

# Funktionalanalysis I

Andreas Kriegl

Dies ist der erste Teil einer zweiteiligen Vorlesung. Voraussetzung sind die Grundvorlesungen über Analysis und lineare Algebra. Was topologische Grundlagen betrifft habe ich mich bemüht diese gering zu halten, allerdings ist Kenntnis der elementaren Topologie sicher von Vorteil. An einigen Stellen wird auch Maßtheorie verwendet, aber die nötigen Resultate sind in Kapitel 4 zusammengefaßt. Mein Ziel ist es den Stoff anhand von Problemen aus anderen mathematischen Gebieten zu entwickeln. Dabei sind die gewöhnlichen und insbesondere die partiellen Differentialgleichungen zu nennen. Zur Behandlung linearer partieller Differentialgleichungen wurde das Konzept der Distributionen entwickelt, und so soll auch auf diese eingegangen werden. Das heißt, wir schränken unsere Betrachtungen von Anfang an nicht auf Banach-Räume ein, sondern befassen uns gleich mit lokalkonvexen Vektorräumen (in der Gestalt seminormierter Räume).

Mein besonderer Dank gilt Andreas Cap und Wilhelm Tensch, die mich auf etliche Fehler in der Vorabversion aufmerksam gemacht haben.

Andreas Kriegl, Sept. 1991

Die zweite korrigierte Auflage konnte ich an Hand ausführlicher Fehlerlisten erstellen, die mir von Leonhard Summerer, Michaela Mattes und Muriel Niederle zur Verfügung gestellt wurden. Ich möchte mich dafür an dieser Stelle nochmals aufs herzlichste Bedanken.

März. 1993

Die Korrekturen für die dritte Auflage verdanke ich Martin Anderle,

Feb. 1995

In die vierte Auflage wurden Korrekturen von Bernhard Lamel mit Dank aufgenommen. Außerdem habe ich den Index überarbeitet,

Aug. 1998

Es wurden jene Korrekturen vorgenommen, die mir aufgefallen sind während ich die Vorlesung im Wintersemester 1998/99 gehalten habe.

März 1999

Es wurden kleinere Korrekturen vorgenommen, die Nummerierung geändert, und in LaTeX konvertiert.

Sept. 2002

## Inhaltsverzeichnis

1. Vorbemerkungen	3
2. Seminormen	9
3. Lineare Abbildungen und Vollständigkeit	22
4. Konstruktionen	36
5. Baire-Eigenschaft	71
6. Hilbert-Räume	92
7. Satz von Hahn Banach	113
8. Lösung partieller Differentialgleichungen	132
Literaturverzeichnis	144
Index	145

# 1. Vorbemerkungen

In diesem Kapitel wollen wir sehen, wie man zur Funktionalanalysis, d.h. zur Analysis in Vektorräumen von Funktionen, geführt wird, wenn man (Differential-) Gleichungen lösen will.

## 1.1 Wurzelziehen

Eine der Hauptaufgaben für den Mathematiker war und ist wohl noch immer das Lösen von Gleichungen  $f(x) = a$ . Ein einfacher typischer Fall ist das Wurzelziehen, d.h. Lösen der Gleichung für  $f(x) := x^2$ .

In einem sehr alten Witz (man rechnete noch mit Rechenschieber) wird die Aufgabe die Wurzel von 4 zu berechnen einem Techniker, einem Physiker und einem Mathematiker gestellt. Der Techniker löst das Problem am Rechenschieber, und erhält als Antwort 2,01. Der Physiker entwickelt die Quadratfunktion in eine Potenzreihe, bestimmt die ersten Glieder der Inversen Reihe und erhält als Antwort 1,999 mit einem Fehler kleiner als  $10^{-2}$ . Der Mathematiker sperrt sich mit einem Stoß Papier in sein Zimmer ein und verweigert jegliche Nahrungsaufnahme. Nach einigen Tagen stürmt er aus dem Zimmer mit dem Ausruf: "Heureka, die Lösung existiert und ist positiv!".

Was ist da wohl im Kopf des Mathematikers vor sich gegangen? Nun die Quadratfunktion  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  ist stetig, streng monoton wachsend und erfüllt  $f(0) = 0$  und  $f(+\infty) = +\infty$ . Also existiert für jede Zahl  $a > 0$  eine Lösung  $x > 0$  von  $f(x) = a$ , nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano aus dem Jahr 1817.

Wie wir alle aus der Analysisvorlesung wissen, benötigt man zum Beweis des Zwischenwertsatzes die Vollständigkeit der Zahlen. Die Pythagoreer im 5-4. Jh. v. Chr. waren noch der Meinung, daß alle Zahlen rational seien. Hipposos von Metapont zeigte aber im 5. Jh. v. Chr., daß die Länge  $\sqrt{2}$  der Diagonale des Einheitsquadrates nicht rational ist, und wurde dafür, wie die Mär geht, im Meer ertränkt. Um also den Zwischenwertsatz zu zeigen, ist eine explizite Beschreibung der reellen Zahlen nötig. Solche wurden Ende des 19. Jh. von Weierstraß mittels absolut-konvergenter Reihen, von Dedekind (1872) mittels Dedekind'scher Schnitte und von Cantor (1883) mittels Cauchy-Folgen gegeben.

Um additive Gleichungen  $a + x = b$  zu lösen hat man in der Folge auch negative Zahlen eingeführt.

Ein ähnliches Problem, nämlich die Zahlen zu erweitern, damit die Lösungen von polynomialen Gleichungen immer existieren, wurde von Gauß 1830 gelöst, indem er die imaginären Zahlen einführte. Die entsprechenden Lösungen wurde anfänglich auch als die unmöglichen Lösungen bezeichnet.

Doch zurück zum Wurzelziehen. Es hatten schon die Babylonier, die im Sexagesimalsystem (d.h. mit Basis 60) rechneten, den Näherungswert

$$1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \approx \sqrt{2}.$$

Alt-indisch ist der Näherungswert

$$\frac{577}{408} \approx \sqrt{2}.$$

Die Idee zur Bestimmung dieser Werte ist die folgende: Es gilt immer, daß das arithmetische Mittel  $\frac{p+q}{2}$  größer gleich dem geometrischen Mittel  $\sqrt{pq}$  ist, wie man entweder durch Quadrieren der Ungleichung sieht oder aus der Tatsache folgert, daß die Höhe  $h = \sqrt{pq}$  eines rechtwinkligen Dreiecks kleinergleich dem Radius  $\frac{p+q}{2}$  des Umkreises ist. Sei nun  $x$  eine Näherungslösung für  $\sqrt{a}$ . Dann ist auch  $\frac{a}{x}$  eine solche, welche auf der anderen Seite von  $\sqrt{a}$  liegt als  $x$ , d.h. o.B.d.A. sei  $x \geq \sqrt{a}$ . Das arithmetische Mittel  $\frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \geq \sqrt{a}$  muß dann aber eine Näherungslösung sein, die besser ist als  $x$ .

Führen wir dieses Verfahren beginnend bei 1 durch so erhalten wir  $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $\frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ ,  $\frac{1}{2}(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$ ,  $\frac{2}{\frac{17}{12}} = \frac{24}{17}$ ,  $\frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408} = 1,41422\dots$ , den alt-indischen Näherungsbruch für  $\sqrt{2} = 1,41421\dots$

Führen wir gleiches im 60-er System der Babylonier durch, so erhalten wir  $1, \frac{3}{2} = 1 + \frac{30}{60}$ ,  $\frac{4}{3} = 1 + \frac{20}{60}$ ,  $\frac{17}{12} = 1 + \frac{25}{60}$ ,  $\frac{24}{17} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{42}{60^2} + \frac{21}{60^3} + \dots$ ,  $\frac{577}{408} = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} + \dots$

Es ist also ganz interessant, nicht nur die Existenz von Lösungen zu wissen, sondern auch Näherungsverfahren zur Verfügung zu haben. Eines der bekanntesten Verfahren ist das Newtonverfahren, welches von Leibnitz und Newton im 17. Jh. entwickelt wurde. Es sei dazu  $g : x \mapsto g(x) := f(x) - a$  differenzierbar. Dann schneidet die Tangente an die Kurve  $g$  in einem nahe einer Nullstelle gelegenen Punkte  $x$  die  $x$ -Achse im Punkt  $x_{neu} := r(x) := x - \frac{g(x)}{g'(x)}$ , wie man sofort einer passenden Zeichnung entnimmt. Dies wird wohl zumeist ein besserer Näherungswert für die Nullstelle sein. Für die Funktion  $f(x) := x^2$ , liefert diese Rekursionsformel  $x_{neu} := x - \frac{x^2-a}{2x} = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ . Das ist genau die Formel die auch schon die Inder und Babylonier angewandt haben.

Wir wollen nun zeigen, daß die rekursiv definierte Folge  $x_{n+1} := r(x_n) = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$  für jeden Anfangswert  $x_0$  gegen die Wurzel von  $a$  konvergiert.

Um die Konvergenz zu zeigen, könnten wir verwenden, daß jede beschränkte monoton wachsende Folge konvergiert. Da wir dabei aber stark die Ordnung von  $\mathbb{R}$  verwenden, wollen wir lieber einen verallgemeinerbaren Beweis finden der auch für  $a \in \mathbb{C}$  funktioniert. Die Idee ist, daß die Folge  $(x_n)$  immer näher an den Grenzwert  $x_\infty$  rücken sollte, d.h.  $|x_\infty - x_{n+1}| < |x_\infty - x_n|$ . Da  $r$  stetig ist gilt, falls  $x_\infty := \lim_n x_n$  existiert:  $r(x_\infty) = r(\lim_n x_n) = \lim_n r(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x_\infty$ . D.h.  $x_\infty$  ist ein Fixpunkt von  $r$ , und somit sollte  $|r(x_\infty) - r(x_n)| = |x_\infty - x_{n+1}| < |x_\infty - x_n|$  sein. Nun haben wir aber  $x_\infty$  noch nicht zur Verfügung also müssen wir die Ungleichung  $|r(x) - r(y)| < |x - y|$  für beliebige Punkte  $x$  und  $y$  zeigen, d.h. es genügt uns, daß  $r$  LIPSCHITZ ist mit einer Konstante  $q < 1$ , i.e.  $\forall x, y : |r(x) - r(y)| \leq q \cdot |x - y|$ . Dies ist in der Tat der Fall, denn  $r'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{a}{x^2})$  verschwindet für  $x = \sqrt{a}$ , und somit existiert ein  $\delta > 0$  mit  $|r'(x)| < \frac{1}{2}$  für alle  $|x - \sqrt{a}| < \delta$  und aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt  $\frac{|r(x) - r(y)|}{|x - y|} \leq \max\{|r'(z)| : z\} \leq \frac{1}{2}$ .

Wir zeigen nun, daß aus der Lipschitz-Bedingung die Konvergenz der Folge  $(x_n)$  folgt:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |r^n(x_1) - r^n(x_0)| \leq q^n |x_1 - x_0| \\ \Rightarrow |x_{n+m} - x_n| &\leq \sum_{k=n}^{n+m-1} |x_{k+1} - x_k| \leq \sum_{k \geq n} q^k |x_1 - x_0| = \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

also ist  $x_n$  eine Cauchy-Folge und somit konvergent. Man beachte dabei noch, daß auch  $|x_{n+1} - \sqrt{a}| = |r(x_n) - r(\sqrt{a})| < |x_n - \sqrt{a}| < \delta$  gilt.

Wir können sogar eine Fehlerabschätzung machen. Es sei  $x = \sqrt{a} + \Delta$ . Dann gilt für den nächsten Wert

$$\begin{aligned} x_{neu} &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{a} + \Delta + \frac{a}{\sqrt{a} + \Delta} \right) \\ &= \sqrt{a} + \frac{1}{2} \left( -\sqrt{a} + \Delta + \frac{a}{\sqrt{a} + \Delta} \right) \\ &= \sqrt{a} + \frac{\Delta^2}{2(\sqrt{a} + \Delta)} \end{aligned}$$

Also gilt für den neuen Fehler  $|\Delta_{neu}| = \frac{|\Delta|^2}{2|\sqrt{a} + \Delta|} \leq |\Delta|^2$  falls  $a \geq 1$  und  $|\Delta| < \frac{1}{2}$ . D.h. jeder neue Schritt liefert doppelt so viele Dezimalstellen wie der zuvor.

