^*x \rangle = \|P_jx\|^2$.

((2) \Rightarrow (3)) Es folgt aus $P_2(x) = 0$, daß $0 \leq \|P_1(x)\| \leq \|P_2(x)\| = 0$, also $P_1(x) = 0$.

((3) \Leftrightarrow (4)) Gilt wegen $\text{Bild } P_j = (\text{Ker } P_j)^\perp$.

((3) \Rightarrow (5)) Es ist $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in \text{Ker } P_2 \subseteq \text{Ker } P_1$ und $x_1 \in (\text{Ker } P_2)^\perp$. Somit ist $(P_1 \circ P_2)x = P_1(P_2(x_0) + P_2(x_1)) = P_1(x_1) = P_1(x_0 + x_1) = P_1(x)$.

((5) \Rightarrow (2)) Es ist $\|P_1x\| = \|P_1(P_2x)\| \leq \|P_1\| \|P_2x\| \leq 1 \|P_2x\|$. \square

11.3 Lemma. Beschreibung von Orthogonalität. *Es seien P_1 und P_2 zwei orthogonal-Projektionen. Dann steht Bild P_1 und Bild P_2 genau dann aufeinander normal, wenn $P_1 \circ P_2 = 0$ ist.*

Beweis. Es ist $\text{Bild } P_1 \perp \text{Bild } P_2$ genau dann, wenn $\text{Bild } P_2 \subseteq (\text{Bild } P_1)^\perp = \text{Ker } P_1$, d.h. $P_1 \circ P_2 = 0$ ist. \square

Wir wollen als nächstes untersuchen welche Operationen dem Bilden des Durchschnittes und des erzeugten Teilraumes auf der Seite der orthogonal-Projektionen entsprechen.

11.4 Lemma. Beschreibung orthogonaler Summen. *Es seien P_i orthogonal-Projektionen mit paarweise orthogonalen Bildern. Dann ist die orthogonal-Projektion auf den von $\{\text{Bild } P_i : i\}$ erzeugten abgeschlossenen Teilraum $\bigoplus_i \text{Bild } P_i$ durch $\sum_i P_i$ gegeben. Dabei konvergiert diese Summe zwar punktweise, aber nicht bezüglich der Operatornorm.*

Beweis. Es sei $E_i := \text{Bild } P_i = (\text{Ker } P_i)^\perp$. Dann ist der von $\{E_i : i\}$ erzeugte abgeschlossene Teilraum von H durch

$$\bigoplus_i E_i := \left\{ \sum_i h_i : h_i \in E_i \text{ und } \sum_i \|h_i\|^2 < \infty \right\}$$

gegeben. Denn einerseits konvergiert $\sum_i h_i$, wegen dem Satz (6.8) von Pythagoras $\|\sum_i h_i\|^2 = \sum_i \|h_i\|^2$. Und andererseits ist diese Menge offensichtlich ein abgeschlossener Teilraum, welcher alle E_i enthält.

Jedes $h \in H$ läßt sich eindeutig, als $h = h_0 + \sum_i h_i$ mit $h_0 \in (\bigoplus_i E_i)^\perp$ und $\sum_i h_i \in \bigoplus_i E_i$ schreiben. Es ist $P_i(h_i) = h_i$ und $P_i(h_j) = 0$ für $0 \neq i \neq j$. Folglich gilt für das Netz der endlichen Teilsummen $(\sum_{i \in F} P_i)h = \sum_{i \in F} h_i \rightarrow \sum_i h_i$. D.h. die endlichen Summen konvergieren punktweise gegen die orthogonal-Projektion $h \mapsto \sum_i h_i$ mit Bild $\bigoplus_i E_i$. \square

Für den Durchschnitt haben wir folgende Entsprechung.

11.5 Lemma. Beschreibung des Durchschnitts. *Es seien für $1 \leq i \leq n$ paarweise kommutierende orthogonal-Projektionen P_j gegeben. Dann ist die orthogonal-Projektion auf $\bigcap_i \text{Bild } P_i$ durch $P_1 \circ P_2 \circ \dots \circ P_n$ gegeben.*

Beweis. Es genügt diese Aussage für $n = 2$ zu zeigen, denn der Rest folgt mittels Induktion. Wegen der Vertauschbarkeit ist $(P_1 \circ P_2)^2 = P_1 \circ P_2 \circ P_1 \circ P_2 = (P_1)^2 \circ (P_2)^2 = P_1 \circ P_2$ und $(P_1 \circ P_2)^* = (P_2)^* \circ (P_1)^* = P_2 \circ P_1 = P_1 \circ P_2$, d.h. $P_1 \circ P_2$ ist eine orthogonal-Projektion. Es gilt $\text{Bild}(P_1 \circ P_2) \subseteq \text{Bild } P_1$ und wegen der Vertauschbarkeit auch $\text{Bild}(P_1 \circ P_2) = \text{Bild}(P_2 \circ P_1) \subseteq \text{Bild } P_2$. Also ist $\text{Bild}(P_1 \circ P_2) \subseteq \text{Bild } P_1 \cap \text{Bild } P_2$. Sei nun umgekehrt $h \in \text{Bild } P_1 \cap \text{Bild } P_2$. Dann ist $(P_1 \circ P_2)h = P_1(P_2h) = P_1(h) = h$, d.h. $h \in \text{Bild}(P_1 \circ P_2)$. \square

11.6 Beispiel. Darstellung durch Multiplikation. Es sei μ ein Borel-Maß auf einem kompakten Raum X und $\rho : f \mapsto M_f$ die Darstellung von $L^\infty(\mu)$ auf $L^2(\mu)$ durch Multiplikations-Operatoren $M_f : g \mapsto f \cdot g$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X) & \overset{P}{\dashrightarrow} & L(L^2(\mu)) \\ \downarrow \chi & & \uparrow \rho \\ \text{Borel}_b(X, \mathbb{C}) & \longrightarrow & L^\infty(\mu) \end{array}$$

Die Abbildung $B \mapsto P(B) := \rho(\chi_B)$ ist im folgenden Sinn σ -additiv:

$\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}(X)$, abzählbar, paarweise disjunkt $\Rightarrow P(\bigsqcup_{B \in \mathcal{B}_0} B) = \sum_{B \in \mathcal{B}_0} P(B)$, wobei die Summe punktweise konvergiert.

Beweis. Wir haben bereits in (11.1) gesehen, daß alle $P(B)$ orthogonal-Projektionen sind und daß $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \circ P(B_2)$ ist. Folglich stehen für disjunkte B_1 und B_2 die Bilder von $P(B_1)$ und $P(B_2)$ normal aufeinander. Nach (11.4) ist $\sum_{B \in \mathcal{B}_0} P(B)$ die ortho-Projektion auf $\bigoplus_{B \in \mathcal{B}_0} \text{Bild } P(B)$. Das Bild von $P(\bigsqcup_{B \in \mathcal{B}_0} B)$ ist offensichtlich $\{g \in L^2(\mu) : g|_{X \setminus B} = 0\}$. Und somit ist das Bild von $P(\bigsqcup_{B \in \mathcal{B}_0} B)$ gerade $\{g \in L^2(\mu) : g|_{X \setminus \bigcup B_0} = 0\} = \{\sum_{B \in \mathcal{B}_0} g_B \in L^2(\mu) : g_B|_{X \setminus B} = 0\} = \bigoplus_{B \in \mathcal{B}_0} \text{Bild } P(B)$. \square

11.7 Definition. Spektral-Maß. Wir nennen eine Abbildung $P : \mathcal{B}(X) \rightarrow L(H)$ definiert auf der Borel-Algebra (oder irgendeiner σ -Algebra \mathcal{B} eines Raums X) ein SPEKTRAL-MASS auf X bezüglich des Hilbertraums H , falls folgendes gilt:

- (1) $\forall B \in \mathcal{B} : P(B)$ ist orthogonal-Projektion.
- (2) $P(X) = 1$.
- (3) $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, abzählbar, paarweise disjunkt $\Rightarrow P(\bigsqcup_{B \in \mathcal{B}_0} B) = \sum_{B \in \mathcal{B}_0} P(B)$ punktweise.

Beachte, daß diese wegen (1) im Fall $H = \mathbb{C}$ den $\{0, 1\}$ -wertigen Maßen entsprechen.

11.8 Lemma. Elementares über Spektralmaße. Für jedes Spektral-Maß P gelten folgende Aussagen:

- 1 $P(\emptyset) = 0$.
- 2 Falls $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, dann ist $\text{Bild } P(B_1) \perp \text{Bild } P(B_2)$.
- 3 Es ist $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \circ P(B_2)$.
- 4 Das Spektral-Maß P ist monoton.
- 5 Für $h, k \in H$ ist durch $P_{h,k}(B) := \langle P(B)h, k \rangle$ ein komplexes Borel-Maß auf X gegeben mit totaler Variation $\|P_{h,k}\| \leq \|h\| \|k\|$. Insbesondere ist $P_{h,h}$ ein positives Borel-Maß.

Beweis. (1) Es folgt aus der (endlichen) Additivität: $P(\emptyset) = P(\emptyset \sqcup \emptyset) = P(\emptyset) + P(\emptyset)$, und somit $P(\emptyset) = 0$.

(2) Es seien B_1 und B_2 disjunkt. Angenommen die Bilder von $P_1 := P(B_1)$ und $P_2 := P(B_2)$ stehen nicht aufeinander normal, d.h. $P_2 \circ P_1 \neq 0$ nach (11.3). Sei $x \in \text{Bild } P_1$ mit $P_2x \neq 0$. Dann ist

$$\|(P_1 + P_2)x\|^2 = \langle x + P_2x, x + P_2x \rangle = \|x\|^2 + 3\|P_2x\|^2 > \|x\|^2,$$

also ist $P_1 + P_2 = P(B_1 \sqcup B_2)$ nach (10.33) keine Orthogonal-Projektion, ein Widerspruch.

(3) Sei nun B_1 und B_2 beliebig und $P_1 := P(B_1 \setminus B_2)$, $P_2 := P(B_2 \setminus B_1)$ und $P_0 := P(B_1 \cap B_2)$. Dann sind P_0 , P_1 und P_2 nach (2) paarweise orthogonale Projektionen. Weiters ist

$$\begin{aligned} P(B_1) &= P((B_1 \setminus B_2) \sqcup (B_1 \cap B_2)) = P_1 + P_0, \\ P(B_2) &= P((B_2 \setminus B_1) \sqcup (B_1 \cap B_2)) = P_2 + P_0. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} P(B_1) \circ P(B_2) &= (P_1 + P_0) \circ (P_2 + P_0) \\ &= P_1 \circ P_2 + P_0 \circ P_2 + P_1 \circ P_0 + P_0 \circ P_0 = 0 + 0 + 0 + P_0 \\ &= P(B_1 \cap B_2) \end{aligned}$$

(4) Es sei $B_1 \subseteq B_2$, d.h. $B_1 = B_1 \cap B_2$ und somit $P(B_1) = P(B_1 \cap B_2) \stackrel{(3)}{=} P(B_1) \circ P(B_2)$, d.h. $P(B_1) \leq P(B_2)$ nach (11.2).

(5) Es ist $\mu := P_{h,k}$ ein komplexes Borelmaß, denn aus $P(\bigsqcup_i B_i)h = \sum_i P(B_i)h$ folgt die σ -Additivität von μ wie folgt

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigsqcup_i B_i\right) &= \left\langle P\left(\bigsqcup_i B_i\right)h, k \right\rangle = \left\langle \sum_i P(B_i)h, k \right\rangle \\ &= \sum_i \langle P(B_i)h, k \rangle = \sum_i \mu(B_i). \end{aligned}$$

Seien nun B_1, \dots, B_n paarweise disjunkte Borel-Mengen. Es seien $\alpha_j \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha_j| = 1$ so gewählt, daß $|\mu(B_j)| = \alpha_j \mu(B_j)$. Dann ist

$$\sum_j |\mu(B_j)| = \sum_j \alpha_j \langle P(B_j)h, k \rangle = \left\langle \sum_j \alpha_j P(B_j)h, k \right\rangle \leq \left\| \sum_j \alpha_j P(B_j)h \right\| \|k\|.$$

Da die $P(B_j)h$ paarweise orthogonale stehen, ist

$$\left\| \sum_j \alpha_j P(B_j)h \right\|^2 = \sum_j \|\alpha_j P(B_j)h\|^2 = \left\| \sum_j P(B_j)h \right\|^2 = \left\| P\left(\bigsqcup_j B_j\right)h \right\|^2 \leq \|h\|^2$$

und somit ist $\sum_j |\mu(B_j)| \leq \|h\| \|k\|$, d.h. $\|\mu\| \leq \|h\| \|k\|$. \square

Wir wollen nun zu einem Spektral-Maß P auf X eine Darstellung ρ von $C(X, \mathbb{C})$ und allgemeiner von $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ konstruieren. Dabei soll für $f \in \text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$

$$\rho(f) = \int_X f(x) dP(x)$$

sein. Wir müssen dazu dem Integral einen Sinn geben. Hierzu betrachten wir zuerst das Integral beschränkter Borel-meßbarer Funktionen bezüglich eines komplexen Borel-Maßes μ auf X .

11.12 Definition. Operator-Topologien. Wir werden folgende Topologien auf $L(H)$ verwenden:

- (1) Die NORM TOPOLOGIE, das ist die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf der Einheitskugel (oder auf beschränkten Mengen) von H . Eine erzeugende Norm ist die Operatornorm $\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$;
- (2) Die STARKE OPERATOR TOPOLOGIE (SOT), nämlich die punktweise Konvergenz auf $h \in H$. Sie hat als Subbasis der Seminormen $T \mapsto \|T(h)\|$ für alle $h \in H$;
- (3) Die SCHWACHE OPERATOR TOPOLOGIE (WOT), nämlich die punktweise Konvergenz bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(H, H')$ auf H . Sie hat als Subbasis der Seminormen $T \mapsto |\langle Th, k \rangle|$ für alle $h, k \in H$.

Lemma. Die Involution $*$ ist stetig bezüglich der WOT. Die Komposition ist getrennt stetig bezüglich der WOT und auch bezüglich der SOT.

Beweis. Es ist $\langle T^*h, k \rangle = \langle h, Tk \rangle = \overline{\langle Tk, h \rangle}$ und folglich konvergiert $\langle T_i^*h, k \rangle \rightarrow \langle T^*h, k \rangle$ falls $\langle T_i k, h \rangle \rightarrow \langle Tk, h \rangle$ für alle $h, k \in H$.

Es ist $\langle (T \circ S)h, k \rangle = \langle T(Sh), k \rangle$ und folglich konvergiert mit $T_i \rightarrow T$ auch $T_i \circ S \rightarrow T \circ S$ bezüglich WOT.

Schließlich ist $\langle STh, k \rangle = \langle Th, S^*k \rangle$ und somit konvergiert $\langle ST_i h, k \rangle \rightarrow \langle STh, k \rangle$ für alle $h, k \in H$ falls $T_i \rightarrow T$ bezüglich der WOT.

Falls $T_i \rightarrow T$ in der SOT, dann ist $T_i(Sh) \rightarrow T(Sh)$ für $h \in H$, d.h. $T_i \circ S \rightarrow T \circ S$ in der SOT und weiters $T_i h \rightarrow Th$ und somit $S(T_i h) \rightarrow S(Th)$, d.h. $S \circ T_i \rightarrow S \circ T$ in der SOT. \square

11.9 Proposition. \mathbb{C} -wertige Integration.

- (1) **Dichtheit der elementaren Funktionen in $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$:**
Für jede beschränkte Borel-meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung von X in endlich viele Borel-meßbare Mengen B_j mit

$$\sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in B_j\} \leq \varepsilon \text{ für alle } j.$$

- (2) **Approximation des Integrals durch Summen:**
Falls μ ein \mathbb{C} -wertiges Borel-Maß auf X ist, $f \in \text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ und für $\varepsilon > 0$

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

die B_j wie in (1) und $x_j \in B_j$ gewählt sind, so ist f bzgl. μ integrierbar und es gilt:

$$\left| \int_X f d\mu - \sum_{j=1}^n f(x_j) \mu(B_j) \right| \leq \varepsilon \|\mu\|.$$

(3) **Einbettung von $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ in $M(X, \mathbb{C})''$:**

Der Banach-Raum $\text{Borel}_b(X) := \text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ der beschränkten Borel-meßbaren Funktionen auf X bzgl. der Supremumsnorm bettet sich vermöge der Abbildung $f \mapsto (\mu \mapsto \int_X f(x) d\mu(x))$ isometrisch in $M(X, \mathbb{C})' \cong C(X, \mathbb{C})''$ ein. Dabei ist $M(X) := M(X, \mathbb{C})$ der Banach-Raum der regulären \mathbb{C} -wertigen Borel-Maße bzgl. der Variationsnorm.

(4) **Schwache Dichtheit von $C(X, \mathbb{C})$ in $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$:**

Für jedes $f \in \text{Borel}_b(X)$ existiert ein Netz stetiger Funktionen $f_i \in C(X)$ mit $\|f_i\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ und $f_i \rightarrow f$ bezüglich $\sigma(M(X)', M(X))$, d.h. $\int_X f_i d\mu \rightarrow \int_X f d\mu$ für alle $\mu \in M(X)$.

Beweis. (1) Es sei $f \in \text{Borel}_b(X)$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Überdeckung von $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|f\|_\infty\}$ mit endlich vielen offenen Bällen U_j mit Radius $\frac{\varepsilon}{2}$ und Mittelpunkten z_j . Es sei $B_k := f^{-1}(U_k) \setminus \bigcup_{j < k} f^{-1}(U_j)$. Dann bilden die B_j eine Zerlegung von X in meßbare Mengen und für $x, x' \in B_j$ gilt: $|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - z_j| + |z_j - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Für beliebige fix gewählte $x_j \in B_j$ ist somit

$$\begin{aligned} \left| \left(f - \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{B_j} \right) (x) \right| &\leq |f(x) - f(x_j)| \leq \varepsilon \text{ für } x \in B_j \\ \Rightarrow \left\| f - \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{B_j} \right\| &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(2) Sei nun μ ein \mathbb{C} -wertiges Borel-Maß und $x_j \in B_j$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_X \sum_j f(x_j) \chi_{B_j} d\mu \right| &= \left| \sum_j f(x_j) \mu(B_j) \right| \\ &\leq \sum_j |f(x_j)| |\mu(B_j)| \leq \|f\|_\infty \sum_j |\mu(B_j)| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|. \end{aligned}$$

Somit ist wegen $\|f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}\|_\infty \leq \varepsilon$ nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz f bzgl. μ integrierbar und $\int_X f d\mu = \lim \int_X \sum_j f(x_j) \chi_{B_j}$. Insbesondere ist

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|$$

und somit

$$\begin{aligned} \left| \int f d\mu - \sum_j f(x_j) \mu(B_j) \right| &= \left| \int \left(f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j} \right) d\mu \right| \\ &\leq \left\| f - \sum_j f(x_j) \chi_{B_j} \right\|_\infty \|\mu\| \leq \varepsilon \|\mu\|. \end{aligned}$$

(3) Wegen $\left| \int f d\mu \right| \leq \|f\|_\infty \|\mu\|$ ist $f \mapsto (\mu \mapsto \int f d\mu)$ eine Kontraktion. Um zu zeigen, daß dies sogar eine Isometrie ist, sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in X$ mit $|f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$. Es sei μ_x das Punktmaß von x , d.h. $\mu_x(B) = 1$, falls $x \in B$ und 0 sonst. Dann ist $\|\mu_x\| = 1$ und somit $\|\mu \mapsto \int f d\mu\| \geq \left| \int f d\mu_x \right| = |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon$.

(4) O.B.d.A. sei $\|f\| \leq 1$. Dann ist dies eine Konsequenz des folgenden Lemmas. \square

11.10 Lemma. *Es sei E ein normierter Raum.*

Dann ist der 1-Ball von E im 1-Ball von E'' bzgl. $\sigma(E'', E')$ dicht.

Beweis. Es sei B der $\sigma(E'', E')$ Abschluß der 1-Balls von E in E'' . Wir wollen zeigen, daß der 1-Ball von E'' in B enthalten ist. Angenommen nicht, dann sei $x'' \in E'' \setminus B$ mit $\|x''\| \leq 1$. Nach dem Trennungssatz (7.19) existiert ein $x' \in (E'', \sigma(E'', E')) = E'$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\Re(\langle x', x \rangle) < \alpha < \Re(\langle x', x'' \rangle) \text{ für alle } x \in B.$$

O.B.d.A. ist $\alpha = 1$, denn da 0 im 1-Ball von E liegt ist $0 < \alpha$ und wir können die Ungleichung durch α dividieren und x' durch $\frac{1}{\alpha}x'$ ersetzen.

Für $\|x\| \leq 1$ sei ϑ so gewählt, daß $|\langle x', x \rangle| = e^{-i\vartheta} \langle x', x \rangle$. Dann ist $e^{i\vartheta}x \in B$ und somit

$$|\langle x', x \rangle| = \Re(e^{-i\vartheta} \langle x', x \rangle) = \Re(\langle x', e^{i\vartheta}x \rangle) < 1$$

für alle $\|x\| \leq 1$, also ist $\|x'\| \leq 1$ und

$$1 < \Re(\langle x', x'' \rangle) \leq |\langle x', x'' \rangle| \leq \|x'\| \|x''\| \leq 1$$

liefert einen Widerspruch. \square

11.11 Folgerung. Operator-wertige Integration. *Es sei $P : \mathcal{B}(X) \rightarrow L(H)$ ein Spektral-Maß.*

1 Operator-wertiges Integral:

Für jedes $f \in \text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ existiert ein eindeutiger Operator $\int_X f dP = \int_X f(x) dP(x) \in L(H)$ mit

$$\left\langle \left(\int_X f dP \right) h, k \right\rangle = \int_X f dP_{h,k} \text{ für alle } h, k \in H.$$

2 Approximation des Integrals durch Summen:

Falls für $f \in \text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ und $\varepsilon > 0$ die Familie $\{B_1, \dots, B_n\}$ eine Zerlegung von X wie in (11.9) ist, dann gilt für beliebig gewählte $x_j \in B_j$ folgende Abschätzung:

$$\left\| \int_X f dP - \sum_{j=1}^n f(x_j) P(B_j) \right\| \leq \varepsilon.$$

3 Darstellung von $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ auf H :

Die Zuordnung $f \mapsto \int_X f dP$ definiert eine $*$ -Darstellung $\rho : \text{Borel}_b(X, \mathbb{C}) \rightarrow L(H)$ der Abelschen C^* -Algebra $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ aller beschränkten meßbaren Funktionen auf X . Diese ist stetig bzgl. $\sigma(\text{Borel}_b, M(X)')$ und der WOT. Durch Einschränkung erhalten wir auch eine $*$ -Darstellung von $C(X, \mathbb{C})$.

Im Fall $H = \mathbb{C}$ bedeutet dies, daß jedes $\{0, 1\}$ -wertige Borel-Maß ein Punktmaß ist.

Beweis. (1) Nach (11.9) ist $b(h, k) := \int_X f(x) dP_{h,k} \in \mathbb{C}$ für alle $h, k \in H$ wohldefiniert. Und nach Lemma (11.8.5) ist b eine sesquilineare Form mit $\|b\| \leq \|f\|_\infty$. Also existiert nach (10.36) ein eindeutiger beschränkter Operator, den wir mit $\int_X f dP$ bezeichnen, so daß

$$\left\langle \left(\int_X f dP \right) h, k \right\rangle = b(h, k) = \int_X f dP_{h,k} \in \mathbb{C} \text{ für alle } h, k \in H.$$

(2) Sei nun eine Zerlegung $\{B_1, \dots, B_n\}$ von X wie in (11.9) gegeben. Für $x_j \in B_j$ ist dann

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \left(\int_X f(x) dP(x) \right) h, k \right\rangle - \sum_{j=1}^n f(x_j) \langle P(B_j)h, k \rangle \right| &= \\ &= \left| \int_X f dP_{h,k} - \sum_{j=1}^n f(x_j) P_{h,k}(B_j) \right| \\ &\leq \varepsilon \|P_{h,k}\| \quad \text{nach (11.9)} \\ &\leq \varepsilon \|h\| \|k\| \quad \text{nach (11.8.5)}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left\| \int_X f dP - \sum_j f(x_j) P(B_j) \right\| \leq \varepsilon$$

(3) Wir zeigen die Multiplikativität, die restlichen algebraischen Eigenschaften sind einfacher zu zeigen. Es sei also f_1 und f_2 meßbar und $\varepsilon > 0$. Wir wählen eine Zerlegung $\{B_1, \dots, B_n\}$ von X in Borel-Mengen, so daß $\sup\{|f(x) - f(x')| : x, x' \in B_j\} < \varepsilon$ für alle $f \in \{f_1, f_2, f_1 f_2\}$ und alle $j \in \{1, \dots, n\}$. Es sei $x_j \in B_j$. Dann ist

$$\left\| \int_X f dP - \sum_j f(x_j) P(B_j) \right\| < \varepsilon \text{ für } f \in \{f_1, f_2, f_1 f_2\}.$$

Da die Bilder von $P(B_j)$ orthonormal aufeinander stehen ist

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_j f(x_j) P(B_j) \right) h \right\|^2 &= \sum_j \|f(x_j) P(B_j)h\|^2 = \sum_j |f(x_j)|^2 \|P(B_j)h\|^2 \\ &\leq \|f\|_\infty^2 \sum_j \|P(B_j)h\|^2 = \|f\|_\infty^2 \left\| \sum_j P(B_j)h \right\|^2 \\ &= \|f\|_\infty^2 \left\| P\left(\bigsqcup_j B_j\right)h \right\|^2 = \|f\|_\infty^2 \|h\|^2 \end{aligned}$$

und wegen (2) ist

$$\left\| \int f dP \right\| \leq \|f\|_\infty.$$

Mittels der Dreiecksungleichung erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& \left\| \int f_1 f_2 dP - \left(\int f_1 dP \right) \left(\int f_2 dP \right) \right\| \\
& \leq \left\| \int_X f_1 f_2 dP - \sum_j f_1(x_j) f_2(x_j) P(B_j) \right\| \\
& \quad + \left\| \sum_j f_1(x_j) f_2(x_j) P(B_j) - \left(\sum_j f_1(x_j) P(B_j) \right) \left(\sum_j f_2(x_j) P(B_j) \right) \right\| \\
& \quad + \left\| \left(\sum_j f_1(x_j) P(B_j) \right) \left(\sum_j f_2(x_j) P(B_j) - \int f_2 dP \right) \right\| \\
& \quad + \left\| \left(\sum_j f_1(x_j) P(B_j) - \int f_1 dP \right) \left(\int f_2 dP \right) \right\|
\end{aligned}$$

Wegen $P(B_j)P(B_{j'}) = P(B_j \cap B_{j'}) = P(\emptyset) = 0$ für $j \neq j'$ ist der zweite Term 0. Und wegen $\|\sum_j f(x_j) P(B_j)\| \leq \|f\|_\infty$ für $f \in \{f_1, f_2\}$ ist schließlich

$$\left\| \int f_1 f_2 dP - \left(\int f_1 dP \right) \left(\int f_2 dP \right) \right\| \leq \varepsilon(1 + \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war folgt $\int f_1 f_2 dP = \left(\int f_1 dP \right) \left(\int f_2 dP \right)$.

Die *-Homomorphie folgt aus

$$\int \overline{f} dP \approx \sum \overline{f(x_j)} P(B_j) = \left(\sum f(x_j) P(B_j) \right)^* \approx \left(\int f dP \right)^*.$$

Die schwache Stetigkeit gilt, da $f_j \rightarrow f$ in $\sigma(\text{Borel}_b, M(X))$, also $\int f_j d\mu \rightarrow \int f d\mu$ für alle $\mu \in M(X)$ und mit $\mu := P_{h,k}$ insbesondere

$$\left\langle \left(\int f_j dP \right) h, k \right\rangle = \int f_j dP_{h,k} \rightarrow \int f dP_{h,k} = \left\langle \left(\int f dP \right) h, k \right\rangle,$$

also $\int f_j dP \rightarrow \int f dP$ bzgl. WOT. \square

11.13 Theorem (Pendant zum Darstellungssatz von Riesz).

Es sei X ein kompakter Raum und H ein Hilbert-Raum.

Dann stehen die *-Darstellungen ρ von $C(X, \mathbb{C})$ auf H in bijektiver Beziehung zu den Spektral-Maßen P auf X bezüglich H via der Relation

$$\rho(f) = \int_X f(x) dP(x) \text{ für alle } f \in C(X, \mathbb{C}).$$

Kurz gesagt:

$$\text{Hom}(C(X, \mathbb{C}), L(H)) \cong M(X, L(H)),$$

wobei $M(X, L(H))$ die Menge der Spektral-Maße auf X bzgl. H bezeichnet.

Beweis. (\Leftarrow) Dies ist (11.11).

(\Rightarrow) Wie bei Riesz'schen Darstellungssatz erweitern wir ρ zuerst zu einer Darstellung $\tilde{\rho}$ von $\text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$ um das Spektralmaß P danach als $P := \tilde{\rho} \circ \chi$ zu erhalten.

— Andreas Kriegel, Universität Wien —

($\rho \mapsto \tilde{\rho}$) Da $\text{Borel}_b(X)$ nach (11.9) als Teilraum von $C(X)''$ aufgefaßt werden kann, liegt es nahe dazu die biduale Abbildung $\rho^{**} : C(X)'' \rightarrow L(H)''$ zu verwenden.

$$\begin{array}{ccc}
 C(X) & \xrightarrow{\rho} & L(H) \\
 \downarrow \iota & \searrow & \downarrow \iota \\
 & \text{Borel}_b(X) & \\
 & \swarrow & \\
 C(X)'' & \xrightarrow{\rho^{**}} & L(H)''
 \end{array}$$

Leider ist aber der Raum $L(H)$ nicht reflexiv und wir können höchstens hoffen eine Retraktion (d.h. ein Linksinverses) τ zur kanonischen Einbettung $\iota : L(H) \rightarrow L(H)''$ zu finden. Die kanonische Einbettung $\iota : E \rightarrow E''$ eines Banachraums E in seinen bidual-Raum hat folgende Eigenschaft: Für jedes stetig lineare Funktional $\ell \in E'$ gilt $\text{ev}_\ell \circ \iota = \ell$, denn $(\text{ev}_\ell \circ \iota)(x) = \text{ev}_\ell(\iota(x)) = \iota(x)(\ell) = \ell(x)$.

$$\begin{array}{ccc}
 & E & \\
 \ell \swarrow & & \downarrow \iota \\
 \mathbb{C} & & E'' \\
 \text{ev}_\ell \swarrow & & \\
 & & E''
 \end{array}$$

Für $h, k \in H$ sei das lineare Funktional $\ell_{h,k} : L(H) \rightarrow \mathbb{C}$ durch $\ell_{h,k}(T) := \langle Th, k \rangle$ definiert. Es gilt $|\ell_{h,k}(T)| = |\langle Th, k \rangle| \leq \|T\| \|h\| \|k\|$. Also ist $\ell_{h,k}$ stetig mit $\|\ell_{h,k}\| \leq \|h\| \|k\|$. Das gesuchte τ müßte also $\ell_{h,k} \circ \tau = \text{ev}_{\ell_{h,k}}$ erfüllen, und ist durch diese Eigenschaft auch schon eindeutig festgelegt, da die Funktionale $\ell_{h,k}$ Punkte trennen. Die Bedingung bedeutet, daß für $\Psi \in L(H)''$ folgendes gilt: $\langle \tau(\Psi)h, k \rangle = (\ell_{h,k} \circ \tau)(\Psi) = (\text{ev}_{\ell_{h,k}})(\Psi) = \Psi(\ell_{h,k})$. In der Tat ist nach (10.36) ein stetig linearer Operator $\tau(\Psi)$ durch diese Gleichung definiert, denn $(h, k) \mapsto \Psi(\ell_{h,k})$ ist offensichtlich eine sesqui-lineare Form mit $|\Psi(\ell_{h,k})| \leq \|\Psi\| \|\ell_{h,k}\| \leq \|\Psi\| \|h\| \|k\|$. Also ist $\|\tau(\Psi)\| \leq \|\Psi\|$, d.h. $\tau : L(H)'' \rightarrow L(H)$ ist eine Kontraktion und klarerweise linear.

Bemerkung: Für Banach-Räume E und F hat man allgemeiner ein $\tau : L(E, F)'' \rightarrow L(E, F'')$ welches zusammengesetzt mit $\iota : L(E, F) \hookrightarrow L(E, F)''$ die Inklusion $\delta_* : L(E, F) \rightarrow L(E, F'')$ liefert.

Dabei ist τ assoziiert zur 3-linearen Form

$$L(E, F)'' \times E \times F' \rightarrow L(E, F)'' \times L(E, F)' \rightarrow \mathbb{C},$$

welche durch die bilineare Abbildung $E \times F' \rightarrow L(E, F)'$, die seinerseits zu $E \times F' \times L(E, F) \rightarrow F' \times E \times L(E, F) \rightarrow F' \times F \rightarrow \mathbb{C}$ assoziiert ist, beschrieben wird.

Wir haben also folgendes kommutatives Diagramm erhalten:

$$\begin{array}{ccc}
 C(X) & \xrightarrow{\rho} & L(H) \\
 \downarrow \iota & \swarrow \mu_{h,k} & \nearrow \ell_{h,k} \\
 & \text{Borel}_b(X) & \mathbb{C} \\
 & \swarrow \text{ev}_{\mu_{h,k}} & \searrow \text{ev}_{\ell_{h,k}} \\
 C(X)'' & \xrightarrow{\rho^{**}} & L(H)'' \\
 & & \uparrow \tau
 \end{array}$$

$\tilde{\rho}$ (dashed arrow from $C(X)$ to \mathbb{C})
 $\tilde{\rho}$ (dashed arrow from $L(H)$ to \mathbb{C})

Dabei ist $\mu_{h,k} := \ell_{h,k} \circ \rho$ ein stetig lineares Funktional auf $C(X)$, und kann somit als reguläres Borel-Maß aufgefaßt werden. Das untere Dreieck kommutiert, da für $\ell := \ell_{h,k} \in L(H)'$ folgendes gilt: $(\text{ev}_\ell \circ \rho^{**})(\Phi) = \text{ev}_\ell(\rho^{**}(\Phi)) = \rho^{**}(\Phi)(\ell) = \Phi(\rho^*(\ell)) = \Phi(\ell \circ \rho) = \text{ev}_{\ell \circ \rho}(\Phi)$, und $\ell \circ \rho = \ell_{h,k} \circ \rho =: \mu_{h,k}$. Somit ist durch $\tilde{\rho} := (\tau \circ \rho^{**})|_{\text{Borel}_b(X)}$ eine lineare Erweiterung von ρ definiert die $\|\tilde{\rho}\| \leq \|\tau \circ \rho^{**}\| \leq \|\tau\| \|\rho\| \leq 1 \cdot 1 = 1$ erfüllt.

Es gilt

$$\langle \tilde{\rho}(f)h, k \rangle = (\ell_{h,k} \circ \tilde{\rho})(f) = \text{ev}_{\mu_{h,k}}(f) \stackrel{(11.9)}{=} \int_X f(x) d\mu_{h,k},$$

und folglich ist $\tilde{\rho}$ auch stetig von $\text{Borel}_b(X)$ mit der Topologie $\sigma(\text{Borel}_b(X), M(X))$ nach $L(H)$ mit der WOT. Da $C(X)$ in $C(X)'' = M(X)'$ nach (11.10) dicht liegt bezüglich der Topologie $\sigma(M(X)', M(X))$, liegt es auch in $\text{Borel}_b(X)$ dicht bezüglich der Spurtopologie $\sigma(\text{Borel}_b(X), M(X))$.

Dies benutzen wir nun um die Multiplikativität von $\tilde{\rho}$ zu zeigen:

Sei also $f \in \text{Borel}_b(X)$. Nach (11.9.4) existiert dazu ein Netz $f_i \in C(X)$, mit $\int f_i d\mu \rightarrow \int f d\mu$ für alle $\mu \in M(X)$. Da mit $g \in \text{Borel}_b(X)$ und $\mu \in M(X)$ auch $g\mu$ definiert durch $(g\mu)(f) := \int_X f g d\mu$ in $M(X)$ liegt (denn $g\mu : C(X) \xrightarrow{g} \text{Borel}_b(X) \hookrightarrow C(X)'' \xrightarrow{\text{ev}_\mu} \mathbb{C}$ ist stetig nach (11.9.3)), gilt $f_i g \rightarrow f g$ in der schwachen Topologie $\sigma(\text{Borel}_b(X), M(X))$ und somit $\tilde{\rho}(f_i g) \rightarrow \tilde{\rho}(f g)$ bezüglich der WOT. Ist insbesondere $g \in C(X)$, dann gilt $\tilde{\rho}(f_i g) = \rho(f_i g) = \rho(f_i) \circ \rho(g) \rightarrow \tilde{\rho}(f) \circ \rho(g)$ bezüglich der WOT, da die Komposition in der ersten Variablen stetig ist bezüglich der WOT nach (11.12). Folglich ist $\tilde{\rho}(f g) = \tilde{\rho}(f) \circ \rho(g)$. Ist nun $g \in \text{Borel}_b(X)$ beliebig, so folgt $\tilde{\rho}(f_i g) = \tilde{\rho}(g f_i) = \tilde{\rho}(g) \circ \rho(f_i) \rightarrow \tilde{\rho}(g) \circ \tilde{\rho}(f)$ in der WOT, da die Komposition auch in der zweiten Variablen stetig ist bezüglich der WOT nach (11.12). Also ist $\tilde{\rho}(g f) = \tilde{\rho}(g) \circ \tilde{\rho}(f)$.

Um zu zeigen, daß $\tilde{\rho}$ eine *-Darstellung ist, müssen wir nur noch die *-Homomorphie zeigen.

Sei wieder $f \in \text{Borel}_b(X)$ und $f_i \in C(X)$ ein Netz wie zuvor. Für $\mu \in M(X)$ sei das Maß $\bar{\mu}$ definiert durch $\bar{\mu}(B) = \overline{\mu(B)}$. Dann gilt bezüglich der WOT, daß $\rho(f_i) \rightarrow \tilde{\rho}(f)$ und somit $\rho(f_i)^* \rightarrow \tilde{\rho}(f)^*$ nach (11.12). Andererseits: Wegen $\int \overline{f_i} d\mu = \int f_i d\bar{\mu} \rightarrow \int f d\bar{\mu} = \int \overline{f} d\mu$ für jedes Maß μ , folgt $\rho(f_i)^* = \rho(\overline{f_i}) \rightarrow \tilde{\rho}(\overline{f})$, d.h. $\tilde{\rho}(f)^* = \tilde{\rho}(\overline{f})$.

($\tilde{\rho} \mapsto P$) Nun wollen wir ein Spektral-Maß P durch $P(B) := \tilde{\rho}(\chi_B)$ für alle Borel-Mengen B definieren.

Wir haben in (11.1) gezeigt, daß $P(B)$ eine orthogonal-Projektion ist, $P(X) = 1$

ist, und $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \circ P(B_2)$ und $P(B_1 \sqcup B_2) = P(B_1) + P(B_2)$ erfüllt ist. Es bleibt also nur noch die σ -Additivität nachzuweisen.

Seien dazu B_j paarweise disjunkte Borel-Mengen, $B_{>n} := \bigcup_{j>n} B_j$ und $h \in H$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \left\| P\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} B_k\right)h - \sum_{k=1}^n P(B_k)h \right\|^2 &= \left\| P(B_{>n})h + P\left(\bigsqcup_{i=1}^n B_i\right)h - P\left(\bigsqcup_{k=1}^n B_k\right)h \right\|^2 \\ &= \|P(B_{>n})h\|^2 = \langle P(B_{>n})h, h \rangle \\ &= \langle \tilde{\rho}(\chi_{B_{>n}})h, h \rangle = \ell_{h,h}(\tilde{\rho}(\chi_{B_{>n}})) \\ &= \mu_{h,h}(B_{>n}) = \sum_{j>n} \mu_{h,h}(B_j) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

da $\mu_{h,k}$ als Maß klarerweise σ -additiv ist. Also ist P ein Spektral-Maß.

($P \mapsto \rho$ ist surjektiv, d.h. $\rho \mapsto \tilde{\rho} \mapsto P \mapsto \rho$) Wir müssen also für jede Darstellung ρ mit assoziiertem Spektralmaß $P := \tilde{\rho} \circ \chi$ zeigen, daß $\int f dP = \rho(f)$ für alle $f \in C(X)$ gilt.

Sei dazu $f \in \text{Borel}_b(X)$ beliebig, $\varepsilon > 0$ und $B_j \ni x_j$ wie in (11.9), also

$$\left\| f - \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{B_j} \right\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Wegen $\|\tilde{\rho}\| \leq 1$ und (11.11.2) folgt daraus

$$\left\| \tilde{\rho}(f) - \int f dP \right\| \leq \left\| \tilde{\rho}\left(f - \sum_{j=1}^n f(x_j) \chi_{B_j}\right) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^n f(x_j) P(B_j) - \int f dP \right\| \leq 2\varepsilon,$$

also ist $\tilde{\rho}(f) = \int f dP$.

($P \mapsto \rho$ ist injektiv) Es seien P^1 und P^2 zwei Spektralmaße mit $\int f dP^1 = \int f dP^2$ für alle $f \in C(X)$, also sind für $h, k \in H$ die \mathbb{C} -wertigen Maße $\mu^i := P_{h,k}^i$ auf $f \in C(X)$ für $i \in \{1, 2\}$ ident und somit für $B \in \mathcal{B}(X)$ auch $(\ell_{h,k} \circ P^i)(B) = \mu^i(B)$ für $i \in \{1, 2\}$ ident. Da die $\ell_{h,k}$ Punkte-trennen ist schließlich $P^1 = P^2$. \square

Spektral-Theorie normaler Operatoren

Bemerkung. Es sei H ein endlich-dimensionaler Hilbertraum. Dann besagt der Spektral-Satz der linearen Algebra, daß jeder normale Operator N diagonalisiert werden kann. Genauer es gibt eine orthonormal-Basis bestehend aus Eigenvektoren u_i zu Eigenwerten λ_i . Also ist

$$N(x) = N\left(\sum_i \langle x, u_i \rangle u_i\right) = \sum_i \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i.$$

Im unendlich-Dimensionalen muß ein entsprechender Satz anders aussehen, da ein normaler Operator gar keine Eigenwerte besitzen muß, wie z.B. der Multiplikations-Operator $N = M_{\text{id}}$ mit der Identität auf $L^2[0, 1]$: Sei nämlich $\lambda f(t) = t f(t)$ f.ü.

für ein $f \in L^2[0, 1]$. Dann ist $(\lambda - t) f(t) = 0$ f.ü. und somit $f = 0$ f.ü., d.h. $f = 0$ in $L^2[0, 1]$.