In  $\mathbb{R}$  kann man sogar die Konvergenz für jeden Startwert  $x_0 > 0$  zeigen.

## 1.2 Banach'scher Fixpunktsatz

### Definition.

Ein METRISCHER RAUM ist eine Menge  $X$  zusammen mit einer METRIK, d.h. einer Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  welche folgendes erfüllt:

$$\text{DREIECKSUNGLEICHUNG: } d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

$$\text{SYMMETRIE: } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{POSITIVITÄT: } d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

Ein metrischer Raum heißt VOLLSTÄNDIG, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Dabei heißt eine Folge  $(x_n)$  CAUCHY-FOLGE, falls  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$  für  $n, m \rightarrow \infty$ . Die Folge heißt gegen  $x_\infty$  KONVERGENT, falls  $d(x_n, x_\infty) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

### Banach'scher Fixpunktsatz.

Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum, und  $r : X \rightarrow X$  sei eine strikte Kontraktion, d.h.  $\exists q < 1$  mit  $d(r(x), r(y)) \leq q d(x, y)$ . Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt  $x_\infty \in X$  von  $r$ , d.h.  $r(x_\infty) = x_\infty$ , und für jedes  $x_0 \in X$  konvergiert die rekursiv definierte Folge  $x_{n+1} := r(x_n)$  gegen  $x_\infty$  und zwar gilt  $d(x_n, x_\infty) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_0, x_1)$ .

**Beweis.** Der Beweis ist völlig analog zu dem vom obigen Spezialfall. Man zeigt nacheinander:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq q^n d(x_1, x_0) \\ d(x_{n+m}, x_n) &\leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0) \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \\ d(x_\infty, x_n) &\leq \underbrace{d(x_\infty, x_{n+m})}_{\rightarrow d(x_\infty, x_\infty)=0} + \underbrace{d(x_{n+m}, x_n)}_{\leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Die Eindeutigkeit folgt aus

$$|x_\infty - \bar{x}_\infty| = |r(x_\infty) - r(\bar{x}_\infty)| \leq q \cdot |x_\infty - \bar{x}_\infty|. \quad \square$$

### 1.3 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir wollen den Banach'schen Fixpunktsatz nun dazu verwenden um GEWÖHNLICHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN  $u'(t) = f(t, u(t))$  mit definierender Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und Anfangsbedingung  $u(0) = u_0$  lösen. D.h. wir suchen eine Lösung  $u$  der Gleichung  $g(u) = 0$ , wobei  $g(u)$  die Funktion  $t \mapsto f(t, u(t)) - u'(t)$  ist. D.h.  $g$  ist eine Abbildung von einem Raum von differenzierbaren Funktionen  $u$  auf einen Raum von Funktionen. Damit  $g$  eine Abbildung eines Raums  $X$  von Funktionen auf sich selbst ist, sollte für alle  $u \in X$  auch  $u' \in X$  sein, d.h.  $X$  müßte aus unendlich oft differenzierbaren Funktionen bestehen. Dann ist aber nicht klar, was man als Distanz  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  nehmen kann, damit  $g$  eine Kontraktion wird. Im Unterschied zum Differenzieren macht die Umkehroperation Integrieren die Funktionen glatter, und indem wir die Ableitung in der Differentialgleichung auf die andere Seite geben, d.h. die Differentialgleichung integrieren erhalten wir eine äquivalente Integralgleichung

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds$$

verwandeln. Dann ist also die Fixpunktgleichung  $u = g(u)$  zu lösen, wobei  $g(u)$  nun durch  $t \mapsto u_0 + \int_0^t f(s, u(s)) ds$  gegeben ist. Damit  $g$  eine Selbstabbildung eines Raums  $X$  von Funktionen  $u$  wird, genügt es nun als  $X$  den Raum  $C(I, \mathbb{R})$  aller stetigen Funktionen von einem abgeschlossenen Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  zu nehmen.

Was soll nun Konvergenz für eine Folge von Elementen (=Funktionen)  $u_n \in X$  bedeuten. Der erste Ansatz wäre wohl punktweise Konvergenz. Da aber  $g : X \rightarrow X$  stetig sein soll, müßte aus der punktweisen Konvergenz von  $u_n$  auch die Konvergenz von  $g(u_n)(t) := u_0 + \int_0^t f(s, u_n(s)) ds$  folgen. Dazu würde man aber gleichmäßige Konvergenz von  $u_n$  benötigen. Wir definieren also einen Abstand  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $d(u_1, u_2) := \max\{|u_1(t) - u_2(t)| : t \in I\}$ . Es ist leicht zu zeigen, daß damit  $C(I, \mathbb{R})$  zu einem metrischen Raum wird, und wir werden ebensoleicht mittels (4.1) aus (3.5) seine Vollständigkeit folgern. Um nun den Banach'schen Fixpunktsatz anzuwenden, müssen wir zeigen, daß  $g$  eine Kontraktion ist, also schätzen wir wie folgt ab:

$$\begin{aligned} |g(u_1)(t) - g(u_2)(t)| &\leq \left| \int_0^t |f(s, u_1(s)) - f(s, u_2(s))| ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^t q \cdot |u_1(s) - u_2(s)| ds \right| \\ &\leq |t| \cdot q \cdot d(u_1, u_2), \end{aligned}$$

wobei wir angenommen haben, daß  $f$  in der zweiten Variable Lipschitz mit Konstante  $q$  ist, und zwar gleichmäßig in der ersten Variable, d.h.  $|f(s, y_1) - f(s, y_2)| \leq q |y_1 - y_2|$ . Es folgt somit

$$d(g(u_1), g(u_2)) \leq d(0, \mathbb{R} \setminus I) \cdot q \cdot d(u_1, u_2)$$

Falls also  $I$  so klein gewählt wird, daß der Abstand  $d(0, \mathbb{R} \setminus I) := \inf\{d(0, t) : t \in \mathbb{R} \setminus I\} = \sup\{|t| : t \in I\}$  von  $0 \in I$  zum Rand von  $I$  kleiner ist als  $\frac{1}{q}$ , so ist  $g$  eine Kontraktion und hat nach dem Banach'schen Fixpunktsatz eine eindeutige Lösung  $u$ , die dann auch die eindeutige Lösung der Differentialgleichung  $u'(t) = f(t, u(t))$  mit  $u(0) = u_0$  ist. Wir haben also für  $E = \mathbb{R}$  den folgenden Satz bewiesen:

**Satz von Picard-Lindelöf.**

Sei  $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$  stetig und bezüglich der zweiten Variable Lipschitz, genauer

$$\exists q \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in E : |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq q \cdot |x_1 - x_2|,$$

so gibt es lokal eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)) \quad \text{mit } u(0) = u_0.$$

### 1. Beispiel.

Wir wollen das nun konkret an der Differentialgleichung  $u'(t) = u(t)$  mit  $u(0) = a$  durchführen. Der zugehörige Integraloperator ist dann durch  $g(u) : t \mapsto a + \int_0^t u(s) ds$  gegeben. Wir beginnen mit der 0-ten Näherung  $u_0 = 0$ . Dann ist

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a + \int_0^t 0 ds = a \\ u_2(t) &= a + \int_0^t a ds = a(1+t) \\ u_3(t) &= a + \int_0^t a(1+s) ds = a\left(1+t + \frac{t^2}{2}\right) \\ &\vdots \\ u_n(t) &= a \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} \\ \Rightarrow u_\infty(t) &= a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = a e^t. \end{aligned}$$

### 2. Beispiel.

Analog führt  $u' = 1 + u^2$  mit  $u(0) = 0$  und  $u_0 := 0$  zu

$$\begin{aligned} u_1(t) &= t \\ u_2(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 \\ u_3(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{1}{63}t^7 \\ &\vdots \\ u_6(t) &= t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + \frac{62}{2835}t^9 + \frac{1382}{155925}t^{11} + \frac{20404}{6081075}t^{13} + \dots \\ &\quad + \dots \frac{1}{760594829864786522589375}t^{63} \end{aligned}$$

und  $u_6$  stimmt bis zur 12-ten Ordnung mit der Taylorentwicklung von  $t \mapsto \tan(t)$  überein.

### Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung.

Unter einer (explizit dargestellten) Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung versteht man eine Gleichung der Form

$$u^{(n)}(t) = f(t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t)).$$

Indem man statt  $u$  die Funktion  $v : t \mapsto (u(t), u'(t), \dots, u^{(n-1)}(t))$  betrachtet, so übersetzt sich die Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in folgende(s) System von

Differentialgleichung(en) 1-ter Ordnung:

$$v'(t) = \begin{pmatrix} u'(t) \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t) \\ u^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{n-1}(t) \\ f(t, v(t)) \end{pmatrix} =: \tilde{f}(t, v(t)).$$

## 2. Seminormen

In diesem Kapitel soll der adäquate Begriff von Distanz auf Vektorräumen eingeführt werden, und seine elementaren Eigenschaften diskutiert werden.

### 2.1 Motivation und Definitionen.

Alle Vektorräume, die wir betrachten werden, werden als GRUNDKÖRPER  $\mathbb{K}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  haben.

Distanzfunktionen  $d$  auf Vektorräumen  $E$  sollten zusätzlich TRANSLATIONS-INVARIANT sein, d.h.  $d(x, y) = d(a + x, a + y)$  erfüllen für alle  $x, y, a \in E$ . Dann ist  $d(x, y) = d(0, y - x) =: p(y - x)$ , wenn wir  $a := -x$  wählen, also  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  bereits durch die Abbildung  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  festgelegt.

Die Dreiecksungleichung  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  für  $d$  übersetzt sich in die

$$\text{SUBADDITIVITÄT: } p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Bezüglich der Skalarmultiplikation sollten wir wohl die

$$\mathbb{R}^+\text{-HOMOGENITÄT: } p(\lambda x) = \lambda p(x) \text{ für alle } \lambda \in \mathbb{R}^+ := \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$$

und  $x \in E$  fordern. Beachte, daß dies  $p(0) = p(2 \cdot 0) = 2p(0)$  also  $p(0) = 0$  zur Folge hat, und damit auch die Homogenität  $p(0x) = p(0) = 0 = 0p(x)$  mit  $\lambda := 0$  gilt. Wir dürfen allerdings nicht die Homogenität für alle  $\lambda \in \mathbb{K}$  erwarten, denn dann wäre  $p$  linear, denn

$$\begin{aligned} p(x) + p(y) &\geq p(x + y) = p(-((-x) + (-y))) = -p((-x) + (-y)) \\ &\geq -(p(-x) + p(-y)) = p(x) + p(y). \end{aligned}$$

Eine Funktion  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **SUBLINEAR** falls sie subadditiv und  $\mathbb{R}^+$ -homogen ist.

Verwandt mit der Subadditivität ist die **Konvexität**: Eine Funktion  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **KONVEX** falls

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y) \text{ für alle } 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ und alle } x, y \in E,$$

also die Funktion auf jeder Strecke unterhalb der Sehne liegt. Äquivalent können wir auch  $p(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i)$  für alle  $x_i \in E$  und  $\lambda_i > 0$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  verlangen.

Für zweimal differenzierbare Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zeigt man in der Analysis, daß diese genau dann konvex sind, wenn  $f'' \geq 0$  ist:

( $\Leftrightarrow$ ) Aus  $f'' \geq 0$  folgt mittels Mittelwertsatz, daß  $f'$  monoton wachsend ist, denn  $\frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} = f''(\xi) \geq 0$  für ein  $\xi$  zwischen  $x_0$  und  $x_1$ . Sei also  $x_0 < x_1$ ,  $0 < \lambda < 1$  und  $x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0)$ . Erneut nach dem Mittelwertsatz existieren  $\xi_0 \in [x_0, x]$  und  $\xi_1 \in [x, x_1]$  mit  $f(x) - f(x_0) = f'(\xi_0)(x - x_0)$  und  $f(x_1) - f(x) = f'(\xi_1)(x_1 - x)$ ,

also ist

$$\begin{aligned}
 f(x_0) + \lambda(f(x_1) - f(x_0)) - f(x) &= \\
 &= (1 - \lambda)(f(x_0) - f(x)) + \lambda(f(x_1) - f(x)) \\
 &= (1 - \lambda)f'(\xi_0)(x_0 - x) + \lambda f'(\xi_1)(x_1 - x) \\
 &= (1 - \lambda)f'(\xi_0)(-\lambda(x_1 - x_0)) + \lambda f'(\xi_1)((1 - \lambda)(x_1 - x_0)) \\
 &= \lambda(1 - \lambda)\left(f'(\xi_1) - f'(\xi_0)\right)(x_1 - x_0) \geq 0,
 \end{aligned}$$

d.h.  $f$  ist konvex.

( $\Rightarrow$ ) Es sei  $f$  konvex. Dann ist für  $x_0 < x < x_1$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq \frac{\lambda(f(x_1) - f(x_0))}{\lambda(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \\
 &= \frac{(1 - \lambda)(f(x_1) - f(x_0))}{(1 - \lambda)(x_1 - x_0)} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}
 \end{aligned}$$

Also ist  $f'(x_0) \leq f(x_1) - f(x_0)x_1 - x_0 \leq f'(x_1)$ , d.h.  $f'$  ist monoton wachsend.

Also ist  $f''(x_0) = \lim_{x_1 \searrow x_0} \frac{f'(x_1) - f'(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$ .

In der Definition von "sublinear" können wir "subadditiv" äquivalent durch "konvex" ersetzen:

( $\Leftarrow$ ) Wir setzen  $\lambda := 1$  und erhalten

$$p(x + y) = 2p\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq 2\left(p\left(\frac{x}{2}\right) + p\left(\frac{y}{2}\right)\right) = p(x) + p(y).$$

( $\Rightarrow$ ) Es ist

$$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq p(\lambda x) + p((1 - \lambda)y) = \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y).$$

Die Symmetrie  $d(x, y) = d(y, x)$  von  $d$  übersetzt sich in die SYMMETRIE:  $p(x) = p(-x)$  für alle  $x \in E$ . Zusammen mit der  $\mathbb{R}^+$ -Homogenität ist sie somit zu folgender Homogenität äquivalent:  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  für  $x \in E$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Eine Funktion  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  heißt SEMINORM (kurz SN), falls sie subadditiv und POSITIV HOMOGEN ist, d.h.  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$  für  $x \in E$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Eine Seminorm ist also eine sublineare Abbildung die zusätzlich  $p(\lambda x) = p(x)$  für alle  $x \in E$  und  $|\lambda| = 1$  erfüllt. Beachte, daß die Multiplikation mit einer komplexen Zahl von Betrag 1 üblicherweise als Drehung interpretiert wird.

Jede Seminorm  $p$  erfüllt  $p \geq 0$ , denn  $0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$ .

Eine Seminorm  $p$  heißt NORM falls zusätzlich  $p(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  gilt. Ein NORMIERTER RAUM ist ein Vektorraum zusammen mit einer Norm.

## 2.2 Supremums-Norm

Die SUPREMUMS- oder  $\infty$ -Norm ist definiert durch

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\},$$

wobei  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  eine beschränkte Funktion auf einer Menge  $X$  ist.

Die Distanz  $d$ , die wir in der Anwendung (1.3) auf dem Vektorraum  $C(I, \mathbb{R})$  betrachtet haben, war gerade durch  $d(u_1, u_2) := \|u_1 - u_2\|_\infty$  gegeben.

### Beispiele.

Folgende Vektorräume sind normierte Räume bezüglich der  $\infty$ -Norm:

1. Für jede Menge  $X$  der Raum  $B(X)$  der beschränkten Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{K}$ ;
2. Für jeden kompakten Raum  $X$  der Raum  $C(X)$  der stetigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{K}$ ;
3. Für jeden topologischen Raum  $X$  den Raum  $C_b(X)$  der beschränkten stetigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{K}$ ;
4. Für jeden lokalkompakten Raum  $X$  der Raum  $C_0(X)$  der bei  $\infty$  verschwindenden stetigen Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{K}$ , d. h. jener Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ , für welche für jedes  $\varepsilon > 0$  eine kompakte Menge  $K \subseteq X$  existiert, s.d.  $|f(x)| < \varepsilon$  für alle  $x \notin K$ ;
5. Verwendet man grob gesprochen das Maximum der  $\infty$ -Normen der Ableitungen, so wird für jede kompakte Mannigfaltigkeit  $M$  auch der Raum  $C^n(M)$  der  $n$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $M \rightarrow \mathbb{K}$  zu einem normierten Raum;

Hingegen kann man diese Normen nicht verwenden um einen der folgenden Räume vernünftig zu normieren:

1.  $C(X)$  für allgemeines  $X$ ,
2. den Raum  $C^\infty(M)$  der glatten Funktionen für Mannigfaltigkeiten  $M$ ,
3.  $C^n(M)$  für nicht kompakte Mannigfaltigkeiten,
4. den Raum  $H(G)$  der holomorphen (i.e. komplex differenzierbaren) Funktionen für Gebiete  $G \subseteq \mathbb{C}$ .

### 2.3 $p$ -Norm

Für  $1 \leq p < \infty$  ist die  $p$ -NORM definiert durch

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

wobei  $|f|^p : X \rightarrow \mathbb{K}$  eine "integrierbare" Funktion sei. Dies ist für  $p = 2$  ein kontinuierliches Analogon der Euklidischen Norm

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

für  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Die Formel  $\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} dx$  verallgemeinert das innere Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  am  $\mathbb{K}^n$ .

Klarerweise gilt  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1$ . Um das innere Produkt zu verwenden um Winkel zu messen, ist die Ungleichung von Cauchy-Schwarz  $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$  notwendig, siehe (6.1). Eine gemeinsame Verallgemeinerung ist die

#### Hölder-Ungleichung.

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \text{ für } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ mit } 1 \leq p, q \leq \infty$$

$$\text{bzw. } \int |fg| \leq \left( \int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int |g|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

**Beweis.** Sei vorerst  $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$ . Dann ist  $|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q}$ , denn  $\log$  ist konkav (d.h.  $-\log$  ist konvex, denn  $\log''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ ) und somit ist  $\log(a^{1/p} \cdot b^{1/q}) = \frac{1}{p} \log a + \frac{1}{q} \log b \leq \log\left(\frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b\right)$  für  $a := |f(x)|^p$  und  $b := |g(x)|^q$ ,

d.h.  $a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}a + \frac{1}{q}b$ .

Durch Integration erhalten wir

$$\|fg\|_1 = \int |fg| \leq \frac{\|f\|_p^p}{p} + \frac{\|g\|_q^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sei nun  $\alpha := \|f\|_p$  und  $\beta := \|g\|_q$  beliebig (ungleich 0). Dann können wir auf  $f_0 := \frac{1}{\alpha}f$  und  $g_0 := \frac{1}{\beta}g$  den ersten Teil anwenden und erhalten

$$\frac{1}{\alpha\beta} \|fg\|_1 = \|f_0 g_0\|_1 \leq 1 \Rightarrow \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Die fehlende Ungleichung  $|\langle f, g \rangle| = |\int f \bar{g}| \leq \int |f| |\bar{g}| = \|fg\|_1$  ist offensichtlich.  $\square$

**Minkowski-Ungleichung.**

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \text{ d.h. } \|\cdot\|_p \text{ ist eine Seminorm}$$

**Beweis.** Mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int |f + g|^p \leq \int |f| |f + g|^{p-1} + \int |g| |f + g|^{p-1} \\ &\leq \|f\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \underbrace{\|(f + g)^{p-1}\|_q}_{(f|f+g|^{(p-1)q})^{1/q}} \quad (\text{Hölderunglg.}) \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p/q} \quad \text{da } q = \frac{p}{p-1} \Rightarrow \\ \|f + g\|_p &= \|f + g\|_p^{p(1-\frac{1}{q})} \leq \|f\|_p + \|g\|_p. \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiele.**

1. Es ist der Raum  $C(I)$  der stetigen Funktionen ein normierter Raum bezüglich der  $p$ -Norm.
2. Am Raum  $R(I)$  der Riemann-integrierbaren Funktionen ist hingegen die  $p$ -Norm keine Norm sondern nur ein Seminorm, da eine Funktion  $f$ , die nur an endlich vielen Punkten nicht verschwindet, trotzdem  $\|f\|_p = 0$  erfüllt.
3. Es ist auch  $\ell^p$  ein normierter Raum, wobei  $\ell^p$  den Raum der Folgen  $n \mapsto x_n \in \mathbb{K}$  bezeichnet, die  $p$ -summierbar sind, d.h. für welche  $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$  gilt. Dieser Raum kann mit den linksstetigen Treppenfunktionen  $f : \{t : t \geq 0\} \rightarrow \mathbb{K}$  identifiziert werden, die höchstens in den Punkten aus  $\mathbb{N}$  Sprungstellen haben ( $f(t) := x_n$  für  $n \leq t < n + 1$ ).

**2.4 Die Variationsnorm**

Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{K}$  eine Funktion und  $\mathcal{Z} = \{0 = x_0 < \dots < x_n = 1\}$  eine Partition von  $I = [0, 1]$ . Dann bezeichnet man die VARIATION von  $f$  auf  $\mathcal{Z}$  mit

$$V(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Unter der (TOTALEN) VARIATION einer Funktion versteht man

$$V(f) := \sup_{\mathcal{Z}} V(f, \mathcal{Z}).$$

Mit  $BV(I)$  bezeichnen wir den Raum der Funktionen mit BESCHRÄNKTER VARIATION, d.h. jener Funktionen  $f$  für welche  $V(f) < \infty$  gilt. Es ist leicht nachzurechnen, daß  $BV(I)$  ein Vektorraum ist, und  $V$  eine Seminorm auf  $BV(I)$  ist, welche genau auf den konstanten Funktionen verschwindet.

## 2.5 Elementare Eigenschaften

### Lemma.

Jede Seminorm  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die UMGEKEHRTE DREIECKSUNGLEICHUNG:

$$|p(x_1) - p(x_2)| \leq p(x_1 - x_2).$$

**Beweis.** Es gilt:

$$\begin{aligned} p(x_1) &\leq p(x_1 - x_2) + p(x_2) \Rightarrow p(x_1) - p(x_2) \leq p(x_1 - x_2) \\ \text{und } p(-x) &= p(x) \Rightarrow p(x_2) - p(x_1) \leq p(x_2 - x_1) = p(x_1 - x_2) \\ &\Rightarrow |p(x_1) - p(x_2)| \leq p(x_1 - x_2) \quad \square \end{aligned}$$

Wir wollen nun eine geometrischere Beschreibung von Seminormen  $p$  geben. Idee dabei ist es die Niveauflächen  $p^{-1}(c)$  zu untersuchen.

### Definition.

Es sei  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung und  $c \in \mathbb{R}$ . Dann setzen wir

$$p_{<c} := \{x : p(x) < c\} \quad \text{und} \quad p_{\leq c} := \{x : p(x) \leq c\},$$

und nennen dies den OFFENEN und den ABGESCHLOSSENEN  $p$ -BALL UM 0 MIT RADIUS  $c$ .

### Lemma.

Für jede sublineare Abbildung  $0 \leq p : E \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c > 0$  sind  $p_{\leq c}$  und  $p_{<c}$  konvexe absorbierende Teilmengen von  $E$ . Es ist  $p_{\leq c} = c \cdot p_{\leq 1}$  sowie  $p_{<c} = c \cdot p_{<1}$ , und weiters  $p(x) = c \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot p_{\leq c}\}$ .