Man kann aber den endlich-dimensionalen Satz auch wie folgt umformulieren. Für jeden Eigenwert $\lambda \in \sigma(N)$ sei P_λ die orthogonal-Projektion auf den Eigenraum $\text{Ker}(N - \lambda)$. Dann ist

$$N(x) = \sum_i \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i = \sum_\lambda \sum_{i:\lambda_i=\lambda} \lambda_i \langle x, u_i \rangle u_i = \sum_\lambda \lambda \sum_{i:\lambda_i=\lambda} \langle x, u_i \rangle u_i = \sum_{\lambda \in \sigma(N)} \lambda P_\lambda(x)$$

Dies wollen wir nun auf allgemeine Hilberträume verallgemeinern und dazu vereinfachen wir vorerst $\{N, N^*\}^k$:

11.39 Fugledge-Putnam-Theorem. *Es seien N_1 und N_2 normale Operatoren auf H_1 und H_2 . Falls $B \in L(H_1, H_2)$ den Operator N_1 mit N_2 vertauscht (d.h. $B N_1 = N_2 B$), so vertauscht er auch N_1^* mit N_2^* .*

Beweis. $N_2 B = B N_1 \Rightarrow p(N_2) B = B p(N_1)$ für jedes Polynom p und weiters für jede ganze Funktion $p \in H(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Insbesondere ist

$$B = \exp(-i\bar{z}N_2) B \exp(i\bar{z}N_1).$$

Da $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$, falls X und Y miteinander kommutieren, und weil die N_j normal sind, gilt somit

$$\begin{aligned} f(z) &:= \exp(-izN_2^*) B \exp(izN_1^*) \\ &= \exp(-izN_2^*) \exp(-i\bar{z}N_2) B \exp(i\bar{z}N_1) \exp(izN_1^*) \\ &= \exp(-i(zN_2^* + \bar{z}N_2)) B \exp(i(\bar{z}N_1 + zN_1^*)). \end{aligned}$$

Für jedes $z \in \mathbb{C}$ sind $zN_2^* + \bar{z}N_2$ und $\bar{z}N_1 + zN_1^*$ Hermite'sche Operatoren, also ist $\exp(-i(zN_2^* + \bar{z}N_2))$ und $\exp(i(\bar{z}N_1 + zN_1^*))$ unitär (denn $(\exp(iA))^* \exp(iA) = \exp(-iA^*) \exp(iA) = \exp(i(A - A)) = 1$) und damit ist $\|f(z)\| \leq \|B\|$. Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow L(H_1, H_2)$ ist holomorph, also nach Liouville's Theorem (9.15) konstant, und insbesondere gilt $0 = f'(0) = -iN_2^* \exp(0) B \exp(0) + i \exp(0) B N_1^* \exp(0) = i(B N_1^* - N_2^* B)$. \square

11.14 Spektral-Theorem. *Es sei N ein normaler Operator auf einem Hilbertraum H . Dann existiert ein eindeutiges Spektral-Maß P auf $\sigma(N)$, so daß N folgende SPEKTRAL-ZERLEGUNG hat*

$$N = \int_{\sigma(N)} z dP(z).$$

Falls $U \neq \emptyset$ relativ offen ist in $\sigma(N)$, so ist $P(U) \neq 0$.

Weiters ist $\int_{\sigma(N)} f dP \in \{N\}^{kk}$ für alle $f \in \text{Borel}_b(X, \mathbb{C})$, bzw.

$$\{N, N^*\}^k = \{N\}^k = \{P(B) : B \in \mathcal{B}(\sigma(N))\}^k = \left\{ \int_{\sigma(N)} f dP : f \in \text{Borel}_b(\sigma(N)) \right\}^k$$

Funktionskalkül: *Es ist $f \mapsto f(N) := \int_{\sigma(N)} f(z) dP(z)$ die eindeutige Darstellung der C^* -Algebra $\text{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C})$ auf H , welche auch bezüglich der Topologie*

$\sigma(\text{Borel}_b(\sigma(N)), M(\sigma(N)))$ auf $\text{Borel}_b(\sigma(N))$ und der WOT auf $L(H)$ stetig ist, und id auf N abbildet.

Beweis. (Existenz von P)

$N \in L(H)$, normal

$\stackrel{(10.10)}{\Rightarrow} \exists \rho : C(\sigma(N), \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} C^*(N) \subseteq L(H)$, eine Darstellung

$\stackrel{(11.13)}{\Rightarrow} \exists P : \mathcal{B}(\sigma(N)) \rightarrow L(H)$, ein Spektralmaß

$\stackrel{(11.11)}{\Rightarrow} \exists \tilde{\rho} : \text{Borel}_b(X, \mathbb{C}) \rightarrow L(H)$, eine schwach stetige Darstellung.

Dabei ist $\int f dP = \rho(f)$ für alle $f \in C$ nach (11.13), also insbesondere $\int z dP(z) = \int \text{id} dP = \rho(\text{id}) = N$.

(Eindeutigkeit von P) Jedem Spektral-Maß P auf $\sigma(N)$ mit $N = \int_{\sigma(N)} z dP(z)$ entspricht nach (11.13) eine eindeutige Darstellung $\rho : f \mapsto \int_{\sigma(N)} f dP$ von $C(\sigma(N))$ mit $\rho(\text{id}) = N$, also dem eindeutigen Funktionen-Kalkül aus (10.10).

(Stetigkeit des Funktionen-Kalküls) Dies folgt aus (11.3.3).

(Eindeutigkeit des Funktionen-Kalküls) Es sei ρ eine Darstellung wie behauptet. Wegen der Eindeutigkeit des Funktionen-Kalküls (10.10) und (9.29) stimmt diese mit $f \mapsto f(N)$ für alle $f \in C(\sigma(N))$ überein. Wegen der Stetigkeit bzgl. $\sigma(\text{Borel}_b, M)$ und der Dichtheit von $C(X)$ nach nmb!11.9.4 stimmt diese mit $\int f dP$ auch für alle $f \in \text{Borel}_b$ überein.

(Nicht-Degeneriertheit von P) Es sei nun $U \neq \emptyset$ in $\sigma(N)$ offen. Dann existiert eine stetige Funktion $f \neq 0$ auf $\sigma(N)$ mit $0 \leq f \leq \chi_U$. Folglich ist $P(U) = \tilde{\rho}(\chi_U) \geq \rho(f) \neq 0$ nach (11.8.4), (11.11.2) und (10.10), also gilt (2).

(Kommutator-Identitäten)

$$\begin{array}{ccc} \{f(N) : f \in C\} & \xleftarrow{(10.10)} & \{N, N^*\}^{kk} \\ \downarrow & & \\ \{P(B) : B \in \mathcal{B}\} & \xleftarrow{\quad} & \{f(N) : f \in \text{Borel}_b\} \end{array}$$

Dabei ist die vertikale Inklusion nach (11.13) und (11.9.4) WOT-dicht, und die horizontale untere Inklusion nach (11.11.2) in der Operatornorm dicht. Da die Komposition nach (11.12) bzgl. dieser Topologien getrennt stetig ist, haben alle links von $\{N, N^*\}$ stehenden Mengen die gleiche Kommutante $\{N, N^*\}^k = \{N\}^k$ nach (10.10) und (11.39). \square

Definition. Träger eines Maßes. Es sei μ ein reguläres Borelmaß auf X , und $U \subseteq X$ eine offenen Menge. Man sagt, daß μ auf U verschwindet, falls für alle $f \in C_c(X)$ mit $f|_{X \setminus U} = 0$ schon $\int f d\mu = 0$ gilt. Äquivalent genügt es dies (wie bei Distributionen in (4.14)) für alle $f \in C_c(X)$ mit Träger $\text{Träg}(f) \subseteq U$ zu verlangen, denn wenn $f|_{X \setminus U} = 0$ ist, dann konvergiert $h_n f \rightarrow f$ glm. und $\text{Träg}(h_n f) \subseteq U$ – wobei stetige Funktionen $h_n \in C(X, [0, 1])$ nach Tietze-Urysohn so gewählt werden, daß $\text{Träg}(h_n) \subseteq U$ und $h_n = 1$ auf $\{x : |f(x)| < \frac{1}{n}\}$.

Die Vereinigung aller offener Mengen U mit dieser Eigenschaft hat dieselbe Eigenschaft (d.h. es gibt eine größte Menge unter ihnen), denn der Träger von f wird

bereits durch endlich viele solche U überdeckt und somit läßt sich f mittels untergeordneter Partition $\{h_i\}_i$ der 1 als $f = \sum_i h_i f$ schreiben. Da $\int h_i f d\mu = 0$ ist gilt gleiches für f .

Das Komplement der größten offenen Menge U mit obiger Eigenschaft heißt der TRÄGER $\text{Träg}(\mu)$ von μ .

Man beachte, daß für das Spektralmaß P eines normalen $N \in L(H)$

$$\langle f(N)h, k \rangle = \left\langle \left(\int_{\sigma(N)} f dP \right) h, k \right\rangle = \int_{\sigma(N)} f dP_{h,k}$$

für alle $h, k \in H$ und $f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))$ ist. Insbesondere gilt $\langle f(N)h, k \rangle = \int_{\mathbb{C}} f dP_{h,k}$ für alle $h, k \in H$ und $f \in \text{Borel}_b(\mathbb{C})$, da der Träger von $P_{h,k}$ in $\sigma(N)$ enthalten ist.

11.17 Lemma. *Es sei E ein Banach-Raum und $A \in L(E)$. Falls $\sigma(A) = K_1 \sqcup K_0$ mit disjunkten abgeschlossenen K_1 und K_0 ist, dann existiert eine Zerlegung $E = E_1 \times E_0$ in invariante Teilräume E_j von A , so daß $\sigma(A|_{E_j}) = K_j$ ist.*

Falls also $\sigma(A)$ diskret (und somit endlich) ist, so finden wir eine Zerlegung $E = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} E_\lambda$ in invariante Teilräume für welche $A|_{E_\lambda}$ als Spektrum $\{\lambda\}$ hat.

Beweis. Es sei $p \in H(\sigma(A), \mathbb{C})$ wie in (9.32) der holomorphe Keim mit $p = j$ lokal um K_j für $j \in \{0, 1\}$. Dann ist $P = p(A) \in \{A\}^{kk}$ (nach (9.31)) idempotent. Folglich ist $E_1 := \text{Bild}(P)$ und $E_0 := \text{Bild}(1 - P) = \text{Kern}(P)$ invariant unter $\{A\}^k \supseteq \{A\}$ nach (10.32.4). Es sei $A_j := A|_{E_j}$. Dann ist $A - \lambda$ genau dann invertierbar in $L(E)$, wenn $A_j - \lambda$ invertierbar ist in $L(E_j)$ für $j = 0$ und $j = 1$, denn ein inverses B zu $A - \lambda$ und somit in $\{A\}^k$ muß wegen $P \in \{A\}^{kk} \subseteq \{B\}^k$ nach (10.32.4) auch die Teilräume E_j invariant lassen. Also ist $K_1 \sqcup K_0 = \sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_0)$.

($\sigma(A_i) \subseteq K_i$) Es sei $\lambda \notin K_i$ und o.B.d.A. $i = 1$. Dann definieren wir den holomorphen Keim f durch $f : z \mapsto \frac{1}{\lambda - z}$ lokal um K_1 und $f = 0$ lokal um K_0 . Dann ist $(\lambda - z)f(z) = p(z)$ und somit $(\lambda - A)f(A) = p(A) = P$. Da E_1 invariant unter allen auftretenden Operatoren ist, gilt für die Einschränkung A_1 von A auf E_1 , daß $\lambda \notin \sigma(A_1)$, d.h. $\sigma(A_1) \subseteq K_1$.

Wegen $K_1 \sqcup K_0 = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_0)$ gilt also $\sigma(A_1) = K_1$ und $\sigma(A_0) = K_0$. \square

11.18 Proposition. *Es sei N ein normaler Operator auf einem Hilbertraum H mit Spektral-Maß P und $\lambda \in \sigma(N)$. Dann ist $\text{Bild}(P(\{\lambda\})) = \text{Ker}(N - \lambda)$. Folglich ist λ genau dann ein Eigenwert von N , wenn $P(\{\lambda\}) \neq 0$ und $P(\{\lambda\})$ ist dann die orthogonal-Projektion auf den Eigenraum zu λ .*

Beweis. (\subseteq) Es ist $(z - \lambda) \cdot \chi_{\{\lambda\}} = 0$ und somit $(N - \lambda)P(\{\lambda\}) = 0$, d.h. $\text{Bild}(P(\{\lambda\})) \subseteq \text{Ker}(N - \lambda)$.

(\supseteq) Für $h \in \text{Ker}(N - \lambda)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \|(N - \lambda)h\|^2 = \langle (N - \lambda)h, (N - \lambda)h \rangle = \langle (N^* - \bar{\lambda})(N - \lambda)h, h \rangle \\ &= \int |z - \lambda|^2 d\langle P(z)h, h \rangle \end{aligned}$$

und da $\mu := P_{h,h} = \langle P(\cdot)h, h \rangle$ nach (11.8.5) ein positives Maß ist, muß folglich $\text{Träg}(\mu) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda|^2 = 0\} = \{\lambda\}$ gelten und somit ist $\|P(\{\lambda\})h\|^2 = \langle P(\{\lambda\})h, h \rangle = \mu(\{\lambda\}) = \mu(\sigma(N)) = \langle (\int_{\sigma(N)} dP)h, h \rangle = \|h\|^2$, d.h. $h \in \text{Bild } P(\{\lambda\})$. \square

Spektral-Theorie kompakter Operatoren

11.19 Lemma. *Es seien E und F Banach-Räume. Ein Operator $T \in L(E, F)$ ist genau dann kompakt, wenn sein adjungierter Operator $T^* \in L(F^*, E^*)$ es ist.*

Beweis. (\Rightarrow) Dies ist (6.13)

(\Leftarrow) Es sei T^* kompakt. Dann ist T^{**} nach dem ersten Teil kompakt, und somit auch seine Einschränkung T auf $E \subseteq E^{**}$ und $F \subseteq F^{**}$. \square

11.20 Lemma. *Es sei T ein kompakter Operator, $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Dann ist λ genau dann ein Eigenwert, falls $\inf\{\|(T - \lambda)h\| : \|h\| = 1\} = 0$.*

Beweis. (\Rightarrow) ist klar, da dann ein $h \neq 0$ existiert mit $Th = \lambda h$.

(\Leftarrow) Nach Voraussetzung existiert eine Folge $h_n \in E$ mit $\|h_n\| = 1$ und $\|(T - \lambda)h_n\| \rightarrow 0$. Da T kompakt ist, dürfen wir annehmen, daß $y := \lim_n Th_n$ existiert. Es gilt somit $h_n = \frac{1}{\lambda}((\lambda - T)h_n + Th_n) \rightarrow \frac{1}{\lambda}y$ und folglich ist $1 = \|\frac{1}{\lambda}y\| = \frac{1}{|\lambda|}\|y\|$, d.h. $y \neq 0$. Wegen $Th_n \rightarrow T(\frac{1}{\lambda}y) = \frac{1}{\lambda}Ty$ gilt $\frac{1}{\lambda}Ty = y$, d.h. λ ist Eigenwert von T zum Eigenvektor y . \square

11.21 Lemma. *Es sei T ein kompakter Operator auf einem Banach-Raum E , $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$. Dann ist λ ein Eigenwert von T oder von T^* .*

Beweis. Indirekt. Angenommen λ ist weder Eigenwert von $T \in L(E)$ noch von $T^* \in L(E^*)$. Nach dem vorigen Lemma (11.20) existiert ein $c > 0$ mit $\|(T - \lambda)h\| \geq c\|h\|$ für alle $h \in E$. Also ist $T - \lambda$ ein Homöomorphismus auf sein Bild, und dieses somit vollständig und folglich abgeschlossen. Weil λ kein Eigenwert der Banach-Raum-Adjungierten T^* ist, gilt nach (7.14)

$$\text{Bild}(T - \lambda) = \overline{\text{Bild}(T - \lambda)} = (\text{Ker}(T - \lambda)^*)_o \stackrel{!}{=} (\text{Ker}(T^* - \lambda))_o = \{0\}_o = E,$$

denn $T \mapsto T^*$ ist \mathbb{C} -linear. Somit ist $(T - \lambda) : E \rightarrow E$ bijektiv und wegen $\|(T - \lambda)h\| \geq c\|h\|$ (oder auch den Open Mapping Theorem) ist die Umkehrabbildung $(T - \lambda)^{-1}$ ebenfalls stetig, d.h. $\lambda \notin \sigma(T)$. \square

11.22 Lemma. *Es sei $F \subset E$ ein echter abgeschlossener Teilraum eines Banach-Raums E und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $x \in E$ mit $\|x\| = 1$ und $\text{dist}(x, F) \geq 1 - \varepsilon$.*

Beweis. Es sei $d(x) := \text{dist}(x, F)$. Wir wählen $x_1 \in E \setminus F$. Dann existiert ein $y_1 \in F$ mit $0 < d(x_1) \leq \|x_1 - y_1\| \leq (1 + \varepsilon)d(x_1)$. Es sei $x_2 := x_1 - y_1$, dann ist $d(x_2) = \inf\{\|x_2 - y\| : y \in F\} = \inf\{\|x_1 - y_1 - y\| : y \in F\} = d(x_1)$ und $(1 + \varepsilon)d(x_2) = (1 + \varepsilon)d(x_1) \geq \|x_1 - y_1\| = \|x_2\| > 0$. Sei schließlich $x := \frac{1}{\|x_2\|}x_2$. Dann ist $\|x\| = 1$ und für $y \in F$ gilt

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \frac{1}{\|x_2\|}x_2 - y \right\| = \frac{1}{\|x_2\|} \left\| x_2 - \|x_2\|y \right\| \\ &\geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)d(x_2)} \left\| x_2 - \|x_2\|y \right\| \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon)d(x_2)} d(x_2) \geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \\ &> 1 - \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

11.23 Spektral-Satz kompakter Operatoren auf Banach-Räumen. *Es sei E ein unendlich-dimensionaler Banachraum und $T \in L(E)$ ein kompakter Operator. Dann ist $0 \in \sigma(T)$ und alle $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ sind isoliert in $\sigma(T)$ und Eigenwerte von T mit endlich-dimensionalen Eigenräumen $\text{Ker}(T - \lambda)$. Falls es unendlich viele solche λ gibt, so lassen sich diese folglich in Form einer 0-Folge anordnen.*

Beweis. Beh.: *Jede Folge verschiedener Eigenwerte λ_n von T konvergiert gegen 0:* Für jedes n wählen wir ein $0 \neq h_n \in \text{Ker}(T - \lambda_n)$. Es sei E_n das lineare Erzeugnis von $\{h_1, \dots, h_n\}$. Dieser Raum ist n -dimensional, da die h_n linear unabhängig sind: Sei nämlich $\sum_k \mu_k h_k = 0$ eine linear-Kombination minimaler Länge, dann ist $0 = (T - \lambda_1)(\sum_k \mu_k h_k) = \sum_{k>1} \mu_k (\lambda_k - \lambda_1) h_k$ ein Widerspruch zur Minimalität. Nach dem vorigen Lemma (11.22) existiert ein Vektor $y_n \in E_n$ mit $\|y_n\| = 1$ und $d(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$. Es sei $y_n = \sum_{k \leq n} \mu_k h_k$. Dann ist

$$(T - \lambda_n)y_n = \sum_{k < n} \mu_k (\lambda_k - \lambda_n) h_k \in E_{n-1}.$$

Also ist für $n > m$:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{\lambda_n}y_n\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_m}y_m\right) &= \frac{1}{\lambda_n}(T - \lambda_n)y_n - \frac{1}{\lambda_m}(T - \lambda_m)y_m + y_n - y_m \\ &= y_n + \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda_n}(T - \lambda_n)y_n\right)}_{\in E_{n-1}} - \underbrace{\left(\frac{1}{\lambda_m}(T - \lambda_m)y_m\right)}_{\in E_{m-1}} - \underbrace{y_m}_{\in E_m} \in y_n + E_{n-1}. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\left\| T\left(\frac{1}{\lambda_n}y_n\right) - T\left(\frac{1}{\lambda_m}y_m\right) \right\| \geq \text{dist}(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}.$$

Es hat $(T(\frac{1}{\lambda_n}y_n))_n$ also keine konvergente Teilfolge. Da aber T kompakt ist, und somit das Bild beschränkter Mengen relativ-kompakt ist, kann $(\frac{1}{\lambda_n}y_n)_n$ keine beschränkte Teilfolge haben. Also muß $\|\frac{1}{\lambda_n}y_n\| = \frac{1}{|\lambda_n|} \rightarrow \infty$ konvergieren, d.h. $\lambda_n \rightarrow 0$.

Beh.: *Alle $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ sind isolierte Punkte von $\sigma(T)$.*

Falls nämlich $\lambda_n \in \sigma(T)$ mit $\lambda_n \neq \lambda$ gegen $\lambda \neq 0$ konvergiert, so ist nach (11.21) λ_n ein Eigenwert von T oder von T^* . O.B.d.A. können wir also annehmen, daß alle λ_n Eigenwerte von T oder alle von T^* sind. Der vorige Punkt liefert – da nach (11.19) auch T^* kompakt ist – $\lambda_n \rightarrow 0$, einen Widerspruch.

Beh.: *Alle $0 \neq \lambda \in \sigma(T)$ sind Eigenwerte von T .*

Da λ isoliert ist, existiert nach (11.17) ein abgeschlossener invarianter Teilraum E_λ von E , s.d. $T_\lambda := T|_{E_\lambda}$ gerade als Spektrum $\{\lambda\}$ hat. Also ist T_λ ein invertierbarer ($0 \notin \sigma(T_\lambda)$) kompakter Operator und damit ist E_λ endlich-dimensional (denn das Bild der Einheitskugel ist dann eine relativ-kompakte 0-Umgebung). Folglich ist $\lambda \in \sigma(T_\lambda)$ ein Eigenwert von T_λ und somit auch von T .

Beh.: *Der Eigenraum $\text{Ker}(T - \lambda)$ ist endlich-dimensional.*

Es ist $\text{Ker}(T - \lambda)$ ein T -invarianter abgeschlossener Teilraum und $\lambda \text{id}_{\text{Ker}(T - \lambda)} = T|_{\text{Ker}(T - \lambda)}$ ist kompakt. Also ist $\text{Ker}(T - \lambda)$ endlich-dimensional. \square

11.24 Lemma. *Es sei N ein normaler Operator auf einem Hilbert-Raum mit Spektral-Maß P . Dann ist N genau dann kompakt, wenn $P(\{z \in \sigma(N) : |z| > \varepsilon\})$ endlich-dimensionales Bild hat für alle $\varepsilon > 0$.*

Beweis. (\Leftarrow) Es sei $\varepsilon > 0$ und $B_\varepsilon := \{z \in \sigma(N) : |z| \leq \varepsilon\}$ und $P_\varepsilon := P(\sigma(N) \setminus B_\varepsilon)$. Dann gilt für $f : z \mapsto z \chi_{B_\varepsilon}(z)$

$$\begin{aligned} N - N P_\varepsilon &= N (1 - P_\varepsilon) = N P(B_\varepsilon) \\ &= \int z \chi_{B_\varepsilon} dP(z) = f(N). \end{aligned}$$

Also ist $\|N - N P_\varepsilon\| \leq \|f\|_\infty = \sup\{|z| : z \in B_\varepsilon\} \leq \varepsilon$. Falls P_ε endlich-dimensionales Bild hat für jedes ε , so gilt dies auch für $N P_\varepsilon$ und damit ist N kompakt nach (6.16).

(\Rightarrow) Es sei N kompakt und $\varepsilon > 0$. Es ist $g : z \mapsto \frac{1}{z} \chi_{\sigma(N) \setminus B_\varepsilon}(z)$ in $\text{Borel}_b(\mathbb{C})$. Da N kompakt ist, ist es auch

$$N g(N) = \int z \frac{1}{z} \chi_{\sigma(N) \setminus B_\varepsilon}(z) dP(z) = P_\varepsilon.$$

Da aber P_ε eine Projektion ist, muß ihr Bild endlich-dimensional sein. \square

11.25 Spektral-Satz für kompakte normale Operatoren. *Es sei N ein kompakter und normaler Operator auf einem Hilbertraum. Dann bilden die Eigenwerte ungleich 0 von N eine endliche oder eine gegen 0 konvergente Folge λ_j . Die Eigenräume $\text{Ker}(N - \lambda_j)$ sind endlich-dimensional und paarweise orthogonal und bezüglich der orthogonal-Projektionen P_j auf $\text{Ker}(N - \lambda_j)$ gilt:*

$$N = \sum_j \lambda_j P_j.$$

Umgekehrt ist jeder Operator N kompakt und normal, welcher eine Darstellung $N = \sum_j \lambda_j P_j$ besitzt mit endlich-dimensionalen orthogonal-Projektionen $P_j \neq 0$ mit paarweise orthogonalen Bildern und paarweise verschiedenen $0 \neq \lambda_j \rightarrow 0$. Es sind dann die λ_j die von 0 verschiedenen Eigenwerte und die Bilder von P_j die zugehörigen Eigenräume.

Beweis. (\Rightarrow) Nach dem Spektral-Theorem (11.14) existiert ein eindeutiges Spektral-Maß P auf $\sigma(N)$ mit $N = \int_{\sigma(N)} z dP(z)$. Nach dem Spektral-Satz (11.23) ist $\sigma(N) = \{0, \lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ und jedes λ_k ist isoliert und ein Eigenwert. Also ist nach (11.18) $P_k := P(\{\lambda_k\})$ die orthogonal-Projektion auf den Eigenraum $\text{Ker}(N - \lambda_k)$. Sei nun $\varepsilon > 0$, und n so groß, daß $|\lambda_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $k > n$. Dann bilden die Mengen $\{\lambda_1\}, \dots, \{\lambda_n\}, \{0, \lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots\}$ eine Borel-Zerlegung von $\sigma(N)$ in Mengen mit $|z - z'| \leq \varepsilon$ für z, z' in der gleichen Menge. Also ist $\|\int_{\sigma(N)} z dP(z) - \sum_{j \leq n} \lambda_j P_j - 0 P(\{0, \lambda_{n+1}, \dots\})\| < \varepsilon$. D.h. die Summe $\sum_j \lambda_j P_j$ konvergiert gegen $N = \int_{\sigma(N)} z dP(z)$. Da die λ_j paarweise verschieden sind, sind die Bilder von P_j paarweise orthogonal nach (11.8.2).

(\Leftarrow) Da $\|P_j\| \leq 1$ für orthogonal-Projektionen P_j gilt, $\lambda_j \rightarrow 0$ und die Bilder der P_j paarweise orthogonal sind folgt, daß die Summe in der Operatornorm konvergiert, denn

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \geq n} \lambda_j P_j h \right\|^2 &\leq \sum_{j \geq n} |\lambda_j|^2 \|P_j h\|^2 \leq \max\{|\lambda_j|^2 : j \geq n\} \cdot \left\| \left(\sum_{j \geq n} P_j \right) h \right\|^2 \\ &\leq \max\{|\lambda_j|^2 : j \geq n\} \cdot \|h\|^2. \end{aligned}$$

Ihre Teilsummen sind nach Voraussetzung endlich-dimensionale Operatoren also ist N kompakt. Es ist $N^* = \sum_j \overline{\lambda_j} P_j$ und somit ist N normal.

Es sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von N und h ein zugehöriger Eigenvektor. Dann ist $0 \neq \lambda h = N(h) = \sum_j \lambda_j P_j(h)$ also mindestens ein $P_k(h) \neq 0$ und somit $\lambda P_k(h) = \lambda_k P_k(h)$ also $\lambda = \lambda_k$, d.h. dieses k ist eindeutig. Somit ist $\lambda_k = \lambda$ ein Eigenwert und $\text{Ker}(N - \lambda_k) \subseteq \text{Bild } P_j$.

Die umgekehrte Inklusion folgt aus der paarweisen Orthogonalität der Bilder der P_j , denn $h \in \text{Bild } P_j \Rightarrow P_j h = h \Rightarrow P_k h = P_k P_j h = 0$ für $k \neq j$ nach (11.3), also $Nh = \lambda h$. \square

11.26 Spektral-Darstellung Hermite'scher Operatoren. *Es sei N ein Hermite'scher Operator, P sein Spektral-Maß und $p(t) := P(\{s \in \sigma(N) : s < t\})$. Dann ist $p : \mathbb{R} \rightarrow L(H)$ eine monotone, bezüglich der SOT links-stetig Abbildung mit $p(t) = 0$ für $t \leq -\|N\|$ und $p(t) = 1$ für $t \geq \|N\|$. Für $f \in C(\sigma(N))$ ist $f(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dp(t)$ ein Operator-wertiges Riemann-Stieltjes Integral.*

Beweis. Da $t \mapsto \{s \in \sigma(N) : s < t\}$ monoton wachsend ist, ist $p : t \mapsto P(\{s \in \sigma(N) : s < t\})$ monoton wachsend nach (11.8.4) und wegen $\sigma(N) \subseteq \{s \in \mathbb{R} : -\|N\| \leq s \leq \|N\|\}$ ist $p(t) = 0$ nach (11.8.1) für $t < -\|N\|$ und $p(t) = 1$ für $t \geq \|N\|$. Wegen der σ -Additivität von P ist p links-stetig bezüglich der SOT, denn sei $t_n \nearrow t_\infty$, dann ist $(-\infty, t_\infty) = (-\infty, t_0) \sqcup \bigsqcup_i [t_{i-1}, t_i)$ eine Zerlegung und somit in der SOT

$$\begin{aligned} p(t_\infty) &= P((-\infty, t_\infty]) = P((-\infty, t_0]) + \sum_{i=1}^o oP([t_{i-1}, t_i)) \\ &= p(t_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (p(t_i) - p(t_{i-1})) = \lim_{i \rightarrow \infty} p(t_i). \end{aligned}$$

Sei nun $f \in C(\sigma(N))$, so existiert eine monoton wachsende Folge von $t_j \in \mathbb{R}$ mit $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$ für $t_{j-1} \leq x, x' \leq t_j$. Dann ist

$$\int f(z) dP(z) \approx \sum_j f(x_j) P([t_{j-1}, t_j)) = \sum_j f(x_j) (p(t_j) - p(t_{j-1})),$$

eine Riemann-Stieltjes-Summe von $\int f(z) dp(z)$. \square

11.27 Folgerung. *Es sei H ein separabler Hilbertraum. Dann ist das einzige nicht-triviale abgeschlossene Ideal das der kompakten Operatoren.*

Beweis. Wegen der Proposition nach (10.23) enthält jedes abgeschlossene Ideal $I \neq \{0\}$ alle kompakten Operatoren. Angenommen es enthält einen nicht-kompakten Operator A . Es ist $N := A^*A$ positiv. Angenommen N wäre kompakt. Dann wäre nach (11.25) $N = \sum_j \lambda_j P_j$ mit $0 < \lambda_j \rightarrow 0$ und orthogonal-Projektionen P_j mit paarweise orthogonalen Bildern. Folglich wäre $|A| := \sqrt{A^*A} = \sqrt{N} = \sum_j \sqrt{\lambda_j} P_j$ und somit nach (11.25) ebenfalls kompakt. Damit wäre aber nach (10.19) auch $A = U|A|$ kompakt, ein Widerspruch.

Nach (11.24) existiert ein $\varepsilon > 0$ so, daß $P_\varepsilon := P(\sigma(N) \setminus B_\varepsilon) = Ng(N) \in I$ unendlich-dimensionales Bild hat, wobei P das Spektralmaß für N ist, $B_\varepsilon := \{z \in \sigma(N) : |z| \leq \varepsilon\} = [0, \varepsilon] \cap \sigma(N)$ und $g(z) := \frac{1}{z} \chi_{\sigma(N) \setminus B_\varepsilon}$ ist. Da H separabel ist, existiert eine surjektive Isometrie $U : H \rightarrow \text{Bild}(P_\varepsilon)$. Dann ist $1 = U^*U = U^*P_\varepsilon U \in I$, d.h. $I = L(H)$. \square

Normale Operatoren als Multiplikations-Operatoren

Eine Analogie zu einem diagonal-Operator wäre ein Multiplikations-Operator $M_f : g \mapsto f \cdot g$, die wir nun studieren.

11.15 Diagonal-Operator. *Es sei (X, Ω, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Es sei $f \mapsto M_f$ die treue und daher isometrische Darstellung von $L^\infty(\mu)$ auf $L^2(\mu)$, welche durch die Multiplikations-Operatoren $M_f : g \mapsto f \cdot g$ gegeben ist. Für sie gilt:*

- 1 Der Operator M_f ist normal und $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$.
- 2 Es ist $\sigma(M_f) = \text{ess-Bild}(f) := \bigcap \{f(A)^- : A \in \Omega, \mu(X \setminus A) = 0\}$.
- 3 Das Spektral-Maß P für M_f auf $\text{ess-Bild}(f)$ ist durch $P(B) = M_{\chi_{f^{-1}(B)}}$ gegeben.

Beweis. (1) Es ist $\langle h, M_f^* k \rangle = \langle M_f h, k \rangle = \int f h \bar{k} d\mu = \int h \bar{f} k d\mu = \langle h, M_{\bar{f}} k \rangle$, d.h. $(M_f)^* = M_{\bar{f}}$ und folglich $M_f \circ (M_f)^* = M_f \circ M_{\bar{f}} = M_{|f|^2} = (M_f)^* \circ M_f$.

(2) Es sei vorerst $\lambda \notin \text{ess-Bild}(f)$. Dann existiert ein $A \in \Omega$ mit $\mu(X \setminus A) = 0$ und $\lambda \notin f(A)^-$, d.h. es existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - \lambda| \geq \delta$ für alle $x \in A$. Es ist $g := \frac{1}{f - \lambda} \in L^\infty(\mu)$ und $M_g = (M_f - \lambda)^{-1}$, damit ist $\lambda \notin \sigma(M_f)$.

Umgekehrt sei $\lambda \in \text{ess-Bild}(f)$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := \{x : |f(x) - \lambda| > \frac{1}{n}\}$. Dann ist $\lambda \notin f(A_n)^-$, und da $A_n \in \Omega$ ist, gilt $0 < \mu(X \setminus A_n) \leq \infty$. Da (X, Ω, μ) σ -endlich ist, existiert ein meßbares $A'_n \subseteq X \setminus A_n$ mit $0 < \mu(A'_n) < \infty$. Wir setzen $f_n := \frac{1}{\sqrt{\mu(A'_n)}} \chi_{A'_n}$. Dann ist $f_n \in L^2(\mu)$ und $\|f_n\|_2 = 1$. Andererseits ist $\|(M_f - \lambda)f_n\|^2 = \frac{1}{\mu(A'_n)} \int_{A'_n} |f - \lambda|^2 d\mu \leq \frac{1}{n^2}$. Also ist $M_f - \lambda$ keine offene Abbildung und somit $\lambda \in \sigma(M_f)$.

(3) Wir wählen eine endliche Zerlegung der beschränkten Menge $\overline{f(X)}$ in Borel-Mengen B_j mit $z, z' \in B_j \Rightarrow |z - z'| \leq \varepsilon$ und weiters wählen wir $z_j \in B_j$. Die Mengen $f^{-1}(B_j)$ bilden dann eine Zerlegung von X in meßbare Mengen. Und für alle $x \in f^{-1}(B_j)$ gilt $|(f - \sum_j z_j \chi_{f^{-1}(B_j)})(x)| = |f(x) - z_j| \leq \varepsilon$. Folglich ist $\|f - \sum_j z_j \chi_{f^{-1}(B_j)}\|_\infty \leq \varepsilon$. Da $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$ für alle $g \in L^\infty$ ist, gilt

$$\left\| M_f - \sum_j z_j M_{\chi_{f^{-1}(B_j)}} \right\| \leq \left\| f - \sum_j z_j \chi_{f^{-1}(B_j)} \right\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Also konvergiert $\sum_j z_j M_{\chi_{f^{-1}(B_j)}}$ gegen M_f und auch gegen $\int z dP(z)$, wobei P das Spektral-Maß definiert durch $P(B) := M_{\chi_{f^{-1}(B)}}$ ist. \square

11.16 Beispiel. *Ist insbesondere $X = \mathbb{C}$ und $\mu \geq 0$ ein reguläres Borelmaß mit kompaktem Träger $K := \text{Träg}\mu \subseteq \mathbb{C}$, dann bezeichnen wir mit N_μ den Multiplikations-Operator M_{id} auf $L^2(\mu)$ mit der Identität $\text{id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Es gilt:*

- (1) N_μ ist normal, und $\sigma(N_\mu) = \text{Träg}(\mu)$.
- (2) Für jedes $f \in \text{Borel}_b(\mathbb{C})$ ist $f(N_\mu)$ der Multiplikations-Operator M_f mit f .
- (3) Für das Spektral-Maß P von N_μ gilt $P(B) = M_{\chi_B}$.

Beweis. (1) Dies folgt aus (11.15.1) und (11.15.2), da $N_\mu = M_{\text{id}}$ und $\text{ess-Bild}(f) = f(\text{Träg}\mu)$, falls f stetig ist, denn:

(\subseteq) Wir setzen $A := \text{Träg}(\mu)$. Da die charakteristische Funktion $\chi_{\mathbb{C} \setminus A}$ der offenen Menge $\mathbb{C} \setminus A$ sich als punktwiser Grenzwert einer monotonen Folge stetiger Funktionen $g_n \in C_c(\mathbb{C})$ mit $g_n|_A = 0$ schreiben läßt, ist $\int g_n d\mu = 0$ und somit

$\mu(\mathbb{C} \setminus A) = \int \chi_{\mathbb{C} \setminus A} d\mu = \lim_n \int g_n d\mu = 0$. Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt also abgeschlossen und damit $\text{ess-Bild}(f) \subseteq f(A) = f(\text{Träg}(\mu))$.

(\supseteq) Es sei A eine Borelmenge mit $\mu(\mathbb{C} \setminus A) = 0$. Dann ist für $0 \leq g \in C_c(\mathbb{C})$ mit $g|_A = 0$ folgendes erfüllt $0 \leq \int g d\mu \leq \mu(\|g\|_\infty \chi_{\mathbb{C} \setminus A}) = 0$. Also liegt der Träger von μ innerhalb von \overline{A} , und somit gilt $f(\text{Träg}(\mu)) \subseteq f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ da f stetig ist, und damit $f(\text{Träg}(\mu)) \subseteq \text{ess-Bild}(f)$.

(2) Wir müssen wegen (11.14) nur zeigen, daß $f \mapsto M_f$ die charakterisierenden Stetigkeits-Eigenschaften besitzt:

Sei also $f_j \rightarrow 0$ in $\text{Borel}_b(K)$ bezüglich der Topologie $\sigma(\text{Borel}_b(K), M(K))$. Z.z. ist, daß $M_{f_j} \rightarrow 0$ in der WOT. Sei also $h, k \in L^2(\mu)$. Nach Cauchy-Schwarz ist dann $h \overline{k} \in L^1(\mu)$ und somit $h \overline{k} d\mu \in M(X)$, folglich gilt:

$$\langle M_{f_j} h, k \rangle = \int_K f_j h \overline{k} d\mu \rightarrow 0.$$

(3) Dies folgt sofort aus (11.15.3) oder auch aus (2), da $P(B) = \chi_B(N_\mu) = M_{\chi_B}$. \square

Wir wollen nun zeigen, daß jeder normale Operator unitär äquivalent zu einem Multiplikations-Operator ist. Dazu folgende

11.28 Definition. Wir übertragen nun einige Begriffe der Darstellungstheorie Abelscher C^* -Algebren auf normale Operatoren $N \in L(H)$, indem wir die von N erzeugte Teil- C^* -Algebra $C^*(N) \subseteq L(H)$ und die zugehörige Darstellung $\rho_N : C(\sigma(N)) \cong C^*(N) \subseteq L(H)$ betrachten – den Funktionen-Kalkül aus (10.10).

Es heißt also $h \in H$ ZYKLISCHER VEKTOR für N , falls er ein solcher für die Darstellung ρ_N ist, d.h. $\{p(N, N^*)h : p \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]\}$ dicht ist in H .

Der normale Operator N heißt ZYKLISCH, falls er einen zyklischen Vektor besitzt.

Zwei normale Operatoren $N_1 \in L(H_1)$ und $N_2 \in L(H_2)$ heißen UNITÄR ÄQUIVALENT, falls eine surjektive Isometrie $U : H_1 \rightarrow H_2$ existiert mit $N_2 \circ U = U \circ N_1$, d.h. $N_2 = U \circ N_1 \circ U^{-1}$.

Lemma. Zwei normale Operatoren $N_1 \in L(H_1)$ und $N_2 \in L(H_2)$ sind genau dann unitär äquivalent, wenn $\sigma(N_1) = \sigma(N_2)$ und die zugehörigen Darstellungen ρ_{N_1} und ρ_{N_2} unitär äquivalent sind:

(\Rightarrow) Ist nämlich $N_1 - \lambda$ invertierbar, so auch $N_2 - \lambda = U \circ (N_1 - \lambda) \circ U^{-1}$, und umgekehrt. Also stimmen die beiden Spektren überein. Weiters sind ρ_{N_2} und $f \mapsto U \circ f(N_1) \circ U^{-1}$ zwei $*$ -Darstellungen von $C(\sigma(N_2))$, die auf der Identität beide N_2 liefern. Also stimmen sie überein. D.h. ρ_{N_1} und ρ_{N_2} sind via U äquivalent.

(\Leftarrow) Es sei $U : H_1 \rightarrow H_2$ eine surjektive Isometrie mit $\rho_{N_2}(f) \circ U = U \circ \rho_{N_1}(f)$ für alle $f \in C(X)$ mit $\sigma(N_1) = X = \sigma(N_2)$. Dann ist insbesondere $N_2 \circ U = U \circ N_1$ für $f = \text{id}$.

11.29 Folgerung. Jeder normaler Operator ist unitär äquivalent zu einer orthogonalen Summe zyklischer Operatoren.

Beweis. Es sei N ein normaler Operator auf H . Nach (10.25) ist H eine orthogonale Summe von abgeschlossenen invarianten Teilräumen H_j der Darstellung $\rho_N : C(\sigma(N)) \rightarrow L(H)$, sodaß die Spurdarstellung $\rho_j : f \mapsto \rho_N(f)|_{H_j}$ zyklisch ist und ρ_N vermöge der natürlichen Isometrie $U : \bigoplus_j H_j \rightarrow H$ unitär äquivalent zu

$\bigoplus_j \rho_j$ ist. Insbesondere ist also N wegen (11.28) via U unitär äquivalent zu $\bigoplus N_i$, wobei $N_i := N|_{H_i}$ ein zyklischer Operator ist. \square

Wie bei der Darstellungstheorie sollten wir also zuerst zyklische Operatoren studieren.