Man kann also die Abbildung  $p$  aus dem Einheitsball  $p_{\leq 1}$  zurückgewinnen.

Dabei heißt eine Menge  $A \subseteq E$  KONVEX, falls aus  $\lambda_i \geq 0$  mit  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  und  $x_i \in A$  folgt, daß  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$ .

Eine Menge  $A$  heißt ABSORBIEREND, falls  $\forall x \in E \exists \lambda > 0 : x \in \lambda \cdot A$ .

**Beweis.** Wegen  $c > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} p_{\leq c} &= \{x : p(x) \leq c\} = \{x : p\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{c} p(x) \leq 1\} \\ &= \{cy : p(y) \leq 1\} = c \cdot \{y : p(y) \leq 1\} = c \cdot p_{\leq 1} \end{aligned}$$

und analog für  $p_{<c}$ .

Die Konvexität von  $p_{\leq c} = p^{-1}\{\lambda : \lambda \leq c\}$  und  $p_{<c} = p^{-1}\{\lambda : \lambda < c\}$  folgt sofort aus der leicht einzusehenden Eigenschaft, daß Urbilder von nach unten unbeschränkten Intervallen unter konvexen Funktionen konvex sind.

Um einzusehen, daß  $p_{\leq c}$  absorbierend ist für  $c > 0$ , genügt es  $c = 1$  zu setzen. Sei  $x \in E$  beliebig. Falls  $p(x) = 0$ , so ist  $x \in p_{\leq 1}$ . Andernfalls ist  $x \in p(x) \cdot p_{\leq 1}$ , denn  $x = p(x) \cdot y$ , wobei  $y := \frac{1}{p(x)}x$  ist und  $p(y) = p\left(\frac{1}{p(x)}x\right) = \frac{1}{p(x)}p(x) = 1$ .

Damit ist aber auch die Obermenge  $p_{<c} \supseteq p_{\leq c/2}$  absorbierend.

Wegen folgender Äquivalenzen für  $\lambda > 0$  ist  $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot p_{\leq 1}\}$ :

$$x \in \lambda \cdot p_{\leq 1} = p_{\leq \lambda} \Leftrightarrow p(x) \leq \lambda,$$

also

$$\inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda p_{\leq 1}\} = \inf\{\lambda > 0 : \lambda \geq p(x)\} = p(x). \quad \square$$

**Lemma.**

Für jede Seminorm  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  und  $c > 0$  sind  $p_{< c}$  und  $p_{\leq c}$  absorbierend und absolut-konvex und

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda p_{\leq 1} = p_{\leq \lambda}\}.$$

Dabei heißt eine Teilmenge  $A \subseteq E$  ABSOLUT-KONVEX, falls aus  $x_i \in A$  und  $\lambda_i \in \mathbb{K}$  mit  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$  folgt, daß  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$ .

Eine Menge  $A$  heißt BALANZIERT, falls für alle  $x \in A$  und  $|\lambda| = 1$  auch  $\lambda \cdot x \in A$ .

**Beweis.** Die Urbilder  $p_{< c}$  und  $p_{\leq c}$  sind konvex und klarerweise balanziert, also genügt es folgendes Sublemma zu zeigen.  $\square$

**Sublemma.**

Eine Menge  $A$  ist genau dann absolut-konvex, wenn sie konvex und balanziert ist.

**Beweis.**  $(\Rightarrow)$  ist klar, da jede konvex-Kombination auch eine absolut-konvex-Kombination ist und für  $|\lambda| = 1$  auch  $\lambda x$  eine absolut-konvex-Kombination ist.

$(\Leftarrow)$  Es sei  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| = 1$  dann ist

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i x_i = \sum_{\lambda_i \neq 0} |\lambda_i| \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \in A,$$

denn  $\left| \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} \right| = 1$  und somit ist wegen der Balanziertheit  $\frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \in A$ , und folglich wegen der Konvexität auch  $\sum_{\lambda_i \neq 0} |\lambda_i| \frac{\lambda_i}{|\lambda_i|} x_i \in A$ .  $\square$

**Definition.**

Wir wollen nun aus Mengen  $A$  zugehörige Seminormen  $p$  konstruieren. Dazu definieren wir das MINKOWSKI-FUNKTIONAL  $p_A$  durch  $p_A(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot A\} \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in E$ . Es ist  $p_A(x) < \infty$  genau dann, wenn  $x$  im von  $A$  erzeugten Kegel  $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\} \cdot A$  liegt.

**Lemma.**

Es sei  $A$  konvex und absorbierend. Dann ist das Minkowski-Funktional von  $A$  eine wohldefinierte sublineare Abbildung  $p := p_A \geq 0$  auf  $E$ , und es gilt für  $\lambda > 0$ :

$$p_{< \lambda} \subseteq \lambda \cdot A \subseteq p_{\leq \lambda}.$$

Falls  $A$  zusätzlich absolut-konvex ist, so ist  $p$  eine Seminorm.

Wir können also die Menge  $A$  "fast" aus der Funktion  $p$  zurückgewinnen.

**Beweis.** Da  $A$  absorbierend ist, ist der Kegel  $\{\lambda : \lambda > 0\} \cdot A = E$ . Also ist  $p$  auf ganz  $E$  endlich.

Weiters ist  $0 \in A$ , denn  $\exists \lambda > 0 : 0 \in \lambda A$  und somit ist  $0 = \frac{0}{\lambda} \in A$ .

$p$  ist  $\mathbb{R}^+$ -homogen, denn für  $\lambda > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \inf \{ \mu > 0 : \lambda x \in \mu A \} \\ &= \inf \{ \mu > 0 : x \in \frac{\mu}{\lambda} A \} = \inf \{ \lambda \nu > 0 : x \in \nu A \} = \lambda \inf \{ \nu > 0 : x \in \nu A \} \\ &= \lambda p(x). \end{aligned}$$

( $p_{<\lambda} \subseteq \lambda \cdot A$ ) Es sei  $p(x) = \inf \{ \mu > 0 : x \in \mu A \} < \lambda$ . Dann existiert ein  $0 < \mu \leq \lambda$  mit  $x \in \mu A = \lambda \frac{\mu}{\lambda} A \subseteq \lambda A$ , da  $0 \in A$  und somit  $\frac{\mu}{\lambda} a = (1 - \frac{\mu}{\lambda}) 0 + \frac{\mu}{\lambda} a \in A$  für alle  $a \in A$ .

( $\lambda \cdot A \subseteq p_{\leq \lambda}$ ) Falls  $x \in \lambda A$  so gilt nach Definition von  $p$  klarerweise, daß  $p(x) \leq \lambda$ , i.e.  $x \in p_{\leq \lambda}$ .

$p$  ist subadditiv, denn es gilt

$$\begin{aligned} p(x) < \lambda, p(y) < \mu &\Rightarrow x \in \lambda A, y \in \mu A \\ &\Rightarrow x + y \in \lambda A + \mu A = (\lambda + \mu) A \Rightarrow p(x + y) \leq \lambda + \mu \\ &\Rightarrow p(x + y) \leq \inf \{ \lambda + \mu : p(x) < \lambda, p(y) < \mu \} = p(x) + p(y), \end{aligned}$$

denn für konvexe Mengen  $A$  und  $\lambda_i > 0$  gilt  $\sum_{i=1}^n \lambda_i A = (\sum_{i=1}^n \lambda_i) A$ : Sei nämlich  $x_i \in A$  so ist  $\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda \cdot \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i = \lambda \cdot \sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in (\sum_i \lambda_i) \cdot A$ , wobei  $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$  und somit  $\sum_i \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i$  eine konvex-Kombination ist. Umgekehrt sei  $x \in A$  so ist  $(\sum_{i=1}^n \lambda_i) x = \sum_i \lambda_i x \in \sum_i \lambda_i A$ .

Ist  $A$  absolut-konvex so ist  $p$  eine Seminorm, denn für  $|\lambda| = 1$  gilt  $p(\lambda x) = p(x)$ , da  $A$  balanziert ist, also  $\lambda A = A$  erfüllt.  $\square$

### Lemma.

Für je zwei sublineare Abbildungen  $p$  und  $q \geq 0$  gilt:

$$p \leq q \Leftrightarrow p_{\leq 1} \supseteq q_{\leq 1} \Leftrightarrow p_{< 1} \supseteq q_{< 1}.$$

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  3) Es gilt:

$$x \in q_{< 1} \Rightarrow p(x) \leq q(x) < 1 \Rightarrow x \in p_{< 1}.$$

(3  $\Rightarrow$  2) Es gilt:

$$\begin{aligned} x \in q_{\leq 1} &\Rightarrow q(x) \leq 1 \\ &\Rightarrow \forall \lambda > 1 : q\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} q(x) \leq \frac{1}{\lambda} 1 < 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in q_{< 1} \subseteq p_{< 1} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} p(x) = p\left(\frac{x}{\lambda}\right) < 1 \Rightarrow p(x) < \lambda \\ &\Rightarrow p(x) \leq \inf \{ \lambda : \lambda > 1 \} = 1 \\ &\Rightarrow x \in p_{\leq 1} \end{aligned}$$

(2  $\Rightarrow$  1) Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 \leq q(x) < \lambda &\Rightarrow q\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} q(x) \leq \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in q_{\leq 1} \subseteq p_{\leq 1} \\ &\Rightarrow p\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1, \text{ i.e. } p(x) \leq \lambda \\ &\Rightarrow p(x) \leq \inf \{ \lambda : \lambda > q(x) \} = q(x) \quad \square \end{aligned}$$

## 2.6 Von Seminormen erzeugte Topologie

Motivation: Die Seminormen liefern uns wie in der Analysis Bälle, welche wir für Fragen der Konvergenz und Stetigkeit verwenden wollen, dazu ist der Begriff einer Topologie entwickelt worden:

In der Analysis nennt man  $O \subseteq \mathbb{R}$  offen, falls zu jedem  $a \in O$  eine  $\delta$ -Umgebung  $U \subseteq O$  existiert (d.h. eine Menge  $U := \{x : |x - a| < \delta\}$  mit  $\delta > 0$ ).

Diese Definition können wir fast wörtlich auf normierte Räume  $(E, p)$  übertragen:  $O \subseteq E$  heißt OFFEN  $:\Leftrightarrow \forall x \in O \exists \delta > 0: \{x : p(x - a) < \delta\} \subseteq O$ . Beachte, daß

$$\{x : p(x - a) < \delta\} = a + p_{<\delta} = a + \delta \cdot p_{<1},$$

denn  $p(x - a) < \delta \Leftrightarrow x = a + y$  mit  $y := x - a \in p_{<\delta}$ .

Wichtige Funktionenräume besitzen aber keine vernünftige Norm. Z.B. können wir auf  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  nicht mehr die Supremumsnorm betrachten, wohl aber für jedes kompakte Intervall  $K \subseteq \mathbb{R}$  das Supremum  $p_K$  auf  $K$ , d.h.  $p_K(f) := \sup\{|f(x)| : x \in K\}$ .

Es sei also  $\mathcal{P}_0$  eine Familie von Seminormen auf einem Vektorraum  $E$ . Dann nennen wir  $O \subseteq E$  OFFEN, falls

$$\forall a \in O \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0, \exists \varepsilon > 0 : a \in \{x : p_i(x - a) < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq O.$$

Die Familie  $\mathcal{O} := \{O : O \subseteq E \text{ ist offen}\}$  ist dann eine Topologie auf  $E$ , die sogenannte von  $\mathcal{P}_0$  ERZEUGTE TOPOLOGIE. Allgemein versteht man unter einer TOPOLOGIE  $\mathcal{O}$  auf einer Menge  $X$  eine Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , die folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1. Ist  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$ , so gehört auch die Vereinigung  $\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{O \in \mathcal{F}} O$  zu  $\mathcal{O}$ ;
2. Ist  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}$  endlich, so gehört auch der Durchschnitt  $\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{O \in \mathcal{F}} O$  zu  $\mathcal{O}$ .