11.30 Proposition. *Ein normaler Operator ist genau dann zyklisch, falls ein positives Maß μ auf $\sigma(N)$ existiert, s.d. er unitär äquivalent ist zu dem Multiplikationsoperator N_μ auf $L^2(\mu)$ mit der Identität. Durch die Bedingung $U(h_0) = 1$, wobei h_0 einen fixen zyklischen Vektor bezeichnet ist die Äquivalenz U eindeutig bestimmt. Es ist dabei $\mu = P_{h_0, h_0}$, wobei P das Spektral-Maß von N ist.*

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Borel}_b(\sigma(\mathbb{N}), \mathbb{C}) & \longleftarrow & C(\sigma(N), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\rho_N} & L(H) & & H \\
 \downarrow \pi & & & & \cong \downarrow \text{konj}_U & & \downarrow U \\
 L^\infty(\mu) & \xrightarrow{M} & L(L^2(\mu)) & & & & L^2(\mu)
 \end{array}$$

Beweis. Nach Definition ist ein normaler Operator $N \in L(H)$ genau dann zyklisch, wenn die Darstellung $\rho_N : C(\sigma(N)) \rightarrow L(H)$ es ist. Nach Proposition (10.28) ist eine Darstellung der Abelschen C^* -Algebra $C(\sigma(N))$ genau dann zyklisch, wenn sie äquivalent zu der Darstellung M auf $L^2(\mu)$ für ein positives Borel-Maß μ auf $\sigma(N)$ ist. Dabei ist die unitäre Äquivalenz $U : L^2(\mu) \rightarrow H$ durch $U(1) = h_0$ bei vorgegebenem zyklischen Vektor $h_0 \in H$ eindeutig bestimmt. Nach Definition (11.28) ist das gleichbedeutend mit der unitären Äquivalenz von N mit $N_\mu = M_{\text{id}}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 \int f dP_{h_0, h_0} &= \langle \rho_N(f)h_0, h_0 \rangle = \langle \rho_N(f)U1, U1 \rangle = \langle U^* \rho_N(f)U1, 1 \rangle \\
 &= \langle U^{-1} \rho_N(f)U1, 1 \rangle = \langle M_f 1, 1 \rangle = \int f d\mu
 \end{aligned}$$

nach (10.28) und (11.11), also $P_{h_0, h_0} = \mu$. \square

11.31 Bemerkung. Unitär äquivalente N_μ 's. Um die unitären Äquivalenzklassen aller zyklischen Operatoren zu bestimmen, müssen wir entscheiden, für welche positiven Borel-Maße μ_j auf \mathbb{C} mit kompaktem Träger die Operatoren N_{μ_1} und N_{μ_2} unitär äquivalent sind.

Nehmen wir also an es gäbe eine surjektive Isometrie $U : L^2(\mu_1) \rightarrow L^2(\mu_2)$ mit $U N_{\mu_1} U^{-1} = N_{\mu_2}$:

Aus der Äquivalenz von N_{μ_1} und N_{μ_2} folgt, daß die beiden Spektren $\sigma(N_{\mu_j})$ nach (11.28) gleich sind, somit $K := \sigma(N_{\mu_j}) = \text{Träg}(\mu_j)$ nach (11.15), und ρ_{N_1} zu ρ_{N_2} unitär äquivalent ist vermöge U . Es sei $f := U(1) \in L^2(\mu_2)$, also $|f|^2 \in L^1(\mu_2)$. Dann ist $Ug = U M_g 1 = M_g U 1 = gf$ für alle $g \in C(K)$ und da U eine Isometrie ist gilt $\int |g|^2 d\mu_1 = \int |g|^2 |f|^2 d\mu_2$. Wegen der Eindeutigkeit der Riesz-Darstellung (7.18) ist also $\mu_1 = |f|^2 \mu_2$ mit $|f|^2 \in L^1(\mu_2)$.

Es stellt sich also die Frage, welche Maße μ_1 sich als $f \mu_2$ mit $f \in L^1(\mu_2)$ schreiben lassen.

11.32 Theorem von Radon-Nikodym. *Es sei (X, Ω, μ) ein σ -endlicher Maßraum und ν ein \mathbb{C} -wertiges Maß auf (X, Ω) . Dann sind äquivalent:*

- 1 $\forall B \in \Omega : (\mu(B) = 0 \Rightarrow \nu(B) = 0)$;
- 2 $\exists ! f \in L^1(X, \Omega, \mu) : \nu(B) = \int_B f d\mu$ für alle $B \in \Omega$.

Unter diesen äquivalenten Voraussetzungen heißt ν ABSOLUT-STETIG bezüglich μ , die Funktion f heißt die RADON-NIKODYM-ABLEITUNG, und wird auch mit $\frac{d\nu}{d\mu}$ bezeichnet. Weiters ist $f g \in L^1(\mu)$ für alle $g \in L^1(|\nu|)$ und es gilt:

$$\int g d\nu = \int g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Für einen Beweis siehe [He,S505].

Als Spezialfall lernt man z.B. in der Analysis 1, daß - falls die Ableitung g' von g Riemann-integrierbar ist - für Riemann-Stieltjes Integrale $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$ ist.

11.33 Proposition. Zwei positive Maße auf \mathbb{C} mit kompaktem Träger sind genau dann wechselseitig absolut-stetig (wir schreiben dann $\mu_1 \sim \mu_2$), falls die Multiplikations-Operatoren N_{μ_1} auf $L^2(\mu_1)$ und N_{μ_2} auf $L^2(\mu_2)$ unitär äquivalent sind.

Beweis. (\Leftarrow) Wir haben in (11.31) gezeigt, daß die unitäre Äquivalenz von N_{μ_1} und N_{μ_2} die wechselseitige absolut-Stetigkeit der Maße μ_1 und μ_2 impliziert.

(\Rightarrow) Es seien die Maße μ_1 und μ_2 wechselseitig absolut-stetig und $0 \leq f := \frac{d\mu_1}{d\mu_2} \in L^1(\mu_2)$ die Radon-Nikodym Ableitung. Falls $g \in L^1(\mu_1)$, so ist $f g \in L^1(\mu_2)$ und $\int f g d\mu_2 = \int g d\mu_1$. Ist also $g \in L^2(\mu_1)$, also $|g|^2 \in L^1(\mu_2)$ und $f |g|^2 \in L^1(\mu_2)$ und schließlich $\sqrt{f} |g| \in L^2(\mu_2)$ und $\|\sqrt{f} g\|_2 = \|g\|_2$, d.h. die Abbildung $U : L^2(\mu_1) \rightarrow L^2(\mu_2)$, $g \mapsto \sqrt{f} g$ ist eine Isometrie. Da $\frac{d\mu_1}{d\mu_2} \cdot \frac{d\mu_2}{d\mu_1} = 1$ ist, ist Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{f}}$ die Inverse zu U . Für $g \in L^2(\mu_2)$ ist

$$U N_{\mu_1} U^{-1} g = \sqrt{f} \cdot \text{id} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{f}} \right) \cdot g \text{id} \cdot g = N_{\mu_2} g$$

und somit gilt $U N_{\mu_1} U^{-1} = N_{\mu_2}$. \square

11.34 Theorem. Diagonalisierung normale Operatoren. Es sei N ein normaler Operator auf H . Dann existiert ein Maßraum (X, Ω, μ) und eine Funktion $f \in L^\infty(X, \Omega, \mu)$, so daß N unitär äquivalent zu dem Multiplikations-Operator mit f auf $L^2(X, \Omega, \mu)$ ist. Ist H separabel, so ist das Maß μ σ -endlich.

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

Beweis.

(11.29) $\Rightarrow \exists H_i < H$, abgeschlossen, invariant :

$$H \cong \bigoplus_i H_i \text{ und } N \sim \bigoplus_i N_i \text{ mit } N_i := N|_{H_i} \text{ zyklisch}$$

(11.30) $\Rightarrow \exists \mu_i$ Maß auf $X_i := \sigma(N_i) \subseteq \sigma(N) : N_i \sim N_{\mu_i}$

$$X := \bigsqcup_i X_i, \mathcal{B} := \{B \subseteq X : B \cap X_i \in \mathcal{B}(X_i)\} \mu(B) := \sum_i \mu_i(B \cap X_i)$$

$$U : L^2(X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow \bigoplus_i L^2(\mu_i), f \mapsto \bigoplus_i f|_{X_i} \text{ ist ein isometr. Iso.}$$

$$f := \bigsqcup_i \text{id}_{X_i}, \text{ d.h. } f|_{X_i} := \text{id}.$$

$\Rightarrow f(X) = \bigcup_i X_i \subseteq \sigma(N)$, d.h. f ist beschränkt

$$f^{-1}(U) \cap X_i = U \cap X_i \in \mathcal{B}(X_i) \text{ für alle offenen } U \subseteq X$$

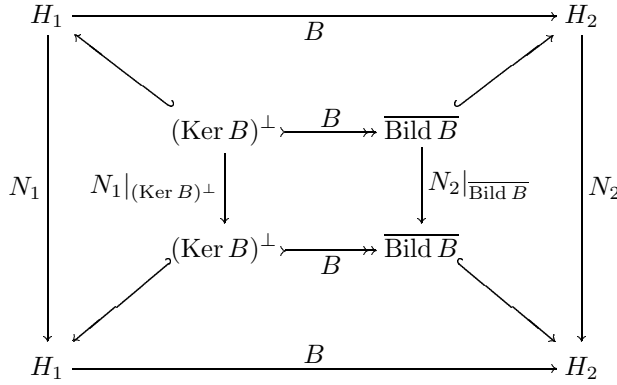
$\Rightarrow f$ ist meßbar $\Rightarrow f \in L^\infty(X, \mathcal{B}, \mu)$

$$\text{und } M_f \sim UM_fU^{-1} = \bigoplus_i N_{\mu_i} \sim \bigoplus_i N_i \sim N$$

Falls H separabel ist, so haben wir nur abzählbar viele H_i und, wegen $\mu(X_i) \leq \|h_i\| = 1$ für einen normierten zyklischen Vektor h_i , ist X somit σ -endlich. \square

11.41 Proposition. *Es seien $N_j \in L(H_j)$ normale Operatoren, und $B \in L(H_1, H_2)$ so, daß $BN_1 = N_2B$. Dann ist der Abschluß von Bild B ist N_2 -invariant, $(\text{Ker } B)^\perp$ ist N_1 -invariant und $N_1|_{(\text{Ker } B)^\perp}$ und $N_2|_{\overline{\text{Bild } B}}$ sind unitär äquivalent.*

Beweis.



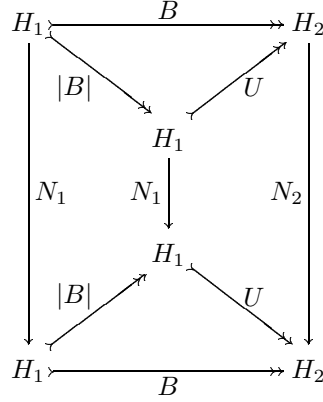
Wie im Sublemma in (10.32.4) zeigen wir die folgenden 2 Punkte.

(1) Für $h_1 \in H_1$ ist $N_2Bh_1 = BN_1h_1 \in \text{Bild } B$. Also ist auch der Abschluß von Bild B N_2 -invariant.

(2) Für $h_1 \in \text{Ker } B$ ist $BN_1h_1 = N_2Bh_1 = N_20 = 0$, also ist $\text{Ker } B$ N_1 -invariant und nach dem Fugledge-Putnam Theorem auch N_1^* -invariant, damit ist aber $(\text{Ker } B)^\perp$ ebenfalls N_1 -invariant.

(3) Da $B((\text{Ker } B)^\perp) \subseteq \overline{\text{Bild } B}$ können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß $\text{Ker } B = \{0\}$ und daß Bild B dicht liegt. Es sei $B = U|B|$ die Polarzerlegung (10.19) von

B mit dem positiven Operator $|B| = \sqrt{B^*B}$. Es gilt $\text{Bild } U = \overline{\text{Bild } B} = H_2$ sowie $(\text{Bild } |B|)^\perp = \text{Ker } |B| = \text{Ker } U = \text{Ker } B = \{0\}$ und somit ist $\text{Bild } |B|$ dicht in H_1 und $U : H_1 \rightarrow H_2$ eine surjektive Isometrie.



Weiters gilt:

$$\begin{aligned} N_2 B = B N_1 &\Rightarrow B^* N_2^* = N_1^* B^* \\ &\stackrel{(11.39)}{\Rightarrow} B^* N_2 = N_1 B^* \\ &\Rightarrow N_1 B^* B = B^* N_2 B = B^* B N_1 \end{aligned}$$

Also ist $|B|^2 = B^*B \in \{N_1\}^k$ und somit auch $|B| = \sqrt{|B|^2} \in \{B^*B\}^{kk} \subseteq (\{N_1\}^k)^{kk} = \{N_1\}^k$ nach (11.14). Folglich gilt

$$N_2 U |B| = N_2 B = B N_1 = U |B| N_1 = U N_1 |B|,$$

d.h. $N_2 U = U N_1$ auf den dichten Bild von $|B|$, also überall. \square

11.42 Folgerung. *Ähnliche normale Operatoren sind unitär äquivalent.* \square

Dabei heißen zwei Operatoren N_1 und N_2 ÄHNLICH, falls es eine invertierbare lineare Abbildung B gibt mit $N_2 B = B N_1$.

11.35 Folgerung. *Es sei A eine Teil- C^* -Algebra von $L(H)$ die zusätzlich abgeschlossen ist bezüglich der SOT. Dann ist A der Norm-Abschluß des Teilraums der von den orthogonal-Projektionen in A erzeugt wird.*

Beweis. Wir müssen zeigen, daß sich jedes $a \in A$ in der Operatornorm durch linear-Kombinationen von orthogonal-Projektionen P aus A approximieren läßt. Da A eine C^* -Algebra ist, sind mit $a \in A$ auch die Hermite'schen Operatoren $\Re(a) = \frac{1}{2}(a + a^*)$ und $\Im(a) = \frac{1}{2i}(a - a^*)$ in A . Also genügt es Hermite'sche Elemente $a \in A$ zu approximieren. Nach (11.26) konvergieren die Riemann-Stieltjes-Summen $\sum_j t_{j-1}(p_{t_j} - p_{t_{j-1}})$ gegen a , wobei $p_t := P((-\infty, t))$ ist. Wir müssen also nur zeigen, daß die orthogonal-Projektion $p_t \in A$ ist. Es ist die charakteristische Funktion $\chi_{(-\infty, t)}$ ein punktwiser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge stetiger Funktionen $f_n \in C(\mathbb{R})$. Also konvergiert $A \supseteq C^*(N) \ni f_n(N) \rightarrow \chi_{(-\infty, t)}(N) = p_t$ nach dem Satz über dominierte Konvergenz in der SOT, und somit ist $p_t \in A$. \square

Kommutanten und von Neumann Algebren

Unser Ziel ist es für normale Operator $N \in L(H)$ auf Hilbert-Räumen H mit Spektral-Maß P , den Kern und das Bild des Funktionenkalküls

$$\rho_N : \text{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C}) \rightarrow \{N\}^{kk} \subseteq L(H), \quad f \mapsto f(N) := \int_{\sigma(N)} f dP$$

bestimmen um nach Herausfaktorisieren des Kernes eine treu Darstellung (Funktionenkalkül) zu erhalten. Da der Funktionskalkül auch bezüglich der WOT stetig ist, sollten wir diese Topologie genauer untersuchen.

11.36 Lemma. Bzgl. Operortopologien stetige Funktionale. *Es sei $\ell : L(H) \rightarrow \mathbb{C}$ ein lineares Funktional. Dann sind äquivalent:*

- 1 *Das Funktional ℓ ist SOT-stetig;*
- 2 *Das Funktional ℓ ist WOT-stetig;*
- 3 *Es gibt endlich viele h_j und k_j in H mit $\ell(T) = \sum_j \langle Th_j, k_j \rangle$.*

Beweis. $((1) \Leftarrow (2) \Leftarrow (3))$ ist trivial.

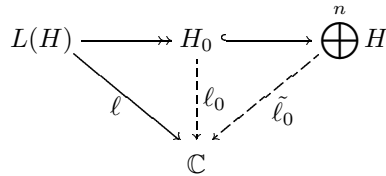
$((1) \Rightarrow (3))$ Sei also ℓ bezüglich SOT stetig. Dann existieren endlich viele h_j mit $|\ell(T)| \leq \sum_{j=1}^n \|Th_j\|$ für alle $T \in L(H)$. Wegen der Cauchy-Schwarz Ungleichung (6.6) ist

$$\sum_{j=1}^n \|Th_j\| = \sum_{j=1}^n \|Th_j\| \leq \sqrt{n} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \|Th_j\|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n \|T(\sqrt{n} h_j)\|^2 \right)^{1/2}.$$

Ersetzt man h_j durch $\sqrt{n} h_j$, dann gilt für die Seminorm

$$p(T) := \left(\sum_{j=1}^n \|Th_j\|^2 \right)^{1/2},$$

daß $|\ell(T)| \leq p(T)$.



Es sei die lineare Abbildung $\pi : L(H) \rightarrow \bigoplus^n H$ gegeben durch $\pi(T) := \bigoplus_j Th_j$ und H_0 ihr Bild, dann ist $p(T) = \|\pi(T)\|$. Wegen der Implikation $\pi(T) = 0 \Rightarrow 0 = p(T) \geq |\ell(T)| \Rightarrow \ell(T) = 0$ faktorisiert ℓ über π zu einem linearen Funktional $\ell_0 : H_0 \rightarrow \mathbb{C}$ und es gilt $|\ell_0(\pi(T))| = |\ell(T)| \leq p(T) = \|\pi(T)\|$, also ist ℓ_0 nach (7.4) zu einem stetigen linearen Funktional auf $\bigoplus_j H_j$ erweiterbar und es gibt einen Vektor $\bigoplus_j k_j$ im Hilbertraum $\bigoplus_j H_j$ mit

$$\ell(T) = \ell_0(\pi(T)) = \langle \bigoplus_j Th_j, \bigoplus_j k_j \rangle = \sum_j \langle Th_j, k_j \rangle. \quad \square$$

11.37 Folgerung. Abschluß bzgl. Operatortopologien. *Es sei A eine konvexe Teilmenge von $L(H)$, dann stimmt der WOT-Abschluß mit dem SOT-Abschluß von A überein.*

Beweis. (7.24). \square

11.38 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\Delta^n : L(H) \rightarrow L(\bigoplus^n H)$ den C^* -Algebra-Homomorphismus

$$\Delta^n : T \mapsto \bigoplus_{j=1}^n T (: \bigoplus_{j=1}^n h_j \mapsto \bigoplus_{j=1}^n Th_j).$$

Lemma. *Es sei A eine Teilalgebra mit 1 von $L(H)$. Dann ist der SOT-Abschluß von A gegeben durch all jene $T \in L(H)$, so daß für jedes endliche n jeder abgeschlossene $\Delta^n(A)$ -invariante Teilraum von $\bigoplus_{j=1}^n H$ auch $\Delta^n T$ -invariant ist.*

Beweis. (\subseteq) Sei $T \in L(H)$ ein Operator im SOT-Abschluß von A . Dann existiert ein Netz $T_i \in A$, welches punktweise gegen T konvergiert. Sei nun E ein abgeschlossener $\Delta^n(A)$ -invarianter Teilraum von $\bigoplus_{j=1}^n H$. Dieser ist dann insbesondere $\Delta^n T_i$ -invariant und damit auch $\Delta^n T$ -invariant.

(\supseteq) Es erfülle $T \in L(H)$ die Bedingung über die invarianten Teilräume. Es seien $h_j \in H$ und $\varepsilon > 0$. Wir müssen die Existenz eines $S \in A$ zeigen, mit $\|(T-S)h_j\| < \varepsilon$ für $j = 1, \dots, n$. Sei dazu E der Abschluß des Teilraums $\Delta^n(A)(\bigoplus_j h_j) \subseteq \bigoplus_{j=1}^n H$. Da A eine Algebra ist, ist E ein $\Delta^n(A)$ -invarianter Teilraum, also nach Voraussetzung auch $\Delta^n T$ -invariant. Da $1 \in A$, ist $\bigoplus_j h_j \in E$ und somit $\Delta^n T(\bigoplus_j h_j) = \bigoplus_j Th_j \in E$, und da $\Delta^n(A)$ dicht liegt in E , existiert ein $S \in A$ mit $\sum_j \|(T-S)h_j\|^2 < \varepsilon^2$. \square

11.43a Bemerkung. Für $A \subseteq L(H)$ ist die Kommutante A^k SOT-abgeschlossen wegen (11.38), siehe (11.43).

Falls A bezüglich $*$ abgeschlossen ist, so ist A^k eine C^* -Algebra:

Wir müssen nur die $*$ -Abgeschlossenheit beweisen. Sei $b \in A^k$ und $a \in A$. Dann ist $b^*a = (a^*b)^* = (ba^*)^* = ab^*$, da $a^* \in A$, also $b^* \in A^k$.

Weiters ist eine $*$ -geschlossene Teilmenge A genau dann eine maximal Abel'sch Teilmenge (oder auch C^* -Algebra), wenn $A = A^k$ gilt:

(\Leftarrow) Sei $A \subseteq B$ mit Abel'schen B . Dann ist $B \subseteq B^k \subseteq A^k = A$, also A maximal.

(\Rightarrow) Es sei A Abel'sch, also $A \subseteq A^k$. Da A bzgl. $*$ abgeschlossen ist, ist A^k ein C^* -Algebra und es genügt zu zeigen, daß $\Re(A^k) \subseteq A$. Sei also $x \in A^k$ Hermite'sch und A_x die von A und x erzeugte C^* -Algebra, d.h. A_x ist der Norm-Abschluß der kommutativen Algebra $\{\sum_{k=1}^n a_k x^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in A\}$ der Polynome mit Koeffizienten in A , ausgewertet bei x . Dann ist auch $A_x \supseteq A$ Abelsch und somit wegen der Maximalität $x \in A_x = A$.

11.44 Lemma. *Es sei $A \subseteq L(H)$. Dann gilt*

$$A^{kk} = (\Delta^n)^{-1}((\Delta^n A)^{kk})$$

Beweis. Es gilt:

$$t = (t_{i,j})_{i,j} \in (\Delta^n A)^k \Leftrightarrow \forall a \in A \forall i, j : t_{i,j} a = a t_{i,j} \Leftrightarrow \forall i, j : t_{i,j} \in A^k,$$

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

denn

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \cdots & t_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t_{1,1}a & \cdots & t_{1,n}a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1}a & \cdots & t_{n,n}a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \cdots & t_{n,n} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} at_{1,1} & \cdots & at_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ at_{n,1} & \cdots & at_{n,n} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \Delta^n a \in (\Delta^n A)^{kk} &\Leftrightarrow \forall t \in (\Delta^n A)^k : t \Delta^n(a) = \Delta^n(a) t \Leftrightarrow \forall t_{i,j} \in A^k : t_{i,j} a = a t_{i,j} \\ &\Leftrightarrow a \in A^{kk}. \quad \square \end{aligned}$$

11.45 Doppel-Kommutanten Theorem, von Neumann 1929. *Es sei A eine Teil- C^* -Algebra von $L(H)$, dann ist A^{kk} der Abschluß von A bezüglich der SOT oder auch der WOT, d.h.*

$$A^{kk} = \overline{A}^{SOT} = \overline{A}^{WOT}.$$

Beweis. (\subseteq)

$$\begin{aligned} T \in A^{kk} &\stackrel{(11.44)}{\Leftrightarrow} \Delta^n T \in (\Delta^n A)^{kk} \\ &:\Leftrightarrow \Delta^n T P = P \Delta^n T \text{ für alle } P \in (\Delta^n A)^k \\ &\Rightarrow \Delta^n T P = P \Delta^n T \text{ für alle ortho-Projektionen } P \in (\Delta^n A)^k \\ &\stackrel{(10.32.4)}{\Leftrightarrow} \text{Jeder abgeschlossene } \Delta^n A\text{-invariante Teilraum ist } \Delta^n T\text{-invariant} \\ &\stackrel{(11.38)}{\Leftrightarrow} T \in \overline{A}^{SOT} \stackrel{(11.37)}{=} \overline{A}^{WOT} \end{aligned}$$

(\supseteq) Als Kommutante ist $A^{kk} \supseteq A$ abgeschlossen bezüglich SOT und nach (11.12) oder nach (11.37) auch bezüglich WOT, also ist $\overline{A}^{WOT} = \overline{A}^{SOT} \subseteq A^{kk}$. \square

11.46 Definition. Unter einer VON NEUMANN ALGEBRA A in $L(H)$ versteht man eine Teil- C^* -Algebra, mit $A^{kk} = A$, d.h. sie ist abgeschlossen bezüglich der SOT (oder auch der WOT).

Es ist folglich $\{N\}^{kk}$ die kleinste (Abel'sche) von Neumann Algebra, die den normalen Operator N enthält. Dies ist nach (11.45) der WOT-Abschluß von $C^*(N)$ oder auch von $\{p(N, N^*) : p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\}$, da dies dicht in $C^*(N)$ liegt.

11.47 Proposition. *Es sei (X, Ω, μ) ein σ -endliches Maß und*

$$A_\mu := \{M_f : f \in L^\infty(\mu)\} \subseteq L(L^2(\mu)),$$

die von den Multiplikations-Operatoren erzeugte Teilalgebra. Dann ist $A_\mu = A_\mu^k$, also eine Abelsche von-Neumann-Algebra in $L(L^2(\mu))$.

Falls μ ein endliches Maß ist, so ist die Darstellung $f \mapsto M_f$, $L^\infty(\mu) \rightarrow A_\mu$ ein Homöomorphismus bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ und der WOT auf A_μ .

Es sei μ ein positives Borelmaß auf \mathbb{C} mit kompakten Träger. Dann ist $\{N_\mu\}^k = (A_\mu)^k$ und somit $\{N_\mu\}^{kk} = A_\mu$.

$$L^\infty(\mu) \xrightarrow[\cong]{M} A_\mu = \{N_\mu\}^{kk} \hookrightarrow L(L^2(\mu))$$

Beweis. ($A_\mu = (A_\mu)^k$) Da A_μ Abelsch ist, ist $A_\mu \subseteq A_\mu^k$. Sei umgekehrt $a \in A_\mu^k$. Wir müssen zeigen, daß $a = M_f$ ist für ein $f \in L^\infty(\mu)$. O.B.d.A. sei $a \neq 0$.

Sei vorerst $\mu(X) < \infty$. Dann ist $1 \in L^2(\mu)$. Es ist $f := a(1) \in L^2(\mu)$. Für $g \in L^\infty(\mu) \subseteq L^2(\mu)$ gilt $a(g) = a(M_g 1) = M_g(a 1) = M_g f = g f$. Also ist $\|f g\|_2 = \|a(g)\|_2 \leq \|a\| \|g\|_2$. Es sei $X_0 := \{x \in X : |f(x)| \geq 2\|a\|\}$. Das vorige Argument für $g := \chi_{X_0}$ liefert

$$\|a\|^2 \mu(X_0) = \|a\|^2 \|g\|_2^2 \geq \|a(g)\|_2^2 = \|f g\|_2^2 = \int_{X_0} \|f\|^2 d\mu \geq 4 \|a\|^2 \mu(X_0).$$

Also ist $\mu(X_0) = 0$, d.h. $[f] \in L^\infty(\mu)$. Da $a = M_f$ auf dem dichten Teilraum $L^\infty(\mu)$ von $L^2(\mu)$ gilt, ist $a = M_f$ auf ganz $L^2(\mu)$.

Sei nun $X = \bigsqcup_n X_n$ mit $\mu(X_n) < \infty$. Für B mit $\mu(B) < \infty$ ist $L^2(\mu|_B) \cong \{f \in L^2(\mu) : f = 0 \text{ außerhalb } B\}$ a -invariant, denn für $f \in L^2(\mu|_B)$ ist $a(f) = a(\chi_B f) = \chi_B(a(f)) \in L^2(\mu|_B)$ wegen $a \in (A_\mu)^k$. Es sei a_B die Einschränkung von a auf $L^2(\mu|_B)$. Nach dem ersten Teil existiert ein $f_B \in L^\infty(\mu|_B)$ mit $a_B = M_{f_B}$. Wir schreiben f_n für f_{X_n} und definieren $f := \bigsqcup_n f_n$, d.h. $f|_{X_n} := f_{X_n}$. Dann ist f eine wohldefinierte meßbare Funktion auf X und $\|f_n\|_\infty = \|M_{f_n}\| = \|a_{X_n}\| \leq \|a\|$. Also ist $\|f\|_\infty \leq \|a\|$ und offensichtlich ist $a = M_f$.

Sei nun μ wieder ein endliches Maß.

(Injektivität) Es ist $f \mapsto M_f$ injektiv, da $1 \in L^2(\mu)$.

(Homöomorphie) Es sei $f_i \in L^\infty(\mu)$ ein Netz. Dann konvergiert dieses genau dann gegen 0 in der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$, falls für alle $g \in L^1$ gilt: $\int f_i g d\mu \rightarrow 0$. Diese g sind genau die Produkte $h_1 \cdot \overline{h_2}$ mit $h_1, h_2 \in L^2(\mu)$, denn nach der Hölderungleichung ist $h_1 \cdot \overline{h_2} \in L^1(\mu)$ und umgekehrt sind $h_2 := \sqrt{|g|}$ und $h_1 := \text{sign}(g) h_2$ beide in $L^2(\mu)$. Also ist die Konvergenzaussage äquivalent zu $\langle M_{f_i} h_1, h_2 \rangle = \int f_i h_1 \overline{h_2} d\mu \rightarrow 0$, d.h. zu $M_{f_i} \rightarrow 0$ in der WOT auf $L(L^2(\mu))$.

($\{N_\mu\}^k = A_\mu = (A_\mu)^k$) Aus $N_\mu \in A_\mu$ folgt $(A_\mu)^k \subseteq \{N_\mu\}^k$. Umgekehrt sei $T \in \{N_\mu\}^k$, nach (11.39) ist $T N_\mu^* = N_\mu^* T$. Also gilt für jedes Polynom $p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$, daß $T M_p = M_p T$, denn $M_p = p(N_\mu, N_\mu^*)$. Nach (11.10) ist $C(X)$, und damit auch die Polynome, dicht in $\sigma(C(X)'', C(X)')$ also auch bezüglich $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$, da $L^1(\mu) \subseteq C(X)'$ vermöge $f \mapsto f \mu$, vgl. mit dem Beweis von (11.13), und somit zu $f \in L^\infty$, $f_1, \dots, f_n \in L^1$ und $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{f} \in C(X)''$ mit $\tilde{f}|_{L^1} = f$ und somit ein $g \in C(X)$ mit $|\int f f_i d\mu - \int g f_i d\mu| < \varepsilon$ ist. Aus der Stetigkeitsaussage folgt somit, daß $T \in A_\mu^k$ ist. \square

Bemerkung. Wir wollen nun Funktionen-Kalküls (11.14)

$$\rho_N : \text{Borel}_b(\sigma(N)) \rightarrow L(H), \quad f \mapsto \int_{\sigma(N)} f dP$$

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

so modifizieren, daß er eine Bijektion wird. Dazu versuchen wir zuerst ein Borel-Maß μ auf $\sigma(N)$ finden, so daß ρ_N über die Quotientenabbildung $\pi : \text{Borel}_b(\sigma(N), \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mu)$ wie folgt zu einer injektiven Abbildung faktorisiert

$$\begin{array}{ccc} \text{Borel}_b(\sigma(N)) & \xrightarrow{\pi} & L^\infty(\mu) \\ & \searrow \rho_N & \swarrow \\ & & L(H) \end{array}$$

d.h. es müßte $\text{Ker } \rho = \{f : f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}\}$ sein, und wegen $P = \rho \circ \chi : \mathcal{B}(\sigma(N)) \rightarrow \text{Borel}_b(\sigma(N)) \rightarrow L(H)$ müßte zumindest

$$\begin{aligned} \{B \in \mathcal{B}(\sigma(N)) : P(B) = 0\} &= \text{Ker}(P) = \text{Ker}(\rho \circ \chi) = \chi^{-1}(\text{Ker}(\rho)) \\ &= \chi^{-1}(\{f : f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}\}) \\ &= \{B \in \mathcal{B}(\sigma(N)) : \mu(B) = 0\} \end{aligned}$$

sein. Wir definieren folglich:

11.48 Definition. Ein SKALAR-WERTIGES SPEKTRAL-MASS für einen normalen Operator N ist ein Maß $\mu \geq 0$ auf $\sigma(N)$, welches auf genau jenen Borel-Mengen verschwindet wo das Spektral-Maß von N es tut.

Eine Möglichkeit Borel-Maße zu finden ist eine Vektor $h \in H$ zu nehmen und $\mu_h := P_{h,h}$ zu betrachten. Für diese gilt

$$\mu_h(B) := P_{h,h}(B) = \langle P(B)h, h \rangle = \|P(B)h\|^2.$$

Folglich ist μ_h skalar-wertiges Spektral-Maß genau dann, wenn $P(B) = 0$ aus $P(B)h = 0$ für alle $B \in \mathcal{B}(\sigma(N))$ folgt. Dies führt zur Definition:

Es sei $A \subseteq L(H)$. Dann heißt ein $h \in H$ SEPARIERENDER VEKTOR für A , falls der einzige $a \in A$ mit $ah = 0$ der Operator $a = 0$ ist, d.h. falls die Darstellung $A \subseteq L(H)$ auf h injektiv wirkt ($a_1h = a_2h \Rightarrow a_1 = a_2$).

Es heißt h SEPARIERENDER VEKTOR für den normalen Operator N , falls h separierend ist für die von N erzeugte von Neumann-Algebra $\{N\}^{kk}$.

11.52 Lemma. Es sei $h \in H$ ein separierender Vektor für einen normalen Operator N und P dessen Spektral-Maß. Dann ist das Maß $\mu_h := P_{h,h}$ ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N .

Beweis. h separierend für $N \Leftrightarrow h$ separierend für $\{N\}^{kk} \Rightarrow$ (wegen (11.40)) $\forall B \in \mathcal{B}(\sigma(N))$: $(\mu_h(B) = \|P(B)h\|^2 = 0 \Rightarrow P(B) = 0)$, d.h. μ_h ist ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N . \square

Zyklische versus separierende Vektoren.

- 1 Für $A = L(H)$ sind alle $h \neq 0$ zyklische Vektoren, aber kein h ist separierend.
- 2 Falls $A = \mathbb{C}$ und $\dim H > 1$ dann besitzt A keine zyklische Vektoren, aber jeder $h \neq 0$ ist separierend.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin die Existenz separierender Vektoren zu beweisen.

11.49 Lemma. *Es sei h ein zyklischer Vektor für A . Dann ist h ein separierender Vektor für A^k .*

Beweis. $b \in A^k$, $bh = 0 \Rightarrow \text{Ker } b$ ist A -invariant, $h \in \text{Ker } b \Rightarrow Ah \in \text{Ker } b \Rightarrow \text{ker } b = H$, da Ah dicht liegt $\Rightarrow b = 0$, d.h. h ist separierend. \square

11.50 Folgerung. *Es sei $A \subseteq L(H)$ Abel'sch. Dann ist jeder zyklische Vektor von A auch separierend.*

Beweis. Da A Abelsch ist, gilt $A \subseteq A^k$ und weil h separierend für A^k ist, so ist er es auch für die Teilmenge A . \square

11.51a Folgerung. *Es sei H separabel. Dann besitzt jede Abelsche Teil- C^* -Algebra von $L(H)$ einen separierenden Vektor.*

Beweis. Nach dem Zorn'schen Lemma ist A in einer maximalen Abelschen C^* -Algebra enthalten. Da ein separierender Vektor auch separierend für jede Teilmenge ist, können wir also o.B.d.A. annehmen, daß A maximal Abelsch und somit $A = A^k$ ist nach (11.43a).

Nach (10.25) existiert eine orthogonale Zerlegung $H = \bigoplus_n H_n$ in A -invariante Teilräume H_n mit zyklischen Einheits-Vektoren $h_n \in H_n$. Dabei ist die Index-Menge abzählbar (also o.B.d.A. \mathbb{N}), da H separabel ist. Es sei $h_\infty := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} h_n$. Dann ist $\|h_\infty\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Es sei P_n die orthogonal-Projektion auf H_n . Da A jedes H_n invariant läßt, ist $P_n \in A^k = A$ nach (10.34) und $\overline{Ah_\infty} \supseteq \overline{AP_n h_\infty} = \overline{Ah_n} = H_n$. Also ist $\overline{Ah_\infty} = H$, d.h. h_∞ ein zyklischer Vektor von A und nach (11.50) auch separierend. \square

11.51 Folgerung. *Es sei $N \in L(H)$ normal und H separabel, dann existiert ein separierender Vektor für N .*

Beweis. Da $\{N\}^{kk}$ nach (11.43) Abelsch ist, besitzt sie nach (11.51a) einen separierenden Vektor h . \square

Diese Folgerung ist der Grund, daß wir von nun an voraussetzen werden, daß **alle vorkommenden Hilberträume separabel sind.**

11.53 Lokalisierung des Funktionen-Kalküls. Es sei H separabel und $N \in L(H)$ normal. Für $h \in H$ sei $\mu_h := P_{h,h}$ und H_h der Abschluß von $\{N\}^{kk} h$ in H . Dieser ist offensichtlich N -invariant und somit ist die Einschränkung von N ein Operator $N_h := N|_{H_h} \in L(H_h)$.

$$\begin{array}{ccccc} \{N\}^{kk} h & \hookrightarrow & H_h & \hookrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow N_h & & \downarrow N \\ \{N\}^{kk} h & \hookrightarrow & H_h & \hookrightarrow & H \end{array}$$

Lemma. *Wir haben folgendes kommutatives Diagramm von $*$ -Homomorphismen:*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Borel}_b(\sigma(N_h)) & \xrightarrow{\rho_{N_h}} & \{N_h\}^{kk} & \hookrightarrow & L(H_h) \\ \downarrow \pi & & \text{konj}_{U_h} \downarrow \cong & & \text{konj}_{U_h} \downarrow \cong, (11.30) \\ L^\infty(\mu_h) & \xrightarrow{M} & \{N_{\mu_h}\}^{kk} & \hookrightarrow & L(L^2(\mu_h)) \end{array}$$

— Andreas Kriegel, Universität Wien —

Dabei ist $U_h : H_h \rightarrow L^2(\mu_h)$ die eindeutige bijektive Isometrie, die N_h und N_{μ_h} miteinander vertauscht und h auf 1 abbildet. Weiters ist $\text{konj}_{U_h} : a \mapsto U_h a U_h^{-1}$. Die mit \rightarrow bezeichneten Abbildungen sind surjektiv und stetig und jene mit \cong sogar Homomorphismen bzgl. $\sigma(\text{Borel}_b, M)$, $\sigma(L^\infty, L^1)$ und den WOT'en.

Beweis. (h ist zyklischer Vektor für N_h) Da $\{N\}^{kk}$ nach (11.45) der Abschluß von $C^*(N)$ in der SOT ist, ist $H_h := \overline{\{N\}^{kk}h} \subseteq \overline{C^*(N)h}$. Offensichtlich ist $C^*(N)h \subseteq \overline{C^*(N_h)h}$, denn für $a \in C^*(N)$ existieren Polynome $p_i \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ mit $p_i(N, N^*) \rightarrow a$ und somit ist $ah = \lim_i p_i(N, N^*)h = \lim_i p_i(N_h, N_h^*)h \in \overline{C^*(N_h)h}$, also ist $C^*(N)h$ dicht in H_h , d.h. h ist ein zyklischer Vektor der Einschränkung N_h .

(Untere Pfeil ist Homomorphismus) Nach (11.30) ist μ_h ein Maß auf $\sigma(N_h)$, sodaß N_h unitär äquivalent zu N_{μ_h} auf $L^2(\mu_h)$ ist, wobei die bijektive Isometrie $U = U_h : H_h \rightarrow L^2(\mu_h)$ durch $U_h(h) := 1$ eindeutig bestimmt ist. Konjugation $a \mapsto U \circ a \circ U^{-1}$ liefert also einen *-Isomorphismus $L(H_h) \rightarrow L(L^2(\mu_h))$, welcher N_h auf N_{μ_h} und damit $\{N_h\}^{kk}$ auf $\{N_{\mu_h}\}^{kk}$ -abbildet. Dieser ist offensichtlich auch ein Homomorphismus bzgl. der WOT'en.

(Rechte Pfeil ist Homomorphismus) Nach (11.47) ist $f \mapsto M_f$ eine surjektive Isometrie $L^\infty \rightarrow A_\mu = \{N_{\mu_h}\}^{kk}$ und ein Homomorphismus bzgl. $\sigma(L^\infty, L^1)$ und der WOT.

(Kommutativität) Schließlich ist $\pi : f \mapsto [f]$ stetig bzgl. $\sigma(\text{Borel}_b, M(\sigma(N_h)))$ und $\sigma(L^\infty, L^1)$, denn jedes $g \in L^1$ definiert ein Maß $g\mu : f \mapsto \int f g d\mu_h$. Somit besitzen ρ_{N_h} und $\text{konj}_{U_h}^{-1} \circ M \circ \pi$ beide die charakterisierenden Eigenschaften des Funktionen-Kalküls (11.14), stimmen also überein, d.h. wir haben obiges kommutative Diagramm vollständig gezeigt. \square

11.54 Lemma. *Es sei $e \in H$ so, daß μ_e ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N ist. Die bezüglich μ_e absolut-stetigen Maße μ sind genau die Maße μ_h für $h \in H$.*

Beweis. (\Leftarrow) Aus $\mu_e(B) = 0$ folgt $P(B) = 0$, da μ_e ein skalar-wertiges Spektralmaß ist, und somit ist auch $\mu_h(B) = \langle P(B)h, h \rangle = \|P(B)h\|^2 = 0$.

(\Rightarrow) Nach dem Satz (11.32) von Radon-Nikodym existiert $f := \sqrt{\frac{d\mu}{d\mu_e}} \in L^2(\mu_e)$. Es sei $h := U_e^{-1}f \in H_e$. Für jede Borel-Menge B gilt:

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int \chi_B d\mu \stackrel{(11.34)}{=} \int \chi_B f^2 d\mu_e = \langle M_{\chi_B} f, f \rangle \stackrel{(11.30)}{=} \langle U_e^{-1} M_{\chi_B} f, U_e^{-1} f \rangle \\ &\stackrel{(11.53)}{=} \langle \rho(\chi_B) U_e^{-1} f, U_e^{-1} f \rangle = \langle P(B)h, h \rangle = \mu_h(B). \quad \square \end{aligned}$$

11.55 Lemma. *Wir haben folgendes kommutatives Diagram bestehend aus *-Homomorphismen:*

$$\begin{array}{ccc} \text{Borel}_b(\sigma(N)) & \xrightarrow{\rho_N} & \{N\}^{kk} \\ \text{inkl}^* \downarrow & & \rho_h \downarrow \\ \text{Borel}_b(\sigma(N_h)) & \xrightarrow{\rho_{N_h}} & \{N_h\}^{kk} \end{array}$$

Dabei ist $a \mapsto \rho_h(a) := a|_{H_h}$ WOT-stetig und alle Abbildungen sind surjektiv.