Man beachte, daß  $\bigcup \emptyset = \emptyset$  und  $\bigcap \emptyset := X$ . Die Teilmengen  $O$  von  $X$ , welche zu  $\mathcal{O}$  gehören, heißen auch im allgemeinen Fall OFFENEN MENGEN der Topologie. Ein TOPOLOGISCHER RAUM ist eine Menge zusammen mit einer Topologie.

Obige Konstruktion ist ein allgemeines Prinzip. Man nennt eine Teilmenge  $\mathcal{O}_0 \subseteq \mathcal{O}$  SUBBASIS EINER TOPOLOGIE  $\mathcal{O}$ , falls  $\forall a \in O \in \mathcal{O} \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_0$ , endlich:  $a \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq O$ . Um eine Topologie  $\mathcal{O}$  zu erhalten genügt es eine Menge  $\mathcal{O}_0$  von Teilmengen von  $X$  anzugeben, und dann  $\mathcal{O}$  als die Menge aller  $O \subseteq X$  zu definieren, die für jeden ihrer Punkte  $x \in O$  eine endliche Teilmenge  $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}_0$  besitzen mit  $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq O$ . Man sagt dann auch die Topologie  $\mathcal{O}$  wird von der Subbasis  $\mathcal{O}_0$  erzeugt.

Die von  $\mathcal{P}_0$  erzeugte Topologie ist also gerade die von der Subbasis  $\mathcal{O}_0 := \{a + p_{<\varepsilon} : a \in E, p \in \mathcal{P}_0, \varepsilon > 0\}$  erzeugte Topologie. In der Tat sei  $O \subseteq E$  offen in der letzteren Topologie, d.h.  $\forall a \in O \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_0$ , endlich:  $a \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq O$ . Also  $\exists a_1, \dots, a_n \in E, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0$  und  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$  mit

$$a \in \{x \in E : p_i(x - a_i) < \varepsilon_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq O.$$

Wenn wir nun  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i - p_i(a - a_i) : i = 1, \dots, n\}$  setzen, so ist

$$\begin{aligned} a &\in \{x \in E : p_i(x - a) < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\} \\ &\subseteq \{x \in E : p_i(x - a_i) < p_i(x - a) + p_i(a - a_i) \leq \varepsilon_i \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq O. \end{aligned}$$

Unter einer UMGEBUNG  $U$  eines Punktes  $a$  in einem topologischen Raum  $X$ , versteht man eine Teilmenge  $U \subseteq X$ , für welche eine offene Menge  $O \in \mathcal{O}$  existiert mit  $a \in O \subseteq U$ .

Unter einer UMGEBUNGS(SUB)BASIS  $\mathcal{U}$  eines Punktes  $a$  in einem topologischen

Raum  $X$  versteht man eine Menge  $\mathcal{U}$  von Umgebungen  $U$  von  $a$  so, daß für jede Umgebung  $O$ , eine (endlich viele) Menge(n)  $U_i \in \mathcal{U}$  existiert(existieren), so daß  $\bigcap_i U_i \subset O$ .

Wie in der Analysis nennt man eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen STETIG bei  $a \in X$ , wenn das Urbild jeder Umgebung (in einer Umgebungsbasis) von  $f(a)$  eine Umgebung von  $a$  ist. Sie heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt  $a \in X$  stetig ist, daß ist genau dann der Fall, wenn wenn das Urbild jeder offenen Menge offen ist. Es ist leicht zu sehen, daß es genügt diese Bedingung für die Elemente einer Subbasis zu überprüfen.

Jede Seminorm  $p \in \mathcal{P}_0$  ist stetig, denn sei  $a \in E$  und  $\varepsilon > 0$ , dann ist  $p(a + p_{<\varepsilon}) \subseteq \{t : |t - p(a)| < \varepsilon\}$ , denn  $x \in p_{<\varepsilon} \Rightarrow |p(a+x) - p(a)| \leq p(x) < \varepsilon$ . Es ist aber auch die Addition  $+: E \times E \rightarrow E$  stetig, denn  $(a_1 + p_{<\varepsilon}) + (a_2 + p_{<\varepsilon}) \subseteq (a_1 + a_2) + p_{<2\varepsilon}$ . Insbesondere sind also die Translationen  $x \mapsto a + x$  Homöomorphismen.

Die Skalarmultiplikation  $\cdot : \mathbb{K} \times E \rightarrow E$  ist stetig. Denn für  $\lambda \in \mathbb{K}$  und  $a \in E$  gilt:  $\{\mu \in \mathbb{K} : |\mu - \lambda| < \delta_1\} \cdot \{x : p(x - a) < \delta_2\} \subseteq \{z : p(z - \lambda \cdot a) < \varepsilon\}$  falls  $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2p(a)}$  und  $\delta_2 < \frac{\varepsilon}{2} \left( |\lambda| + \frac{\varepsilon}{2p(a)} \right)^{-1}$  ist, da

$$\begin{aligned} p(\mu \cdot x - \lambda \cdot a) &= p((\mu - \lambda) \cdot x + \lambda \cdot (x - a)) \\ &\leq |\mu - \lambda| \cdot p(x) + |\lambda| \cdot p(x - a) \\ &\leq \delta_1 \cdot (p(a) + p(x - a)) + |\lambda| \cdot \delta_2 \\ &\leq \delta_1 \cdot (p(a) + \delta_2) + |\lambda| \cdot \delta_2 = \delta_1 \cdot p(a) + \delta_2 \cdot (\delta_1 + |\lambda|) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \left( |\lambda| + \frac{\varepsilon}{2p(a)} \right)^{-1} \cdot \left( |\lambda| + \frac{\varepsilon}{2p(a)} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Homothetien  $x \mapsto \lambda \cdot x$  Homöomorphismen für  $\lambda \neq 0$ .

Die durch  $\mathcal{P}_0$  erzeugte Topologie macht also  $E$  zu einem TOPOLOGISCHEN VEKTORRAUM, d.h. einen Vektorraum zusammen mit einer Topologie bezüglich welcher die Addition und die Skalarmultiplikation stetig ist. Mehr noch, zu einem LOKALKONVEXEN VEKTORRAUM, d.h. es existiert eine 0-Umgebungsbasis konvexer Mengen (nämlich  $\bigcap_{i=1}^n (p_i)_\varepsilon$ ), bzw. Subbasis konvexer Mengen (nämlich  $p_\varepsilon$ ).

Eine Seminorm  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem topologischen Vektorraum  $E$  ist genau dann stetig, wenn  $p_{<1}$  (oder äquivalent, wenn  $p_{\leq 1}$ ) eine 0-Umgebung ist.

( $\Rightarrow$ ) Da  $p$  stetig ist, ist  $0 \in p^{-1}\{t : t < 1\} = p_{<1}$  offen.

( $\Leftarrow$ )

$$a \in a + \varepsilon \cdot p_{<1} \subseteq p^{-1}\{t : |t - p(a)| < \varepsilon\}.$$

Eine Seminorm  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  ist in der von  $\mathcal{P}_0$  erzeugten Topologie genau dann stetig, wenn  $\exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0, \lambda > 0 : p \leq \lambda \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ .

( $\Rightarrow$ ) Falls  $p$  stetig ist, so ist  $p_{<1}$  eine 0-Umgebung, also existieren  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0$  und  $\varepsilon > 0$  mit

$$\begin{aligned} p_{<1} &\supseteq \bigcap_{i=1}^n (p_i)_{<\varepsilon} = \bigcap_{i=1}^n \varepsilon (p_i)_{<1} \\ &= \varepsilon \bigcap_{i=1}^n (p_i)_{<1} = \varepsilon \max\{p_1, \dots, p_n\}_{<1} \\ &= \max\{p_1, \dots, p_n\}_{<\varepsilon} = q_{<1}, \end{aligned}$$

wobei  $q := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ . Also ist  $p \leq q := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ .

( $\Leftarrow$ ) Mit  $p_i$  ist auch  $q := \lambda \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$  stetig, und somit  $p_{<1} \supseteq q_{<1}$  ein 0-Umgebung, d.h.  $p$  stetig.

**Zusammenfassung.**

Es sei  $\mathcal{P}_0$  eine Familie von Seminormen auf einem Vektorraum  $E$ . Dann bilden die Bälle  $a + p_{<\varepsilon} := \{x \in E : p(x - a) < \varepsilon\}$  mit  $p \in \mathcal{P}_0$ ,  $\varepsilon > 0$  und  $a \in E$  eine Subbasis einer lokalkonvexen Topologie. Diese sogenannte von  $\mathcal{P}_0$  erzeugte Topologie ist die größte Topologie (d.h. mit den wenigsten offenen Mengen) auf  $E$ , für welche alle Seminormen  $p \in \mathcal{P}_0$  sowie alle Translationen  $x \mapsto a + x$  mit  $a \in E$  stetig sind. Bezüglich ihr ist eine Seminorm  $p$  auf  $E$  genau dann stetig, wenn es endlich viele Seminormen  $p_i \in \mathcal{P}_0$  und ein  $K > 0$  gibt, s.d.

$$p \leq K \max\{p_1, \dots, p_n\}.$$

**Definition.**

Unter einem SEMINORMIERTEN RAUM verstehen wir folglich einen Vektorraum  $E$  zusammen mit einer Menge  $\mathcal{P}$  von Seminormen, die gerade die stetigen Seminormen der von ihr erzeugten Topologie sind, d.h. mit  $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$  ist auch jede Seminorm  $p \leq p_1 + p_2$  in  $\mathcal{P}$ .

Eine Menge  $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$  heißt SUBBASIS DES SEMINORMIERTEN RAUMES  $(E, \mathcal{P})$ , falls sie die gleiche Topologie wie  $\mathcal{P}$  erzeugt, d.h. für jede Seminorm  $p$  in  $\mathcal{P}$  endlich viele  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0$  existieren sowie ein  $\lambda > 0$  mit  $p \leq \lambda \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ .

Zu jeder beliebigen Familie  $\mathcal{P}_0$  von Seminormen auf  $E$  erhalten wir einen eindeutig bestimmten seminormierter Raum, welchen  $\mathcal{P}_0$  als Subbasis seiner Seminormen besitzt, indem wir die Familie  $\mathcal{P}$  der, bezüglich der durch  $\mathcal{P}_0$  erzeugten Topologie, stetigen Seminormen verwenden:

$$\mathcal{P} := \{p \text{ ist Seminorm auf } E : \exists \lambda > 0 \exists p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}_0 \\ \text{mit } p \leq \lambda \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}\}.$$

Unter den SEMINORMEN DES SO ERHALTEN SEMINORMIERTEN RAUMS verstehen wir dann alle Seminormen die zur erzeugenden Familie  $\mathcal{P}_0$  gehören.

Unter einen ABZÄHLBAR SEMINORMIERTEN RAUM verstehen wir einen seminormierten Raum, welcher eine abzählbare Subbasis  $\mathcal{P}_0$  von Seminormen besitzt. Wir dürfen dann annehmen, daß  $\mathcal{P}_0 = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$  ist und die Folge  $(p_n)_n$  monoton wachsend ist und jede stetige Seminorm  $p$  schließlich dominieren, d.h. es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $p \leq p_n$ . Dazu ersetze man die  $p_n$  durch  $n \cdot \max\{p_1, \dots, p_n\}$ .

**2.7 Von lokalkonvexer Topologie zu Seminormen****Lemma.**

Jeder lokalkonvexe Vektorraum  $E$  besitzt eine 0-Umgebungsbasis von absolut-konvexen Mengen.