Beweis. ($\rho_h : \{N\}^{kk} \rightarrow L(H_h)$ ist wohldefiniert) Dies ist offensichtlich, da $H_h = \{N\}^{kk}h$ offensichtlich $\{N\}^{kk}$ -invariant ist.

(ρ_h ist WOT-stetig) Falls $a_i \rightarrow a_\infty$ in $\{N\}^{kk}$ bezüglich der WOT, dann gilt $\langle a_i v, w \rangle \rightarrow \langle a_\infty v, w \rangle$ für alle $v, w \in H$ also insbesondere für jene in $H_h \subseteq H$, d.h. $\rho_h(a_i) = a_i|_{H_h} \rightarrow a_\infty|_{H_h} = \rho_h(a_\infty)$ in $L(H_h)$ bzgl. der WOT.

($\rho_h(\{N\}^{kk}) \subseteq \{N_h\}^{kk}$) Nach (11.46) ist $\{N\}^{kk} = \overline{\{p(N, N^*) : p \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]\}}^{WOT}$, d.h. zu $a \in \{N\}^{kk}$ existiert ein Netz solcher Polynome p_i mit $p_i(N, N^*) \rightarrow a$ bzgl. WOT. Nach dem vorigen Punkt gilt $\{N_h\}^{kk} \ni p_i(N_h, N_h^*) = \rho_h(p_i(N, N^*)) \rightarrow \rho_h(a)$ bzgl. WOT, also ist $\rho_h(a) \in \{N_h\}^{kk}$ nach (11.45).

(Diagramm kommutiert) Es sei $f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))$ Nach (11.10) (vgl. mit dem Beweis von (11.13)) existiert ein Netz von Polynomen $p_i \in \mathbb{C}[z, \bar{z}]$ mit $\int p_i d\mu \rightarrow \int f d\mu$ für alle $\mu \in M(\sigma(N))$. Da $\sigma(N_h) \subseteq \sigma(N)$ gilt das auch für alle $\mu \in M(\sigma(N_h))$. Nach (11.14) konvergiert sowohl $p_i(N, N^*) \rightarrow f(N)$ als auch $p_i(N_h, N_h^*) \rightarrow f(N_h)$ bezüglich der WOT. Wegen $p_i(N_h, N_h^*) = \rho_h(p_i(N, N^*)) \rightarrow \rho_h(f(N))$ bzgl. der WOT gilt somit $\rho_h(f(N)) = f(N_h)$.

(Surjektivität unten) Da der rechte vertikale Morphismus ist nach (11.53) die surjektive Zusammensetzung $\text{Borel}_b(\sigma(N_h)) \rightarrow L^\infty(\mu_h) \rightarrow A_\mu = \{N_\mu\}^{kk} \rightarrow \{N_h\}^{kk}$.

(Surjektivität rechts) Wegen der Kommutativität des Diagramms und weil der Weg über die rechte obere Ecke surjektiv ist, ist auch ρ_h surjektiv.

(Surjektivität oben) Es sei $A := \{f(N) : f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))\}$. Dann ist A nach (11.14) und (10.23) eine C^* -Algebra mit $C^*(N) \subseteq A \subseteq \{N\}^{kk}$ nach (11.40). Wegen (11.46) genügt es zu zeigen, daß A WOT-abgeschlossen ist. Sei dazu $f_i \in \text{Borel}_b(\sigma(N))$ ein Netz mit $f_i(N) \rightarrow a$ in der WOT. Wegen (11.46) ist $a \in \{N\}^{kk}$. Nach obigen gilt $f_i(N_h) \rightarrow a|_{H_h}$ in der WOT für alle $h \in H$. Also gilt wegen der Surjektivität von ρ_{N_h} , daß für jedes $h \in H$ ein $f_h \in \text{Borel}_b(\mathbb{C})$ existiert mit $a|_{H_h} = f_h(N_h)$. Aus $f_i(N_h) \rightarrow a|_{H_h} = f_h(N_h)$ in der WOT, folgt nach (11.47) daß $f_i \rightarrow f_h$ bezüglich der schwachen Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ auf $L^\infty(\mu_h)$.

Wegen der Folgerung nach (11.51) existiert ein separierender Vektor e für $\{N\}^{kk}$ und nach (11.52) ist μ_e ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N . Da μ_h absolut-stetig ist bezüglich μ_e nach (11.54) folgt $\exists \frac{d\mu_h}{d\mu_e} \in L^1(\mu_e)$. Für jede Borelmenge B gilt somit $\int_B f_i d\mu_h = \int_B f_i \frac{d\mu_h}{d\mu_e} d\mu_e \rightarrow \int_B f_e \frac{d\mu_h}{d\mu_e} d\mu_e = \int_B f_e d\mu_h$ und andererseits $\int_B f_i d\mu_h \rightarrow \int_B f_h d\mu_h$. Somit ist $0 = \int_B (f_e - f_h) d\mu_h$, d.h. $f_e = f_h$ μ_h -f.ü.. Da nach (11.54) für $g \in H_h$ das Maß μ_g absolut-stetig bezüglich μ_h ist, gilt $\langle f_h(N_h)g, g \rangle = \langle f_h(N)g, g \rangle = \int f_h d\mu_g = \int f_e d\mu_g = \langle f_e(N_h)g, g \rangle$, d.h. $f_h(N_h) = f_e(N_h)$ nach (10.3.3) und insbesondere ist $ah = a|_{H_h}h = f_h(N_h)h = f_e(N_h)h = f_e(N)h$. Da h beliebig war gilt $a = f_e(N)$. \square

11.56 Lemma. *Es ist $\rho_N : \text{Ker}(\pi) \rightarrow \text{Ker}(\rho_h)$ surjektiv, d.h.*

$$\text{Ker } \rho_h = \{f(N) : f = 0 \text{ } \mu_h\text{-f.ü.}\}.$$

Beweis. Sei $a \in \{N\}^{kk}$, d.h. $a = f(N)$ für ein $f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))$. Dann ist $a \in \text{Ker}(\rho_h) \Leftrightarrow 0 = \rho_h(f(N)) = f|_{\sigma(N_h)}(N_h) = \rho_{N_h}(f|_{\sigma(N_h)}) \stackrel{(11.53)}{\Leftrightarrow} f|_{\sigma(N_h)} = 0$ μ_h -f.ü. $\Leftrightarrow f = 0$ μ_h -f.ü., da $\text{Träg}(\mu_h) \subseteq \sigma(N_h)$ nach (11.16). \square

$$\begin{array}{ccc}
 \ker(\pi) & \longrightarrow & \ker(\rho_h) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{Borel}_b(\sigma(N)) & \xrightarrow{\rho_N} & \{N\}^{kk} \\
 \downarrow \pi & & \downarrow \rho_h \\
 L^\infty(\mu_h) & \xrightarrow{\cong} & \{N_h\}^{kk}
 \end{array}$$

11.57 Proposition. *Es sei N normal und $e \in H$. Dann sind äquivalent:*

- 1 Die Abbildung $\rho_e : \{N\}^{kk} \rightarrow \{N_e\}^{kk}$ ist ein $*$ -Isomorphismus (oder zumindest injektiv);
- 2 Für $f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))$ gilt: $f(N) = 0 \Leftrightarrow f = 0$ μ_e -f.ü..
- 3 e ist separierend für $\{f(N) : f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))\} = \{N\}^{kk}$;
- 4 $\mu_e := P_{e,e}$ ist ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N ;

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) $f(N) = 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(N) \in \text{Ker}(\rho_e) \stackrel{(11.56)}{\Leftrightarrow} f = 0$ μ_e -f.ü..

((2) \Rightarrow (3)) Es sei $a \in \{N\}^{kk}$ und $ae = 0$. Nach (11.55) existiert $f \in \text{Borel}_b(\sigma(N))$ mit $f(N) = a$. Also ist $0 = \|ae\|^2 = \langle a^*ae, e \rangle = \langle \rho_N(|f|^2) e, e \rangle = \langle \int |f|^2 dP e, e \rangle = \int |f|^2 d\mu_e$. Und somit $f = 0$ μ_e -f.ü., und damit $a = f(N) = 0$ nach (2).

((3) \Rightarrow (4)) ist (11.52).

((4) \Rightarrow (1)) Nach (11.55) ist ρ_e ein surjektiver $*$ -Morphismus. Nach (11.56) ist $\text{Ker } \rho_e = \{f(N) : f = 0 \text{ } \mu_e\text{-f.ü.}\}$, also ist ρ_e injektive, denn falls $f = 0$ μ_e -f.ü. so impliziert (4), daß $f = 0$ außerhalb einer Borel-Menge B mit $P(B) = 0$. Also ist $f(N) = \int_B f dP = 0$. \square

$$\begin{array}{ccccc}
 \ker(\pi) & \longrightarrow & \ker(\rho_e) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 \text{Borel}_b(\sigma(N)) & \xrightarrow{\rho_N} & \{N\}^{kk} & \hookrightarrow & L(H) \\
 \text{inkl}^* \downarrow & & \downarrow \rho_e \cong & & \\
 \text{Borel}_b(\sigma(N_e)) & \xrightarrow{\rho_{N_e}} & \{N_e\}^{kk} & \hookrightarrow & L(H_e) \\
 \downarrow \pi & & \text{konj}_{U_e} \downarrow \cong & & \text{konj}_{U_e} \downarrow \cong, (11.30) \\
 L^\infty(\mu_e) & \xrightarrow[\cong, (11.47)]{M} & \{N_{\mu_e}\}^{kk} & \hookrightarrow & L(L^2(\mu_e))
 \end{array}$$

11.58 Theorem. Funktionen-Kalkül. *Es sei N ein normaler Operator auf einem separablen Hilbertraum H . Dann existiert ein bis auf Äquivalenz eindeutiges skalar-wertiges Spektral-Maß μ für N . Der Funktionen-Kalkül ρ_N aus (11.14) faktorisiert über $\pi : \text{Borel}_b(\sigma(N)) \rightarrow L^\infty(\mu)$ zu einen wohldefinierten (isometrischen) $*$ -Isomorphismus $\rho : L^\infty(\mu) \rightarrow \{N\}^{kk}$, der auch ein Homöomorphismus von der*

Topologie $\sigma(L^\infty, L^1)$ auf die WOT ist.

$$\begin{array}{ccc} \text{Borel}_b(\sigma(N)) & \xrightarrow{\rho_N} & L(H) \\ \pi \downarrow & & \uparrow \\ L^\infty(\mu) & \xrightarrow[\cong]{\rho} & \{N\}^{kk} \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die skalar-wertigen Spektralmaße μ genau die Maße μ_e mit separierenden Vektor e sind. Nach (11.54) sind somit alle skalar-wertigen Spektralmaße äquivalent, d.h. wechselseitig absolut stetig.

(\uparrow) ist (11.52). (\downarrow) Wir wählen einen separierenden Vektor h , siehe (11.51). Dann ist μ äquivalent und insbesondere absolut-stetig bezüglich μ_h , und somit existiert nach (11.54) ein $e \in H$ mit $\mu = \mu_e$. Nach (11.57) ist e ein separierender Vektor.

Der Funktionenkalkül $\text{Borel}_b(\sigma(N)) \rightarrow \{N\}^{kk}$ kann nach obigem wegen (11.57) ($1 \Rightarrow 3$) als Zusammensetzung

$$\text{Borel}_b(\sigma(N)) \rightarrow L^\infty(\mu_e) \stackrel{(11.47)}{\cong} \{N_{\mu_e}\}^{kk} \stackrel{(11.55)}{\cong} \{N_e\}^{kk} \stackrel{(11.57)}{\cong} \{N\}^{kk} \subseteq L(H)$$

geschrieben werden. Die Abbildung ρ definieren wir als Zusammensetzung $L^\infty(\mu) \cong \{N_{\mu_e}\}^{kk} \cong \{N_e\}^{kk} \cong \{N\}^{kk}$. Somit ist sie ein bijektiver $*$ -Homomorphismus und ein Homöomorphismus bezüglich $\sigma(L^\infty, L^1)$ und der WOT nach (11.47) und (11.55), denn aus $f_i \rightarrow 0$ bezüglich $\sigma(L^\infty, L^1)$ folgt auch umgekehrt, daß für $h \in H$

$$\langle f_i(N)h, h \rangle = \langle f_i(N_h)h, h \rangle = \int f_i d\mu_h = \int f_i \frac{d\mu_h}{d\mu} d\mu \rightarrow 0,$$

da nach (11.54) für $h \in H$ das Maß μ_h absolut-stetig ist bezüglich μ , und somit nach (11.32) die Radon-Nikodym-Ableitung $\frac{d\mu_h}{d\mu} \in L^1(\mu)$ existiert. \square

11.59 Spektral-Abbildungs-Theorem. *Es sei H ein separabler Hilbertraum, $N \in L(H)$ ein normaler Operator, μ ein skalar-wertiges Spektralmaß und P das Spektralmaß von N und schließlich $f \in L^\infty(\mu)$. Dann ist das Spektrum $\sigma(f(N))$ von $f(N)$ das μ -essentielle Bild von $f \in L^\infty(\mu)$. Weiters ist $\mu \circ f^{-1}$ ein skalar-wertiges und $P \circ f^{-1}$ das Spektralmaß von $f(N)$.*

Beweis. Zuerst die Aussage über das Spektrum:

$$\begin{aligned} \sigma_{L(H)}(f(N)) &\stackrel{(10.7)}{=} \sigma_{\{N\}^{kk}}(f(N)) \stackrel{(11.58)}{=} \sigma_{\{N_\mu\}^{kk}}(M_f) \\ &\stackrel{(10.7)}{=} \sigma_{L(L^2(\mu))}(M_f) \stackrel{(11.15)}{=} \mu - \text{ess-Bild}(f). \end{aligned}$$

Da f meßbar ist, ist $f^*P := P \circ f^{-1}$ ein Spektralmaß auf $\sigma(f(N))$. Für $\varepsilon > 0$ wählen wir eine Partition von $\{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq \|f\|_\infty\}$ und somit von $\sigma(f(N))$ in Borelmengen B_j mit $|z - z'| < \varepsilon$ für $z, z' \in B_j$. Für $f^{-1}(B_j) \neq \emptyset$ sei $x_j \in f^{-1}(B_j)$ fix gewählt und $y_j := f(x_j)$. Falls $f^{-1}(B_j) = \emptyset$ so sei $y_j \in B_j$ beliebig. Dann bilden

die $f^{-1}(B_j) \neq \emptyset$ eine Partition von $\sigma(N)$ und somit ist

$$\begin{aligned} \left\| f(N) - \int_{\sigma(f(N))} z d f^* P(z) \right\| &= \left\| \int_{\sigma(N)} f(z) dP(z) - \int_{\sigma(f(N))} z d f^* P(z) \right\| \\ &\leq \left\| \int_{\sigma(N)} f(z) dP(z) - \sum_j f(x_j) P(f^{-1}(B_j)) \right\| \\ &\quad + \left\| \sum_j y_j f^* P(B_j) - \int_{\sigma(f(N))} z d f^* P(z) \right\| \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

also gilt Gleichheit und f^*P ist das Spektralmaß von $f(N)$ nach (11.14).

Es ist $f^*\mu := \mu \circ f^{-1}$ ein skalar-wertiges Spektralmaß von $f(N)$, denn $0 = P_{f(N)}(B) = f^*P(B) = P(f^{-1}B)$ genau dann, wenn $0 = \mu(f^{-1}(B)) = f^*\mu(B)$ gilt. \square

Multiplizitäts-Theorie für normale Operatoren

11.60 Theorem (Hellinger 1907). *Es sei N ein normaler Operator auf einem separablen Hilbertraum. Dann existiert ein Folge von Maßen μ_n auf \mathbb{C} mit kompakten Trägern und mit μ_{n+1} absolut-stetig bezüglich μ_n und*

$$N \cong N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2} \oplus \dots$$

Bis auf unitäre Äquivalenz ist N durch die Äquivalenzklassen dieser Maße eindeutig bestimmt.

Bemerkung. Das Maß μ_1 muß ein skalar-wertiges Spektral-Maß für N sein: Denn $\oplus_j N_{\mu_j} - \lambda$ ist genau dann invertierbar, wenn alle $N_{\mu_j} - \lambda$ es sind, d.h. $\sigma(N) = \bigcup_j \sigma(N_{\mu_j}) = \bigcup_j \text{Träg}(\mu_j)$. Weiters ist $P(B) = 0$ genau dann, wenn $P_j(B) = 0$ ist für alle j , d.h. B eine μ_j -Null-Menge ist. Da aber μ_{j+1} absolut-stetig bezüglich μ_j ist, ist das genau dann der Fall, wenn $\mu_1(B) = 0$ ist.

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, wollen wir noch einige Varianten daraus folgern. Für die Erste benötigen wir folgendes

11.61 Lemma. *Es sei ν ein absolut-stetiges Maß bezüglich eines anderen Maßes μ . Dann existiert eine meßbare Menge B , so daß $\mu|_B$ und ν äquivalent (d.h. wechselseitig absolut-stetig) sind.*

Beweis. Es sei $0 \leq f := \frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(\mu)$ die Radon-Nikodym Ableitung. Weiters sei $B := \{x : f(x) \neq 0\}$. Diese meßbare Menge ist bis auf eine μ -Nullmenge eindeutig bestimmt. Für alle meßbaren A gilt: $0 = \nu(A) = \int \chi_A d\nu = \int \chi_A f d\mu = \int_B \chi_A f d\mu \Leftrightarrow \mu|_B(A) = 0$, d.h. ν und $\mu|_B$ sind äquivalent. \square

11.62 Folgerung. *Es sei N ein normaler Operator auf einem separablen Hilbertraum und μ ein skalares Spektral-Maß für N . Dann existiert eine bezüglich der Inklusion fallende Folge von Borel-Mengen $B_n \subseteq \sigma(N)$ mit $B_1 := \sigma(N)$ und*

$$N \cong N_\mu \oplus N_{\mu|_{B_2}} \oplus \dots$$

Bis auf unitäre Äquivalenz ist N durch die Äquivalenzklasse von μ und die Borel-Mengen bis auf μ -Null-Mengen eindeutig bestimmt. \square

Bemerkung. Falls H endlich-dimensional ist, so ist $\sigma(N) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ endlich. Nach (11.60) ist $N = \bigoplus_k N_k$ wobei die $N_k \cong N_{\mu|_{B_k}}$ zyklische Diagonal-Operatoren auf invarianten Teilräumen $H_k \subseteq H$ sind. Die Eintragungen auf der Diagonale von N_k müssen also paarweise verschieden sein, d.h. alle Eigenwerte von N_k Vielfachheit 1 haben. Da μ_1 ein skalares Spektral-Maß für N ist, muß der Träger von μ_1 das gesamte Spektrum sein, d.h. der erste Summand $\sigma(N_1) = \sigma(N)$. Die absolut-Stetigkeit bedeutet, daß das jeweilige Spektrum kleiner wird, d.h. die Diagonalelemente von N_{k+1} eine Teilmenge von jenen von N_k sein müssen. Also sind die N_k die diagonal-Operatoren mit paarweise verschiedenen Eintragungen und zwar genau den Eigenwerte von N mit Vielfachheit mindestens k .

Bemerkung. Es gibt aber noch eine andere Darstellung. Es sei Λ_k die Menge der Eigenwerte mit Vielfachheit k , d.h. für $\lambda \in \Lambda_k$ gilt $\dim \text{Ker}(N - \lambda) = k$. Es sei N_k der diagonal-Operator welcher Λ_k als diagonal-Elemente hat und zwar jedes mit Vielfachheit k . Dann ist $N_k \cong A_k^{(k)} := \bigoplus^k A_k$, wobei A_k ein diagonal-Operator mit Λ_k als diagonal-Elementen mit Vielfachheit 1 ist, also $\sigma(A_k) = \Lambda_k$. Somit ist

$$N \cong A_1 \oplus A_2^{(2)} \oplus A_3^{(3)} \dots$$

mit $\sigma(A_j) \cap \sigma(A_k) = \emptyset$ für $j \neq k$. Das folgende Theorem liefert eine unendlich-dimensionale Verallgemeinerung.

11.63 Theorem. *Es sei N normaler Operator auf einem separablen Hilbert-Raum H . Dann existieren paarweise singuläre Maße μ_∞, μ_1, \dots und ein Isomorphismus*

$$U : H \rightarrow L^2(\mu_\infty)^{(\infty)} \oplus L^2(\mu_1) \oplus L^2(\mu_2)^{(2)} \oplus \dots$$

welcher N in die Summe der Multiplikations-Operatoren mit z übersetzt. Zwei Operatoren sind genau dann unitär äquivalent, wenn die entsprechenden Maße es sind.

Es heißen zwei Maße μ_1 und μ_2 SINGULÄR, falls eine Zerlegung $X = B_1 \sqcup B_2$ existiert mit $\mu_1(B_1) = 0$ und $\mu_2(B_2) = 0$.

Beweis. Es sei μ ein Spektral-Maß für N und B_n die aus (11.62) erhaltenen Borel-Teilmengen von $\sigma(N)$. Es sei $\Delta_\infty := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ und $\Delta_n := B_n \setminus B_{n+1}$ für $1 \leq n < \infty$. Es sei $\mu_n := \mu|_{\Delta_n}$ und $\nu_n := \mu|_{B_n}$ für $1 \leq n < \infty$. Da $B_n = \bigcap_{k=1}^\infty B_k \sqcup (B_n \setminus B_{n+1}) \sqcup (B_{n+1} \setminus B_{n+2}) \sqcup \dots = \Delta_\infty \sqcup \Delta_n \sqcup \Delta_{n+1} \sqcup \dots$, also ist $\nu_n = \mu_\infty + \mu_n + \mu_{n+1} + \dots$ und die Maße $\mu_\infty, \mu_n, \mu_{n+1}, \dots$ sind paarweise singulär. Also ist $N_{\nu_n} \cong N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_n} \oplus N_{\mu_{n+1}} \oplus \dots$. Unter Verwendung von (11.62) folgt somit

$$\begin{aligned} N &\cong N_{\nu_1} \oplus N_{\nu_2} \oplus \dots \\ &\cong (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_1} \oplus N_{\mu_2} \oplus \dots) \oplus (N_{\mu_\infty} \oplus N_{\mu_2} \oplus N_{\mu_3} \oplus \dots) \oplus \dots \\ &\cong N_{\mu_\infty}^{(\infty)} \oplus N_{\mu_1}^{(1)} \oplus N_{\mu_2}^{(2)} \oplus \dots \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit bleibt dem Leser überlassen. \square

Beweis der Existenz-Aussage des Theorems (11.60). Die Idee des Beweises von (11.60) ist, durch Auswahl einer Folge von h_n eine Zerlegung von H in

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

die orthogonale Summe $\bigoplus H_{h_n}$ der von h_n erzeugten zyklischen Teilräume zu konstruieren. Mittels Zorn geht das nicht, da die absolut-Stetigkeit der zugehörigen Maße nicht erzwungen werden kann. Induktiv könnte man wie folgt vorgehen: Es sei $e_1 \in H$ ein separierender Vektor für $\{N\}^{kk}$ sowie H_1 der Abschluß von $\{N\}^{kk}e_1$ und $\mu_1(B) := \|P(B)e_1\|^2$. Im nächsten Schritt betrachten wir $N_2 := N|_{H_1^\perp}$. Wieder existiert nach (11.51) ein separierender Vektor $e_2 \in H_1^\perp \subseteq H$ für $\{N_2\}^{kk}$. Es sei H_2 der Abschluß von $\{N_2\}^{kk}e_2$. Dann ist $\mu_2 := P_{e_2, e_2}$ absolut stetig bzgl. μ_1 nach (11.54). Wenn wir nun mit Induktion fortfahren, so können wir nicht garantieren, daß $\bigoplus H_k$ schon ganz H ausfüllt.

Um das Abbrechen nach abzählbar vielen Schritten zu gewährleisten, wählen wir eine orthonormal-Basis $\{f_j\}$ von H mit $f_1 = e_1$: Wir wollen den separierenden Vektor e_2 für $\{N_2\}^{kk}$ so wählen, daß die orthogonal-Projektion f'_2 von f_2 auf H_1^\perp im Abschluß H_2 von $\{N_2\}^{kk}e_2$ liegt. Dann wäre $f_2 \in H_1 \oplus \{f'_2\} \subseteq H_1 \oplus H_2$. Und induktiv erhielten wir $f_n \in H_1 \oplus \dots \oplus H_n$, also gilt $H = \bigoplus_n H_n$. Um diese spezielle Wahl zu rechtfertigen, brauchen wir folgendes Lemma. \square

11.64 Lemma. *Es sei N ein normaler Operator und $e \in H$. Dann existiert ein separierender Vektor e_0 für $\{N\}^{kk}$ mit e im Abschluß von $\{N\}^{kk}e_0$.*

Beweis. Es sei f_0 ein separierender Vektor für $\{N\}^{kk}$ und sei P das Spektral-Maß von N . Wir definieren $\mu(B) := \|P(B)f_0\|^2$ und bezeichnen den Abschluß von $\{N\}^{kk}f_0$ mit H_0 . Es ist $e =: h_0 + h_1$ mit $h_0 \in H_0$ und $h_1 \in (H_0)^\perp$. Es sei $\eta(B) := \|P(B)h_1\|^2$ und H_1 der Abschluß von $\{N\}^{kk}h_1$. Dann ist sowohl H_0 als auch H_1 bezüglich N invariant. Weiters ist $H_0 \perp H_1$ und $N|_{H_0} \cong N_\mu$ und $N|_{H_1} \cong N_\eta$. Da η nach (11.54) absolut-stetig ist bezüglich μ , folgt, daß eine Borel-Menge B existiert, so daß η und $\nu := \mu|_B$ wechselseitig absolut-stetig sind nach (11.61). Also ist $N|_{H_1} \cong N_\nu$ nach (11.33). Es sei $U : H_0 \oplus H_1 \rightarrow L^2(\mu) \oplus L^2(\nu)$ der kanonische Isomorphismus mit $U(N|_{H_0} \oplus N|_{H_1})U^{-1} = N_\mu \oplus N_\nu$. Wegen $e = h_0 \oplus h_1 \in H_0 \oplus H_1$ ist $Ue = e_0 \oplus e_1$. Da h_1 ein zyklischer Vektor für $N|_{H_1}$ ist, ist auch e_1 ein solcher von N_ν und folglich gilt $e_1 \neq 0$ ν -f.ü..

Wir wollen nun zeigen, daß ein $f \in L^2(\mu)$ existiert, so daß $f \oplus e_1$ ein separierender Vektor von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}$ ist und $e_0 \oplus e_1$ im Abschluß von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}(f \oplus e_1)$ liegt:

Wir definieren $f(z) := e_0(z)$ für $z \in B$ und $f(z) := 1$ sonst. Es sei H der Abschluß von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}(f \oplus e_1) = \{g(f \oplus e_1) : g \in L^\infty(\mu)\}$ (wobei die Gleichheit nach (11.58) gilt, weil μ ein skalar-wertiges Spektral-Maß für $N_\mu \oplus N_\nu$ ist). Es sei B^c das Komplement von B , dann gilt: $g \chi_{B^c} \oplus 0 = g \chi_{B^c}(f \oplus e_1)$ für alle $g \in L^\infty(\mu)$. Also ist $L^2(\mu|_{B^c}) \oplus 0 \subseteq H$ und somit $(1 - e_0) \chi_{B^c} \oplus 0 \in H$ und schließlich $e_0 \oplus e_1 = f \oplus e_1 - (1 - e_0) \chi_{B^c} \oplus 0 \in H$.

Andererseits folgt aus $g \in L^\infty(\mu)$ und $0 = g(f \oplus e_1)$, daß $gf = ge_1 = 0$ μ -f.ü.. Da $e_1 \neq 0$ ν -f.ü., ist $g = 0$ μ -f.ü. auf B . Da $f = 1$ auf B^c ist folgt, daß auch $g = 0$ ist μ -f.ü. auf B^c . Also ist $f \oplus e_1$ ein separierender Vektor von $\{N_\mu \oplus N_\nu\}^{kk}$. \square

Beweis der Eindeutigkeitsaussage des Theorems (11.60). Da aus $\nu \sim \mu$ folgt, daß $N_\nu \cong N_\mu$ brauchen wir nur die Umkehrung zeigen. Sei also $N \cong M$, genauer: es sei U eine surjektive Isometrie mit $UNU^{-1} = M$. Falls e_1 ein separierender Vektor für $\{N\}^{kk}$ ist, so ist $f_1 := U(e_1)$ ein solcher für $\{M\}^{kk}$. Da μ_1 und ν_1 skalar-wertige Spektral-Maße für N bzw. M sind, folgt $\nu_1 \sim \mu_1$ und damit $N_{\mu_1} \cong N_{\nu_1}$, d.h. falls $H = \bigoplus_n H_n$ und $K = \bigoplus_n K_n$ mit $N|_{H_n} = N_{\mu_n}$ und $M|_{K_n} = N_{\nu_n}$ so ist $N|_{H_1} \cong M|_{K_1}$. Allerdings muß dieser Isomorphismus nicht eine

Einschränkung von U sein, d.h. wir wissen nicht ob $U(H_1) \subseteq K_1$ ist. Wir müssen also zeigen, daß $N|_{H_1^\perp} \cong M|_{K_1^\perp}$. Dies geschieht in der folgenden Proposition (11.65). Das Resultat folgt dann mittels Induktion. \square

11.65 Proposition. *Es seien N , A und B normale Operatoren, N zyklisch und $N \oplus A \cong N \oplus B$. Dann ist $A \cong B$.*

Beweis. Es sei $N \in L(H)$, $A \in L(H_A)$ und $B \in L(H_B)$. Und sei $U : H \oplus H_A \rightarrow H \oplus H_B$ ein Isomorphismus mit $U(N \oplus A)U^{-1} = N \oplus B$. Wir schreiben U als Matrix

$$U = \begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{pmatrix}$$

mit $U_{1,1} \in L(H, H)$, $U_{1,2} \in L(H_A, H)$, $U_{2,1} \in L(H, H_B)$ und $U_{2,2} \in L(H_A, H_B)$. Dann ist

$$U^* = \begin{pmatrix} U_{1,1}^* & U_{2,1}^* \\ U_{1,2}^* & U_{2,2}^* \end{pmatrix}$$

und weiters

$$N \oplus A = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N \oplus B = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $U(N \oplus A) = (N \oplus B)U$ lautet:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}N & U_{1,2}A \\ U_{2,1}N & U_{2,2}A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} NU_{1,1} & NU_{1,2} \\ BU_{1,2} & BU_{2,2} \end{pmatrix}.$$

und $U(N \oplus A)^* = (N \oplus B)^*U$ lautet:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}N^* & U_{1,2}A^* \\ U_{2,1}N^* & U_{2,2}A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^*U_{1,1} & N^*U_{1,2} \\ B^*U_{1,2} & B^*U_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungen $U^*U = 1$ und $UU^* = 1$ lauten:

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}^*U_{1,1} + U_{2,1}^*U_{2,1} & U_{1,1}^*U_{1,2} + U_{2,1}^*U_{2,2} \\ U_{1,2}^*U_{1,1} + U_{2,2}^*U_{2,1} & U_{1,2}^*U_{1,2} + U_{2,2}^*U_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_{1,1}U_{1,1}^* + U_{1,2}U_{1,2}^* & U_{1,1}U_{2,1}^* + U_{1,2}U_{2,2}^* \\ U_{2,1}U_{1,1}^* + U_{2,2}U_{1,2}^* & U_{2,1}U_{2,1}^* + U_{2,2}U_{2,2}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Gleichung (2,2) für N und für N^* und (11.41) folgt, daß $(\text{Ker } U_{2,2})^\perp$ A -invariant, $(\text{Ker } U_{2,2}^*)^\perp$ B -invariant und $A|_{(\text{Ker } U_{2,2})^\perp} \cong B|_{(\text{Ker } U_{2,2}^*)^\perp}$ ist. Es genügt also zu zeigen, daß $A|_{\text{Ker } U_{2,2}} \cong B|_{\text{Ker } U_{2,2}^*}$, denn dann ist $A \cong B$. Falls $h \in \text{Ker } U_{2,2} \subseteq H_A$, dann ist

$$\begin{pmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} \\ U_{2,1} & U_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{1,2}h \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da U eine Isometrie ist folgt, daß $U_{1,2}$ den Kern von $U_{2,2}$ isometrisch auf einen abgeschlossenen Teilraum E von H abbildet. Aus den Gleichungen (1,2) für N und (1,2) für N^* und der Tatsache, daß $\text{Ker } U_{2,2}$ A -invariant ist, folgt, daß E N -invariant ist. Folglich ist die Einschränkung von $U_{1,2}$ auf $\text{Ker } U_{2,2}$ eine Äquivalenz für $A|_{\text{Ker } U_{2,2}} \cong N|_E$.

Auf ähnliche Weise erhalten wir, daß $U_{2,1}^*$ den Kern von $U_{2,2}^*$ isometrisch auf einen abgeschlossenen Teilraum E_* von H abbildet, welcher N -invariant ist, und eine Äquivalenz $B|_{\text{Ker } U_{2,2}^*} \cong N|_{E_*}$ liefert.

Es bleibt zu zeigen, daß $E = E_*$. Falls $h \in \text{Ker } U_{2,2}$, so ist $U_{1,1}^*U_{1,2}h = -U_{2,1}^*U_{2,2}h = 0$ nach Gleichung (1, 2) für U^*U und somit $E = U_{1,2}(\text{Ker } U_{2,2}) \subseteq \text{Ker } U_{1,1}^*$. Andererseits ist wegen (1, 1) für UU^* für $f \in \text{Ker } U_{1,1}^*$ die Gleichung $f = (U_{1,1}U_{1,1}^* + U_{1,2}U_{1,2}^*)f = U_{1,2}U_{1,2}^*f$ gültig. Wegen (2, 1) für UU^* ist $U_{2,2}U_{1,2}^*f = -U_{2,1}U_{1,1}^*f = 0$, und damit $U_{1,2}^*f \in \text{Ker } U_{2,2}$. Folglich ist $f \in U_{1,2}(\text{Ker } U_{2,2})$ und damit $E = \text{Ker } U_{1,1}^*$. Analog erhalten wir $E_* := \text{Ker } U_{1,1}$. Aus Gleichung (1, 1) für N folgt daß $U_{1,1} \in \{N\}^k$, und da N zyklisch ist folgt aus (11.47), daß $U_{1,1}$ normal ist (denn $\{N_\mu\}^k = A_\mu$) und damit ist $E = \text{Ker } U_{1,1}^* = \text{Ker } U_{1,1} = E_*$. \square

12 Spektral-Theorie unbeschränkter Operatoren

Unbeschränkte Operatoren

Quanten-Mechanik. In der QUANTEN-MECHANIK will man physikalische Größen als selbst-adjungierte Operatoren auf einem separablen Hilbert-Raum darstellen. Für den POSITIONS-OPERATOR Q und den IMPULS-OPERATOR P muß folgende Version der HEISENBERG'SCHEN UNSCHÄRFE-RELATION $[P, Q] := PQ - QP = \frac{\hbar}{i}$ gelten, wobei $\hbar \neq 0$ das PLANK'SCHE WIRKUNGSQUANT bezeichnet.

Seien also P und Q Elemente einer Banach-Algebra ($A = L(H)$), welche diese Kommutations-Relation erfüllen. Mittels Induktion zeigt man sofort, daß $P^k Q = Q P^k + k \frac{\hbar}{i} P^{k-1}$ gilt, denn

$$\begin{aligned} P^{k+1} Q &= P P^k Q = P \left(Q P^k + k \frac{\hbar}{i} P^{k-1} \right) \\ &= \left(Q P + \frac{\hbar}{i} \right) P^k + k \frac{\hbar}{i} P^k = Q P^{k+1} + (k+1) \frac{\hbar}{i} P^k. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} e^{itP} Q &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} P^k Q = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \left(Q P^k + k \frac{\hbar}{i} P^{k-1} \right) \\ &= Q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} P^k + \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(it)^k}{(k-1)!} P^{k-1} = (Q + t\hbar) e^{itP}. \end{aligned}$$

Da e^{itP} invertierbar ist, mit inverser Abbildung e^{-itP} , sind Q und $Q + t\hbar$ ähnlich, und haben somit dasselbe Spektrum. Da aber das Spektrum von $Q + t\hbar$ jenes von Q um $t\hbar$ verschoben ist, ist das Spektrum von Q ganz \mathbb{C} , und somit kann Q kein Element einer Banach-Algebra sein, und damit auch kein beschränkter linearer Operator. Eine ähnliche Rechnung zeigt, daß auch P kein beschränkter Operator sein kann.

Betrachten wir als Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ und definieren wir den Impuls-Operator P durch $(Pf)(x) := \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f(x)$ und den Orts-Operator Q durch $(Qf)(x) := x f(x)$, so gilt

$$\begin{aligned} [P, Q]f(x) &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} (x f(x)) - x \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} f(x) \\ &= \frac{\hbar}{i} (f(x) + x f'(x) - x f'(x)) \\ &= \frac{\hbar}{i} f(x). \end{aligned}$$

Diese Operatoren sind aber nicht für alle $f \in L^2(\mathbb{R})$ definiert, also benötigen wir eine Erweiterung des Begriffs linearer Operator.

12.1 Definition. Unter einem LINEAREN OPERATOR $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ verstehen wir eine lineare Abbildung T , welche auf einem linearen Teilraum $\text{Dom } T$ von H_1 , der DOMÄNE von T , definiert ist. Besonders wichtig ist der Fall, wo $\text{Dom } T$ in H_1 dicht liegt, was wir o.B.d.A. annehmen können indem wir H_1 durch den Hilbertraum $\overline{\text{Dom } T}$ ersetzen. Die SUMME $T_1 + T_2$ zweier solcher Operatoren T_1 und T_2 ist auf $\text{Dom } T_1 \cap \text{Dom } T_2$ definiert, und die ZUSAMMENSETZUNG $T \circ S$ auf $S^{-1}(\text{Dom } T)$.

Ein Operator $\tilde{T} : H_1 \rightsquigarrow H_2$ heißt ERWEITERUNG von $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ falls $\tilde{T} \supseteq T$, d.h. $\text{Dom } \tilde{T} \supseteq \text{Dom } T$ und $\tilde{T}|_{\text{Dom } T} = T$ ist.

Falls T beschränkt ist, so existiert eine beschränkt lineare Erweiterung auf den Abschluß von $\text{Dom } T$, und falls wir $T = 0$ auf dem orthogonalen Komplement von $\text{Dom } T$ setzen, so haben wir eine beschränkt lineare Erweiterung auf H_1 erhalten. Die interessanten nicht global definierten Operatoren sind folglich alle unbeschränkt.

Irgendwelche Stetigkeits-Eigenschaften sollten die Operatoren aber schon haben, sonst würden wir ja nur lineare Algebra treiben. Folglich nennen wir einen Operator $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ABGESCHLOSSEN, falls sein GRAPH $\text{Graph}(T) := \{(x, Tx) : x \in \text{Dom } T\}$ in $H_1 \oplus H_2$ abgeschlossen ist. Ein Operator heißt ABSCHLIESSBAR, falls er eine abgeschlossene Erweiterung besitzt.

12.2 Proposition. *Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:*

- 1 *Er ist abschließbar;*
- 2 *Der Abschluß seines Graphen ist Graph einer Abbildung;*
- 3 *Aus $0 \oplus h \in \overline{\text{Graph } T}$ folgt $h = 0$.*

In dieser Situation heißt der Operator mit dem Abschluß von $\text{Graph } T$ als Graphen der ABSCHLUSS von T .

Es ist nicht jeder Operator abschließbar. Sei z.B. $T : \ell^2 \rightsquigarrow \mathbb{C}$ definiert durch $T((x_n)_n) := \sum_n n x_n$ auf $\text{Dom } T := \{(x_n)_n : \sum_n n |x_n| < \infty\}$. Dann ist $0 \oplus 1 = \lim_n (\frac{1}{n} e_n, 1) \in \overline{\text{Graph } T}$, also kann dies kein Graph einer Funktion sein.

Beweis. ((1) \Rightarrow (3)) Wir haben also einen abgeschlossenen Operator \tilde{T} mit $T \subseteq \tilde{T}$. Folglich ist der Abschluß $\overline{\text{Graph } T}$ des Graphen von T eine Teilmenge von $\text{Graph } \tilde{T}$. Es sei $(0, h) \in \overline{\text{Graph } T} \subseteq \text{Graph } \tilde{T}$, also ist $h = \tilde{T}(0) = 0$.

((2) \Leftarrow (3)) Es sei $H_0 := \text{pr}_1(\overline{\text{Graph } T}) = \{h \in H_1 : \exists k \in H_2 \text{ mit } (h, k) \in \overline{\text{Graph } T}\}$. Dann ist zu zeigen, daß zu jedem $h \in H_0$ genau ein $k \in H_2$ existiert mit $(h, k) \in \overline{\text{Graph } T}$. Es seien k_1 und k_2 zwei solche k . Dann ist $(0, k_1 - k_2) = (h, k_1) - (h, k_2) \in \overline{\text{Graph } T}$ und somit $k_1 - k_2 = 0$, d.h. $k_1 = k_2$.

((1) \Leftarrow (2)) Es sei also $\overline{\text{Graph } T}$ der Graph einer Abbildung \tilde{T} . Es ist \tilde{T} linear, denn der Abschluß des linearen Teilraums $\text{Graph } T$ ist selbst ein linearer Teilraum. Weiters ist \tilde{T} klarerweise abgeschlossen und $T \subseteq \tilde{T}$. \square

Adjungierter Operator

12.3 Definition des adjungierten Operators. Um einen Vektor T^*k durch die Gleichung $\langle Th, k \rangle = \langle h, T^*k \rangle$ zu definieren, benötigen wir einerseits, daß sie für h in einer dichten Teilmenge gilt, also muß $\text{Dom } T$ dicht sein, und andererseits muß $h \mapsto \langle Th, k \rangle$ ein beschränktes lineares Funktional (auf $\text{Dom } T$) sein. Wir definieren

also:

Für einen dicht-definierten Operator $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ sei der ADJUNGIERTE OPERATOR $T^* : H_2 \rightsquigarrow H_1$ jener Operator mit Domäne

$$\text{Dom}(T^*) := \{k \in H_2 : \langle T(\cdot), k \rangle \text{ ist beschränkt linear auf } \text{Dom } T\},$$

welcher durch $\langle Th, k \rangle = \langle h, T^*k \rangle$ für alle $h \in \text{Dom } T$ definiert ist.

12.4 Multiplikations-Operator als Beispiel. Es sei (X, Ω, μ) ein σ -endlicher Maß-Raum und $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Ω -meßbare Funktion. Es sei $D := \{g \in L^2(\mu) : \lambda g \in L^2(\mu)\}$ und $T(g) := \lambda g$ für alle $g \in D$. Dann ist $T = M_\lambda$ ein abgeschlossener dicht-definierter Operator. Sein Adjungierter hat dieselbe Domäne D und ist durch $T^* := M_{\bar{\lambda}}$ gegeben:

Es sei $\Delta_n \subseteq \{x : |\lambda(x)| \leq n\}$ mit $\mu(\Delta_n) < \infty$ und $\bigcup_n \Delta_n = X$. Dann ist $L^2(\Delta_n) \subseteq D$, denn für $f \in L^\infty$ und $g \in L^2$ ist nach der Hölder-Ungleichung auch $f g \in L^2$. Also ist D dicht.

Sei nun $g_k \rightarrow g$ und $Tg_k \rightarrow h$. Dann konvergiert $\lambda g_k \rightarrow \lambda g$ auf Δ_n und andererseits auch gegen h , also ist $\lambda g = h$ f.ü. und damit $g \in D$ und $(g, h) = (g, Tg) \in \text{Graph } T$. D.h. der Graph von T ist abgeschlossen.

Es ist $g \mapsto \langle \lambda g, h \rangle = \int \lambda g \bar{h}$ nach dem Satz von Riesz (6.7) genau dann beschränkt, wenn $\lambda \bar{h} \in L^2$, d.h. $h \in D$ liegt. Also ist $\text{Dom } T^* = D$ und

$$\langle \lambda g, h \rangle = \int \lambda g \bar{h} = \int g \overline{\lambda h} = \langle g, \bar{\lambda} h \rangle,$$

d.h. $T^*h = \bar{\lambda}h$.

Diagonal-Operator. Sei speziell $X = \mathbb{N}$ und μ das Zähl-Maß. Dann ist $L^2(X) = \ell^2$ und $\lambda : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge $(\lambda_n)_n$. Der Operator T hat dann $D := \{h \in \ell^2 : \sum_k |\lambda_k h_k|^2 = \sum_k |\lambda_k \langle h, e_k \rangle|^2 < \infty\}$ als Domäne und ist durch $Th := (\lambda_k h_k)_k = \sum_k \lambda_k \langle h, e_k \rangle e_k$ für alle $h \in D$ gegeben.

Positions-Operator. Es sei speziell μ das Lebesgue-Maß auf $X := \mathbb{R}$ und $\lambda := \text{id}_{\mathbb{R}}$. Dann ist T der Positions-Operator der Quantenmechanik.

Wir zeigen nun, daß T der Abschluß von $T|_{C_c^\infty}$ ist:

Da T abgeschlossen ist, müssen wir für jedes $f \in \text{Dom } T = \{f \in L^2 : (x \mapsto x f(x)) \in L^2\}$ eine Folge $f_n \in C_c^\infty$ finden, mit $f_n \oplus T f_n \rightarrow f \oplus T f$.

Sei dazu $\rho \in C_c^\infty$ mit $\rho = 1$ auf einer Umgebung U_0 um 0. Da C_c^∞ dicht liegt in L^2 existieren $g_n, h_n \in C_c^\infty$ mit $h_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow T f$. Folglich konvergiert $\rho h_n \rightarrow \rho f$ und beide Seiten verschwinden außerhalb $\text{Träg } \rho$, also konvergiert $T(\rho h_n) \rightarrow T(\rho f) = \rho T f$. Andererseits konvergiert $(1 - \rho)g_n \rightarrow (1 - \rho)T f$ und beide Seiten verschwinden auf U_0 , also bilden die Funktionen $x \mapsto \frac{1 - \rho(x)}{x} g_n(x)$ eine Folge von C_c^∞ -Funktionen, welche in L^2 gegen $(1 - \rho)f$ konvergiert. Schließlich liegen die Funktionen $f_n : x \mapsto \frac{1 - \rho(x)}{x} g_n(x) + \rho(x) h_n(x)$ in C_c^∞ und es konvergiert $f_n \rightarrow (1 - \rho)f + \rho \cdot f = f$ in L^2 und $T f_n = (1 - \rho)g_n + T(\rho h_n) \rightarrow (1 - \rho)T f + \rho T f = T f$.

12.5 Differentiations-Operator als Beispiel. Es sei

$$D_0 := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist absolut-stetig, } f' \in L^2 \text{ und } f(-1) = 0 = f(1)\}.$$

und T_0 sei definiert durch $T_0(f) := i f'$ für alle $f \in D_0$. Beachte, daß die absolut-stetigen Funktion f genau die Stammfunktionen der L^1 -Funktion sind.

Da die Polynome p mit $p(-1) = 0 = p(1)$ in D_0 liegen, ist D_0 dicht in $L^2[-1, 1]$.

Es ist T_0 abgeschlossen: Sei nämlich $f_n \in D_0$ mit $f_n \oplus if'_n \rightarrow f \oplus g$ in $L^2 \oplus L^2$. Sei $h(x) := -i \int_{-1}^x g(t) dt$. Dann ist h absolut-stetig und aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung ($\|-\|_1 \leq \sqrt{\|1\|_2} \|-\|_2 = \sqrt{2} \|-\|_2$) folgt

$$|f_n(x) - h(x)| = \left| \int_{-1}^x (f'_n(t) + ig(t)) dt \right| \leq \sqrt{2} \|f'_n + ig\|_2 = \sqrt{2} \|if'_n - g\|_2.$$

Also konvergiert $f_n \rightarrow h$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$. Da $f_n \rightarrow f$ in $L^2[-1, 1]$ ist $f = h$ f.ü. Wir können also annehmen, daß $f(x) = h(x)$ für alle x ist, und damit absolut-stetig ist und $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig auf $[-1, 1]$. Insbesondere ist $f(-1) = \lim_n f_n(-1) = \lim_n 0 = 0$ und analog ist $f(1) = 0$. Weiters ist $f' = h' = -ig \in L^2[-1, 1]$. Damit ist $f \in D_0$ und $f \oplus g = f \oplus if' \in \text{Graph } T_0$.

Es gilt $\text{Bild } T_0 = \{1\}^\perp$, denn $\text{Bild } T_0 = \{f' : f \in D_0\} = \{h \in L^2[-1, 1] : \langle h, 1 \rangle = \int_{-1}^1 h(x) dx = 0\} = \{1\}^\perp$.

Schließlich gilt $\text{Dom } T_0^* = D := \{g : g \text{ ist absolut-stetig auf } [-1, 1], \text{ und } g' \in L^2[-1, 1]\}$ und $T_0^*g = ig'$, d.h. $T_0 \subset T_0^*$.

(\subseteq) Sei $g \in \text{Dom } T_0^*$ und $h := T_0^*g$. Wir setzen $H(x) := \int_{-1}^x h(t) dt$. Mittels partieller Integration erhalten wir für jedes $f \in D_0$ wegen $f(-1) = 0 = f(1)$ folgendes:

$$\begin{aligned} \langle T_0f, g \rangle &= \langle f, T_0^*g \rangle = \langle f, h \rangle = \int_{-1}^1 f \bar{h} = \int_{-1}^1 f(x) d\overline{H}(x) \\ &= f(x) \overline{H(x)} \Big|_{x=-1}^{x=1} - \int_{-1}^1 f'(x) \overline{H(x)} dx = - \int_{-1}^1 f'(x) \overline{H(x)} dx \\ &= -\langle T_0f, iH \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $\langle T_0f, g + iH \rangle = 0$ für alle $f \in \text{Dom } T$, d.h. $g + iH \in \text{Bild } T_0^\perp = \{1\}^{\perp\perp} = \mathbb{C}$. D.h. $c := g + iH$ ist konstant und somit ist $g = c - iH$ absolut-stetig und $g' = -iH' = -ih \in L^2$. Schließlich ist $T_0^*g = h = ig'$.

(\supseteq) Es sei g absolut-stetig mit $g' \in L^2$. Mittels partieller Integration folgt für alle $h \in D_0$ wegen $h(-1) = 0 = h(1)$, daß $\langle ih', g \rangle = -i \int h \bar{g}'$ ist und somit in h stetig ist. D.h. $g \in \text{Dom } T^*$.

Man beachte, daß der Faktor i notwendig war, um für T_0^* die gleiche Formel wie für T_0 zu erhalten.

Beispiel einer Erweiterung. Wir erweitern nun die Domäne D_0 zu

$$D_1 := \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist absolut-stetig, } f' \in L^2[-1, 1] \text{ und } f(-1) = f(1)\}$$

Es sei T_1 durch die gleiche Formel wie zuvor, nämlich $T_1(f) = if'$ für alle $f \in D_1$ gegeben.

Natürlich ist auch T_1 dicht-definiert, da $D_0 \subseteq D_1$. Wie zuvor zeigt man, daß T_1 abgeschlossen ist (das folgt auch aus (12.8)) und daß $\text{Bild } T_1 = \{1\}^\perp$.

Diesmal gilt $\text{Dom } T_1^* = D_1 = \text{Dom } T_1$ und $T_1^*g = ig'$, d.h. $T_1 = T_1^*$.

(\subseteq) Es sei wieder $g \in \text{Dom } T_1^*$ und $h := T_1^*g$ und $H(x) := \int_{-1}^x h(t) dt$. Dann ist $H(-1) = 0$. Und wegen $1 \in D_1$ ist nun auch $H(1) = \int_{-1}^1 h = \langle h, 1 \rangle = \langle g, T_11 \rangle = 0$. Mittels partieller Integration und $H(-1) = 0 = H(1)$ erhalten wir wieder $\langle T_1f, g + iH \rangle = 0$ für alle $f \in D_1$. Also gilt wie zuvor, daß $g = c - iH$ absolut-stetig ist und $g' = -iH' = -ih \in L^2$. Schließlich ist $T_1^*g = h = ig'$.

(\supseteq) Mittels partieller Integration folgt für $g \in D_1$ wegen $h(-1) = h(1)$ und $g(-1) = g(1)$, daß $\langle ih', g \rangle = -i \int h \bar{g}'$ ist und somit in $h \in D_1$ stetig ist. D.h. $g \in \text{Dom } T^*$.

Der Impuls-Operator auf $L^2(\mathbb{R})$. Es sei nun

$$D := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ ist lokal absolut-stetig und } f' \in L^2\},$$

$$T(f) := i f' \text{ für alle } f \in D.$$

Dieser Operator ist ebenfalls dicht-definiert, denn für jedes Intervall $[a, b]$ und $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Trapez-Funktion, welche 1 ist auf $[a, b]$ und außerhalb einer $1/n$ -Umgebung verschwindet. Diese Funktionen liegen in D und deren lineares Erzeugnis ist dicht in L^2 .

Wir behaupten nun $T = T^*$. Daraus folgt mittels (12.8), daß T abgeschlossen ist.

(\subseteq) Sei $g \in \text{Dom } T^*$ und $T^*g = h$. Dann gilt für alle $f \in D$, daß $\int_{\mathbb{R}} i f' \bar{g} = \langle T f, g \rangle = \langle f, h \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \bar{h}$. Wählen wir für f insbesondere eine Trapez-Funktion f_n wie oben, so gilt:

$$n \int_{a-\frac{1}{n}}^a i \bar{g} - n \int_b^{b+\frac{1}{n}} i \bar{g} = \int_{\mathbb{R}} f_n \bar{h}.$$

Multiplikation mit i , Konjugieren, und Grenzübergang für $n \rightarrow \infty$ liefert $g(b) - g(a) = -i \int_a^b h$ für fast alle a und b , da die Stammfunktion $t \mapsto G(t) = \int_0^t g(s) ds$ einer $L^2[0, b] \subseteq L^1[0, b]$ Funktion fast überall differenzierbar ist und g als Ableitung besitzt und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_t^{t \pm \frac{1}{n}} g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G(t \pm \frac{1}{n}) - G(t)}{\pm \frac{1}{n}} = G'(t) = g(t)$ gilt. Da $L^2 \subseteq L^1_{loc}$ ist somit g lokal absolut-stetig und $g' = -i h$ fast überall. Also ist g in D und $T^*g = h = i g'$.

(\supseteq) Sei dazu $g \in D$. Partielle Integration liefert $\int_a^b i f' \bar{g} = i f \bar{g}|_a^b + \int_a^b f i \bar{g}'$ und da $f \bar{g}$ integrierbar ist, ist $\liminf_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} |(f \bar{g})(b) - (f \bar{g})(a)| = 0$ und somit $\int_{-\infty}^{+\infty} i f' \bar{g} = \int_{-\infty}^{+\infty} f i \bar{g}'$. D.h. $g \in \text{Dom } T^*$ und $T^*g = i g'$.

Schließlich behaupten wir noch, daß T der Abschluß von $T|_{C_c^\infty}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, daß für jedes $f \in D$ Funktionen $f_n \in C_c^\infty$ existieren mit $f_n \rightarrow f$ und $T f_n \rightarrow T f$ in L^2 .

Wir zeigen zuerst, daß wir $f_n \in C^\infty \cap L^2$ finden. Dazu wählen wir ein $\rho \in C_c^\infty$ mit $\rho \geq 0$ und $\int_{\mathbb{R}} \rho = 1$ und setzen $\rho_n : x \mapsto n \rho(nx)$ und $f_n := \rho_n \star f$. Wie in (4.15) zeigt man, daß $\|f_n - f\|_2 = \|\rho_n \star f - f\|_2 \rightarrow 0$ (siehe auch [A,55]) und $\rho_n \star f \in C^\infty \cap L^2$, da $\rho_n \in C^\infty \cap L^1$ und $f \in L^2$. Weiters ist $(\rho_n \star f)' = \rho_n \star f'$. Da $f' \in L^2$ gilt auch $T f_n = f'_n \in L^2$ und $\|T f_n - T f\|_2 = \|\rho_n \star f' - f'\|_2 \rightarrow 0$.

Sei nun $f \in C^\infty \cap L^2$ und wählen wir ein $\rho \in C_c^\infty$ mit $\rho(x) = 1$ für $|x| \leq 1$ und $\rho_n(x) := \frac{1}{n} \rho(\frac{x}{n})$. Es sei $f_n := \rho_n \cdot f$. Dann ist $f_n \in C_c^\infty$ und $f_n(x) = f(x)$ für $|x| \leq n$. Also konvergiert $f_n \rightarrow f$ punktweise und da $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ wegen dem Satz über dominierte Konvergenz auch bezüglich der 2-Norm. Weiters gilt $\|T f_n - T f\|_2 \leq \|\rho'_n \cdot f\|_2 + \|\rho_n \cdot f' - f'\|_2 \leq \|\rho'_n\|_\infty \cdot \|f\|_2 + \|\rho_n \cdot f' - f'\|_2 \leq \frac{1}{n} \|\rho'\|_\infty \cdot \|f\|_2 + \|\rho_n \cdot f' - f'\|_2 \rightarrow 0$.

Wir werden in (12.47) einen zweiten Beweis dieser Tatsache geben.

12.6 Bemerkung. Es sei $T := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ ein linearer partieller Differentialoperator der Ordnung $\leq m$, d.h.

$$(Tu)(x) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x).$$

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

mit C^m -Funktionen a_α . Der transponierte Operator sei gegeben durch $T^t : v \mapsto \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha (a_\alpha \cdot v)$. Für $u, v \in C^m$ gilt dann:

$$T(u) \cdot v - u \cdot T^t(v) = \text{Div } J(u, v),$$

wobei $J = (J_1, \dots, J_n)$ ein n -Tupel von bilinearen partiellen Differentialoperatoren J_n der Ordnung $< m$ ist.

Beweis. Wir führen den Beweis für $m = 2$ (der allgemeine Fall geht analog). Sei also

$$T := \sum_{j,k} a_{j,k} \partial_j \partial_k + \sum_j b_j \partial_j + c.$$

Wir wollen die partiellen Ableitungen im Produkt $T(u) \cdot v$ von u auf v hinüberbekommen. Beginnen wir zuerst mit einem Term 1-ter Ordnung

$$b_j \partial_j u \cdot v = \partial_j (b_j u v) - u \cdot \partial_j (b_j v).$$

Für die Terme 2-ter Ordnung erhalten wir

$$\begin{aligned} a_{j,k} \partial_j \partial_k u \cdot v &= \partial_j (a_{j,k} \partial_k u \cdot v) - \partial_j (a_{j,k} v) \cdot \partial_k u \\ &= \partial_j (a_{j,k} \partial_k u \cdot v) - \partial_k (\partial_j (a_{j,k} v) \cdot u) + \partial_k \partial_j (a_{j,k} v) \cdot u. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} T(u) \cdot v &= u \cdot \left(\sum_{j,k} \partial_k \partial_j (a_{j,k} v) - \sum_j \partial_j (b_j v) + c v \right) \\ &\quad + \sum_j \partial_j \left(\underbrace{\sum_k a_{j,k} \partial_k u \cdot v - \sum_k u \cdot \partial_k (a_{k,j} v) + b_j u \cdot v}_{=: J_j(u,v)} \right) \\ &= u \cdot T^t(v) + \text{Div } J(u, v), \end{aligned}$$

wobei $J := (J_1, \dots, J_n)$ und J_j folgender bilinearer partieller Differential-Operator der Ordnung 1 ist:

$$\begin{aligned} J_j(u, v) &= \sum_k a_{j,k} \partial_k u \cdot v - \sum_k u \cdot \partial_k (a_{k,j} v) + b_j u \cdot v \\ &= \sum_k \left(a_{j,k} \partial_k u \cdot v - a_{k,j} u \cdot \partial_k v \right) - \left(\sum_k \partial_k (a_{k,j}) - b_j \right) u \cdot v. \end{aligned}$$

Die Anwendung des Divergenz-Satzes liefert somit

$$\int_B T(u) \cdot v - u \cdot T^t(v) = \int_B \text{Div } J(u, v) = \int_{\partial B} \langle J(u, v), n_{\partial B} \rangle \text{vol}_{\partial B},$$

wobei $n_{\partial B} = (n_j)_j$ die nach außen weisende Einheits-Normale an die Fläche ∂B bezeichnet und $\text{vol}_{\partial B}$ das Oberflächen-Element ist.

Sei insbesondere $T(u) := \sum_{j,k} \partial_j (a_{j,k} \partial_k) + c u$ mit \mathbb{R} -wertigen C^2 -Funktionen $a_{j,k} = a_{k,j}$ und c . Dann ist $a_{j,k}$ genau der Koeffizient in der allgemeinen Formel

und $b_k = \sum_j \partial_j(a_{j,k})$. Der transponierte Operator ist in dieser Situation $T^t = T$, denn

$$\begin{aligned}
T^t(v) &:= \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (v a_{j,k}) \\
&\quad - \sum_j \partial_j \left(v \sum_k \partial_k a_{k,j} \right) + c v \\
&= \sum_{j,k} \left(\partial_j \partial_k v a_{j,k} + \partial_k v \partial_j a_{j,k} \right. \\
&\quad \left. + \partial_j v \partial_k a_{j,k} + \partial_j \partial_k a_{j,k} v \right) \\
&\quad - \sum_{j,k} (\partial_j v \partial_k a_{k,j} + v \partial_j \partial_k a_{k,j}) + c v \\
&= \sum_{j,k} (a_{j,k} \partial_j \partial_k v + \partial_j v \partial_k a_{j,k}) + c v \\
&= T(v).
\end{aligned}$$

Es sei die Ableitung $\frac{\partial}{\partial n}$ in die “ko-normalen”-Richtung definiert durch

$$\frac{\partial}{\partial n} := \sum_{j,k} a_{j,k} n_j \partial_k.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_B T(u) \cdot v - u \cdot T^t(v) &= \int_B \operatorname{Div} J(u, v) = \int_{\partial B} \langle J(u, v), n_{\partial B} \rangle \operatorname{vol}_{\partial B} \\
&= \int_{\partial B} \sum_j \left(\sum_k (a_{j,k} \partial_k u \cdot v - a_{k,j} u \cdot \partial_k v) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_k \partial_k (a_{k,j}) - \sum_k \partial_k (a_{j,k}) \right) u \cdot v \right) n_j \operatorname{vol}_{\partial B} \\
&= \int_{\partial B} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \cdot v - u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} \right) \operatorname{vol}_{\partial B},
\end{aligned}$$

Diese Integral verschwindet genau dann, wenn der normal-Anteil von $J(u, v)|_{\partial B}$ verschwindet, und insbesondere dann, wenn $u|_{\partial B} = 0$ und entweder $v|_{\partial B} = 0$ oder $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial B} = 0$. \square

Wir benötigen folgende Beschreibung (des Graphen) von T^* :

12.7 Proposition. *Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ dicht-definiert und $J : H_1 \oplus H_2 \rightarrow H_2 \oplus H_1$ gegeben durch $J(f \oplus g) = (-g) \oplus f$. Dann ist J eine bijektive Isometrie und*

$$\operatorname{Graph} T^* = (J(\operatorname{Graph} T))^\perp.$$

Beweis. Offensichtlich ist J eine bijektive Isometrie.

(\subseteq) Es sei also $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $f \in \operatorname{Dom} T$, dann ist

$$\langle g \oplus T^* g, J(f \oplus T f) \rangle = -\langle g, T f \rangle + \langle T^* g, f \rangle = 0.$$

(\supseteq) Es sei $g \oplus h \in (J(\operatorname{Graph} T))^\perp$. Für alle $f \in \operatorname{Dom} T$ gilt dann $0 = \langle g \oplus h, (-T f) \oplus f \rangle = -\langle g, T f \rangle + \langle h, f \rangle$. Also ist $g \in \operatorname{Dom} T^*$ und $h = T^* g$. \square

12.8 Proposition. *Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein dicht-definierter Operator. Dann gilt:*

- 1 T^* ist ein abgeschlossener Operator.
- 2 T^* ist dicht-definiert genau dann, wenn T abschließbar ist.
- 3 Falls T abschließbar ist, so ist sein Abschluß T^{**} .

Beweis. (1) Nach (12.7) ist $\text{Graph } T^*$ also orthogonales Komplement abgeschlossen, d.h. T^* ein abgeschlossener Operator.

Für den Rest beachte man, daß bis auf den natürlichen Isomorphismus $H_1 \oplus H_2 \cong H_2 \oplus H_1$ die Abbildung J ein bijektive Isometrie ist mit Inverser $J^{-1} : H_2 \oplus H_1 \rightarrow H_1 \oplus H_2$, $g \oplus f \mapsto f \oplus (-g)$.

(2) (\Leftarrow) Wir müssen zeigen, daß $(\text{Dom } T^*)^\perp = \{0\}$ ist: Für $k \in (\text{Dom } T^*)^\perp$ ist $k \oplus 0 \in (\text{Graph } T^*)^\perp \stackrel{(12.7)}{=} \overline{J(\text{Graph } T)}^{\perp\perp} = \overline{J(\text{Graph } T)} = \overline{J(\overline{\text{Graph } T})}$, d.h. $0 \oplus (-k) = J^{-1}(k \oplus 0) \in J^{-1}\overline{J(\overline{\text{Graph } T})} = \overline{\text{Graph } T}$. Da T abschließbar ist, ist $\overline{\text{Graph } T}$ ein Graph nach (12.2), also $k = 0$.

(\Rightarrow) Es sei $\text{Dom } T^*$ dicht. Dann ist $T^{**} = (T^*)^*$ definiert und nach (1) ein abgeschlossener Operator. Es gilt $T \subseteq T^{**}$ (also ist T^{**} eine abgeschlossene Erweiterung), denn für alle $f \in \text{Dom } T$ ist $g \mapsto \langle g, Tf \rangle = \langle T^*g, f \rangle$ ein wohldefiniertes beschränktes Funktional auf $\text{Dom } T^*$. Also ist $f \in \text{Dom } (T^*)^*$ und $(T^*)^*f = Tf$.

(3) Es gilt nach (12.7) angewendet auf T^* , daß $\text{Graph } T^{**} = (J' \text{Graph } T^*)^\perp$ wobei $J' : H_2 \oplus H_1 \rightarrow H_1 \oplus H_2$ gegeben ist durch $J'(g, f) := (-f, g) = -(f, -g) = -J^{-1}(g, f)$. Also ist

$$\begin{aligned} \text{Graph } T^{**} &= (-J^{-1} \text{Graph } T^*)^\perp \stackrel{(12.7)}{=} (-J^{-1}(J \text{Graph } T)^\perp)^\perp \\ &\stackrel{J^{-1} \text{ Isom.}}{=} (-J^{-1} J \text{Graph } T)^{\perp\perp} = \overline{-\text{Graph } T} = \overline{\text{Graph } T}. \quad \square \end{aligned}$$

12.9 Folgerung. *Es sei T abgeschlossen und dicht-definiert. Dann ist auch T^* abgeschlossen und dicht-definiert und es gilt $T^{**} = T$. \square*

12.10 Proposition. *Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ dicht-definiert. Dann ist*

$$(\text{Bild } T)^\perp = \text{Ker } T^*.$$

Falls T zusätzlich abgeschlossen ist, so ist

$$(\text{Bild } T^*)^\perp = \text{Ker } T.$$

Beweis. (\subseteq) Falls $g \perp \text{Bild } T$, dann gilt $\langle f, 0 \rangle = 0 = \langle Tf, g \rangle$ für alle $f \in \text{Dom } T$. Also ist $g \in \text{Dom } T^*$ und $T^*g = 0$.

(\supseteq) Es sei $g \in \text{Ker } T^*$. Für alle $f \in \text{Dom } T$ gilt dann $\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^*g \rangle = \langle f, 0 \rangle = 0$.

Nach Folgerung (12.9) ist $T^{**} = T$ für abgeschlossenes, dicht-definiertes T und somit folgt die zweite Gleichung von der ersten. \square

12.11 Satz vom abgeschlossenen Bild. *Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein dicht-definierter, abgeschlossener Operator. Dann ist $\text{Bild } T$ genau dann abgeschlossen, wenn $\text{Bild } T^*$ es ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß wir im Beweis T durch einen beschränkten Operator S ersetzen können. Sei dazu $S : H_1 \times H_2 \supseteq \text{Graph } T \rightarrow H_2$ die Projektion auf

den 2.ten Faktor. Wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 H_1 \supseteq \text{Dom } T & \xrightarrow{T} & \text{Bild } T \subseteq H_2 & & \\
 & \searrow \text{pr}_1 & \nearrow S & & \\
 & & \text{Graph } T & & \\
 & \swarrow \text{pr}_1 & \searrow \text{pr}_2 & & \\
 & & H_1 \oplus H_2 & &
 \end{array}$$

$\downarrow \iota \mid \cap$

Wir zeigen nun, daß für das Bild des adjungierten Operators

$$S^* : H_2^* \rightarrow (\text{Graph } T)^* = (H_1^* \oplus H_2^*) / (\text{Graph } T)^\circ$$

folgendes gilt:

$$(\iota^*)^{-1}(\text{Bild } S^*) = \text{Bild } T^* \oplus H_2^* \subseteq H_1^* \oplus H_2^*.$$

$$\begin{aligned}
 & f^* \oplus g^* \in (\iota^*)^{-1}(\text{Bild } S^*) \\
 \Leftrightarrow & (f^* \oplus g^*)|_{\text{Graph } T} =: \iota^*(f^* \oplus g^*) \in \text{Bild } S^* \\
 \Leftrightarrow & \exists h^* \in H_2^* : (f^* \oplus g^*)|_{\text{Graph } T} = S^*(h^*) \\
 \Leftrightarrow & \exists h^* \in H_2^* \forall f \in \text{Dom } T : \underbrace{(f^* \oplus g^*)(f \oplus Tf)}_{f^*(f) + g^*(Tf)} = \underbrace{S^*(h^*)(f \oplus Tf)}_{h^*(Tf)} \\
 \Leftrightarrow & \exists h^* \in H_2^* \forall f \in \text{Dom } T : f^*(f) = (h^* - g^*)(Tf) \\
 & \text{d.h. } h^* - g^* \in \text{Dom } T^*, T^*(h^* - g^*) = f^* \\
 \Leftrightarrow & \exists h^* \in g^* + \text{Dom } T^* : T^*(h^* - g^*) = f^* \\
 \Leftrightarrow & f^* \oplus g^* \in \text{Bild } T^* \oplus H_2^*,
 \end{aligned}$$

Wobei das letzte (\Leftrightarrow) so folgt: $\exists k^* \in \text{Dom } T^* : f^* = T^*k^*$. Nun wähle $h^* = g^* + k^*$.

Da ι eine abgeschlossene Einbettung ist, ist ι^* eine Quotientenabbildung nach (7.15), und somit ist $\text{Bild } S^*$ genau dann abgeschlossen, wenn $(\iota^*)^{-1}(\text{Bild } S^*) = \text{Bild } T^* \oplus H_2^*$, oder äquivalent $\text{Bild } T^*$, es ist. Wegen $\text{Bild } T = \text{Bild } S$ genügt es den Satz für den beschränkten Operator S zu zeigen.

(\Rightarrow) Sei also $T : H_1 \rightarrow H_2$ ein beschränkter linearer Operator mit abgeschlossenem Bild. Da die Adjungierte der Inklusion $\text{Bild } T \rightarrow H_2$ nach Hahn-Banach surjektiv ist, dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß T surjektiv ist. Nach dem offenen Abbildungssatz existiert ein $\delta > 0$ mit $\{g : \|g\| \leq \delta\} \subseteq \{Tf : \|f\| \leq 1\}$. Also existiert zu $g \in H_2$ ein $f \in T^{-1}(g)$ mit $\|f\| \leq \frac{\|g\|}{\delta}$. Für alle $g^* \in H_2^*$ erhalten wir somit

$$|g^*(g)| = |g^*(Tf)| = |T^*g^*(f)| \leq \|f\| \|T^*g^*\| \leq \frac{\|g\|}{\delta} \|T^*g^*\|.$$

Folglich ist $\|g^*\| \leq \frac{1}{\delta} \|T^*g^*\|$. Also ist $T^* : H_2^* \rightarrow H_1^*$ injektiv und eine Homöomorphismus auf sein Bild und damit ist $\text{Bild } T^*$ abgeschlossen.

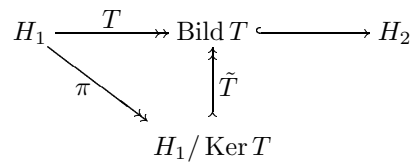
Da $T^{**} = T$ nach (12.9) ist, gilt auch die Umkehrung. \square

Dieser Satz gilt auch für Banach-Räume.

Beweis für Banach-Räume. (\Rightarrow) Im obigen Beweis haben wir nirgends verwendet, daß die Räume Hilbert-Räume.

(\Leftarrow) Sei also $T : H_1 \rightarrow H_2$ ein beschränkter linearer Operator und $T^* : H_2^* \rightarrow H_1^*$ habe abgeschlossenes Bild. Wir ersetzen T durch Operator $T_1 : H_1 \rightarrow \overline{\text{Bild } T}$. Da $T = \iota \circ T_1$ wobei ι die abgeschlossene Inklusion von $\overline{\text{Bild } T}$ nach H_2 bedeutet, ist $T^* = T_1^* \circ \iota^*$ und ι^* ist surjektiv. Also hat T_1^* das gleiche abgeschlossene Bild wie T^* und wir müssen nur zeigen, daß T_1 surjektiv ist. Sei also o.B.d.A. $T = T_1$, d.h. T habe dichtes Bild.

Es ist $T^* : H_2^* \rightarrow H_1^*$ injektiv, denn $T^*g^* = 0$ hat zur Folge, daß $\langle Tf, g^* \rangle = \langle f, T^*g^* \rangle = 0$. Da das Bild von T dicht liegt in H_2 ist $g^* = 0$. Nach dem offenen Abbildungssatz ist $T^* : H_2^* \rightarrow \text{Bild } T^*$ ein Homöomorphismus auf sein abgeschlossenes Bild. Um zu zeigen, daß T surjektiv ist, wenden wir wie im Beweis des Satzes von der offenen Abbildung den Satz vom abgeschlossenen Graphen auf die Inverse $S := \tilde{T}^{-1}$ der injektiven Abbildung $\tilde{T} : H_1/\text{Kern } T \rightarrow H_2$ an.



Im Beweis des Satzes vom abgeschlossenen Graphen haben wir die nicht-Magerheit von $G := \text{Bild } T$ nur dazu benutzt, um zu zeigen, daß S fast stetig ist, d.h. für alle $\delta > 0$ der Abschluß von $S^{-1}(\{z : \|z\| \leq \delta\}) = T(\{x : \|x\| \leq \delta\})$ eine Nullumgebung enthält. Es genügt also dies zu zeigen.

Angenommen es gäbe ein $\delta > 0$, so daß der Abschluß des Bildes des Balles $\{Tx : \|x\| \leq \delta\}$ keine 0-Umgebung enthält. D.h. $\exists y_n \notin \overline{\{Tx : \|x\| \leq \delta\}}$ mit $y_n \rightarrow 0$. Da dieser Abschluß absolut-konvex ist, existiert nach Mazur's Lemma (7.16) ein stetig lineares Funktional f_n mit $f_n(y_n) > \sup_{\|x\| \leq \delta} |f_n(Tx)| = \sup_{\|x\| \leq \delta} |T^*(f_n)(x)|$. Folglich ist $\|T^*f_n\| < \frac{1}{\delta} \|f_n\| \|y_n\|$ und wegen $y_n \rightarrow 0$ folgt, daß T^* kein Homöomorphismus auf sein Bild sein kann, ein Widerspruch. \square

Invertierbarkeit und Spektrum

12.12 Definition. Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann heißt T BESCHRÄNKT INVERTIERBAR, falls ein beschränkter linearer Operator $S : H_2 \rightarrow H_1$ existiert mit $TS = 1$ und $ST \subseteq 1$, d.h. $ST = 1$ auf $\text{Dom } T$ (denn $\text{Dom}(ST) = T^{-1}(\text{Dom}(S)) = \text{Dom } T$). Achtung: diese Definition ist recht unsymmetrisch!

12.13 Proposition. Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein linearer Operator. Dann ist T genau dann beschränkt invertierbar, wenn T abgeschlossen ist und $T : \text{Dom } T \rightarrow H_2$ bijektiv ist. Unter diesen Voraussetzungen, ist sein Inverses eindeutig.

Wir werden die eindeutig bestimmte Inverse eines beschränkt invertierbaren Operators T mit T^{-1} bezeichnen.

Beweis. (\Rightarrow) Es sei S ein beschränktes Inverses. Da $ST \subseteq 1$ ist $\text{Ker } T = \{0\}$. Wegen $TS = 1$ ist $\text{Bild } T = H_2$, d.h. T ist bijektiv und $S : H_2 \rightarrow \text{Dom } T$ das Inverse zu $T : \text{Dom } T \rightarrow H_2$ ist, denn $TS = 1$ und $ST = 1$ auf $\text{Dom } T$. Also ist S

eindeutig. Schließlich ist $\text{Graph } T = \{h \oplus Th : h \in \text{Dom } T\} = \{Sk \oplus k : k \in H_2\}$. Da S beschränkt ist, ist folglich dieser Graph abgeschlossen.

(\Leftarrow) Falls T die angegebenen Eigenschaften besitzt, so ist die Inverse $S : \text{Bild } T = H_2 \rightarrow \text{Dom } T$ eine wohldefinierte lineare Abbildung mit $\text{Graph } S = \{k \oplus Sk : k \in H_2\} = \{Th \oplus h : h \in \text{Dom } T\}$. Also ist dieser Graph abgeschlossen. Und nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist S beschränkt. \square

Lemma. *Es sei $T : H_1 \rightsquigarrow H_2$ ein dicht-definierter, abgeschlossener Operator. Dann ist T genau dann beschränkt invertierbar, wenn T^* es ist. Unter dieser Bedingung ist $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Beweis. (\Rightarrow) Sei also T beschränkt invertierbar, und $S : H_2 \rightarrow \text{Dom } T \subseteq H_1$ die beschränkte Inverse. Dann ist $S^* \in L(H_1^*, H_2^*)$ wohldefiniert.

($S^* T^* \subseteq 1$) Sei $k \in \text{Dom}(S^* T^*) = \text{Dom}(T^*)$. Für $g \in \text{Dom } S = H_2$ gilt

$$\langle g, S^* T^* k \rangle = \langle Sg, T^* k \rangle \stackrel{Sg \in \text{Dom } T}{=} \langle T Sg, k \rangle = \langle g, k \rangle.$$

($T^* S^* = 1$) Es sei $h \in H_1$. Dann ist $S^* h \in \text{Dom } T^*$, denn $f \mapsto \langle T f, S^* h \rangle = \langle S T f, h \rangle = \langle f, h \rangle$ ist beschränkt. Für alle $f \in \text{Dom } T$ gilt weiters $\langle f, T^* S^* h \rangle = \langle T f, S^* h \rangle = \langle S T f, h \rangle = \langle f, h \rangle$, also ist $T^* S^* = 1$.

(\Leftarrow) Mit T^* ist wegen (\Rightarrow) auch T^{**} beschränkt invertierbar, und dies ist T nach (12.9). \square

12.14 Definition. Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein linearer Operator. Unter der Resolventen-Menge $\rho(T)$ versteht man die Menge

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ ist beschränkt invertierbar}\}.$$

Das Spektrum von T ist die Menge $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. Wir werden gleich begründen, warum im Unterschied zu beschränkten Operatoren nun $\rho(T)$ als Teilmenge von \mathbb{C} und nicht \mathbb{C}_∞ definiert ist.

12.15 Proposition. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein linearer Operator, so ist $\sigma(T)$ abgeschlossen in \mathbb{C} und die Resolventen-Funktion $z \mapsto (z - T)^{-1}$ ist holomorph $\rho(T) \rightarrow L(H)$.*

Beweis. Es sei $\lambda_0 \in \rho(T)$ und $(\lambda_0 - T)^{-1}$ das beschränkte Inverse. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} (\lambda - T)^{-1} &:= \frac{1}{(\lambda_0 - T) - (\lambda_0 - \lambda)} := (\lambda_0 - T)^{-1} \frac{1}{1 - (\lambda_0 - \lambda)(\lambda_0 - T)^{-1}} \\ &:= (\lambda_0 - T)^{-1} \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1} \right)^k \\ &= \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1} \right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Diese Reihe konvergiert absolut für $|\lambda_0 - \lambda| < \frac{1}{\|(\lambda_0 - T)^{-1}\|}$ und $(\lambda - T)^{-1}$ hat Werte in $\text{Bild}(\lambda_0 - T)^{-1} = \text{Dom } T$. Es ist

$$\begin{aligned} &(\lambda_0 - T)^{-1} \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1} \right)^k (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - T) \\ &= - \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} \left((\lambda_0 - T)^{-1} \right)^{k+1} + \sum_{k \geq 0} (\lambda_0 - \lambda)^k \left((\lambda_0 - T)^{-1} \right)^k = 1 \end{aligned}$$

auf $\text{Dom } T$. Analog zeigt man, daß auf ganz H auch die umgekehrte Zusammensetzung 1 ergibt. Also ist $\rho(T)$ offen und die Resolventen-Funktion lokal in eine Potenzreihe mit Koeffizienten in $L(H)$ entwickelbar. \square

Bemerkung. Wenn $T : H \rightsquigarrow H$ ein linearer Operator ist und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist $\text{Graph } T$ genau dann abgeschlossen, wenn die durch Scherung mit $(x, y) \mapsto (x, y - \lambda x)$ erhaltene Menge $\text{Graph}(T - \lambda)$ abgeschlossen ist. Also ist für nicht abgeschlossene Operatoren das Spektrum ganz \mathbb{C} .

Falls T definiert ist, wie in Beispiel (12.4), so ist $\sigma(T) = \overline{\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}}$, denn jedes λ_n ist Eigenwert und nach (12.15) ist $\sigma(T)$ abgeschlossen. Umgekehrt ist für μ mit $\delta := d(\mu, \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}) > 0$ die Abbildung $T - \mu$ gegeben durch $(x_n)_n \mapsto ((\lambda_n - \mu)x_n)_n$ offensichtlich injektiv und abgeschlossen. Sie ist aber auch surjektiv, denn für $(y_n)_n \in \ell^2$ ist wegen $(\frac{1}{\lambda_n - \mu})_n \in \ell^\infty$ ein Urbild durch $x_n := \frac{1}{\lambda_n - \mu} y_n$ gegeben.

Also kann jede abgeschlossene Menge $A \neq \emptyset$ als Spektrum eines abgeschlossenen dicht-definierten linearen Operators T auftreten, denn wählt man Zerlegungen von \mathbb{C} in Quader mit Seitenlänge $\frac{1}{2^n}$ und für jeden Quader die A trifft einen Punkt aus A , so enthält eine abzählbare in A dichte Teilmenge $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ und kann als T den entsprechenden Multiplikations-Operator wählen.

Es kann aber auch $\sigma(T) = \emptyset$ sein. Sei dazu ein $S \in L(H)$ mit dichten Bild und $\sigma(S) = \{0\}$ gegeben (siehe Beispiel (12.16)). Wir setzen $\text{Dom } T := \text{Bild } S$ und $T := S^{-1} : \text{Bild } S \rightarrow H$. Dann ist T abgeschlossen, dicht definiert und beschränkt invertierbar mit $T^{-1} = S$. Wir zeigen nun, daß auch alle $\lambda \neq 0$ in $\rho(T)$ liegen. Dazu machen wir wie in (12.15) den Ansatz

$$(\lambda - T)^{-1} := -T^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda T^{-1})^k = -S \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k S^k.$$

Diese Reihe konvergiert absolut in $L(H)$ für alle λ auch dem Wurzelkriterium, denn $\sqrt[k]{\|\lambda^k S^k\|} = |\lambda| \|S^k\|^{1/k} \rightarrow \|\lambda\| r(S) = 0$ nach (9.26). Daß sie ein Inverses zu $\lambda - T$ ist, folgt wie in (12.15).

12.16 Beispiel. Es sei $T \in L(\ell^2(\mathbb{Z}))$ gegeben durch $(Tx)_n := e^{-n^2} x_{n-1}$, d.h. als Zusammensetzung des Shift-Operators mit dem Multiplikations-Operator mit $n \mapsto e^{-n^2}$.

Da alle $e_n \in \text{Bild } T$, ist $\text{Bild } T$ dicht in ℓ^2 .