**Beweis.** Sei nämlich  $0 \in U$  offen und konvex. Da die Skalarmultiplikation  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\} \times E \rightarrow E$  stetig ist, existieren für jedes  $|\lambda| = 1$  eine Umgebung  $V_\lambda \subseteq \mathbb{K}$  von  $\lambda$  und eine konvexe 0-Umgebung  $U_\lambda \subseteq E$  mit  $V_\lambda \cdot U_\lambda \subseteq U$ . Da  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\}$  kompakt ist, existieren endlich viele  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  mit  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\lambda_i}$ . Es sei  $U_0 := \bigcap_{i=1}^n U_{\lambda_i}$ . Dann ist  $U_0$  eine konvexe 0-Umgebung und  $U_0 \subseteq U_1$ , wobei  $U_1 \subseteq U$  die konvexe Hülle von  $\{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| = 1\} \cdot U_0$  ist. Die Menge  $U_1$  ist also eine konvexe 0-Umgebung. Sie ist auch balanziert und somit absolut-konvex nach dem Sublemma in (2.5).  $\square$

Die Topologie jedes lokalkonvexen Vektorraums wird durch die Menge  $\mathcal{P}$  aller stetigen Seminormen erzeugt:

( $\supseteq$ ) Falls  $O$  in der von  $\mathcal{P}$  erzeugten Topologie offen ist, so existieren zu jedem  $a \in O$  endlich viele  $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $\bigcap_{i=1}^n a + \varepsilon \cdot (p_i)_{<1} = \{x : p_i(x - a) < \varepsilon \forall i = 1, \dots, n\} \subseteq O$ , also ist  $O$  auch in der ursprünglichen Topologie offen, da die  $(p_i)_{<1}$  0-Umgebungen sind.

( $\subseteq$ ) Umgekehrt sei nun letzteres erfüllt, d.h. zu  $a \in O$  existiert folglich eine absolut konvexe 0-Umgebung  $U$  mit  $a + U \subseteq O$ . Dann ist  $p := p_U$  eine stetige Seminorm, denn  $p_{\leq 1} \supseteq U$  ist dann auch eine 0-Umgebung. Folglich ist  $a + p_{<1} \subseteq a + U \subseteq O$ , also  $O$  auch offen in der von den stetigen Seminormen erzeugten Topologie.

*Die Topologie jedes lokalkonvexen Vektorraums wird sogar bereits durch die Minkowski-Funktionale einer 0-Umgebungsbasis bestehend aus absolut konvexen Mengen erzeugt:*

Nach obigen Lemma existiert eine 0-Umgebungsbasis  $\mathcal{U}_0$  bestehend aus absolut konvexen Mengen. Es sei  $\mathcal{P}_0$  die zugehörige Familie der Minkowski-Funktionale, d.h.  $\mathcal{P}_0 := \{p_U : U \in \mathcal{U}_0\}$ .

( $\supseteq$ ) Falls  $O$  in der von  $\mathcal{P}_0$  erzeugten Topologie offen ist, so existieren zu jedem  $a \in O$  endlich viele  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_0$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $\bigcap_{i=1}^n a + \frac{\varepsilon}{2} \cdot U_i \subseteq \{x : p_i(x - a) < \varepsilon\} \subseteq O$  mit  $p_i := p_{U_i}$ , also ist  $O$  auch in der ursprünglichen Topologie offen.

( $\subseteq$ ) Umgekehrt sei nun letzteres erfüllt, d.h. zu  $a \in O$  existieren  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_0$  mit  $\{x \in E : p_i(x - a) < 1 \text{ für } i = 1, \dots, n\} \subseteq \bigcap_{i=1}^n a + U_i \subseteq O$  für  $p_i := p_{U_i}$ , also ist  $O$  auch in der von  $\mathcal{P}_0$  erzeugten Topologie offen.

### Folgerung.

*Jeder lokalkonvexe Vektorraum  $E$  besitzt eine 0-Umgebungsbasis von abgeschlossenen absolut-konvexen Mengen.*

**Beweis.** Das ist offensichtlich, da  $(p_U)_{\leq 1/2} \subseteq U$  abgeschlossen ist.  $\square$

### Zusammenfassung.

*Sei  $E$  ein lokalkonvexer Vektorraum und  $\mathcal{U}$  eine 0-Umgebungssubbasis von absolut-konvexen Mengen. Dann ist die Familie  $\{p_U : U \in \mathcal{U}\}$  eine Subbasis jenes seminormierten Raumes, dessen Seminormen genau die bezüglich der gegebenen Topologie stetigen sind, das sind genau jene Seminormen  $q$ , für welche  $q_{\leq 1}$  eine 0-Umgebung ist.*

*Wir haben also eine Bijektion zwischen seminormierten Räumen und lokalkonvexen Vektorräumen, und können je nach Bedarf mit der Topologie oder den Seminormen auf einem fixen Vektorraum arbeiten.*

## 2.8 Konvergenz und Stetigkeit

### Definition.

Eine Folge  $(x_i)_i$  KONVERGIERT genau dann gegen  $a$  in einem topologischen Raum  $X$ , wenn für jede Umgebung  $U$  (einer Subbasis) von  $a$ , ein Index  $i_U$  existiert, so daß  $x_i \in U$  für alle  $i \geq i_U$ .

### Lemma.

*Ein Folge  $(x_i)$  konvergiert in der zugrundeliegenden Topologie eines seminormierten Raumes mit Subbasis  $\mathcal{P}_0$  genau dann gegen  $a$ , wenn  $p(x_i - a) \rightarrow 0$  für alle  $p \in \mathcal{P}_0$ .*

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Da für  $a \in E$  die Translation  $y \mapsto y - a$  stetig ist, konvergiert  $x_i - a \rightarrow a - a = 0$ , und somit auch  $p(x_i - a) \rightarrow p(0) = 0$  für jede stetig Seminorm  $p$ .

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $U$  eine Umgebung von  $a$ . Dann existieren endlich viele Seminormen  $p_j \in \mathcal{P}_0$  und ein  $\varepsilon > 0$  mit  $a + \bigcap_{j=1}^n (p_j)_{<\varepsilon} \subseteq U$ . Da  $p_j(x_i - a) \rightarrow 0$  existiert für jedes  $j$  ein  $i_j$  mit  $p_j(x_{i_j} - a) < \varepsilon$  für  $i \geq i_j$ . Sei  $I$  größer als all die endlich vielen  $i_j$ , dann ist  $x_i \in a + \bigcap_{j=1}^n (p_j)_{<\varepsilon}$  für  $i \geq I$  und somit auch in  $U$ , d.h.  $x_i \rightarrow a$ .  $\square$

**Lemma.**

Eine Abbildung  $f : E \rightarrow X$  von einem abzählbar seminormierten Raum  $E$  in einen topologischen Raum  $X$  ist genau dann stetig, wenn sie Folgen-stetig ist, d.h. für jede konvergente Folge  $x_i \rightarrow a$  konvergiert auch die Bildfolge  $f(x_i) \rightarrow f(a)$ .

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) ist wegen obiger Beschreibung der konvergenten Folgen klar.

( $\Leftarrow$ ) Indirekt: Angenommen es ist  $f^{-1}(U)$  keine Umgebung von  $a$  für eine Umgebung  $U$  von  $f(a)$ . Es sei  $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine abzählbare Basis der Seminormen von  $E$ . Dann existieren für jedes  $n$  ein  $x_n \in E$  mit  $p_k(x_n - a) \leq \frac{1}{n}$  für alle  $k \leq n$  und  $f(x_n) \notin U$ . Also konvergiert  $p_k(x_n - a) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , und somit  $x_n \rightarrow a$  nach obigen Lemma. Da aber  $f(x_n) \notin U$ , ist das ein Widerspruch zur Folgenstetigkeit von  $f$ .  $\square$

**Definition.**

Da obiges Lemma für nicht-abzählbar seminormierte Räume falsch ist, erweitern wir den Begriff einer Folge zu:

Ein NETZ (VERALLGEMEINERTE FOLGE oder MOORE-SMITH-FOLGE) ist eine Abbildung  $x : I \rightarrow X$ , wobei  $I$  eine GERICHTETE Indexmenge ist, d.h. eine Menge zusammen mit einer Relation  $\prec$ , welche transitiv ist und zu je zwei Elementen  $i_1$  und  $i_2$  in  $I$  auch ein  $i \in I$  mit  $i_1 \prec i$  und  $i_2 \prec i$  existiert. Wortwörtlich genauso wie für Folgen definiert man die Konvergenz von Netzen und zeigt damit auch das erste der obigen Lemmas. Bezüglich des zweiten gilt nun:

**Lemma.**

Eine Abbildung  $f : E \rightarrow X$  von einem seminormierten Raum in einen topologischen Raum ist genau dann stetig, wenn für alle konvergenten Netze  $x_i \rightarrow a$  auch das Bildnetz  $f(x_i) \rightarrow f(a)$  konvergiert.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Ist offensichtlich, denn falls  $U$  eine  $f(a)$ -Umgebung ist und  $x_i \rightarrow a$ , so  $\exists i_0 \forall i \geq i_0 : x_i \in f^{-1}(U)$ , i.e.  $f(x_i) \in U$ , d.h.  $f(x_i) \rightarrow f(a)$ .

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $\mathcal{U}$  eine Umgebungsbasis von  $a$ . Dann verwenden wir als Indexmenge  $I := \{(U, u) : U \in \mathcal{U}, u \in U\}$  mit der Ordnung  $(U, u) \leq (U', u') \Leftrightarrow U \supseteq U'$  und als Netz darauf die Abbildung  $x : (U, u) \mapsto u$ . Dann konvergiert klarerweise das Netz  $x$  gegen  $a$ , also nach Voraussetzung auch  $f \circ x$  gegen  $f(a)$ , d.h. für jede  $f(a)$ -Umgebung  $V$  existiert ein Index  $(U_0, u_0)$ , s.d.  $f(u) \in V$  für alle  $U \subseteq U_0$  und  $u \in U$ . Also ist  $f(U_0) \subseteq V$ , d.h.  $f$  ist stetig.  $\square$

**Definition.**

Ein seminormierter Raum heißt SEPARIERT (oder auch Hausdorff), wenn die Grenzwerte konvergenter Folgen (oder Netze) eindeutig sind, das ist genau dann der Fall, wenn  $p(x) = 0$  für alle  $p \in \mathcal{P}_0$  nur für  $x = 0$  gilt:

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $x_i$  ein Netz, welches gegen  $x'$  und  $x''$  konvergiert. Dann konvergiert  $x_i - x'$  gegen 0 als auch gegen  $x'' - x'$ . Wegen der Stetigkeit von  $p$  konvergiert also  $p(x_i - x')$  gegen  $p(0) = 0$  und auch gegen  $p(x'' - x')$ . Da aber Grenzwerte in  $\mathbb{K}$  eindeutig sind, gilt  $p(x'' - x') = 0$  für alle  $p$ , und damit ist nach Voraussetzung  $x'' - x' = 0$ .

( $\Rightarrow$ ) Es sei  $p(x) = 0$  für alle  $p$ . Dann ist die konstante Folge (Netz) mit Wert  $x$  sowohl gegen 0 als auch gegen  $x$  konvergent, also nach Voraussetzung  $x = 0$ .

Wir wollen für separierte seminormierte Räume die Bezeichnung SNR verwenden.

## 2.9 Normierbare Räume

### Definition.

Einen SNR, der eine Subbasis bestehend aus einer einzelnen (Semi-) Norm besitzt, nennen wir NORMIERBAR.

Eine Menge  $B \subset E$  heißt BESCHRÄNKT genau dann, wenn  $p(B)$  beschränkt ist für alle  $p \in \mathcal{P}_0$ . Das ist genau dann der Fall, wenn sie von allen 0-Umgebungen absorbiert wird, d.h.  $\forall$  0-Umgebungen  $U \exists K > 0 : B \subseteq K \cdot U$ :

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $p$  eine stetige Seminorm, dann ist  $p_{\leq 1}$  eine Nullumgebung, also existiert nach Voraussetzung ein  $K > 0$  mit  $B \subseteq K \cdot p_{\leq 1} = p_{\leq K}$ , d.h.  $p$  ist auf  $B$  durch  $K$  beschränkt.

( $\Rightarrow$ ) Es sei  $U$  eine 0-Umgebung. Dann existieren endlich viele Seminormen  $p_i \in \mathcal{P}_0$  und ein  $\varepsilon > 0$  mit  $\bigcap_{i=1}^n (p_i)_{< \varepsilon} \subseteq U$ . Für jedes  $p_i$  existiert ein  $K_i > 0$  mit  $|p_i(B)| \leq K_i$ , also ist  $B \subseteq (p_i)_{\leq K_i}$  und somit  $B \subseteq K \cdot U$ , wobei  $K := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \max\{K_1, \dots, K_n\}$ .

### Satz von Kolmogoroff.

*Ein SNR ist genau dann normierbar, wenn er eine beschränkte Nullumgebung besitzt.*

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es sei  $p$  eine die Struktur erzeugende Norm. Dann ist  $U := p_{\leq 1}$  eine 0-Umgebung. Für jede beliebige stetige Seminorm  $q$  existiert ein  $K > 0$  mit  $q \leq K \cdot p$ , und somit ist  $q$  auf  $U$  durch  $K$  beschränkt. Also ist  $U$  beschränkt.

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $U$  eine beschränkte Nullumgebung. Dann existiert eine stetige Seminorm mit  $p_{\leq 1} \subseteq U$ . Es sei nun  $q$  eine beliebige Seminorm. Da  $U$  beschränkt ist, existiert ein  $K > 0$  mit  $|q(U)| \leq K$ . Also ist  $p_{\leq 1} \subseteq U \subseteq (\frac{1}{K}q)_{\leq 1}$  und damit  $p \geq \frac{1}{K}q$ , d.h.  $q \leq K \cdot p$ . Also ist  $\{p\}$  eine Subbasis der Seminormen von  $E$  und somit sogar eine Norm.  $\square$

### Beispiel.

Die punktweise Konvergenz auf  $C(I, \mathbb{R})$  ist nicht normierbar.

**Beweis.** Eine Subbasis von Seminormen für die punktweise Konvergenz ist durch  $f \mapsto |f(x)|$  für  $x \in I$  gegeben. Angenommen es gäbe eine beschränkte Nullumgebung  $U$ . Dann müßten endlich viele Punkte  $x_1, \dots, x_n \in I$  und ein  $\varepsilon > 0$  existieren, s.d.  $B := \{f : |f(x_i)| < \varepsilon \text{ für } i = 1, \dots, n\}$  beschränkt ist. Sei aber  $x_0 \notin \{x_1, \dots, x_n\}$ . Dann ist die Seminorm  $q : f \mapsto |f(x_0)|$  nicht beschränkt auf  $B$ , denn es existiert sicherlich ein (Polynom)  $f$  welches auf  $\{x_1, \dots, x_n\}$  verschwindet, nicht aber auf  $x_0$ , und somit wäre  $K \cdot f \in B$  aber  $q(K \cdot f) = K \cdot q(f) \rightarrow \infty$  für  $K \rightarrow \infty$ .  $\square$

Analog zeigt man, daß die glm. Konvergenz auf Kompakta im Raum  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  nicht normierbar aber ein abzählbar SNR ist. Und ebenso für die glm. Konvergenz in jeder Ableitung auf  $C^\infty(I, \mathbb{R})$ .

### 3. Lineare Abbildungen und Vollständigkeit

In diesem Kapitel untersuchen wir die grundlegenden Eigenschaften linearer Abbildungen sowie den Begriff der Vollständigkeit, und seine Bedeutung für Potenzreihen. Insbesondere wenden wir das an, um den Inversen Funktionensatz und den Weierstraß'schen Approximationssatz zu beweisen, sowie die Lösung linearer Differentialgleichungen zu finden.

#### 3.1 Lemma.

Für eine lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  zwischen SNR'en sind äquivalent:

- (1).  $f$  ist stetig;
- $\Leftrightarrow$  (2).  $f$  ist stetig bei 0;
- $\Leftrightarrow$  (3). Für jede (stetige) SN  $q$  von  $F$  ist  $q \circ f$  eine stetige SN von  $E$ .

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  3)  $q$  stetige SN,  $f$  stetig linear  $\Rightarrow q \circ f$  stetige SN.

(3  $\Rightarrow$  2) Sei  $U$  eine 0-Umgebung von  $0 = f(0)$  in  $F$ , o.B.d.A.  $U = \{y : q(y) < \varepsilon\}$  für eine SN  $q$  von  $F$ . Dann ist  $\{x : q(f(x)) < \varepsilon\} = f^{-1}(U) = (q \circ f)_{<\varepsilon}$  offen in  $E$ .

(2  $\Rightarrow$  1) Es ist  $f(x) = f(x - a) + f(a)$ , d.h.  $f = T_{f(a)} \circ f \circ T_{-a}$ , wobei die Translationen  $T_{-a}$  und  $T_{f(a)}$  stetig sind und das mittlere  $f$  bei 0 stetig ist, also auch die Zusammensetzung  $f$  bei  $(T_{-a})^{-1}(0) = a$ .  $\square$

#### Lemma.

Eine  $n$ -lineare Abbildung  $f : E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$  zwischen SNR'en ist genau dann stetig, wenn sie stetig bei 0 ist.

**Beweis.** Sei zuerst  $n = 2$ . Für  $a_i \in E_i$  und jede Umgebung  $f(a_1, a_2) + W$  von  $f(a_1, a_2)$  mit absolut konvexen  $W$  existieren 0-Umgebungen  $U_i$  in  $E_i$  mit  $f(U_1 \times U_2) \subseteq \frac{1}{3}W$ , wegen der Stetigkeit von  $f$  bei 0. Nun wähle ein  $0 < \rho < 1$  mit  $\rho a_i \in U_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann ist  $f((a_1 + \rho U_1) \times (a_2 + \rho U_2)) \subseteq W$ , denn für  $u_i \in U_i$  gilt

$$\begin{aligned} f(a_1 + \rho u_1, a_2 + \rho u_2) - f(a_1, a_2) &= \underbrace{f(a_1, \rho u_2)}_{=f(\rho a_1, u_2)} + \underbrace{f(\rho u_1, a_2)}_{=f(u_1, \rho a_2)} + \underbrace{f(\rho u_1, \rho u_2)}_{=\rho^2 f(u_1, u_2)} \\ &\subseteq \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W + \frac{1}{3}W \subseteq W. \end{aligned}$$

Für  $n > 2$ , wählt man analog  $U_1, \dots, U_n$  mit  $(n^n - 1) f(U_1 \times \dots \times U_n) \subseteq W$ .  $\square$

#### 3.2 Definition

Eine lineare Abbildung heißt BESCHRÄNKT, falls das Bild jeder beschränkten Menge beschränkt ist.

#### Lemma.

Für eine lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  zwischen SNR'en gelten folgende Implikationen:

- (1).  $f$  ist stetig;  
 $\Rightarrow$  (2).  $f$  ist Folgen-stetig;  
 $\Rightarrow$  (3).  $f$  ist beschränkt.

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$  2) gilt auch für nicht-lineare  $f$  nach (2.8).

(2 $\Rightarrow$  3) Angenommen  $f(B)$  ist nicht beschränkt für eine beschränkte Menge  $B \subseteq E$ . Dann existiert eine Seminorm  $q$  von  $F$  und eine Folge  $b_n \in B$ , s.d.  $0 < \lambda_n := q(f(b_n)) \rightarrow \infty$ . Die Folge  $\frac{1}{\lambda_n} b_n$  konvergiert dann gegen 0, also wegen der Folgen-Stetigkeit auch  $f(\frac{1}{\lambda_n} b_n) = \frac{1}{\lambda_n} f(b_n)$  und damit auch  $q(\frac{1}{\lambda_n} f(b_n)) = \frac{1}{\lambda_n} q(f(b_n)) = 1$ , Widerspruch.  $\square$

Es stellt sich nun die Frage nach der Umkehrung. Für (1  $\Leftarrow$  2) haben wir diese in (2.8) für abzählbar SNR's schon positiv beantwortet. Um aus der Beschränktheit zumindest auf Folgen-Stetigkeit schließen zu können, sollten wir jede konvergente Folge  $(x_n)_n$  in  $E$  als Produkt einer beschränkten Folge  $(y_n)_n$  in  $E$  und einer 0-Folge  $\rho_n$  in  $\mathbb{R}$  schreiben können. Folgen für die das geht heißen Mackey 0-Folgen, d.h. eine Folge  $x_n$  heißt MACKEY-KONVERGENT gegen 0, falls  $\exists 0 \leq \lambda_n \rightarrow \infty$ , s.d.  $\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt ist.

Offensichtlich ist jede Mackey 0-Folge konvergent gegen 0, denn für jede absolut konvexe 0-Umgebung  $U$  existiert ein  $K > 0$  mit  $\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq K U$  und somit ist  $x_n \in U$  für alle  $n$  mit  $\lambda_n \geq K$ . Für normierbare Räume gilt auch die Umkehrung, denn aus  $x_n \rightarrow 0$  folgt die Beschränktheit von  $\{\lambda_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$  in der Norm durch 1, wobei  $\lambda_n := \frac{1}{\|x_n\|}$  für  $x_n \neq 0$  und  $\lambda_n := n$  sonst. Allgemeiner gilt dies aber auch für abzählbar SNR'e:

**Lemma.**

*In abzählbar SNR'en  $E$  sind gegen 0 konvergente Folgen sogar Mackey-konvergent gegen 0.*

**Beweis.** Es sei  $\{p_k : k \in \mathbb{N}\}$  eine Subbasis von  $E$  und  $x_n \rightarrow 0$  eine 0-Folge. Die Idee ist zu den abzählbar vielen Nullfolgen  $(p_k(x_n))_n$  für  $k \in \mathbb{N}$  eine weitere Nullfolge  $n \mapsto \frac{1}{\lambda_n} > 0$  zu definieren, die langsamer gegen 0 konvergiert.

Aus  $p_k(x_n) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt die Existenz von  $n_k \in \mathbb{N}$  mit  $p_i(x_n) \leq \frac{1}{k}$  für alle  $n \geq n_k$  und alle  $i \leq k$ . O.B.d.A. sei  $k \mapsto n_k$  strikt monoton wachsend. Wir definieren  $\lambda_n := k$  für  $n_{k+1} > n \geq n_k$ . Dann ist  $n \mapsto \lambda_n$  monoton wachsend,  $\lambda_n \rightarrow \infty$  und für  $n \geq n_k$  gilt  $p_k(\lambda_n x_n) = \lambda_n p_k(x_n) = j p_k(x_n) \leq j p_j(x_n) \leq j \frac{1}{j} = 1$ , wobei  $j \geq k$  so gewählt ist, daß  $n_{j+1} > n \geq n_j$ .  $\square$

**Folgerung.**

*Jeder abzählbare SNR ist bornologisch. Mehr noch: multilineare beschränkte Abbildungen auf abzählbar SNR'en sind stetig.*

Dabei heißt ein SNR BORNOLOGISCH falls jede beschränkte lineare Abbildung auf ihm stetig ist.

Wir werden in (5.4) Beispiele von SNR'en angeben, die nicht bornologisch sind.

**Beweis.** Wegen (2.8) brauchen wir nur die Folgen-Stetigkeit (bei 0) jeder beschränkten linearen Abbildung  $f$  zeigen. Es sei  $x_n \rightarrow 0$ . Nach dem Lemma existiert ein Folge  $\lambda_n \rightarrow \infty$ , sodaß  $\lambda_n x_n$  beschränkt ist. Dann ist aber nach Voraussetzung  $\lambda_n f(x_n) = f(\lambda_n x_n)$  ebenfalls beschränkt, und somit existiert für jede SN  $q$  auf  $F$  eine Konstante  $K_q$  mit  $\lambda_n q(f(x_n)) = q(\lambda_n f(x_n)) \leq K_q$ , d.h.  $q(f(x_n)) \leq \frac{K_q}{\lambda_n} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , i.e.  $f(x_n) \rightarrow 0$ .  $\square$

**3.3 Lemma.**

Für lineare Abbildungen  $f : E \rightarrow F$  zwischen normierten Räumen sind äquivalent:

- (1).  $f$  ist stetig;  
 $\Leftrightarrow$  (2).  $f$  ist LIPSCHITZ, d.h.  $\exists K > 0 : \|f(x) - f(y)\| \leq K \cdot \|x - y\|$ ;  
 $\Leftrightarrow$  (3).  $\|f\| < \infty$ .