Wir zeigen nun $\sigma(T) = \{0\}$, d.h. $0 = r(T) = \lim_k \|T^k\|^{1/k}$ nach (9.26). Offensichtlich ist

$$(T^k x)_n = e^{-n^2} e^{-(n-1)^2} \dots e^{-(n-k+1)^2} x_{n-k}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|T^k x\|_2^2 &= \sum_n \|(T^k x)_n\|^2 \\ &= \sum_n \left| e^{-n^2} e^{-(n-1)^2} \dots e^{-(n-k+1)^2} x_{n-k} \right|^2 \quad (m := n - k) \\ &= \sum_m e^{-2((m+k)^2 + \dots + (m+1)^2)} |x_m|^2 \\ &\leq e^{-(k-1)^2} |x_m|^2, \quad \text{für } k \geq 2 \end{aligned}$$

denn $(m+k)^2 + \dots + (m+1)^2 \geq (m+k) + (m+1)^2 = 2(m + \frac{k-1}{2})^2 + \frac{(k-1)^2}{2} \geq \frac{(k-1)^2}{2}$.
 Also ist $\|T^k\| \leq e^{-(k-1)^2/2}$ und $r(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|T^k\|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-\frac{(k-1)^2}{2k}} = 0$.

12.17 Proposition. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener, dicht-definierter linearer Operator. Dann gilt:*

- 1 $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $(T - \lambda) : \text{Dom } T \rightarrow H$ bijektiv ist.
- 2 Es ist $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$ und für $\lambda \in \rho(T)$ gilt $(T^* - \bar{\lambda})^{-1} = ((T - \lambda)^{-1})^*$.

Beweis. Nach (12.13) ist $T - \lambda$ genau dann beschränkt invertierbar, wenn $T - \lambda$ bijektiv ist von $\text{Dom}(T - \lambda) = \text{Dom } T$ nach H und der Graph abgeschlossen ist. Das zeigt (1).

(2) Es gilt nach dem Lemma in (12.13)

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma(T) &\Leftrightarrow T - \lambda \text{ ist beschränkt invertierbar} \\ &\Leftrightarrow T^* - \bar{\lambda} = (T - \lambda)^* \text{ ist beschränkt invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \bar{\lambda} \notin \sigma(T^*) \end{aligned}$$

und für solche λ ist $(T^* - \bar{\lambda})^{-1} = ((T - \lambda)^*)^{-1} = ((T - \lambda)^{-1})^*$. \square

Symmetrische und selbstadjungierte Operatoren

12.18 Definition. Ein Operator $T : H \rightsquigarrow H$ heißt SYMMETRISCH, falls er dicht-definiert ist und $\langle Th, k \rangle = \langle h, Tk \rangle$ für alle $h, k \in \text{Dom } T$ erfüllt.

Lemma. *Es sei*

$$T(u)(x) := \sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(a_{j,k}(x) \frac{\partial}{\partial x^k} u(x) \right) + c(x) u(x)$$

ein partieller Differential-Operator der Ordnung 2 mit reellen C^2 -Funktionen c und $a_{j,k} = a_{k,j}$ als Koeffizienten. Dann ist T symmetrisch als Operator mit $\text{Dom } T := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$ oder falls $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand ∂G ist auch als Operator T mit $\text{Dom } T := \{f \in C^\infty(\bar{G}) : f|_{\partial G} = 0\} \subseteq L^2(\bar{G})$.

Beweis. Nach (12.6) ist der transponierte Operator $T^t = T$ und erfüllt

$$\int_G T(u) \cdot v = \int_G u \cdot T^t(v),$$

also ist für $v = \bar{w}$ auch

$$\langle T(u), w \rangle = \int_G T(u) \cdot v = \int_G u \cdot Tv = \langle u, \overline{T(v)} \rangle = \langle u, T(w) \rangle,$$

da T reelle Koeffizienten hat. D.h. T ist symmetrisch. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{j,k}(x) \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} a_{j,k}(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) + a_{j,k}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} u(x)$$

und somit der formal adjungierte Differential-Operator T^* auf $v \in C^2$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 T^*(v)(x) &:= \sum_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} \left(v(x) a_{j,k}(x) \right) \\
 &\quad - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v(x) \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} a_{k,j}(x) \right) + c(x) v(x) \\
 &= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_k \partial x_j} a_{j,k}(x) + \frac{\partial v(x)}{\partial x_k} \frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_j} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 a_{j,k}(x)}{\partial x_k \partial x_j} v(x) \right) \\
 &\quad - \sum_{j,k} \left(\frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \frac{\partial a_{k,j}(x)}{\partial x_k} + v(x) \frac{\partial^2 a_{k,j}(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right) + c(x) v(x) \\
 &= \sum_{j,k} \left(a_{j,k}(x) \frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} \frac{\partial a_{j,k}(x)}{\partial x_k} \right) + c(x) v(x) \\
 &= T(v)(x). \quad \square
 \end{aligned}$$

12.19 Lemma. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ dicht-definiert. Dann sind äquivalent:*

- 1 T ist symmetrisch;
- 2 $T \subseteq T^*$.
- 3 $\langle Th, h \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $h \in \text{Dom } T$;

Beweis. $(1) \Leftrightarrow (2)$, denn

$$\begin{aligned}
 (2) &\Leftrightarrow \forall g \in \text{Dom } T : g \in \text{Dom } T^* \text{ und } T^*g = Tg \\
 &\Leftrightarrow \forall g \in \text{Dom } T : f \mapsto \langle Tf, g \rangle \text{ ist beschränkt auf } \text{Dom } T \\
 &\quad \text{und } \forall f \in \text{Dom } T : \langle Tf, g \rangle = \langle f, Tg \rangle \\
 &\Leftrightarrow (1),
 \end{aligned}$$

denn die zweite Bedingung der vorletzten Zeile impliziert offensichtlich die erste.

$$(1) \Leftrightarrow (3)$$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \forall f, g \in \text{Dom } T : p(f, g) := \langle Tf, g \rangle - \langle f, Tg \rangle = 0 \\
 &\Leftrightarrow \forall f \in \text{Dom } T : 0 = p(f, f) = \langle Tf, f \rangle - \overline{\langle Tf, f \rangle} \\
 &\Leftrightarrow \forall f \in \text{Dom } T : \langle Tf, f \rangle \in \mathbb{R},
 \end{aligned}$$

wegen der Polarisierungs-Gleichung (10.3) für die sesqui-lineare Form $p : \text{Dom } T \times \text{Dom } T \rightarrow \mathbb{C}$. \square

12.20 Definition. Es muß für einen symmetrischen Operator T nicht $\text{Dom } T = \text{Dom } T^*$ gelten, siehe Beispiel (12.5). Also nennen wir einen dicht-definierten Operator $T : H \rightsquigarrow H$ SELBST-ADJUNGIIERT, falls $T = T^*$. Insbesondere ist jeder selbst-adjungierte Operator symmetrisch. Folgerung (12.8) zeigt, daß jeder selbst-adjungierte Operator abgeschlossen ist.

Auch muß der Adjungierte eines symmetrischen Operators nicht symmetrisch sein: In Beispiel (12.5) haben wir gesehen, daß $T_0^* \supset T_1^* = T_1 \supset T_0 = T_0^{**}$ auch (12.9). Also nennen wir einen dicht-definierten Operator $T : H \rightsquigarrow H$ ESSENTIELL SELBST-ADJUNGIIERT, falls T und T^* symmetrisch sind.

Lemma. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein dicht-definierter Operator. Dann gilt:*

- 1 *Es ist T genau dann essentiell selbstadjungiert, wenn T^* selbst-adjungiert ist.*
- 2 *Falls T symmetrisch ist, so ist T^{**} eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung von T , insbesondere ist T abschließbar.*

Beweis. (1) (\Rightarrow) Da T symmetrisch ist gilt $T \subseteq T^*$. Daraus folgt leicht $T^* \supseteq (T^*)^* = T^{**}$. Da T^* symmetrisch ist, gilt auch die umgekehrte Inklusion.

(\Leftarrow) Wenn T^* selbst-adjungiert ist, so ist $T^* = T^{**} \supseteq T$ nach (12.8.3), also ist T als Einschränkung von T^* ebenfalls symmetrisch.

(2) Da T dicht-definiert ist, macht T^* Sinn. Und weil T symmetrisch ist gilt $\text{Dom } T \subseteq \text{Dom } T^*$. Also ist auch T^* dicht-definiert und somit macht T^{**} Sinn und ist ein abgeschlossener Operator auch (12.8).

Da $\text{Dom } T \subseteq \text{Dom } T^{**}$ ist auch T^{**} dicht-definiert. Somit macht T^{***} Sinn. Aus $T \subseteq T^*$ folgt $T^* \supseteq T^{**}$ und schließlich $T^{**} \subseteq T^{***}$, also ist T^{**} symmetrisch und nach (12.8) eine abgeschlossene Erweiterung von T . \square

12.21 Proposition. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein symmetrischer Operator.*

- 1 *Falls $\text{Bild } T$ dicht ist, so ist T injektiv.*
- 2 *Falls T selbst-adjungiert und injektiv ist, so ist $\text{Bild } T$ dicht und T^{-1} ebenfalls selbst-adjungiert.*
- 3 *Ist $\text{Dom } T = H$, so ist T selbst-adjungiert und T beschränkt.*
- 4 *Ist $\text{Bild } T = H$, so ist T selbst-adjungiert und T^{-1} beschränkt.*

Beweis. (1) Es sei $Th = 0$, dann ist $0 = \langle Th, k \rangle = \langle h, Tk \rangle$ für alle $k \in \text{Dom } T$ und da $\text{Bild } T = T(\text{Dom } T)$ dicht ist, ist $h = 0$.

(2) Wegen (12.10) ist $(\text{Bild } T)^\perp = \text{Ker } T^* = \text{Ker } T = \{0\}$, d.h. $\text{Bild } T$ ist dicht. Es ist ein Operator S genau dann selbst-adjungiert, wenn $\text{Graph } S = \text{Graph } S^* = (J \text{Graph } S)^\perp$ nach (12.7). Weiters ist

$$\begin{aligned} \text{Graph}(T^{-1}) &= \{(g, T^{-1}g) : g \in \text{Dom}(T^{-1}) = \text{Bild } T\} = \{(Tf, f) : f \in \text{Dom } T\} \\ &= J \text{Graph}(-T). \end{aligned}$$

Wegen $(-T)^* = -T^* = -T$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} (J \text{Graph } T^{-1})^\perp &= (J J \text{Graph}(-T))^\perp \\ &= J((J \text{Graph}(-T))^\perp) \\ &= J(\text{Graph}(-T)) \\ &= \text{Graph}(T^{-1}), \end{aligned}$$

und somit ist T^{-1} selbst-adjungiert.

(3) Nach (12.19) ist $T \subseteq T^*$ und falls $\text{Dom } T = H$, so ist $T = T^*$ und damit somit nach (12.8) abgeschlossen. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist dann aber T beschränkt.

(4) Falls $\text{Bild } T = H$ so ist T injektiv nach (1). Sei $S := T^{-1}$ mit $\text{Dom } S = \text{Bild } T = H$. Es ist S symmetrisch, denn für $f, g \in \text{Dom } S$, d.h. $f = Th$ und $g = Tk$ mit $h, k \in \text{Dom } T$, ist $\langle Sf, g \rangle = \langle h, Tk \rangle = \langle Th, k \rangle = \langle f, Sg \rangle$. Nach (3) ist S ein beschränkter selbst-adjungierter injektiver Operator und nach (2) ist $T = S^{-1}$ selbst-adjungiert. \square

Spektrum symmetrischer Operatoren

Wir müssen die $\lambda \in \rho(T)$ für symmetrisches T untersuchen. Nach (12.17) ist das für abgeschlossenes T zur Bijektivität von $T - \lambda : \text{Dom } T \rightarrow H$ äquivalent, also sollten wir $\text{Ker}(T - \lambda)$ und $\text{Bild}(T - \lambda)$ bestimmen. Dazu

12.22 Proposition. *Es sei T symmetrisch und $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- 1 Für alle $f \in \text{Dom } T$ ist $\|(T - \lambda)f\|^2 = \|(T - \alpha)f\|^2 + \beta^2\|f\|^2$.
- 2 Für $\beta \neq 0$ ist $\text{Ker}(T - \lambda) = \{0\}$.
- 3 Falls T abgeschlossen ist und $\beta \neq 0$ ist, so ist $\text{Bild}(T - \lambda)$ abgeschlossen.

Beweis. (1) Es gilt:

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda)f\|^2 &= \|(T - \alpha)f - i\beta f\|^2 \\ &= \|(T - \alpha)f\|^2 + 2\Re(\langle (T - \alpha)f, i\beta f \rangle) + \|\beta f\|^2 \\ &= \|(T - \alpha)f\|^2 + 2\beta \Im(\langle (T - \alpha)f, f \rangle) + \beta^2\|f\|^2. \end{aligned}$$

Wegen $\langle (T - \alpha)f, f \rangle = \langle Tf, f \rangle - \alpha\|f\|^2 \in \mathbb{R}$ folgt (1).

(2) folgt direkt aus (1).

(3) Es ist $\|(T - \lambda)f\|^2 \geq \beta^2\|f\|^2$. Sei nun $f_n \in \text{Dom } T$ mit $(T - \lambda)f_n \rightarrow g$. Wegen der Ungleichung ist f_n eine Cauchy-Folge. Sei $f := \lim_n f_n$. Da $f_n \oplus (T - \lambda)f_n \in \text{Graph}(T - \lambda)$ und $f_n \oplus (T - \lambda)f_n \rightarrow f \oplus g$, folgt $f \oplus g \in \text{Graph}(T - \lambda)$, da der Graph von $(T - \lambda)$ abgeschlossen ist, also ist $g = (T - \lambda)f \in \text{Bild}(T - \lambda)$. \square

12.23 Proposition. *Es sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann ist $\lambda \mapsto \dim \text{Ker}(T^* - \lambda)$ lokal konstant auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.*

Dabei bezeichne \dim die VEKTORRAUM-DIMENSION, d.h. die Kardinalität einer HAMEL-BASIS. Beachte, daß nach (12.10) $\text{Ker}(T^* - \lambda) = (\text{Bild}(T - \bar{\lambda}))^\perp$ und somit $T - \lambda$ genau dann surjektiv ist, wenn $\dim \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}) = 0$ ist.

Sublemma. *Es seien H_1 und H_2 abgeschlossene Teilräume von H mit $H_1 \cap H_2^\perp = \{0\}$. Dann ist $\dim H_1 \leq \dim H_2$.*

Beweis. Es sei P die orthogonal-Projektion von H auf H_2 . Wegen $H_1 \cap H_2^\perp = \{0\}$ ist die Einschränkung $P|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_2$ injektiv. Folglich ist $\dim H_2 \geq \dim P(H_1) = \dim H_1$. \square

Beweis von (12.23). Es sei $\lambda = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta \neq 0$. Wir behaupten, daß $\text{Ker}(T^* - \mu) \cap \text{Ker}(T^* - \lambda)^\perp = \{0\}$ für $|\lambda - \mu| < |\beta|$:

Angenommen nicht. Dann existiert ein $f \in \text{Ker}(T^* - \mu) \cap (\text{Ker}(T^* - \lambda))^\perp$ mit $\|f\| = 1$. Nach (12.10) ist $f \in (\text{Ker}(T^* - \lambda))^\perp = \text{Bild}(T - \bar{\lambda})$ und nach (3) in (12.22)

ist $\text{Bild}(T - \bar{\lambda})$ abgeschlossen. Es existiert also ein $g \in \text{Dom } T$ mit $f = (T - \bar{\lambda})g$. Da $f \in \text{Ker}(T^* - \mu)$ ist, gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T^* - \mu)f, g \rangle = \langle f, (T - \bar{\mu})g \rangle = \langle f, (T - \bar{\lambda} + \bar{\lambda} - \bar{\mu})g \rangle \\ &= \|f\|^2 + (\lambda - \mu)\langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $1 = \|f\|^2 = |\lambda - \mu| |\langle f, g \rangle| \leq |\lambda - \mu| \|g\|$. Aus (1) in (12.22) folgt $1 = \|f\| = \|(T - \bar{\lambda})g\| \geq |\beta| \|g\| > |\lambda - \mu| \|g\| \geq 1$, ein Widerspruch.

Aus der Behauptung folgt mittels des Sublemmas, daß $\dim \text{Ker}(T^* - \mu) \leq \dim \text{Ker}(T^* - \lambda)$ falls $|\lambda - \mu| < |\beta| = |\mathfrak{I}m(\lambda)|$. Falls $|\lambda - \mu| < \frac{1}{2}|\beta|$, so ist $|\mathfrak{I}m(\lambda) - \mathfrak{I}m(\mu)| \leq |\lambda - \mu| < \frac{1}{2}|\beta| = \frac{1}{2}|\mathfrak{I}m(\lambda)|$, also $|\mathfrak{I}m(\mu)| \geq \frac{1}{2}|\mathfrak{I}m(\lambda)|$ und somit gilt wegen $|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}|\mathfrak{I}m(\lambda)| \leq \mathfrak{I}m(|\mu|)$ auch die andere Ungleichung. Das zeigt, daß $\lambda \mapsto \dim \text{Ker}(T^* - \lambda)$ lokal konstant ist auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. \square

12.24 Theorem. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:*

- 1 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$;
- 2 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}m(\lambda) \geq 0\}$;
- 3 $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathfrak{I}m(\lambda) \leq 0\}$;
- 4 $\sigma(T) = \mathbb{C}$.

Beweis. Es sei $\mathbb{C}_\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \mathfrak{I}m(\lambda) > 0\}$ die obere und untere offene Halbebene. Nach (12.22) ist $T - \lambda$ injektiv und hat abgeschlossenes Bild für alle $\lambda \in \mathbb{C}_\pm$. Nach (4) in (12.21) ist $\lambda \in \rho(T)$ genau dann, wenn $T - \lambda$ surjektiv ist. Weil $(\text{Bild}(T - \lambda))^\perp = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda})$ ist nach (12.10), ist nach dem vorigen Satz (12.23) entweder $\mathbb{C}_\pm \cap \sigma(T) = \emptyset$ oder $\mathbb{C}_\pm \subseteq \sigma(T)$ (und damit auch $\overline{\mathbb{C}_\pm} \subseteq \sigma(T)$, da $\sigma(T)$ abgeschlossen ist). Also entweder gilt (1), d.h. $\sigma(T) \cap (\mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-) = \emptyset$ einer der 3 anderen Fälle, nämlich $\sigma(T) \in \{\overline{\mathbb{C}_{pm}}, \mathbb{C}\}$. \square

12.25 Folgerung. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- 1 T ist selbst-adjungiert;
- 2 $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$;
- 3 $\text{Ker}(T^* - i) = \{0\} = \text{Ker}(T^* + i)$.

Beweis. ((1) \Rightarrow (2)) Aus $T = T^*$ und $\mathfrak{I}m(\lambda) \neq 0$ folgt $\text{Bild}(T - \lambda)^\perp = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}) = \text{Ker}(T - \bar{\lambda}) = \{0\}$ nach (12.22.2). Da $\text{Bild}(T - \lambda)$ abgeschlossen ist nach (12.22.3), ist $T - \lambda : \text{Dom } T \rightarrow H$ bijektiv und folglich $\lambda \in \rho(T)$ nach (12.17). Also ist $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

((2) \Rightarrow (3)) Falls $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$, so ist $\pm i \in \rho(T)$, also $\text{Bild}(T \pm i) = H$ und somit $\text{Ker}(T^* \mp i) = \text{Bild}(T \mp i)^\perp = \{0\}$.

((3) \Rightarrow (1)) Nach (12.22.2) ist $T \pm i$ injektiv, und wegen $\text{Bild}(T \pm i)^\perp = \text{Ker}(T^* \mp i) = \{0\}$ nach (3) und, weil $\text{Bild}(T - \lambda)$ abgeschlossen ist nach (12.22.3), ist $T \pm i$ auch surjektiv. Wegen (12.13) ist also $T \pm i$ beschränkt invertierbar und nach (12.17) ebenso $T^* \mp i$. Sei $h \in \text{Dom } T^*$. Da $T + i$ invertierbar ist, existiert ein $f \in \text{Dom } T$ mit $(T + i)f = (T^* + i)h$. Aber $T^* + i \supseteq T + i$ und somit ist $(T^* + i)f = (T + i)f = (T^* + i)h$. Da $T^* + i$ injektiv ist, ist $h = f \in \text{Dom } T$, also ist $T = T^*$. \square

12.26 Folgerung. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Falls $\sigma(T)$ nicht \mathbb{R} enthält, so ist T selbst-adjungiert.*

Beweis. Es kann keiner der Fälle (12.24.2)–(12.24.4) eintreten, also ist $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ und nach (12.25) T selbstadjungiert. \square

Symmetrische Erweiterungen

Ein symmetrischer Operator T ist nicht selbstadjungiert, wenn sein Definitionsbereich im Vergleich zu jenem von T^* zu klein ist. Also sollten wir symmetrische Erweiterungen \tilde{T} von T untersuchen. Insbesondere interessiert uns die Frage ob eine selbstadjungierte Erweiterung existiert. Für jede symmetrische Erweiterung \tilde{T} von T ist $T \subseteq \tilde{T}$ und somit $\tilde{T}^* \subseteq T^*$, also $T \subseteq \tilde{T} \subseteq \tilde{T}^* \subseteq T^*$. Jede symmetrische Erweiterung von T ist also eine Einschränkung von T^* .

Die Folgerung (12.25) legt nahe für symmetrische Operatoren die Eigenräume von T^* zum Eigenwert $\pm i$ näher zu studieren. Dazu folgende Definition.

12.27 Definition. Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Die DEFIZIENZ-TEILRÄUME von T sind die Eigenräume von T^* zu Eigenwert $\pm i$:

$$D_+ := (\text{Bild}(T + i))^\perp = \text{Ker}(T^* - i) = \{f \in \text{Dom } T^* : T^*(f) = +i f\},$$

$$D_- := (\text{Bild}(T - i))^\perp = \text{Ker}(T^* + i) = \{f \in \text{Dom } T^* : T^*(f) = -i f\}.$$

Weiters seien G_\pm folgende abgeschlossene Teilräume von $H \oplus H$:

$$G_+ := \{f \oplus (+i f) : f \in D_+\} = \text{Graph}(+i) \cap \text{Graph}(T^*)$$

$$G_- := \{g \oplus (-i g) : g \in D_-\} = \text{Graph}(-i) \cap \text{Graph}(T^*).$$

Die Defizienz-Räume sind folglich auch abgeschlossen, denn $\text{pr}_1 : G_\pm \rightarrow D_\pm$ ist ein linearer Isomorphismus mit Inverser $f \mapsto f \oplus (\pm i f)$. Die DIMENSIONEN von D_\pm als Hilbert-Raum, d.h. die Kardinalität einer vollständigen Orthonormal-Basis, wird als DEFIZIENZ-INDIZES d_\pm bezeichnet.

Wir wollen nun für einen symmetrischen Operator T den Teil von T^* bestimmen, der über T hinausragt.

12.28 Lemma. *Es sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator, dann ist*

$$\text{Graph } T^* = \text{Graph } T \oplus G_+ \oplus G_- = \text{Graph}\left(T \oplus (+i)|_{D_+} \oplus (-i)|_{D_-}\right).$$

Insbesondere ist $\text{Dom } T^ = \text{Dom } T \oplus D_+ \oplus D_-$ eine direkte-Summen Zerlegung in nicht notwendig orthogonale Teilräume.*

Beweis. Es ist $G_\pm \perp \text{Graph } T$, denn für $f \in D_\pm$ und $h \in \text{Dom } T$ ist

$$\langle h \oplus Th, f \oplus (\pm i f) \rangle = \langle h, f \rangle \mp i \langle Th, f \rangle = \mp i \langle (T \pm i)h, f \rangle = 0,$$

da $D_\pm = \text{Bild}(T \pm i)^\perp$.

Es ist auch $G_+ \perp G_-$, denn für $f \in D_+$ und $g \in D_-$ gilt $\langle f \oplus i f, g \oplus (-i g) \rangle = \langle f, g \rangle - \langle i f, i g \rangle = 0$.

Da klarerweise $\text{Graph } T \oplus G_+ \oplus G_- \subseteq \text{Graph } T^*$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß diese Summe in $\text{Graph } T^*$ triviales orthogonales Komplement hat: Sei $h \in \text{Dom } T^*$ mit $h \oplus T^*h \perp \text{Graph } T \oplus G_+ \oplus G_-$. Wegen $h \oplus T^*h \perp \text{Graph } T$ gilt $0 = \langle h \oplus T^*h, f \oplus Tf \rangle = \langle h, f \rangle + \langle T^*h, Tf \rangle$ für alle $f \in \text{Dom } T$. Folglich ist $T^*h \in \text{Dom } T^*$ und $(T^*)^2h = -h$. Also ist $(T^* - i)(T^* + i)h = ((T^*)^2 + 1)h = 0$ und damit $g := (T^* + i)h \in D_+ = \text{Ker}(T^* - i)$. Folglich gilt $0 = \langle h \oplus T^*h, g \oplus ig \rangle = \langle h, g \rangle - i\langle T^*h, g \rangle = -i\langle (T^* + i)h, g \rangle = -i\|(T^* + i)h\|^2$, also $(T^* + i)h = 0$, d.h. $h \in D_-$. Aus Symmetrie-Gründen gilt auch $h \in D_+$. Also ist $h \in D_+ \cap D_- = \{0\}$.

Da $\text{pr}_1 : \text{Graph } T^* \rightarrow \text{Dom } T^*$ eine lineare Bijektion ist, folgt die direkte-Summen-Zerlegung von $\text{Dom } T^*$ sofort aus jener von $\text{Graph } T^*$. \square

12.29 Lemma. *Jeder symmetrische Operator T besitzt maximale symmetrische Erweiterungen. Jede solche Erweiterung \tilde{T} ist abgeschlossen. Jeder selbst-adjungierte Operator ist ein maximal symmetrischer Operator.*

Beweis. Daß jeder selbst-adjungierte Operator T maximal symmetrisch ist, folgt sofort daraus, daß jede symmetrische Erweiterung von T eine Einschränkung von $T^* = T$ ist.

Die Existenz maximal symmetrischer Erweiterungen folgt direkt aus dem Zorn'schen Lemma.

Sei nun \tilde{T} ein maximaler symmetrischer Operator. Da nach Lemma in (12.20) der Operator \tilde{T}^{**} eine abgeschlossene symmetrische Erweiterung von \tilde{T} ist, ist $\tilde{T} = \tilde{T}^{**}$ und somit \tilde{T} auch abgeschlossen. \square

12.30 Lemma. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann existiert eine Bijektion*

$$\{\tilde{T} \supseteq T : \tilde{T} \text{ abg., symm.}\} \cong \{F < D_+ \oplus D_- : T^*|_F \text{ abg., symm.}\},$$

d.h. die abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen \tilde{T} von T stehen in bijektiver Beziehung zu den Teilräumen F von $D_+ \oplus D_-$ für welche $T^*|_F$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator ist. Diese Relation zwischen \tilde{T} und F ist gegeben durch:

$$\text{Graph } \tilde{T} = \text{Graph } T \oplus \text{Graph}(T^*|_F).$$

Beweis. (\leftarrow) Es sei $F <$ solch ein Teilraum. Wir setzen $D := \text{Dom } T \oplus F \subseteq \text{Dom } T^*$ und $\tilde{T} := T^*|_D \subseteq T$. Dann ist \tilde{T} symmetrisch, denn für $f = f_0 + f_1$ und $g = g_0 + g_1$ mit $f_0, g_0 \in \text{Dom } T$ und $f_1, g_1 \in F$ ist

$$\begin{aligned} \langle \tilde{T}f, g \rangle &= \langle T^*f_0 + T^*f_1, g_0 + g_1 \rangle \\ &= \langle Tf_0, g_0 \rangle + \langle Tf_0, g_1 \rangle + \langle T^*f_1, g_0 \rangle + \langle T^*f_1, g_1 \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie von T und $T^*|_F$ und der Adjungiertheit von T^* zu T erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} &= \langle f_0, Tg_0 \rangle + \langle f_0, T^*g_1 \rangle + \langle f_1, Tg_0 \rangle + \langle f_1, T^*g_1 \rangle \\ &= \langle f, \tilde{T}g \rangle. \end{aligned}$$

Nach (12.37) ist $\text{Graph } \tilde{T} = \text{Graph } T \oplus \text{Graph}(T^*|_F)$ eine orthogonale Zerlegung, und da beide Summanden abgeschlossen sind, ist T abgeschlossen.

(\rightarrow) Sei $\tilde{T} \supseteq T$ abgeschlossen und symmetrisch. Dann ist $T \subseteq \tilde{T} \subseteq T^*$ und somit $\text{Graph } T \subseteq \text{Graph } \tilde{T} \subseteq \text{Graph } T^* = \text{Graph } T \oplus G_+ \oplus G_-$. Es sei $G := \text{Graph } \tilde{T} \cap (G_+ \oplus G_-)$ und $F := \text{pr}_1(G) \subseteq (D_+ \oplus D_-) \cap \text{Dom } \tilde{T}$. Dann ist $T^*|_F = \tilde{T}|_F$ ebenfalls symmetrisch und wegen $\text{Graph}(T^*|_F) = G$ ist $T^*|_F$ auch abgeschlossen.

Für $h \oplus \tilde{T}h \in \text{Graph } \tilde{T} \subseteq \text{Graph } T^*$ ist $h \oplus \tilde{T}h = (f \oplus Tf) + k$ mit $f \in \text{Dom } T$ und $k \in G_+ \oplus G_-$ nach (12.28). Und wegen $T \subseteq \tilde{T}$ ist $k \in \text{Graph } \tilde{T}$ und somit $k \in G$, also gilt $\text{Graph } \tilde{T} = \text{Graph } T \oplus \text{Graph}(T^*|_F)$.

Die beiden Zuordnungen sind invers zueinander, denn wenn $F := \text{pr}_1(\text{Graph } \tilde{T} \cap (G_+ \oplus G_-)) < D_+ \oplus D_-$ der zur Erweiterung \tilde{T} gehörende Teilraum, dann ist wegen der letzten Gleichung offensichtlich $\tilde{T} = T \cup T^*|_F = T^*|_{\text{Dom } T \oplus F}$. Und andererseits, wenn $\tilde{T} = T^*|_{\text{Dom } T \oplus F}$ die zum Teilraum F gehörende Erweiterung ist, so ist $G := \text{Graph } \tilde{T} \cap (G_+ \oplus G_-) = \text{Graph}(T^*|_F)$ und somit $F = \text{pr}_1(G)$. \square

12.31 Theorem. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Dann existiert eine Bijektion*

$$\begin{aligned} & \{\tilde{T} \supseteq T : \tilde{T} \text{ abg.,symm.}\} \cong \\ & \cong \{U : U \text{ ist part. Iso. mit initial-Raum } I_+ \subseteq D_+ \text{ und final-Raum } I_- \subseteq D_-\}, \end{aligned}$$

d.h. die abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen \tilde{T} von T und stehen in Bijektion zu den partiellen Isometrien U mit initial-Raum $I_+ \subseteq D_+$ und final-Raum $I_- \subseteq D_-$. Diese Relation zwischen \tilde{T} und U ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{Dom } \tilde{T} &= \{h + k + Uk : h \in \text{Dom } T, k \in I_+\} \\ \tilde{T}(h + k + Uk) &= Th + ik - iUk. \end{aligned}$$

Für die Defizienz-Indizes gilt $d_{\pm}(\tilde{T}) + \dim I_{\pm} = d_{\pm}(T)$.

Beweis. Wegen (12.30) genügt es eine Bijektion zwischen Teilräumen $F < D_+ \oplus D_-$ mit $T^*|_F$ symmetrisch und abgeschlossen und den angegebenen partiellen Isometrien U zu beschreiben.

(\rightarrow) Es sei F ein Teilraum von $D_+ \oplus D_-$ mit $T^*|_F$ abgeschlossen und symmetrisch. Wir wollen zeigen, daß F der Graph einer (eindeutigen) Isometrie $U : I_+ \rightarrow I_-$ mit $I_{\pm} \subseteq D_{\pm}$ ist. Für $f \in F$ sei $f = f^+ \oplus f^-$ die direkte-Summen-Zerlegung mit $f^{\pm} \in D_{\pm}$. Weiters sei $I_{\pm} := \{f^{\pm} : f \in F\}$. Da $T^*|_F$ symmetrisch ist, gilt $0 = \langle T^*f, f \rangle - \langle f, T^*f \rangle = \langle if^+ - if^-, f^+ + f^- \rangle - \langle f^+ + f^-, if^+ - if^- \rangle = 2i\langle f^+, f^+ \rangle - 2i\langle f^-, f^- \rangle$, also ist $\|f^+\| = \|f^-\|$. Wenn $f^+ \oplus f^{1-}$ und $f^+ \oplus f^{2-}$ zwei Vektoren aus $F < D_+ \oplus D_-$ sind, dann ist $0 \oplus (f^{1-} - f^{2-}) \in F$ und somit nach dem gerade gezeigten $\|f^{1-} - f^{2-}\| = \|0\| = 0$, d.h. $f^{1-} = f^{2-}$. Also ist F der Graph der bijektiven Isometrie $U : I_+ \rightarrow I_-$ definiert durch $U(f^+) := f^-$.

Es ist I_+ abgeschlossen: Sei nämlich $f_n \in F$ mit $f_n^+ \rightarrow g^+$. Da $\|f_n^+ - f_m^+\| = \|f_n^- - f_m^-\|$ existiert ein g^- mit $f_n^- \rightarrow g^-$. Offensichtlich konvergiert $f_n = f_n^+ \oplus f_n^-$ gegen $g^+ \oplus g^- =: g$. Außerdem gilt $T^*f_n^{\pm} = \pm if_n^{\pm} \rightarrow \pm ig^{\pm}$. Und es folgt $(g^+ \oplus g^-) \oplus (ig^+ - ig^-) \in \text{Graph}(T^*|_F) = \text{Graph}(T^*|_F)$, d.h. $g^+ \in I^+$.

(\leftarrow) Es sei U eine partielle Isometrie mit initial-Raum $I_+ \subseteq D_+$ und final-Raum $I_- \subseteq D_-$. Wir definieren $F := \text{Graph } U|_{\text{Init } U} := \{g \oplus Ug : g \in I_+\} \subseteq I_+ \oplus I_- \subseteq D_+ \oplus D_-$.

Dann ist $T^*|_F$ symmetrisch, denn für $g, h \in I_+ \subseteq D_+ = \text{Ker}(T^* - i)$ ist $Ug, Uh \in I_- \subseteq D_- = \text{Ker}(T^* + i)$ und somit

$$\begin{aligned} \langle T^*(g + Ug), h + Uh \rangle &= \langle T^*g, h \rangle + \langle T^*g, Uh \rangle + \langle T^*Ug, h \rangle + \langle T^*Ug, Uh \rangle \\ &= i\langle g, h \rangle + i\langle g, Uh \rangle - i\langle Ug, h \rangle - i\langle Ug, Uh \rangle \\ &= i\langle g, Uh \rangle - i\langle Ug, h \rangle. \end{aligned}$$

und ähnlich zeigt man $\langle g + Ug, T^*(h + Uh) \rangle = i\langle g, Uh \rangle - i\langle Ug, h \rangle$.

Weiters ist $T^*|_F$ abgeschlossen: Für $g_n \in I_+$ mit $(g_n + Ug_n) \oplus (ig_n - iUg_n) \rightarrow f \oplus h$ gilt $2ig_n = i(g_n + Ug_n) + (ig_n - iUg_n) \rightarrow if + h$ und $2iUg_n = i(g_n + Ug_n) - (ig_n - iUg_n) \rightarrow if - h$. Somit ist $U(if + h) = if - h$ und für $g := \frac{1}{2i}(if + h)$, gilt $f = g + Ug$ und $h = ig - iUg$.

Offensichtlich sind die beiden Zuordnungen $U \leftrightarrow \text{Graph } U|_{\text{Init } U} = F$ invers zueinander.

Nach (12.30) erhalten wir somit die gewünschte Bijektion mit

$$\begin{aligned} \text{Dom } \tilde{T} &:= \text{Dom } T \oplus F = \text{Dom } T \oplus \text{Graph } U|_{\text{Init } U} \\ &= \{h \oplus k \oplus U(k) : h \in \text{Dom } T, k \in \text{Init } U\} \\ \tilde{T} &:= T^*|_{\text{Dom } \tilde{T}} = (h \oplus k \oplus Uk \mapsto Th + ik - iUk). \end{aligned}$$

Wir zeigen schließlich $d_+(\tilde{T}) + \dim I_+ = d_+(T)$. Sei dafür $f \in \text{Dom } T$ und $g \in I_+$. Dann ist

$$(\tilde{T} + i)(f + g + Ug) = (T + i)f + ig - iUg + ig + iUg = (T + i)f + 2ig.$$

Also haben wir die orthogonale Zerlegung $\text{Bild}(\tilde{T} + i) = \text{Bild}(T + i) \oplus I_+$ und somit $\text{Bild}(T + i)^\perp = \text{Bild}(\tilde{T} + i)^\perp \oplus I_+$. Also ist $d_+(T) = \dim(\text{Bild}(T + i)^\perp) = \dim(\text{Bild}(\tilde{T} + i)^\perp) + \dim(I_+) = d_+(\tilde{T}) + \dim I_+$. Ähnlich zeigt man $d_-(\tilde{T}) = d_-(T) - \dim I_-$. \square

12.32 Theorem. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein abgeschlossener symmetrischer Operator mit Defizienz-Indizes $d_\pm < \infty$. Dann gilt:*

- 1 T ist genau dann ein maximaler symmetrischer Operator, wenn $d_+ = 0$ oder $d_- = 0$.
- 2 T ist selbst-adjungiert genau dann, wenn $d_+ = 0 = d_-$ ist.
- 3 T hat eine selbst-adjungierte Erweiterung genau dann, wenn $d_+ = d_-$ ist. In diesem Fall stehen die selbst-adjungierten Erweiterungen in bijektiver Beziehung zu den Isometrien von D_+ auf D_- .

Beweis. (1) ist eine direkte Folgerung aus (12.31), da genau dann nur die triviale partielle Isometrie $U = 0$ existiert, wenn D_+ oder D_- gleich $\{0\}$ ist.

(2) ist eine Umformulierung von (12.25).

(3) Wenn T eine selbst-adjungierte Erweiterung \tilde{T} besitzt, so ist $d_\pm(\tilde{T}) = d_\pm(T) - \dim(I_\pm)$, wobei $U : I_+ \rightarrow I_-$ die zugehörige bijektive Isometrie ist. Also ist $\dim(I_+) = \dim(I_-)$ sowie $d_+(\tilde{T}) = d_-(\tilde{T})$ nach (2), und damit $d_+(T) = d_-(T)$. Umgekehrt folgt aus $d_+ = d_-$, daß eine bijektive Isometrie $U : D_+ \rightarrow D_-$ existiert, und die zugehörige Erweiterung \tilde{T} somit $d_+(\tilde{T}) = d_+(T) - \dim(I_+) = d_-(T) - \dim(I_-) = d_-(\tilde{T})$ erfüllt, d.h. selbst-adjungiert ist nach (2). \square

12.33 Beispiel. Es sei $T_0 : f \mapsto if'$ der symmetrische Operator aus Beispiel (12.5). Um alle abgeschlossenen symmetrischen Erweiterungen von T_0 zu bestimmen müssen wir D_+ und D_- bestimmen. Es ist $f \in D_\pm$ genau dann, wenn $f \in \text{Dom } T_0^*$ und $\pm if = T_0^* f = if'$ ist. Also ist $D_\pm = \{x \mapsto \alpha e^{\pm x} : \alpha \in \mathbb{C}\}$ und $d_\pm = 1$. Alle partiellen Isometrien $U \neq 0$ von D_+ auf D_- sind von der Form $U_\lambda(x \mapsto e^x)(x) = \lambda e^{-x}$ mit $|\lambda| = 1$. Es sei

$$D_\lambda := \{x \mapsto f(x) + \alpha e^x + \lambda \alpha e^{-x} : \alpha \in \mathbb{C}, f \in \text{Dom } T_0\}$$

$$T_\lambda(x \mapsto f(x) + \alpha e^x + \lambda \alpha e^{-x})(x) := if'(x) + \alpha i e^x - i \lambda \alpha e^{-x},$$

für $f \in \text{Dom } T_1$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach (12.31) sind das alle echten symmetrischen abgeschlossenen (selbst-adjungierten) Erweiterungen von T_0 . Insbesondere ist die Domäne

$$D_1 = \{f + 2\alpha \cosh : f \in \text{Dom } T_0, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$= \{g \in L^2 : g \text{ ist absolut-stetig, } g' \in L^2, g(-1) = g(1)\}$$

$$T_1(g) = \tilde{T}_1(f + 2\alpha, \cos h) = if' + i\alpha 2 \sinh = ig',$$

das ist genau die selbst-adjungierte Erweiterung von T_0 in Beispiel (12.5).

Es sei T ein linearer Differential-Operator mit reellen Koeffizienten-Funktionen. Dann ist $\text{Dom } T$ invariant unter der Konjugation und $\overline{Tf} = T\overline{f}$. Wir wollen nun zeigen, daß symmetrische Operatoren mit solch einer Eigenschaft selbst-adjungierte Erweiterungen besitzen.

12.34 Folgerung. *Es sei $T : H \rightsquigarrow H$ ein symmetrischer Operator und $J : H \rightarrow H$ ein konjugiert linearer beschränkter Operator (wie z.B. die Konjugation) mit $J^2 = 1$ und $T \circ J \subseteq J \circ T$. Dann besitzt T eine selbst-adjungierte Erweiterung.*

Beweis. Aus $TJ \subseteq JT$ folgt $JT = JTJ^2 \subseteq J^2TJ = TJ$ und somit $TJ = JT$. Folglich ist $\text{Dom } T = \text{Dom}(J \circ T) = \text{Dom}(T \circ J) = J^{-1}(\text{Dom } T) = J(\text{Dom } T)$. Da J nicht linear ist, müssen wir den Adjungierten J^* extra definieren: Für $h \in H$ ist $f \mapsto \langle h, Jf \rangle$ ein beschränktes lineares Funktional, also existiert ein eindeutiges $J^*h \in H$ mit $\langle h, Jf \rangle = \langle f, J^*h \rangle$. Offensichtlich ist J^* additiv und konjugiert linear, da $\langle f, J^*(\lambda h) \rangle = \langle \lambda h, Jf \rangle = \lambda \langle h, Jf \rangle = \lambda \langle f, J^*h \rangle = \langle f, \overline{\lambda} J^*h \rangle$. Wegen $J^2 = 1$ ist auch $(J^*)^2 = 1$.

Wir behaupten als nächstes, daß $J^*T^* = T^*J^*$. Sei dazu $h^* \in \text{Dom } T^*$ und $h \in \text{Dom } T$. Dann ist $\langle TJh, h^* \rangle = \langle Jh, T^*h^* \rangle = \langle J^*T^*h^*, h \rangle$ und andererseits $\langle TJh, h^* \rangle = \langle JTh, h^* \rangle = \langle J^*h^*, Th \rangle$. Folglich ist $\langle J^*T^*h^*, h \rangle = \langle J^*h^*, Th \rangle$, d.h. $J^*h^* \in \text{Dom } T^*$ und $T^*J^*h^* = J^*T^*h^*$ und somit $T^*J^* \subseteq J^*T^*$. Wegen $(J^*)^2 = 1$ folgt Gleichheit wie zuvor.

Sei nun $h^* \in \text{Ker}(T^* \pm i)$. Dann ist $T^*J^*h^* = J^*T^*h^* = J^*(\mp i h^*) = \pm i J^*h^*$. Also ist $J^*(\text{Ker}(T^* \pm i)) \subseteq \text{Ker}(T^* \mp i)$. Wegen $(J^*)^2 = 1$ gilt auch die andere Inklusion, also sind die beiden Defizienz-Räume vermöge J^* isomorph als reelle SNR'e und somit auch als komplexe Hilbert-Räume (Wähle Orthonormalbasen und erweitere die Bijektion zu einer linearen Isometrie) und damit besitzt T eine selbstadjungierte Erweiterung nach (12.31), vgl. (12.32). \square

Cayley-Transformation

Für die Möbius-Transformation $\mu : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ gilt: $0 \mapsto -1$, $1 \mapsto -i$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto 0$. Da Möbius-Transformationen Geraden auf Geraden oder Kreise abbilden, bildet diese $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf $\partial\mathbb{D}$ und folglich die obere halb-Ebene auf die Einheitskreislinie \mathbb{D} ab. Die Umkehrabbildung ist durch $w \mapsto i\frac{1+w}{1-w}$ gegeben, denn aus $\frac{z-i}{z+i} = w$ folgt $z(1-w) = i(1+w)$. Da das Spektrum selbst-adjungierter Operatoren in \mathbb{R} enthalten ist und jenes unitärer Operatoren in $\mu(\mathbb{R}) = \partial\mathbb{D}$, sollte μ einen Zusammenhang zwischen diesen Klassen von Operatoren bilden. Dies zeigen wir nun:

12.35 Theorem (Cayley-Transformation).

Die abgeschlossenen symmetrischen Operatoren $T : H \rightsquigarrow H$ stehen in bijektiver Beziehung zu den partiellen Isometrien U , für welche $(1-U)$ Init U dicht liegt, d.h.

$$\{T : H \rightsquigarrow H, \text{ abg., symm.}\} \cong \{U \in L(H) : U \text{ part. Iso., } (1-U) \text{ Init } U \text{ dicht}\},$$

bezüglich der Relationen:

$$\begin{aligned} U &= (T-i)(T+i)^{-1} \\ T &= i(1+U)(1-U)^{-1} \\ D_+(T) &= \text{Init } U^\perp \\ D_-(T) &= \text{Fini } U^\perp. \end{aligned}$$

Diese Zuordnung heißt CAYLEY-TRANSFORMATION, und das zu T gehörende U heißt CAYLEY-TRANSFORMIERTE von T .

Beweis. (\rightarrow) Sei T ein abgeschlossener symmetrischer Operator. Nach (3) in (12.22) ist $\text{Bild}(T \pm i)$ abgeschlossen, also ist $D_\pm^\perp = \text{Bild}(T \pm i)$. Nach (2) in (12.22) ist $\text{Ker}(T+i) = \{0\}$, also ist $(T+i)^{-1}$ wohldefiniert auf D_+^\perp und $(T+i)^{-1}D_+^\perp = \text{Dom } T = \text{Dom}(T-i)$ und somit ist das wie angegeben definierte U ein wohldefinierter Operator.

$$\begin{array}{ccc} & \text{Dom } T & \\ \swarrow T+i & & \searrow T-i \\ D_+^\perp = \text{Bild}(T+i) & \xrightarrow[\cong]{\frac{1}{2i}(1-U)} & \text{Bild}(T-i) = D_-^\perp \end{array}$$

Falls $h \in D_+^\perp$, dann ist $h = (T+i)f$ mit einem eindeutigen $f \in \text{Dom } T$. Also ist $\|Uh\|^2 = \|(T-i)f\|^2 = \|Tf\|^2 + \|f\|^2 = \|(T+i)f\|^2 = \|h\|^2$ nach (1) in (12.22). Folglich läßt sich U eindeutig zu einer partiellen Isometrie mit $\text{Init } U := (\text{Ker } U)^\perp = D_+^\perp$ und $\text{Fini } U := \text{Bild } U = D_-^\perp$ ausdehnen.

Es ist $(T+i)^{-1} = \frac{1}{2i}(1-U) : D_+^\perp \rightarrow \text{Dom } T$, denn für $f \in \text{Dom } T$ und $h = (T+i)f$ ist $(1-U)h = h - (T-i)f = (T+i)f - (T-i)f = 2if$.

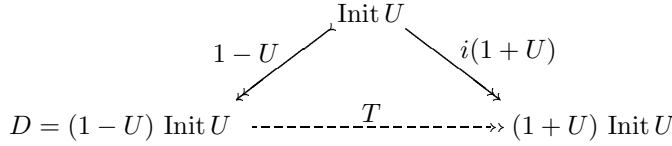
Folglich ist $(1-U)\text{Init } U = \text{Dom } T$ und somit dicht.

Weiters ist $(1+U)(T+i) = 2T$, denn $(1+U)(T+i)f = (T+i)f + Uh = (T+i)f + (T-i)f = 2Tf$, und folglich $i(1+U)(1-U)^{-1} = i(1+U)\frac{1}{2i}(T+i) = \frac{1}{2}2T = T$.

(\leftarrow) Sei nun U eine partielle Isometrie wie angegeben. Dann ist $\text{Ker}(1-U) = \{0\}$, denn für $f \in \text{Ker}(1-U)$ gilt $Uf = f$ und somit $\|f\| = \|Uf\|$, d.h. $f \in \text{Init } U$. Da

U^*U die orthogonal-Projektion auf $\text{Init } U$ ist (siehe (10.19)), ist $f = U^*Uf = U^*f$, also ist $f \in \text{Ker}(1 - U^*) = \text{Bild}(1 - U)^\perp = \{0\}$, d.h. $f = 0$, da $\text{Bild}(1 - U) \supseteq (1 - U)\text{Init } U$ dicht liegt.

Sei $D := (1 - U)\text{Init } U$. Dann ist $(1 - U)^{-1} : D \rightarrow \text{Init } U$ wohldefiniert. Also ist $T := i(1 + U)(1 - U)^{-1}$ ein wohldefinierter Operator mit dichtem Definitionsbereich D .



Wieder ist $(1 - U)^{-1} = \frac{1}{2i}(T + i) : D \rightarrow \text{Init } U$, denn für $h \in \text{Init } U$ und $f = (1 - U)h$ ist $(T + i)f = Tf + if = i(1 + U)h + i(1 - U)h = 2ih$.

Folglich ist $\text{Init } U = \text{Bild}(T + i) = D_+(T)^\perp$.

Weiters ist $(T - i)(1 - U) = 2iU$, denn $(T - i)(1 - U)h = i(1 + U)h - i(1 - U)h = 2iU$, und folglich ist $(T - i)(T + i)^{-1} = (T - i)\frac{1}{2i}(1 - U) = \frac{1}{2i}2iU = U$ sowie $\text{Fini } U = \text{Bild}(T - i) = D_-(T)^\perp$.

Es ist T abgeschlossen, denn sei $f_n \in (1 - U)\text{Init } U$ mit $f_n \rightarrow f$ und $Tf_n \rightarrow g$. Es sei $h_n \in \text{Init } U$ so, daß $(1 - U)h_n = f_n$. Dann ist $Tf_n = i(1 + U)h_n$ und somit konvergiert $2ih_n = i(1 - U)h_n + i(1 + U)h_n = if_n + Tf_n \rightarrow if + g =: 2ih \in \text{Init } U$. Also konvergiert $f_n = (1 - U)h_n \rightarrow (1 - U)h$ und $Tf_n = i(1 + U)h_n \rightarrow i(1 + U)h$, und somit ist $g = i(1 + U)h = T(1 - U)h = Tf$.

Weiters ist T symmetrisch: Für $f, g \in D$ sei $f = (1 - U)h$ und $g = (1 - U)k$ mit $h, k \in \text{Init } U$. Dann gilt

$$\langle Tf, g \rangle = i\langle (1 + U)h, (1 - U)k \rangle = i(\langle h, k \rangle + \langle Uh, k \rangle - \langle h, Uk \rangle - \langle Uh, Uk \rangle).$$

Da $h, k \in \text{Init } U$ ist $\langle Uh, Uk \rangle = \langle h, k \rangle$, also ist $\langle Tf, g \rangle = i(\langle Uh, k \rangle - \langle h, Uk \rangle)$ und analog zeigt man $\langle f, Tg \rangle = -i\langle (1 - U)h, (1 + U)k \rangle = -i(\langle h, Uk \rangle - \langle Uh, k \rangle) = \langle Tf, g \rangle$. \square

12.36 Folgerung. *Die selbst-adjungierten Operatoren stehen vermöge der Cayley-Transformation in bijektiver Beziehung zu den unitären Operatoren, die 1 nicht als Eigenwert besitzen.*

Beweis. Ein symmetrischer abgeschlossener Operator ist nach genau (12.32) dann selbst-adjungiert, wenn $\{0\} = D_\pm$, also nach (12.35) genau dann wenn für zugehörige partielle Isometrie $I_\pm = H$ gilt, sie also unitär ist. Schließlich haben wir im Beweis von (12.35) gesehen, daß die Dichtheit von $\text{Bild}(1 - U)$ die Gleichung $\text{Ker}(1 - U) = \{0\}$, d.h. 1 ist kein Eigenwert von U impliziert. Umgekehrt sei 1 kein Eigenwert von U und $f \perp \text{Bild}(1 - U)$, d.h. $f \in \text{Bild}(1 - U)^\perp = \text{Ker}(1 - U^*)$. Also ist $U^*f = f$ und somit $Uf = UU^*f = f$, d.h. $f \in \text{Ker}(1 - U) = \{0\}$, also $\text{Bild}(1 - U) = (1 - U)(\text{Init } U)$ dicht. \square

Man kann nun die Cayley-Transformation verwenden um aus der Spektral-Zerlegung für beschränkte unitäre Operatoren auch eine solche für unbeschränkte selbst-adjungierte Operatoren zu gewinnen. Wir werden aber im nächsten Abschnitt allgemeiner die Spektral-Theorie normaler unbeschränkter Operatoren entwickeln.

Unbeschränkte normale Operatoren

12.37 Definition. Ein linearer Operator $T : H \rightsquigarrow H$ heißt **NORMAL**, falls er dicht-definiert, abgeschlossen ist und $T^*T = TT^*$ erfüllt. Klarerweise ist jeder selbst-adjungierte Operator normal. Der Multiplikations-Operator T im Beispiel (12.4) ist normal, aber man beachte, daß $\text{Dom } T^*T \subset \text{Dom } T$ gilt.

12.38 Lemma. Für dicht-definiertes abgeschlossenes T gilt:

- 1 Der Graph von $T|_{\text{Dom}(T^*T)}$ ist dicht im Graphen von T .
- 2 T^*T ist selbst-adjungiert (und insbesondere dicht-definiert).
- 3 $1 + T^*T$ ist beschränkt invertierbar, und für das Inverse gilt $0 \leq (1 + T^*T)^{-1} \leq 1$.
- 4 Der Operator $T(1 + T^*T)^{-1}$ ist eine globale Kontraktion.

Beweis. (3) $1 + T^*T$ ist surjektiv: Es sei $J : H \oplus H \rightarrow H \oplus H$ definiert durch $J(h \oplus k) = (-k) \oplus h$. Nach (12.7) ist $H \oplus H = \text{Graph } T^* \oplus J \text{Graph } T$. Zu $h \in H$ existieren also $f \in \text{Dom } T$ und $g \in \text{Dom } T^*$ mit $0 \oplus h = J(f \oplus Tf) + g \oplus T^*g = (-Tf) \oplus f + g \oplus T^*g$, d.h. $0 = -Tf + g$ und weiters $h = f + T^*g = f + T^*Tf = (1 + T^*T)f$. Also ist $\text{Bild}(1 + T^*T) = H$.

$1 + T^*T$ ist injektiv: Für $f \in \text{Dom } T^*T$ ist $Tf \in \text{Dom } T^*$ und $\|f + T^*Tf\|^2 = \|f\|^2 + 2\|Tf\|^2 + \|T^*Tf\|^2 \geq \|f\|^2$. Also ist $\text{Ker}(1 + T^*T) = \{0\}$.

Es ist $0 \leq S := (1 + T^*T)^{-1} \leq 1$: Aus $\|(1 + T^*T)f\| \geq \|f\|$ für alle $f \in \text{Dom } T^*T$ folgt für $h = (1 + T^*T)f$ und $S := (1 + T^*T)^{-1}$ die Ungleichung $\|Sh\| \leq \|h\|$, d.h. $\|S\| \leq 1$. Weiters ist $\langle Sh, h \rangle = \langle f, (1 + T^*T)f \rangle = \|f\|^2 + \|Tf\|^2 \geq 0$, d.h. $S \geq 0$.

(1) Da T abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß für keinen Vektor $g \neq 0$ der Vektor $g \oplus Tg \in \text{Graph } T$ orthogonal ist zu $\{h \oplus Th : h \in \text{Dom } T^*T\}$. Sei also $h \in \text{Dom } T^*T$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &= \langle g \oplus Tg, h \oplus Th \rangle = \langle g, h \rangle + \langle Tg, Th \rangle = \langle g, h \rangle + \langle g, T^*Th \rangle \\ &= \langle g, (1 + T^*T)h \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $g \perp \text{Bild}(1 + T^*T) \stackrel{(3)}{=} H$ und somit $g = 0$.

(2) Aus (1) folgt, daß $\text{Dom } T^*T$ dicht ist in $\text{Dom } T$ und somit in H . Seien $f, g \in \text{Dom } T^*T$, d.h. $f, g \in \text{Dom } T$ und $Tf, Tg \in \text{Dom } T^*$. Folglich gilt $\langle T^*Tf, g \rangle = \langle Tf, Tg \rangle = \langle f, T^*Tg \rangle$. Also ist T^*T symmetrisch. Weiters hat $1 + T^*T$ ein beschränktes Inverses nach (3), also ist $-1 \notin \sigma(T^*T)$ und $1 + T^*T$ ist abgeschlossen nach (12.13) und folglich ebenso T^*T . Wegen (12.26) ist T^*T selbst-adjungiert.

(4) Wir setzen $R := T(1 + T^*T)^{-1} = TS : H \rightarrow \text{Dom}(T^*T) \subseteq \text{Dom } T \rightarrow H$. Falls $h = (1 + T^*T)f$ mit $f \in \text{Dom } T^*T \subseteq \text{Dom } T$, so ist $\|Rh\|^2 = \|Tf\|^2 \leq \|(1 + T^*T)f\|^2 = \|h\|^2$ nach dem Beweis von (3). Also ist $\|R\| \leq 1$. \square

12.39 Folgerung. Für jeden normalen Operator $T : H \rightsquigarrow H$ gilt: $\text{Dom } T = \text{Dom } T^*$ und $\|Th\| = \|T^*h\|$ für alle $h \in \text{Dom } T$. Normale Operatoren haben keine echte normale Erweiterungen.

Beweis. Falls $h \in \text{Dom } T^*T = \text{Dom } TT^*$, so ist $Th \in \text{Dom } T^*$ und $T^*h \in \text{Dom } T$. Also ist $\|Th\|^2 = \langle T^*Th, h \rangle = \langle TT^*h, h \rangle = \|T^*h\|^2$.

Falls $f \in \text{Dom } T$ so folgt aus (1) in (12.38), daß eine Folge $h_n \in \text{Dom } T^*T$ existiert mit $h_n \oplus Th_n \rightarrow f \oplus Tf$, also gilt $\|Th_n - Tf\| \rightarrow 0$. Nach dem ersten Teil gilt $\|T^*h_n - T^*h_m\| = \|Th_n - Th_m\|$ und somit existiert ein $g \in H$ mit $T^*h_n \rightarrow g$.

Also gilt $h_n \oplus T^*h_n \rightarrow f \oplus g$. Da T^* abgeschlossen ist, ist $f \in \text{Dom } T^*$ und $g = T^*f$. Also ist $\text{Dom } T \subseteq \text{Dom } T^*$ und $\|Tf\| = \lim_n \|Th_n\| = \lim_n \|T^*h_n\| = \|g\| = \|T^*f\|$.

Andererseits ist auch T^* normal und $T^{**} = T$ nach (12.9) und somit $\text{Dom } T^* \subseteq \text{Dom } T^{**} = \text{Dom } T$.

Seien nun $T \subseteq \tilde{T}$ beide normal. Dann ist $T^* \supseteq \tilde{T}^*$ und folglich $\text{Dom } T \subseteq \text{Dom } \tilde{T} = \text{Dom } \tilde{T}^* \subseteq \text{Dom } T^* = \text{Dom } T$. Also ist $T = \tilde{T}$. \square

12.40 Bemerkung. Es seien $S, S_1, S_2 : H_1 \rightsquigarrow H_2$ und $T, T_1, T_2 : H_2 \rightsquigarrow H_3$, dann ist

$$\begin{aligned} T_1 \circ S + T_2 \circ S &= (T_1 + T_2) \circ S; \\ T \circ S_1 + T \circ S_2 &\subseteq T \circ (S_1 + S_2); \\ T \circ S_1 + T \circ S_2 &= T \circ (S_1 + S_2) \text{ falls } T \text{ global definiert ist.} \end{aligned}$$

Die erste Zeile folgt aus

$$\begin{aligned} \text{Dom}((T_1 + T_2) \circ S) &= S^{-1}(\text{Dom}(T_1 + T_2)) = S^{-1}(\text{Dom}(T_1) \cap \text{Dom}(T_2)) \\ &= S^{-1}(\text{Dom}(T_1)) \cap S^{-1}(\text{Dom}(T_2)) \\ &= \text{Dom}(T_1 \circ S) \cap \text{Dom}(T_2 \circ S) = \text{Dom}((T_1 + T_2) \circ S). \end{aligned}$$

Die zweite Zeile folgt aus

$$\begin{aligned} \text{Dom}(T \circ S_1 + T \circ S_2) &= \text{Dom}(T \circ S_1) \cap \text{Dom}(T \circ S_2) \\ &= S_1^{-1}(\text{Dom } T) \cap S_2^{-1}(\text{Dom } T) \\ &\subseteq (S_1 + S_2)^{-1}(\text{Dom } T) = \text{Dom}(T \circ (S_1 + S_2)). \end{aligned}$$

Falls T global definiert ist, so gilt Gleichheit, denn dann ist $S^{-1}(\text{Dom } T) = \text{Dom } S$ für $S \in \{S_1, S_2, S_1 + S_2\}$. Andernfalls kann auch eine echte Inklusion vorliegen, wie das Beispiel $S_1 = \text{id} = -S_2$ zeigt, denn dann ist $T \circ (S_1 + S_2) = 0$ global definiert und $\text{Dom}(T \circ S_1 + T \circ S_2) = \text{Dom } T$.

12.41 Lemma. Es seien H_n Hilbert-Räume und $T_n \in L(H_n)$. Es sei $H := \bigoplus_n H_n$, $D := \{(h_n) \in \bigoplus_n H_n : \sum_n \|T_n h_n\|^2 < \infty\}$ und $\bigoplus_n T_n : H \rightsquigarrow H$ definiert auf D durch $(h_n)_n \mapsto (T_n h_n)_n$. Dann ist $\bigoplus_n T_n$ ein abgeschlossener, dicht-definierter Operator. Sein Adjungierter ist $(\bigoplus_n T_n)^* = \bigoplus_n T_n^*$, und $\bigoplus_n T_n$ ist genau dann normal, wenn alle T_n es sind.

Für eine zweite Folge von Operatoren $S_n \in L(H_n)$ gilt: $(\bigoplus_n T_n) \circ (\bigoplus_n S_n) \subseteq \bigoplus_n (T_n \circ S_n)$. Ist zusätzlich $(\|S_n\|)_n$ beschränkt, so gilt Gleichheit.

Beweis. Da $H_n \subseteq D$ für alle n , ist D dicht. Offensichtlich ist D ein linearer Teilraum und $T := \bigoplus_n T_n$ linear auf D .

Beh.: T ist abgeschlossen.

Sei dazu $h^{(j)}$ eine Folge in $\text{Dom } T$ mit $h^{(j)} \oplus Th^{(j)} \rightarrow h \oplus g$ in $H \oplus H$. Dann gilt für die Komponenten $h_n^{(j)} \oplus T_n h_n^{(j)} \rightarrow h_n \oplus g_n$. Da T_n beschränkt ist, ist $T_n h_n = g_n$ und somit ist $\sum_n \|T_n h_n\|^2 = \sum_n \|g_n\|^2 = \|g\|^2 < \infty$, d.h. $h \in \text{Dom } T$ und klarerweise gilt $Th = g$, also ist T abgeschlossen.

Beh.: $\text{Dom } T^* = \{(k_n) : \sum_n \|T_n^* k_n\|^2 < \infty\}$ und $T^*((k_n)_n) = (T_n^* k_n)_n$ für $(k_n)_n \in \text{Dom } T^*$.

Es ist $k \in \text{Dom } T^*$ genau dann, wenn

$$h \mapsto \langle Th, k \rangle = \sum_n \langle T_n h_n, k_n \rangle = \sum_n \langle h_n, T_n^* k_n \rangle$$

auf $\text{Dom } T$ ein beschränkt lineares Funktional ist. Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungl. ist das für k mit $\sum_n \|T_n^* k_n\|^2 < \infty$ der Fall. Daß T^*k für solche k durch $T^*k = (T_n^* k_n)_n$ gegeben ist, ist offensichtlich.

Umgekehrt gilt falls $|\langle Th, k \rangle| \leq C \|h\|$ für jede endliche Summe mit $h_n := T_n^* k_n$, daß $\sum \langle h_n, T_n^* k_n \rangle = \sum \|T_n^* k_n\|^2 \leq C \sqrt{\sum \|h_n\|^2} = C \sqrt{\sum \|T_n^* k_n\|^2}$ und somit $\sum \|T_n^* k_n\|^2 \leq C^2$, also ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n^* k_n\|^2 \leq C^2$.

Sei nun $S_n \in L(H_n)$ eine zweite Folge von Operatoren, und sei $T := \bigoplus_n T_n$ und $S := \bigoplus_n S_n$. Für

$$h \in \text{Dom}(T \circ S) = \left\{ h = (h_n)_n : \begin{array}{l} \sum_n \|h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|S_n h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|T_n(S_n h_n)\|^2 < \infty \end{array} \right\}$$

ist offensichtlich $h \in \text{Dom}(\bigoplus_n (T_n \circ S_n))$ und es gilt

$$\begin{aligned} \left(\bigoplus_n (T_n \circ S_n) \right) (h) &= \bigoplus_n (T_n \circ S_n)(h_n) = \left(\bigoplus_n T_n \right) \left(\bigoplus_n S_n(h_n) \right) \\ &= \left(\bigoplus_n T_n \right) \left(\left(\bigoplus_n S_n \right) h \right) = \left(\left(\bigoplus_n T_n \right) \circ \left(\bigoplus_n S_n \right) \right) h, \end{aligned}$$

d.h. $(\bigoplus_n T_n) \circ (\bigoplus_n S_n) \subseteq \bigoplus_n (T_n \circ S_n)$.

Falls $\|S_n\|$ beschränkt ist, so ist wegen der Cauchy-Schwarz-Ungl. der Definitionsbereich von $S = \bigoplus_n S_n$ ganz H und $\|S\| = \sup_n \|S_n\|$. Falls $h = (h_n)_n \in \text{Dom}(\bigoplus_n (T_n \circ S_n))$, so ist $\sum_n \|T_n S_n h_n\|^2 < \infty$ und somit $k := Sh = (S_n h_n)_n$ in $\text{Dom } T$, d.h. $h \in \text{Dom}(T \circ S)$. Also gilt Gleichheit.

Wenn $\bigoplus_n T_n$ normal ist, so offensichtlich auch die Einschränkungen T_n . Umgekehrt ist nach (12.39)

$$\begin{aligned} \text{Dom}(T^*T) &= \{h \in \text{Dom } T : Th \in \text{Dom } T^*\} \\ &= \left\{ h = (h_n)_n : \begin{array}{l} \sum_n \|h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \|T_n h_n\|^2 < \infty, \\ \sum_n \| \underbrace{T_n^* T_n}_{=T_n T_n^*} h_n \|^2 < \infty \end{array} \right\} \\ &= \{h \in \text{Dom } T^* : T^* h \in \text{Dom } T\} \\ &= \text{Dom}(TT^*), \end{aligned}$$

und sowohl $T^* \circ T$ also auch $T \circ T^*$ sind Einschränkungen von $\bigoplus T_n^* \circ T_n = \bigoplus T_n \circ T_n^*$. Also ist T normal. \square

12.42 Theorem. *Es sei $P : \mathcal{B}(X) \rightarrow L(H)$ ein Spektral-Maß wie in (11.7). Für eine meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ betrachten wir eine Partition von X in meßbare Mengen Δ_n , auf welchen f beschränkt ist (z.B. $\Delta_n := \{x \in X : n-1 \leq |f(x)| < n\}$). Weiters setzen wir $H_n := P(\Delta_n)H$ und $P_n : \mathcal{B}(\Delta_n) \rightarrow L(H_n)$ sei das Spektral-Maß $P_n(\Delta) := P(\Delta)|_{H_n}$. Dann ist $H = \bigoplus_n H_n$. Und bezüglich dieser Zerlegung sei*

$$\int_X f dP := \bigoplus_n \int_{\Delta_n} f|_{\Delta_n} dP_n,$$

d.h. $\int_X f dP$ ist der normale Operator

$$\left(\int_X f dP\right)h := \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\int_{\Delta_n} f dP_n\right)h_n$$

mit Definitionsbereich

$$D_f := \left\{h = \sum_n h_n \in H : \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \left(\int_{\Delta_n} f dP_n\right)h_n \right\|^2 < \infty\right\}.$$

Es gilt

$$D_f = \left\{h \in H : \int_X |f|^2 dP_{h,h} < \infty\right\}$$

und für $h \in D_f$ und $k \in H$ ist $f \in L^1(|P_{h,k}|)$ mit

$$\begin{aligned} \int_X |f| d|P_{h,k}| &\leq \left(\int_X |f|^2 dP_{h,h}\right)^{1/2} \|k\| \\ \left\langle \left(\int_X f dP\right)h, k \right\rangle &= \int_X f dP_{h,k}. \end{aligned}$$

Insgesonders hängt also der Operator $\int_X f dP$ und sein Definitionsbereich nicht von der Auswahl der Δ_n ab.

Beweis. Da $P(\Lambda) \circ P(\Delta_n) = P(\Lambda \cap \Delta_n) = P(\Delta_n) \circ P(\Lambda)$ ist $H_n = P(\Delta_n)H$ ein $P(\Lambda)$ -invarianter Teilraum, und somit ist P_n ein wohldefiniertes Spektral-Maß für H_n . Wegen $1 = P(X) = P(\bigsqcup_n \Delta_n) = \sum_n P(\Delta_n)$ ist $H = \bigoplus_n H_n$ und die orthogonal-Projektion auf H_n ist durch $h \mapsto h_n := P(\Delta_n)h$ gegeben.

Da $f|_{\Delta_n}$ beschränkt ist, ist $\int_{\Delta_n} f dP_n$ ein wohl-definierter beschränkter normaler Operator auf H_n nach (11.11). Nach (12.41) ist folglich $\int_X f dP := \bigoplus_n \int_{\Delta_n} f dP_n$ ein normaler unbeschränkter Operator mit Definitionsbereich D_f .

Als nächstes zeigen wir die behauptete Gleichung für D_f :
Nach der Spektral-Theorie (11.11) für beschränkte Operatoren gilt:

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int_{\Delta_n} f dP_n\right)h_n \right\|^2 &= \left\langle \left(\int_{\Delta_n} f dP_n\right)^* \left(\int_{\Delta_n} f dP_n\right)h_n, h_n \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int_{\Delta_n} \bar{f} f dP_n\right)h_n, h_n \right\rangle = \left\langle \left(\int_{\Delta_n} |f|^2 dP_n\right)h_n, h_n \right\rangle \\ &= \int_{\Delta_n} |f|^2 d(P_n)_{h_n, h_n} = \int_{\Delta_n} |f|^2 dP_{h,h}, \end{aligned}$$

denn für $\Lambda \subseteq \Delta_n$ ist

$$\begin{aligned} P_{h,h}(\Lambda) &= \langle P(\Lambda)h, h \rangle \\ &= \langle P(\Lambda \cap \Delta_n)h, h \rangle = \langle P(\Delta_n)P(\Lambda)P(\Delta_n)h, h \rangle \\ &= \langle P(\Lambda)P(\Delta_n)h, P(\Delta_n)h \rangle = \langle P(\Lambda)h_n, h_n \rangle \\ &= \langle P_n(\Lambda)h_n, h_n \rangle = (P_n)_{h_n, h_n}(\Lambda). \end{aligned}$$

Daraus folgt die behauptete Gleichung über D_f . Und somit ist der Definitionsbereich von $\int_X f dP$ unabhängig der Wahl der Partition in Mengen Δ_n .

Sei nun $h \in D_f$ und $k \in H$. Nach dem Radon-Nikodym Theorem existiert eine meßbare Funktion u mit $|u| = 1$ und $|P_{h,k}| = u P_{h,k}$, wobei $|P_{h,k}|$ die Variation von $P_{h,k}$ ist. Es sei $f_{\leq n} := \sum_{k=1}^n \chi_{\Delta_k} f = f|_{\bigsqcup_{k \leq n} \Delta_k}$. Es ist sowohl $f_{\leq n}$ als auch $u f_{\leq n}$ beschränkt und folglich gilt:

$$\begin{aligned} \int |f_{\leq n}| d|P_{h,k}| &= \int |f_{\leq n}| u dP_{h,k} = \left\langle \left(\int |f_{\leq n}| u dP \right) h, k \right\rangle \\ &\leq \left\| \left(\int |f_{\leq n}| u dP \right) h \right\| \cdot \|k\|. \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \left\| \left(\int |f_{\leq n}| u dP \right) h \right\|^2 &= \left\langle \left(\int |f_{\leq n}| u dP \right) h, \left(\int |f_{\leq n}| u dP \right) h \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\int |f_{\leq n}|^2 dP \right) h, h \right\rangle = \int |f_{\leq n}|^2 dP_{h,h} \leq \int |f|^2 dP_{h,h}. \end{aligned}$$

Also ist $\int |f_{\leq n}| d|P_{h,k}| \leq \|k\| \left(\int |f|^2 dP_{h,h} \right)^{1/2}$ für alle n . Da $|f_{\leq n}|$ monoton punktweise gegen $|f|$ konvergieren, folgt daraus mittels des Satzes von B. Levi über monotone Konvergenz, daß $f \in L^1(|P_{h,k}|)$ und die gewünschte Ungleichung

$$\int |f| d|P_{h,k}| \leq \left(\int_X |f|^2 dP_{h,h} \right)^{1/2} \cdot \|k\|.$$

Da $f_{\leq n}$ beschränkt ist, gilt nach (11.11) auch

$$\left\langle \left(\int f_{\leq n} dP \right) h, k \right\rangle = \int f_{\leq n} dP_{h,k}.$$

Falls $h \in D_f$ und $k \in H$, so folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß

$$\int f_{\leq n} dP_{h,k} \rightarrow \int f dP_{h,k} \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Weiters gilt:

$$\begin{aligned} \left(\int f_{\leq n} dP \right) h &= \bigoplus_{k \leq n} \int_{\Delta_n} f|_{\Delta_n} dP_n h_n = \left(\bigoplus_n \int_{\Delta_n} f|_{\Delta_n} dP_n \right) \left(\bigoplus_{k \leq n} h_k \right) \\ &= \left(\int f dP \right) P \left(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j \right) h = P \left(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j \right) \left(\int f dP \right) h, \end{aligned}$$

und da $P \left(\bigcup_{j=1}^n \Delta_j \right) \rightarrow P(X) = 1$ in der SOT, folgt schließlich

$$\left\langle \left(\int f_{\leq n} dP \right) h, k \right\rangle \rightarrow \left\langle \left(\int f dP \right) h, k \right\rangle.$$

Also ist

$$\left\langle \left(\int_X f dP \right) h, k \right\rangle = \int_X f dP_{h,k}.$$

Das zeigt auch, daß der Operator $\int_X f dP$ unabhängig von der Auswahl der Partition in Mengen Δ_n ist. \square

12.43 Proposition. *Es sei $P : \mathcal{B}(X) \rightarrow L(H)$ ein Spektral-Maß. Für jede meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sei $\rho(f) : H \rightsquigarrow H$ durch $\rho(f) := \int_X f dP$ definiert. Dann gilt für meßbare Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$:*

- 1 $\rho(f)^* = \rho(\bar{f})$.
- 2 $\rho(fg) \supseteq \rho(f)\rho(g)$ und $\text{Dom}(\rho(f)\rho(g)) = D_g \cap D_{fg}$.
- 3 Falls g beschränkt ist, so ist $\rho(f)\rho(g) = \rho(fg)$.
- 4 $\rho(f)^*\rho(f) = \rho(|f|^2)$.

Beweis. Zu gegebenen meßbaren Funktionen $f, g : X \rightarrow \mathbb{C}$ wählen wir eine Partition von X in meßbare Mengen Δ_n und definieren ein Spektral-Maß P_n auf Δ_n für $H_n := P(\Delta_n)H$ wie in (12.42). Es sei ρ_n die zugehörige C^* -Darstellung der beschränkten Funktionen auf Δ_n auf H_n . Dann ist $\rho(h) := \bigoplus_n \rho_n(h)$ für $h \in \{f, \bar{f}, g, f \cdot g\}$. Für die C^* -Darstellung ρ_n gilt natürlich (1)-(4) mit Gleichheit überall. Unter Verwendung von (12.41) folgt nun:

(1), da

$$\rho(f)^* = \left(\bigoplus_n \rho_n(f) \right)^* = \bigoplus_n \rho_n(f)^* = \bigoplus_n \rho_n(\bar{f}) = \rho(\bar{f}).$$

(2) Die Inklusion gilt, da

$$\begin{aligned} \rho(f) \circ \rho(g) &= \left(\bigoplus_n \rho_n(f) \right) \circ \left(\bigoplus_n \rho_n(g) \right) \subseteq \bigoplus_n (\rho_n(f) \circ \rho_n(g)) = \bigoplus_n (\rho_n(fg)) \\ &= \rho(fg). \end{aligned}$$

Weiters ist $h \in \text{Dom}(\rho(f)\rho(g))$ genau dann, wenn $h \in \text{Dom}(\rho(g)) = D_g$ und $\rho(g)h \in \text{Dom}(\rho(f)) = D_f$. Letzteres heißt, daß $\infty > \sum_n \|\rho_n(f)(\rho(g)h)\|^2 = \sum_n \|\rho_n(fg)h\|^2$ ist, d.h. $h \in D_{fg}$ liegt.

(3) Falls g beschränkt ist, so ist $D_g = H$ und somit $\text{Dom}(\rho(f)\rho(g)) = H \cap \text{Dom}(\rho(fg)) = \text{Dom}(\rho(fg))$.

Man beachte, daß unter dieser Voraussetzung nicht $\rho(gf) = \rho(g)\rho(f)$ gilt, wie in [C,X.4.10] behauptet wird. Sei nämlich z.B. $g = 0$, dann ist $gf = 0$ und $D_{gf} = H$ aber $\text{Dom}(\rho(g)\rho(f)) = \text{Dom}(\rho(f)) \subset H$.

(4) Nach (1) und (2) ist $\rho(f)^* \circ \rho(f) = \rho(\bar{f}) \circ \rho(f) \subseteq \rho(|f|^2)$ und $\text{Dom}(\rho(f)^* \circ \rho(f)) = \text{Dom}(\rho(\bar{f}) \circ \rho(f)) = D_f \cap D_{|f|^2}$. Bleibt also nur zu zeigen, daß $D_f \supseteq D_{|f|^2}$. Sei dazu $h = (h_n)_n \in D_{|f|^2}$, d.h. $\sum_n \|\rho_n(|f|^2)h_n\|^2 < \infty$. Zweimalige Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} \sum \|\rho_n(f)h_n\|^2 &= \sum \langle \rho_n(f)^* \rho_n(f)h_n, h_n \rangle \\ &\leq \sum \|\rho_n(f)^* \rho_n(f)h_n\| \|h_n\| \\ &\leq \left(\sum \|\rho_n(|f|^2)h_n\|^2 \right)^{1/2} \|h\| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

d.h. $h \in D_f$. \square

12.44 Theorem. *Es sei $N : H \rightsquigarrow H$ ein normaler Operator auf H . Dann existiert ein eindeutiges Spektral-Maß P definiert auf den Borel-Mengen von \mathbb{C} , so daß*

- 1 $N = \int_{\mathbb{C}} z dP(z)$.
- 2 $P(\Delta) = 0$ falls $\Delta \cap \sigma(N) = \emptyset$.
- 3 Falls $U \subseteq \mathbb{C}$ offen ist und $U \cap \sigma(N) \neq \emptyset$, so ist $P(U) \neq 0$.
- 4 Ist $A \in L(H)$ mit $AN \subseteq NA$ und $AN^* \subseteq N^*A$, so ist $A \left(\int_{\mathbb{C}} f dP \right) \subseteq \left(\int_{\mathbb{C}} f dP \right) A$ für alle Borel-Funktionen f auf \mathbb{C} .

Das Fugledge-Putnam Theorem gilt auch für unbeschränkte normale Operatoren, und somit kann die Hypothese in (4) auf $AN \subseteq NA$ abgeschwächt werden.

Zur Idee des Beweises: Falls $N = \int z dP(z)$, so könnten wir \mathbb{C} in Kreisringe Δ_n zerlegen. Es wären dann wohl $H_n := P(\Delta_n)H$ invariante Teilräume mit $H = \bigoplus_n H_n$ und wir können N mit der unbeschränkten Summe $\bigoplus_n N|_{H_n}$ vergleichen. Umgekehrt sollten wir also eine Zerlegung $H = \bigoplus_n H_n$ in $\{N, N^*\}$ -invariante Teilräume H_n finden, so daß $N_n := N|_{H_n}$ ein beschränkter normaler Operator ist. Nach dem Spektral-Satz für beschränkte Operatoren existieren dann Spektral-Maße P_n mit $N_n = \int z dP_n$. Diese wollen wir dann aufsummieren um ein Spektral-Maß P für N zu erhalten.

Die Funktion $f : z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2} = (1 + \bar{z}z)^{-1}$ bildet \mathbb{C} auf das Intervall $(0, 1]$ ab. Den Kreisringen entsprechen dabei Teilintervalle. Um also die Räume H_n ohne das noch nicht vorhandene Spektral-Maß P von N zu finden, betrachten wir die Kontraktion $S := (1 + N^*N)^{-1} \geq 0$ aus (12.38) und die Bilder ihrer Spektral-Projektoren (die wären $P \circ f^{-1}$ nach (11.58) für beschränktes N) auf Teilintervallen von $(0, 1] \subset [0, 1] \supseteq \sigma(S)$.

12.45 Sublemma. *Es sei $N : H \rightsquigarrow H$ normal und $S := (1 + N^*N)^{-1}$. Weiters sei $S = \int_0^1 t dP(t)$ die Spektral-Darstellung.*

Dann ist $SN \subseteq NS$ und $SN S = NS S$.

Falls Δ eine Borel-Teilmenge in $[\delta, 1]$ mit $0 < \delta < 1$ ist, so ist $H_\Delta := P(\Delta)H$ eine $\{S, N, N^\}$ -invariante Teilmenge von $\text{Dom } N$ und $N|_{H_\Delta}$ ist ein beschränkter normaler Operator mit $\|N|_{H_\Delta}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$ und $S|_{H_\Delta}$ ist invertierbar.*

Beweis. Aus (12.38) folgt, daß S und NS globale Kontraktionen sind.

$SN \subseteq NS$:

Sei dazu $f \in \text{Dom } SN$, d.h. $g := Sf \in \text{Bild } S = \text{Dom } N^*N$. Dann ist $f = (1 + N^*N)g$ und somit $N^*Ng = f - g \in \text{Dom } SN - \text{Dom } N^*N \subseteq \text{Dom } N$. Also ist $Ng \in \text{Dom } NN^* = \text{Dom } N^*N$ und folglich ist $Nf = N(1 + N^*N)g = Ng + NN^*Ng = (1 + NN^*)Ng = (1 + N^*N)Ng$, wegen der Normalität von N . Somit ist $SNf = S(1 + N^*N)Ng = Ng = NSf$, d.h. $SN \subseteq NS$.

Es folgt weiters $SN S \subseteq NS S$, und da $\text{Dom } NS = H$ nach (12.38.4) und somit auch $\text{Dom } SNS = H$, ist $SN S = NS S$.

Sei nun $\Delta \subseteq [\delta, 1]$ eine Borelmenge.

Wir zeigen zunächst, daß $S : H_\Delta \rightarrow H_\Delta$ ein Isomorphismus ist.

Da S mit seinen Spektral-Projektoren $P(\Delta)$ kommutiert, haben wir folgendes kom-

mutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 H & \xrightarrow{S} & \text{Dom } N^*N \subseteq H \\
 P_\Delta \downarrow & & P_\Delta \downarrow \\
 H_\Delta & \xrightarrow{S|_{H_\Delta}} & H_\Delta \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H & \xrightarrow{S} & H
 \end{array}$$

Folglich hat $S|_{H_\Delta}$ dichtes Bild in H_Δ , denn $S(H_\Delta) = S(P(\Delta)H) = P(\Delta)(SH)$ ist dicht in $P(\Delta)H = H_\Delta$, weil $SH = \text{Dom } N^*N$ in H dicht liegt. Für $h \in H_\Delta$, ist $h = P(\Delta)h$ und somit $\|Sh\|^2 = \langle S^2P(\Delta)h, h \rangle = \langle (\int_0^1 t^2 \chi_\Delta dP) h, h \rangle = \int_\Delta t^2 dP_{h,h} \geq \delta^2 P_{h,h}(\Delta) = \delta^2 \langle P(\Delta)h, h \rangle = \delta^2 \|h\|^2$. Also hat $S|_{H_\Delta}$ ein abgeschlossenes Bild in H_Δ und da dieses dicht ist, ist $S|_{H_\Delta}$ ein Isomorphismus.

Es ist $H_\Delta \subseteq \text{Dom } N$, denn $H_\Delta = S(H_\Delta) \subseteq \text{Bild } S = \text{Dom}(N^*N) \subseteq \text{Dom } N$.

Beh.: H_Δ ist N -invariant.

Sei $h \in H_\Delta$ und $g \in H_\Delta$ mit $h = Sg$. Es sei $R := NS$. Nach (12.42) ist $SR = RS$ und somit $P(\Delta)R = RP(\Delta)$ nach (11.40) also H_Δ R -invariant. Folglich ist $Nh = NSg = Rg \in H_\Delta$.

Beh.: H_Δ ist N^* -invariant.

Falls $N_1 := N^*$ und $S_1 := (1 + N_1^*N_1)^{-1} = (1 + NN^*)^{-1} = (1 + N^*N)^{-1} = S$. Aus dem vorigen Argument folgt somit, daß $N^*H_\Delta = N_1H_\Delta \subseteq H_\Delta$.

Es folgt, daß die Einschränkung $N|_{H_\Delta}$ ebenfalls normal ist.

Sei schließlich $h \in H_\Delta$. Dann gilt ähnlich wie zuvor

$$\begin{aligned}
 \|Nh\|^2 &= \langle N^*Nh, h \rangle = \langle ((N^*N + 1) - 1)h, h \rangle = \int_\delta^1 \left(\frac{1}{t} - 1\right) dP_{h,h}(t) \\
 &\leq \|h\|^2 \left(\frac{1}{\delta} - 1\right).
 \end{aligned}$$

Also ist $\|N|_{H_\Delta}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\delta} - 1}$. \square

Beweis von (12.44). Wie in (12.45) sei $S := (1 + N^*N)^{-1}$ und $R := N(1 + N^*N)^{-1}$. Weiters sei $S = \int_0^1 t dP(t)$ die Spektral-Darstellung und $P_n := P(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ und $H_n := P_n H$ für $n \geq 1$. Also ist $1 = P(\sigma(S)) = P(\{0\}) + \sum_{n=1}^\infty P_n$. Da $\text{Ker } S = \{0\}$ ist, ist $\lambda = 0$ kein Eigenwert von S und somit $P(\{0\}) = 0$ nach (11.18), also ist $1 = \sum_{n=1}^\infty P_n$ und somit $H = \bigoplus_n H_n$. Nach (12.45) ist H_n ein $\{N, N^*\}$ -invarianter Teilraum von $\text{Dom } N$ und $N_n := N|_{H_n}$ ist ein beschränkter normaler Operator mit $\|N_n\| \leq \sqrt{n}$.

Ist also $\lambda \in \sigma(N_n)$, so ist

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + |\lambda|^2} &\in \sigma((1 + N_n^*N_n)^{-1}) = \sigma(S|_{H_n}) = \sigma((S \circ P_n)|_{H_n}) \\
 &= \sigma\left(\left(\int t \cdot \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) dP(t)\right)|_{H_n}\right) \\
 &\subseteq \sigma\left(\int t \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) dP(t)\right) \\
 &= \overline{\{t \chi_{(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(t) : t \in \sigma(S) \subseteq (0, 1]\}} \quad \text{nach (11.59)} \\
 &\subseteq \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],
 \end{aligned}$$

d.h. $\sigma(N_n) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{n-1} \leq |z| \leq \sqrt{n}\} =: \Delta_n$.

Sei nun $N_n = \int z dP_n(z)$ die Spektral-Darstellung von N_n , d.h. $P_n : \mathcal{B}(\Delta_n) \rightarrow L(H_n)$. Es sei P auf jeder Borel-Menge $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ definiert durch

$$P(\Delta) := \bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(\Delta \cap \Delta_n).$$

Es ist $P_n(\Delta \cap \Delta_n)$ eine orthogonal-Projektion mit Bild in H_n und somit $P(\Delta)$ eine orthogonal-Projektion in $B(H)$.

Um zu zeigen, daß P ein Spektral-Maß ist, beachten wir zuerst, daß klarerweise $P(X) = 1$. Falls Λ_1 und Λ_2 zwei Borel-Mengen in \mathbb{C} sind, so ist, da die Räume H_n paarweise orthogonal sind,

$$\begin{aligned} P(\Lambda_1)P(\Lambda_2) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_1 \cap \Delta_n) \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_2 \cap \Delta_n) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_1 \cap \Delta_n) P_n(\Lambda_2 \cap \Delta_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n(\Lambda_1 \cap \Lambda_2 \cap \Delta_n) \\ &= P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2). \end{aligned}$$

Für $h \in H$ ist $\langle P(\Delta)h, h \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n(\Delta \cap \Delta_n)h, h \rangle$. Falls also Λ_n paarweise disjunkte Borel-Mengen sind, so konvergiert $\sum_j P(\Lambda_j)$ punktweise und es gilt:

$$\begin{aligned} \left\langle P\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j\right)h, h \right\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \cap \Delta_n\right)h, h \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle P_n\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \cap \Delta_n\right)h_n, h_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\langle P_n(\Lambda_j \cap \Delta_n)h_n, h_n \rangle}_{\geq 0} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \langle P_n(\Lambda_j \cap \Delta_n)h_n, h_n \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle P(\Lambda_j)h, h \rangle. \end{aligned}$$

Also ist P σ -additiv.

(1) Sei nun $\int z dP(z) := \bigoplus_n \int z dP_n(z) = \bigoplus_n N_n$ wie in (12.42). Dann ist $\int z dP(z) \subseteq N$, denn $H_n \subseteq \text{Dom}\left(\int z dP_n(z)\right)$ und falls $h = \sum_n h_n \in \text{Dom}\left(\bigoplus_n N_n\right)$, so liegt $(\sum_{k \leq n} h_k) \oplus (\sum_{k \leq n} N_k h_k) \in \text{Graph } N$ und dieser Ausdruck konvergiert

gegen $h \oplus \left(\int z dP(z) \right) h$. Da N abgeschlossen ist, liegt $h \in \text{Dom } N$ und $Nh = \left(\int z dP(z) \right) h$. Da aber sowohl N als auch $\int z dP(z) := \bigoplus_n N_n$ normal ist, gilt nach (12.39) Gleichheit.

Beh.: Es ist $\sigma(N) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n)}$. Klarerweise ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n) \subseteq \sigma(N)$. Da $\sigma(N)$ abgeschlossen ist, zeigt dies eine Inklusion. Umgekehrt sei $\lambda \notin \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n)}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|\lambda - z| \geq \delta$ für alle $z \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma(N_n)$. Also existiert $(N_n - \lambda)^{-1}$ und $\|(N_n - \lambda)^{-1}\| = \|z \mapsto (z - \lambda)^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{\delta}$ für alle n . Folglich ist $\bigoplus_{n=1}^{\infty} (N_n - \lambda)^{-1}$ ein beschränkter Operator und gleich $(N - \lambda)^{-1}$, d.h. $\lambda \notin \sigma(N)$.

(2) Es gilt $\Delta \cap \sigma(N) = \emptyset \Rightarrow \forall n : \Delta \cap \sigma(N_n) = \emptyset \Rightarrow \forall n : P_n(\Delta) = 0 \Rightarrow P(\Delta) = 0$.

(3) Falls U offen ist und $U \cap \sigma(N) \neq \emptyset$, dann impliziert die obige Behauptung, daß $U \cap \sigma(N_n) \neq \emptyset$ für ein n . Da $P_n(U) \neq 0$ ist auch $P(U) \neq 0$.

(4) Sei nun $A \in L(H)$ mit $AN \subseteq NA$ und $AN^* \subseteq N^*A$. Dann ist $A(1 + N^*N) \subseteq (1 + N^*N)A$. Also ist $SA \subseteq AS$, und da beide Seiten global definiert sind, ist $SA = AS$. Nach (11.40) kommutiert A mit den Spektral-Projektionen von S und insbesondere ist H_n bezüglich A invariant. Somit ist $A_n := A|_{H_n} \in L(H_n)$ und $A_n N_n = N_n A_n$. Also gilt $A_n f(N_n) = f(N_n) A_n$ für jede beschränkte Borel-Funktion f . Es folgt nun $A \left(\int_X f dP \right) = \left(\bigoplus_n A_n \right) \circ \left(\bigoplus_n N_n \right) \subseteq \bigoplus (A_n \circ N_n) = \bigoplus (N_n \circ A_n) = \left(\bigoplus_n N_n \right) \circ \left(\bigoplus_n A_n \right) = \left(\int_X f dP \right) A$, da $\bigoplus_n A_n$ ein beschränkter Operator ist. \square

12.46 Theorem. Es sei $N : H \rightsquigarrow H$ ein normaler Operator auf einem separablen Hilbertraum H . Dann existiert ein σ -endlicher Maßraum (X, Ω, μ) und eine Ω -meßbare Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, sodaß N unitär äquivalent ist zu M_f auf $L^2(\mu)$.

Beweis. Wir zerlegen N in die unbeschränkte Summe von beschränkten normalen Operatoren N_n . Nach Theorem (11.34) existieren σ -endliche Maß-Räume (X_n, Ω_n, μ_n) und beschränkte Ω_n -meßbare Funktion f_n , so daß N_n unitär-äquivalent ist zu M_{f_n} . Es sei X die disjunkte Vereinigung der X_n und $\Omega := \{\Delta \subseteq X : \Delta \cap X_n \in \Omega_n \text{ für alle } n\}$. Falls $\Delta \in \Omega$ so sei $\mu(\Delta) := \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\Delta \cap X_n)$. Weiters sei $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f|_{X_n} := f_n$. Dann ist f Ω -meßbar und $N = \bigoplus_n N_n \sim \bigoplus_n M_{f_n} = M_f$ auf $L^2(X, \Omega, \mu)$. \square

12.47 Beispiel. Wir wollen nun einen unitären Operator U finden, welcher den Impuls-Operator $P : f \mapsto i f'$ in einen Multiplikations-Operator transformiert. Dazu rufen wir uns die Fouriertransformation $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ aus Kapitel (8) in Erinnerung. Sie war durch

$$\mathcal{F}f(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx$$

definiert und hat die Parsevalsche Gleichung

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle f, g \rangle$$

erfüllt. Damit sie wirklich unitär wird, modifizieren wir sie durch einen Faktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, d.h.

$$\mathcal{F}f(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx.$$

Da dann $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ eine surjektive Isometrie ist mit inverser $\mathcal{F}^{-1}f = S(\mathcal{F}f)$ (wobei S die Spiegelung bezeichnet) und \mathcal{S} dicht liegt in L^2 , läßt sie sich zu einem eindeutigen unitären Operator $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ erweitern.

Für $f \in \mathcal{S}$ ist, wie wir in (8.1) gesehen haben:

$$\begin{aligned} (P \circ \mathcal{F})f(y) &= i \frac{d}{dy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) (-i^2) x e^{-ixy} dx \\ &= (\mathcal{F} \circ Q)f(y), \end{aligned}$$

wobei Q wie üblich den Orts-Operator bezeichnet. Es ist also $P|_{\mathcal{S}} = \mathcal{F} \circ Q|_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{F}^{-1}$, und da P der Abschluß von $P|_{C_c^\infty}$ nach (12.6) und somit auch von $P|_{\mathcal{S}}$ ist, und auch Q analog jener von $Q|_{\mathcal{S}}$ ist nach (12.4), ist $P = \overline{P|_{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{F} \circ Q|_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{F}^{-1}} = \mathcal{F} \circ \overline{Q|_{\mathcal{S}}} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ Q \circ \mathcal{F}^{-1}$. In der Tat genügt es dafür zu wissen, daß Q der Abschluß von $Q|_{\mathcal{S}}$ ist, denn natürlich enthält P den Abschluß von $P|_{\mathcal{S}}$, d.h. den selbst-adjungierten Operator $\overline{P|_{\mathcal{S}}} = \overline{\mathcal{F} \circ Q|_{\mathcal{S}} \circ \mathcal{F}^{-1}} = \mathcal{F} \circ \overline{Q|_{\mathcal{S}}} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ Q \circ \mathcal{F}^{-1}$. Da selbst-adjungierte Operatoren maximal symmetrisch sind, muß dies P sein.

Da $\mathcal{F}^{-1} = S \circ \mathcal{F}$ ist, gilt umgekehrt $Q = \mathcal{F}^{-1} \circ P \circ \mathcal{F} = S \circ \mathcal{F} \circ P \circ S^{-1} \circ \mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F} \circ S \circ S^{-1} \circ P \circ \mathcal{F}^{-1} = -\mathcal{F} \circ P \circ \mathcal{F}^{-1}$, denn

$$\begin{aligned} (S \circ \mathcal{F})f(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(-y)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(-x)y} dx \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} f(-x) e^{-ixy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} Sf(x) e^{-ixy} dx \\ &= (\mathcal{F} \circ S)f(y) \end{aligned}$$

und

$$(S \circ P)f(y) = P(f)(-y) = i f'(-y) = -i \frac{d}{dy}(f'(-y)) = -(P \circ S)f(y).$$

1-Parameter Gruppen und infinitesimale Erzeuger

Motivation. In der klassischen Mechanik ist die BEWEGUNGSGLEICHUNG durch das NEWTON'SCHE Gesetz

$$F(x) = m \cdot \ddot{x} \quad (\text{Kraft} = \text{Masse} \times \text{Beschleunigung})$$

geben. Durch den Ansatz $q := x$ und $p := m\dot{x}$ (Impuls = Masse \times Geschwindigkeit) wird diese gewöhnliche Differential-Gleichung 2.ter Ordnung in folgende Differential-Gleichung 1.ter Ordnung übergeführt:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{1}{m}p \\ \dot{p} &= F(q) \end{aligned}$$

— Andreas Kriegl, Universität Wien —

Ist das Kraftfeld ein Gradientenfeld, d.h. $F = -\text{Grad} U$, und definiert man die ENERGIE E (= Hamilton-Funktion H) als Summe der KINETISCHEN ENERGIE $\frac{m\|\dot{x}\|^2}{2} = \frac{\|p\|^2}{2m}$ und POTENTIELLER ENERGIE $U(q)$ so erhält man

$$E(q, p) := \frac{|p|^2}{2m} + U(q)$$

und $\frac{\partial E}{\partial q} = \text{Grad} U = -F$ und $\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{m}p$. Also ist die Energie eine BEWEGUNGS-INVARIANTE, d.h. $\frac{d}{dt}E(p, q) = \frac{\partial E}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial E}{\partial q} \dot{q} = \frac{p}{m} F(q) - F(q) \frac{p}{m} = 0$ und die Bewegungsgleichung ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \frac{\partial E}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial E}{\partial q}. \end{aligned}$$

Wenn wir dies nun in die Quanten-Mechanik übersetzen, so wird p zum Differential-Operator $P = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} : f \mapsto f'$ und q zum Multiplikationsoperator $Q = x$ mit der Identität. Die Energie-Funktion wird dann zum SCHRÖDINGER OPERATOR: $S := -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + U(x)$, beziehungsweise in mehreren Variablen zu

$$S = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x).$$

Die entsprechende Bewegungsgleichung ist die SCHRÖDINGER GLEICHUNG

$$i\hbar \frac{d}{dt} u = S u.$$

Von ganz ähnlicher Bauart ist auch die Wärmeleitungs-Gleichung

$$\frac{d}{dt} u = \Delta u.$$

Auch die Schwingungs-Gleichung $\frac{d^2 u}{dt^2} = \Delta u$ läßt sich mittels des Ansatzes $v = \frac{d}{dt} u$ in die Form

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bringen.

Wir müssen also Gleichungen der Gestalt $\dot{u} = A u$ lösen, eine lineare gewöhnliche Differential-Gleichung 1.ter Ordnung. Für beschränkte Operatoren auf Banachräumen ist die Lösung nach (3.9) durch $u(t) = u(0) e^{tA}$ gegeben. Die in obigen Situationen auftretenden Operatoren sind aber partielle Differential-Operatoren zweiter Ordnung, also keine stetigen Operatoren auf Banach-Räumen. Für Fréchet-Räume wie $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ muß aber die Reihe $e^{tA} = \sum_n \frac{t^n}{n!} A^n$ nicht konvergieren. Also sollten wir A als lineare (unbeschränkte) Operatoren auf L^2 auffassen, und für solche e^{tA} definieren.

Man beachte, daß der Laplace Operator selbst-adjungiert ist. Nach einem Resultat von [K] ist der Schrödinger Operator $S = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(x)$ unter geeigneten

Wachstumsbedingungen an das Potential U wesentlich selbst-adjungiert, siehe auch [V,253].

Es sei $t \mapsto u_x(t)$ die Lösungs-Kurve zum Anfangswert $u(0) = x$ einer gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{u} = A(u)$. Dann hat die Abbildung $U : (t, x) \mapsto u_x(t)$ dort wo sie definiert ist, offensichtlich folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} U(0, x) &= x \\ U(t + s, x) &= U(t, U(s, x)). \end{aligned}$$

Sie heißt auch der FLUSS der Differentialgleichung. Ist A linear, so ist klarerweise auch $x \mapsto U(t, x)$ linear, und somit $\check{U} : \mathbb{R} \rightarrow L(H)$ eine Kurve mit $\check{U}(0) = 1$ und $\check{U}(t + s) = \check{U}(t) \circ \check{U}(s)$. Es ist also $\check{U} : \mathbb{R} \rightarrow L(H)$ ein Gruppen-Homomorphismus. Und für alle $x \in H$ gilt $\frac{d}{dt}\check{U}(t)(x) = \frac{\partial}{\partial t}u_x(t) = A(u_x(t)) = (A \circ \check{U}(t))(x)$. Insbesondere ist also die punktweise Ableitung der Kurve \check{U} bei 0 genau A . Diesen Zusammenhang zwischen Operatoren und 1-Parameter Untergruppen wollen wir nun auf unbeschränkte selbst-adjungierte Operatoren übertragen.

12.48 Stone's Theorem.

Sei $S : H \rightsquigarrow H$ selbstadjungiert und $S = \int_{-\infty}^{+\infty} t dP(t)$ seine Spektral-Darstellung. Da für $t \in \mathbb{R}$ die Abbildung $s \mapsto e^{its}$ beschränkt auf \mathbb{R} ist, existiert $U(t) := e^{itS} := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} dP(s) \in L(H)$. Weiters ist $U(t)^* = e^{-itS}$ und somit $U(t) \circ U(t)^* = e^{itS} \circ e^{-itS} = e^0 = 1$ und $U(t)^* \circ U(t) = e^{-itS} \circ e^{itS} = 1$, d.h. $U(t)$ ist unitär.

Wegen $e^z \cdot e^w = e^{z+w}$ ist $U(t) \circ U(s) = U(t+s)$. Weiters ist U SOT-stetig, denn $\|U(t)h - U(s)h\| = \|U(t-s+s)h - U(s)h\| = \|U(s)(U(t-s)h - h)\| = \|U(t-s)h - h\|$. Also genügt zu zeigen, daß $\|U(t)h - h\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{its} - 1|^2 dP_{h,h}(s) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Es ist $P_{h,h}$ ein endliches Maß auf \mathbb{R} und für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{its} - 1|^2 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ und $|e^{its} - 1|^2 \leq 4$. Also folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß $U(t)h \rightarrow h$ für $t \rightarrow 0$.

Theorem. *Es ist eine Bijektion*

$$\{S : H \rightsquigarrow H, \text{ selbstadjungiert}\} \cong \{U : \mathbb{R} \rightarrow L(H), \text{ unitäre Darstellung}\}$$

vermöge

$$\begin{aligned} U(t) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it} dP(t) \text{ für } S = \int_{-\infty}^{+\infty} t dP(t) \\ iS &:= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} U(t)h \text{ für } h \in \text{Dom } S := \{h : \exists \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} U(t)h\} \end{aligned}$$

gegeben.

Beweis. Daß U eine unitäre Darstellung ist, haben wir gerade gezeigt. Es ist $\frac{1}{t}(U(t) - 1) - iS = f_t(S)$, wobei $f_t(s) := \frac{1}{t}(e^{its} - 1) - is$. Für $h \in \text{Dom } S$ ist also

$$\left\| \frac{1}{t}(U(t)h - h) - iSh \right\|^2 = \|f_t(S)h\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{its} - 1}{t} - is \right|^2 dP_{h,h}(s).$$

Für $t \rightarrow 0$ gilt $\frac{1}{t}(e^{its} - 1) - is \rightarrow 0$ und wegen des Mittelwertsatzes $|e^{is} - 1| \leq |s|$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Also ist $|f_t(s)| \leq \frac{1}{t}|e^{its} - 1| + |s| \leq 2|s|$. Da $\text{id} \in L^2(P_{h,h})$ nach (12.42), folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}(U(t) - 1)h = iSh$.

Sei $D := \{h \in H : \frac{d}{dt}|_{t=0}U(t)h \text{ existiert in } H\}$. Für $h \in D$ sei $\tilde{S}h$ definiert durch

$$\tilde{S}h := -i \frac{d}{dt}|_{t=0}U(t)h.$$

Man sieht sofort ein, daß \tilde{S} ein linearer Operator ist. Nach (2) ist \tilde{S} eine Erweiterung von S und somit ist auch \tilde{S} dicht-definiert. Für $h, g \in D$ gilt:

$$\langle \tilde{S}h, g \rangle = -i \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{U(t)h - h}{t}, g \right\rangle = \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle h, -i \frac{U(-t)g - g}{-t} \right\rangle = \langle h, \tilde{S}g \rangle,$$

weil $U(t)^* = U(t)^{-1} = U(-t)$. Also ist \tilde{S} eine symmetrische Erweiterung von S und, da nach (12.29) der selbst-adjungierte Operator S maximal symmetrisch ist, gilt $\tilde{S} = S$ und $D = \text{Dom } S$.

Sei umgekehrt $U : \mathbb{R} \rightarrow U(H)$ eine unitäre Darstellung, $D := \{h \in H : \exists \frac{d}{dt}|_{t=0}U(t)h\}$ und $Sh := -i \frac{d}{dt}|_{t=0}U(t)h$ für $h \in D$.

Beh.: D ist dicht in H .

Dazu definieren wir Operatoren R_n durch

$$R_n h := \int_0^\infty e^{-t} U\left(\frac{t}{n}\right) h dt.$$

Da $\|U(t)h\| = \|h\|$ und $(t \mapsto e^{-t}) \in L^1(\mathbb{R}^+)$, ist dieses Integral wohldefiniert und es gilt $\|R_n h\| \leq \int_0^\infty e^{-t} \|h\| dt = -e^{-t} \|h\| |_{t=0}^\infty = \|h\|$. Offensichtlich ist somit $R_n : H \rightarrow H$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|R_n\| \leq 1$.

Wir wollen nun zeigen, daß das Bild von R_n ganz in D liegt. Sei dazu $h \in H$, dann ist

$$\begin{aligned} -\frac{i}{t}(U(t) - 1)R_n h &= -\frac{i}{t} \int_0^\infty e^{-s} U\left(t + \frac{s}{n}\right) h ds + \frac{i}{t} \int_0^\infty e^{-s} U\left(\frac{s}{n}\right) h ds \\ &= -\frac{i}{t} \int_{nt}^\infty e^{-(r-nt)} U\left(\frac{r}{n}\right) h dr + \frac{i}{t} \int_0^\infty e^{-s} U\left(\frac{s}{n}\right) h ds \\ &= -in \frac{e^{nt} - 1}{nt} \int_0^\infty e^{-s} U\left(\frac{s}{n}\right) h ds + in \frac{1}{nt} \int_0^{nt} e^{-r+nt} U\left(\frac{r}{n}\right) h dr \\ &= -in \frac{e^{nt} - 1}{nt} R_n h + in e^{nt} \frac{1}{nt} \int_0^{nt} e^{-r} U\left(\frac{r}{n}\right) h dr. \end{aligned}$$

Für $t \rightarrow 0$ gilt

$$\frac{e^{nt} - 1}{nt} \rightarrow 1, \quad e^{nt} \rightarrow 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{nt} \int_0^{nt} e^{-r} U\left(\frac{r}{n}\right) h dr \rightarrow e^0 U(0)h = h.$$

Also ist $R_n h \in D$ und $S R_n h = -in(R_n - 1)h$.

Für die Dichtheit von D genügt es zu zeigen, daß $R_n h \rightarrow h$ für $n \rightarrow \infty$ und $h \in H$ beliebig. Es gilt

$$\begin{aligned} R_n h - h &= \int_0^\infty e^{-t} U\left(\frac{t}{n}\right) h dt - \int_0^\infty e^{-t} h dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} (U\left(\frac{t}{n}\right)h - h) dt. \end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so gewählt, daß $\|U(t)h - h\| < \varepsilon$ für alle $|t| \leq \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|R_n h - h\| &\leq \int_0^\infty e^{-t} \|U(\tfrac{t}{n})h - h\| dt \\ &\leq \int_0^{n\delta} e^{-t} \varepsilon dt + \int_{n\delta}^\infty e^{-t} (\|U(\tfrac{t}{n})h\| + \|h\|) dt \\ &\leq \varepsilon + \int_{n\delta}^\infty e^{-s} 2 ds \\ &\leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

falls $n = n(\varepsilon, \delta)$ so groß gewählt wurde, daß $\int_{n\delta}^\infty e^{-s} ds \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Beh.: S ist symmetrisch, denn für $h, k \in D$ ist

$$\begin{aligned} 0 &= -i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle h, k \rangle \\ &= -i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle U(t)h, U(t)k \rangle \\ &= \langle -i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U(t)h, U(0)k \rangle - \langle U(0)h, -i \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} U(t)k \rangle \\ &= \langle Sh, k \rangle - \langle h, Sk \rangle. \end{aligned}$$

Nach (12.19) ist S abschließbar und wir bezeichnen den Abschluß von S wieder mit S . Nach (12.25) müssen wir für die selbst-Adjungiertheit nur zeigen, daß $\text{Ker}(S^* \pm i) = \{0\}$, oder äquivalent, daß $\text{Bild}(S \pm i)$ dicht ist. Dazu berechnen wir

$$(S + i) \circ (-i R_1) = i^2 (R_1 - 1) - i^2 R_1 = 1,$$

also ist $S + i$ surjektiv.

Definiert man analog zu R_n einen Operator T_n durch $T_n h := \int_0^\infty e^{-t} U(-\tfrac{t}{n})h dt$, und zeigt $S \circ T_n = i n (T_n - 1) h$, so erhält man

$$(S - i) \circ (i T_1) = i^2 (T_1 - 1) - i^2 T_1 = 1,$$

also ist auch $S - i$ surjektiv.

Sei nun $h \in D$. Dann ist $\frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} = U(t) \frac{U(s)-1}{s} h$ und da $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} U(s)h = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s)-1}{s} h$ existiert, gilt das auch für

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(t)h &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} U(t) \frac{U(s)-1}{s} h = U(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s)-1}{s} h \\ &= U(t)(i S h). \end{aligned}$$

Andererseits ist aber $\frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} = \frac{U(s)-1}{s} U(t)h$, also ist $U(t)h \in D$ und

$$\frac{d}{dt} U(t)h = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(t+s)h - U(t)h}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s)-1}{s} U(t)h = i S U(t)h.$$

Die Rechnung zuvor hat gezeigt, daß für $h \in D = \text{Dom } S = \text{Dom}(U(t)S)$ die Gleichung $U(t)Sh = i \frac{d}{dt} U(t)h = S U(t)h$ gilt, d.h. $U(t)S \subseteq S U(t)$. Dies wäre auch direkt aus (12.43) gefolgt.

Sei nun $V(t) := \exp(iSt)$. Wir müssen zeigen $U = V$. Sei dazu $h \in D$. Nach Obigen ist $V(t)h \in D$ und es gilt

$$\frac{d}{dt}V(t)h = iSV(t)h.$$

Ähnlich gilt:

$$\frac{d}{dt}U(t)h = iSU(t)h.$$

Folglich ist $t \mapsto h(t) := U(t)h - V(t)h$ differenzierbar und

$$h'(t) = iSU(t)h - iSV(t)h = iSh(t).$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|h(t)\|^2 &= \frac{d}{dt}\langle h(t), h(t) \rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt}h(t), h(t) \rangle + \langle h(t), \frac{d}{dt}h(t) \rangle \\ &= \langle iSh, h \rangle + \langle h, iSh \rangle \\ &= i\langle Sh, h \rangle - i\langle h, Sh \rangle = 0. \end{aligned}$$

Somit ist h konstant, und damit $h(t) = h(0) = 0$ für alle t , i.e. $U(t)h = V(t)h$ für alle $h \in D$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Da D dicht ist, ist $U = V$. \square

12.50 Proposition. *Der infinitesimale Erzeuger ist genau dann beschränkt, wenn $\lim_{t \rightarrow 0} \|U(t) - 1\| = 0$ ist, d.h. U Norm-stetig ist.*

Beweis. (\Rightarrow) gilt wegen $\|U(t) - 1\| = \|\exp itT - 1\| = \|\int_{\sigma(T)} (e^{its} - 1) dP(s)\| = \|s \mapsto e^{its} - 1\|_{\infty} = \sup\{|e^{its} - 1| : s \in \sigma(T)\} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$, da $\sigma(T)$ beschränkt ist.

(\Leftarrow) Angenommen $\|U(t) - 1\| \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$. Es sei $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$. Dann existiert ein $t_0 > 0$ mit $\|U(t) - 1\| < \varepsilon$ für $|t| \leq t_0$. Da $U(t) - 1 = \int_{\sigma(T)} (e^{its} - 1) dP(s)$ ist $\sup\{|e^{its} - 1| : s \in \sigma(T)\} = \|U(t) - 1\| < \varepsilon$ für diese t . Für δ abhängig von ε gilt somit $ts \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]2\pi n - \delta, 2\pi n + \delta[=: G$ für alle $s \in \sigma(T)$ und $|t| \leq t_0$. Da die Intervalle disjunkte Komponenten von G sind und für $s \in \sigma(T)$ das Intervall $\{ts : 0 \leq t \leq t_0\}$ enthalten ist in G , ist $|ts| < \delta$ für alle $|t| \leq t_0$. Insbesondere ist $t_0\sigma(T) \subseteq [-\delta, \delta]$. Und somit $\sigma(T)$ beschränkt und damit T beschränkt, denn $T = \int_{\sigma(T)} z dP(z) \in L(H)$, da $(z \mapsto z)$ beschränkt ist auf $\sigma(T)$. \square

12.51 Theorem. *Es sei H separabel und $U : \mathbb{R} \rightarrow L(H)$ erfülle die Voraussetzungen (1) und (2) aus (12.48). Falls für alle $h, k \in H$ die Abbildung $t \mapsto \langle U(t)h, k \rangle$ Lebesgue-messbar ist, so ist U SOT-stetig.*

Beweis. Es sei $0 < a < \infty$ und $h, g \in H$. Dann ist $t \mapsto \langle U(t)h, g \rangle$ eine beschränkte meßbare Funktion auf $[0, a]$, also gilt

$$\int_0^a |\langle U(t)h, g \rangle| dt \leq a \|h\| \|g\|.$$

Folglich ist $h \mapsto \int_0^a \langle U(t)h, g \rangle dt$ ein beschränktes lineares Funktional auf H . Es existiert also ein $g_a \in H$ mit $\langle h, g_a \rangle = \int_0^a \langle U(t)h, g \rangle dt$ für alle $h \in H$ und $\|g_a\| \leq a \|g\|$.

Wir behaupten nun, daß das Erzeugnis von $\{g_a : g \in H, a > 0\}$ dicht liegt in H . In der Tat, angenommen $h \in H$ ist orthogonal auf alle g_a . Dann gilt für alle $a > 0$ und $g \in H$, daß $0 = \langle h, g_a \rangle = \int_0^a \langle U(t)h, g \rangle dt$. Also ist $\langle U(\cdot)h, g \rangle = 0$ fast überall auf \mathbb{R} . Da H separabel ist, existiert eine Teilmenge $\Delta \subset \mathbb{R}$ von Maß 0, s.d. $\langle U(t)h, g \rangle = 0$ für alle $t \notin \Delta$ und g in einer fixen abzählbaren dichten Teilmenge von H . Also ist $\|h\| = \|U(t)h\| = 0$ für $t \notin \Delta$.

Für $s \in \mathbb{R}$ gilt nun:

$$\begin{aligned} \langle h, U(s)g_a \rangle &= \langle U(-s)h, g_a \rangle \\ &= \int_0^a \langle U(t)U(-s)h, g \rangle dt \\ &= \int_0^a \langle U(t-s)h, g \rangle dt \\ &= \int_{-s}^{a-s} \langle U(t)h, g \rangle dt \\ &\rightarrow \int_0^a \langle U(t)h, g \rangle dt = \langle h, g_a \rangle \end{aligned}$$

Also konvergiert $\langle h, U(s)g_a \rangle \rightarrow \langle h, g_a \rangle$ für $s \rightarrow 0$. Da $\{g_a : a > 0, g \in H\}$ dicht ist und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit, ist $U : \mathbb{R} \rightarrow B(H)$ bezüglich der WOT stetig bei 0. Wegen der Gruppen-Eigenschaft ist U überall stetig bzgl. WOT. Also ist U auch SOT-stetig. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned} \|U(t)h - h\|^2 &= \langle (U(t) - 1)h, (U(t) - 1)h \rangle \\ &= \langle (U(t) - 1)^*(U(t) - 1)h, h \rangle \\ &= \langle (U(-t) - 1)(U(t) - 1)h, h \rangle \\ &= \langle (U(0) - U(-t) - U(t) + 1)h, h \rangle \\ &= -\langle U(t)h - h, h \rangle - \langle U(-t)h - h, h \rangle \\ &\rightarrow 0 + 0 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Da selbst-adjungierte Operatoren auf separablen Hilbert-Räumen als Multiplikations-Operatoren dargestellt werden können, braucht man nur die 1-Parameter Untergruppen dieser Operatoren zu bestimmen:

12.52 Proposition. *Es sei (X, Ω, μ) ein σ -endlicher Maß-Raum und f eine reellwertige Ω -meßbare Funktion auf X . Es sei $S := M_f$ auf $L^2(\mu)$. Dann ist $\exp(itS) = M_{e_t}$, wobei $e_t(x) := \exp(itf(x))$ ist.*

Beweis. Es ist $\text{Dom } M_f = \{h \in L^2 : fh \in L^2\}$. Wir müssen also nur zeigen, daß $\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{itf} h = ifh$ für alle $h \in \text{Dom } M_f$. Punktweise gilt offensichtlich

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} e^{itf(x)} h(x) = if(x)e^0 h(x) = if(x)h(x).$$

Um den Satz über dominierte Konvergenz anzuwenden, benötigen wir eine obere Schranke für $|\frac{e^{itf(x)} - 1}{t} h(x) - if(x)h(x)|^2$ diese erhalten wir wie im Beweis von

(12.48) mit $s = f(x)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{e^{itf(x)} - 1}{t} h(x) - if(x)h(x) \right|^2 &= \left| \frac{e^{its} - 1}{t} h(x) - ish(x) \right|^2 \\ &= \left| \left(\frac{e^{its} - 1}{t} h(x) - is \right) h(x) \right|^2 \\ &= |f_t(s)h(x)|^2 \\ &\leq |2s h(x)|^2 = 4|f(x)h(x)|^2, \end{aligned}$$

und da $f h \in L^2$ ist der Beweis vollständig. \square

12.53 Theorem. *Es sei $P : f \mapsto if'$ definiert auf*

$$D := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ ist lokal absolut-stetig und } f' \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Dann ist P selbst-adjungiert und die zugehörige 1-Parameter Untergruppe U ist durch $U(t)f : x \mapsto f(x - t)$ gegeben.

Beweis. Wir haben gesehen, daß die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : L^2 \rightarrow L^2$ ein unitärer Operator ist, welcher P in Q transformiert, d.h. $P = \mathcal{F}Q\mathcal{F}^{-1}$. Nach (12.52) ist die unitäre 1-Parameter Gruppe U_Q zu Q gegeben durch $U_Q(t)$ ist Multiplikation mit $x \mapsto e^{itx}$. Die unitäre 1-Parameter Gruppe U_P zu P ist folglich durch $U_P(t) = \mathcal{F}U_Q(t)\mathcal{F}^{-1}$ gegeben. Wir haben in (8.1) gesehen, daß für $g \in \mathcal{S}$ folgendes gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U_Q(t)g)(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} g(x) e^{-ixy} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(x) e^{-ix(y-t)} dx \\ &= \mathcal{F}(g)(y - t) \\ &= (T_t \mathcal{F}g)(y), \end{aligned}$$

wobei T_t den Verschiebungs-Operator bezeichnet. Folglich ist

$$U_P(t)(f) = (\mathcal{F}U_Q(t)\mathcal{F}^{-1})f = \mathcal{F}(U_Q(t)(\mathcal{F}^{-1}f)) = T_t(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f) = T_t f. \quad \square$$

Literatur

- [A] Hans Wilhelm Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Hochschultext, Springer, 1985.
- [B] Sterling K. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 15, Springer, 1974.
- [C] John B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Maths., vol. 96, Springer, 1985.
- [C2] John B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Graduate Texts in Mathematics 11, Springer, New York, 1978.
- [He] Ernst Henze, *Einführung in die Maßtheorie*, Hochschultaschenbücher Band 505, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1971.
- [H] Harro Heuser, *Funktionalanalysis*, Mathematische Leitfäden, Teubner, 1975.
- [H2] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis*, Mathematische Leitfäden, Teubner, 1980.
- [HR] Edwin Hewitt; Kenneth A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis*, Grundlehren, Springer, 1963.
- [HS] Friedrich Hirzebruch; Winfried Scharlau, *Einführung in die Funktionalanalysis*, Hochschultaschenbücher 296, Bibliograph. Institut, 1971.
- [K] Kato, *Fundamental Properties of Hamilton Operators of Schrödinger Type*, Trans. Am. Math. Soc. **70** (1950), 195–211.
- [L] Ronald Larsen, *Functional Analysis*, Marcel Dekker, 1973.
- [M] Edwin E. Moise, *Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*, Graduate Texts in Mathematics 47, Springer, New York, 1977.
- [T] F. Trèves, *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*, Gordon and Breach, New York, 1971.
- [V] N. Ya. Vilenkin et al., *Functional Analysis*, Walters Noordhoff, 1972.
- [W] G.T. Whyburn, *Topological Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1964.
- [Y] Kôzaku Yosida, *Functional Analysis*, Grundlehren, vol. 123, Springer, 1980.

Index

- 0-homolog 17
 - 0-homotop 14
 - 0-Kette 17
 - 1-Form 12
 - , geschlossene 13
 - 1-Kette 16
 - 1-Parameter Gruppe unitärer Operatoren 138
- A**
- Abelsche Gruppe, lokalkompakte 33
 - abgeschlossen 106
 - Ableitung, äußere 13
 - abschließbar 106
 - Abschluß 106
 - absolut-stetig 89
 - adjungierte Operator 107
 - ähnlich 93
 - Algebra, von Neumann 95
 - anti-holomorph 14
 - äquivalent 49
 - , unitär 88
 - äußere Ableitung 13
- B**
- B^* -Algebra 63
 - Bahn 49
 - beschränkt invertierbar 113
 - Bewegungsgleichung 136
 - Bewegungs-Invariante 137
- C**
- C^* -Algebra 37
 - Calkin-Algebra 48
 - Cauchy-Riemann'schen Differentialgl. 14
 - Cayley-Transformation 124
 - Transformierte 124
 - Charaktäre 33
 - Charaktergruppe 33
- D**
- Darstellung, unitäre 60
 - Defizienz-Indizes 120
 - Teilräume 120
 - Differentialgl., Cauchy-Riemann'sche 14
 - Dimensionen 120
 - Domäne 106
- E**
- echtes Ideal 27
 - Eigenvektor 3
 - Eigenwert 3
 - Energie 136
 - , kinetischen 136
 - , potentieller 136
 - Erweiterung 106
- F**
- Erzeuger, infinitesimale 139
 - essentiell selbst-adjungiert 117
- G**
- Gelfand-Transformation 30
 - geschlossene 1-Form 13
 - Gleichung, Schrödinger 137
 - Gruppe, lokalkompakte Abelsche 33
- H**
- halbeinfach 30
 - Hamel-Basis 119
 - Heisenberg'schen Unschärfe-Relation 105
 - Hermite'sch 39
 - holomorph 13
 - holomorpher Keim 23
 - homolog 17
 - Homologie-Gruppe 17
 - homotop 13
- I**
- Ideal, echtes 27
 - idempotent 71
 - Impuls-Operator 105
 - infinitesimale Erzeuger 139
 - initial-Raum 45
 - Integrabilitätsbedingung 13
 - Integral, Riemann-Stieltjes 13
 - invarianter Teilraum 49
 - invertierbar, beschränkt 113
 - Involution 37
 - Isometrie, partielle 45
- K**
- Keim, holomorpher 23
 - kinetischen Energie 136
 - Kommutante 53
 - Kurve, rektifizierbare 13
 - Kurven-Integral 13
- L**
- Löcher 25
 - linearen Operator 106
 - links-Translation 57
 - lokalkompakte Abelsche Gruppe 33
- N**
- Newton'sche 136
 - nicht-degeneriert 64

- Norm-Topologie 76
normal 39, 127
- O**
Operator Topologie (SOT), starke 76
– Topologie (WOT), schwache 76
–, adjungierter 107
–, linearer 106
–, Schrödinger 137
–, zyklischer 88
Operatoren, Fredholm 48
Orbit 49
orthogonale Summe 49
- P**
partielle Isometrie 45
Plank'sches Wirkungsquant 105
Positions-Operator 105
positiv 42, 50
potentieller Energie 136
- Q**
Quanten-Mechanik 105
- R**
Radon-Nikodym-Ableitung 89
rektifizierbare Kurve 13
Resolventen-Funktion 12
–Menge 11
Riemann-Stieltjes Integral 13
- S**
Schrödinger Gleichung 137
– Operator 137
schwache Operator Topologie (WOT) 76
selbst-adjungiert 39, 117
–, essentiell 117
separierender Vektor 96, 96
singulär 101
skalar-wertiges Spektral-Maß 96
SOT ... starke Operator Topologie 76
SOT-stetige 1-Parameter Gruppe unitärer Operatoren 138
Spektral-Maß 73
–, skalar-wertiges 96
- Spektral-Radius 20
–Zerlegung 81
Spektrum 11
starke Operator Topologie (SOT) 76
Stone-Cech-Kompaktifizierung 32
Summe 106
–, orthogonale 49
symmetrisch 115
- T**
Teilraum, invarianter 49
Topologie (SOT), starke Operator 76
– (WOT), schwache Operator 76
–, Norm 76
totale Variation 13
Träger 83
treu 53
- U**
Umlaufzahl 15
unitär 39
– äquivalent 88
unitäre Darstellung 60
Unschärfe-Relation, Heisenberg'sche 105
- V**
Variation, totale 13
Vektor, separierender 96, 96
– zyklischer 49, 88
Vektorraum-Dimension 119
von Neumann Algebra 95
- W**
Windungszahl 15
Wirkungsquant, Plank'sche 105
(WOT) ... schwache Operator Topologie 76
- Z**
Zusammensetzung 106
Zustand 50
Zykel 17
zyklisch 49
–er Operator 88
zyklischer Vektor 49, 88