Wobei die OPERATORNORM  $\|f\|$  von  $f$  folgendes ist

$$\begin{aligned} \|f\| &:= \sup\{\|fx\| : \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|fx\| : \|x\| = 1\} = \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \inf\{K : \|fx\| \leq K\|x\| \text{ für alle } x\} \end{aligned}$$

Ist  $f$  multi-linear, so ist  $f$  genau dann stetig, wenn

$$\|f\| := \sup\left\{\frac{\|f(x_1, \dots, x_n)\|}{\|x_1\| \dots \|x_n\|} : x_i \neq 0\right\} < \infty.$$

**Beweis.** (1  $\Leftrightarrow$  3)  $f$  ist stetig  $\stackrel{(3.2)}{\Leftrightarrow}$   $f$  ist beschränkt auf beschränkten Mengen (o.B.d.A. auf  $\{x : \|x\| \leq 1\}$ , da  $f(B) \subseteq c \cdot f(\{x : \|x\| \leq 1\})$  für  $B \subseteq c \cdot \{x : \|x\| \leq 1\}$ )  
 $\Leftrightarrow \sup\{\|f(x)\| : \|x\| \leq 1\} =: \|f\| < \infty$ .

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sup\{\|fx\| : \|x\| = 1\} &\leq \sup\{\|fx\| : \|x\| \leq 1\} \quad (\text{da mehr Elemente}) \\ &\leq \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \quad (\text{da } \|fx\| \leq \frac{\|fx\|}{\|x\|} \text{ für } \|x\| \leq 1) \\ &\leq \sup\{\|fx\| : \|x\| = 1\} \quad (\text{da } \frac{\|fx\|}{\|x\|} = \|f(\frac{1}{\|x\|}x)\|), \end{aligned}$$

also stimmt Gleichheit überall. Weiters ist:

$$\begin{aligned} \inf\{K : \|fx\| \leq K \cdot \|x\| \text{ für alle } x\} &= \inf\left\{K : \frac{\|fx\|}{\|x\|} \leq K \text{ für alle } x \neq 0\right\} \\ &= \inf\left\{K : \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \leq K\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|fx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $f$  ist Lipschitz  $\Leftrightarrow \left\{\frac{\|fz\|}{\|z\|} : z \neq 0\right\} = \left\{\frac{\|fx-fy\|}{\|x-y\|} : x \neq y\right\}$  ist beschränkt.

Die Aussage für multilineare Abbildungen  $f$  zeigt man analog.  $\square$

**Folgerung.**

Seien  $E$  und  $F$  normierte Räume, dann ist die Menge  $L(E, F) := \{f : E \rightarrow F \mid f \text{ ist linear und beschränkt}\}$  ein normierter Raum bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und der Operatornorm, wie sie in (3.3) definiert wurde. Weiters gilt:  $\|id_E\| = 1$  und  $\|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ .

**Beweis.** Es gilt:

$$\begin{aligned} \forall x : \|(f+g)x\| &\leq \|fx\| + \|gx\| \leq (\|f\| + \|g\|)\|x\| \Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \\ \forall x : \|(\lambda f)x\| &= |\lambda| \|fx\| \Rightarrow \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\| \\ \forall x : \|(f \circ g)x\| &\leq \|f\| \|g\| \|x\| \Rightarrow \|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|. \quad \square \end{aligned}$$

Achtung  $\|f \circ g\| \neq \|f\| \cdot \|g\|$ , z.B.  $f(x, y) := (x, 0)$  und  $g(x, y) := (0, y)$ .

**Definition.**

Eine NORMIERTE ALGEBRA ist ein normierter Raum  $A$  zusammen mit einer bilinearen Abbildung  $\bullet : A \times A \rightarrow A$ , welche assoziativ ist, eine 1 besitzt und  $\|1\| = 1$  sowie  $\|a \bullet b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$  erfüllt. Eines der wichtigsten Beispiele ist  $L(E, E) =: L(E)$  für jeden normierten Raum  $E$ .

**3.4 Definition**

Ein SNR  $E$  heißt FOLGEN-VOLLSTÄNDIG, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Er heißt VOLLSTÄNDIG, wenn jedes Cauchynetz konvergiert. Ein Netz (bzw. eine Folge)  $x_i$  heißt CAUCHY falls  $x_i - x_j \rightarrow 0$  für  $i, j \rightarrow \infty$ , d.h.  $\forall \varepsilon > 0 \forall p \exists i_0 \forall i, j > i_0 : p(x_i - x_j) < \varepsilon$ .

Ein BANACH-RAUM ist ein normierter Raum der (Folgen-)vollständig ist. Ein (Folgen-)vollständiger abzählbar SNR heißt FRÉCHET-RAUM.

**Lemma.**

Für jeden abzählbar SNR und jedes überall positive  $\lambda \in \ell^1$  sind äquivalent

- (1). Er ist vollständig;
- $\Leftrightarrow$  (2). Er ist Folgen-vollständig;
- $\Leftrightarrow$  (3). Jede absolut-konvergente Reihe konvergiert;
- $\Leftrightarrow$  (4). Für jede beschränkte Folge  $b_n$  konvergiert die Reihe  $\sum_n \lambda_n b_n$ ;
- $\Leftrightarrow$  (5). Jede Cauchy-Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Eine Reihe  $\sum_n x_n$  heißt ABSOLUT-KONVERGENT falls für jede stetige Seminorm  $p$  die Reihe  $\sum_n p(x_n)$  in  $\mathbb{R}$  (absolut) konvergiert.

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  2) ist trivial.

(2  $\Rightarrow$  3) Es sei  $\sum_n x_n$  absolut-konvergent, dann bilden die Partialsummen von  $\sum_n x_n$  eine Cauchy-Folge, denn  $p(\sum x_n) \leq \sum p(x_n)$ , also konvergiert  $\sum_n x_n$  nach (2).

(3  $\Rightarrow$  4) Es sei die Folge  $(b_n)$  beschränkt und  $(\lambda_n)$  absolut-summierbar. Dann ist  $\sum_n \lambda_n b_n$  absolut-summierbar, denn  $\sum_n p(\lambda_n b_n) \leq \|\lambda\|_1 \cdot \|p \circ b\|_\infty$ . Also konvergiert diese Reihe nach (3).

(4  $\Rightarrow$  5) Es sei  $(x_i)$  Cauchy und  $\lambda$  absolut-summierbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \forall k \exists n_k \forall n \leq k \forall i, j \geq n_k : p_n(x_i - x_j) \leq \lambda_k \quad (\text{o.B.d.A. } n_k \leq n_{k+1}) \\ \Rightarrow & p_n \left( \frac{1}{\lambda_k} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \right) \leq 1 \text{ für } n \leq k \\ \Rightarrow & \frac{1}{\lambda_k} y_k \text{ ist beschränkt, wobei } y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k} \\ \stackrel{(4)}{\Rightarrow} & x_{n_j} = \sum_{k < j} \lambda_k \frac{1}{\lambda_k} y_k \text{ konvergiert.} \end{aligned}$$

(5  $\Rightarrow$  1) Es sei  $(x_i)$  ein Cauchy-Netz und  $(p_n)$  eine Basis von Seminormen die wachsend ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & \forall k \exists i_k \forall i, j \succ i_k : p_k(x_i - x_j) \leq \frac{1}{k} \quad (\text{o.B.d.A. } i_{k+1} \succ i_k) \\ \Rightarrow & x_{i_k} \text{ ist eine Cauchy-Folge} \\ \Rightarrow & \text{eine konvergente Teilfolge } (x_{i_{k_l}})_l \text{ existiert} \\ \Rightarrow & x_\infty := \lim_l x_{i_{k_l}} \\ \Rightarrow & p_n(x_i - x_\infty) \stackrel{n \leq k}{\leq} p_k(x_i - x_\infty) \leq \underbrace{p_k(x_i - x_{i_k})}_{\leq \frac{1}{k} \text{ f\"ur } i \succ i_k} + \underbrace{p_k(x_{i_k} - x_\infty)}_{=\lim_l p_k(x_{i_k} - x_{i_{k_l}}) \leq \frac{1}{k}} \leq \frac{2}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

**3.5 Lemma.**

Sei  $X$  eine Menge und  $E$  ein (Folgen-)vollständiger SNR. Dann ist der Raum  $B(X, E) := \{f : X \rightarrow E \mid f(X) \text{ ist beschränkt in } E\}$  ebenfalls (Folgen-)vollständig, wobei er durch die Familie  $f \mapsto \|q \circ f\|_\infty = \sup\{q(f(x)) : x \in X\}$  seminormiert ist, wo  $q$  die Seminormen von  $E$  durchläuft. Seine lokalkonvexe Topologie ist also jene der gleichmäßigen Konvergenz.

**Beweis.** Es sei  $f_i$  ein Cauchy-Netz in  $B(X, E)$ . Da die Punktevaluationen  $\text{ev}_x : B(X, E) \rightarrow E, f \mapsto f(x)$  stetig (wegen  $q(\text{ev}_x(f)) = q(f(x)) \leq \|q \circ f\|_\infty$ ) und linear sind, ist  $f_i(x)$  ein Cauchy-Netz in  $E$  für jedes  $x \in X$ , und konvergiert somit. Es sei  $f(x) := \lim_i f_i(x)$ , dann gilt für jede stetige Seminorm  $p$  auf  $E$ :

$$p(f_i(x) - f(x)) \leq \underbrace{p(f_i(x) - f_j(x))}_{< \varepsilon \text{ f\"ur } i, j \succ i_0(\varepsilon)} + \underbrace{p(f_j(x) - f(x))}_{< \varepsilon \text{ f\"ur } j \succ i_0(\varepsilon, x)} \leq 2\varepsilon$$

für  $i \succ i_0(\varepsilon)$  (und geeignet gewählten  $j$ ). Also konvergiert  $f_i \rightarrow f$  in der durch  $p$  definierten Supremums-Norm.

Weiters ist

$$p(f(x)) \leq p(f(x) - f_i(x)) + p(f_i(x)) \leq \|p \circ (f - f_i)\|_\infty + \|p \circ f_i\|_\infty < \infty$$

also gehört  $f$  zu  $B(X, E)$ . □

**Lemma.**

Es sei  $E$  ein (Folgen-)vollständiger SNR,  $F$  ein Teilvektorraum mit den Einschränkungen  $p|_F$  der Seminormen  $p$  von  $E$  als Subbasis. Falls  $F$  (Folgen-)abgeschlossen ist, so ist  $F$  ebenfalls (Folgen-)vollständig

Eine Teilmenge  $Y$  eines topologischen Raums  $X$  heißt ABGESCHLOSSEN bzw. FOLGEN-ABGESCHLOSSEN, wenn mit jedem Netz bzw. jeder Folge  $(y_i)_i$  in  $Y$ , welches in  $X$  konvergiert auch der Grenzwert zu  $Y$  gehört. Es ist einfach zu zeigen, daß eine Teilmenge genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement offen ist.

**Beweis.** Wenn  $(y_i)$  Cauchy ist, dann konvergiert es in  $E$  wegen der Vollständigkeit von  $E$  und somit auch in  $F$  wegen der Abgeschlossenheit von  $F$ . □

**Folgerung.**

Die Teilräume  $C(X)$  für  $X$  kompakt,  $C_b(X) := C(X) \cap B(X)$  für  $X$  Kelley und  $C_0(X) := \{f \in C(X) : \forall \varepsilon > 0 \exists K \subseteq X \text{ kompakt } \forall x \notin K : |f(x)| \leq \varepsilon\}$  für  $X$  lokalkompakt sind alle vollständig. □

**Beispiel.**

$BV(I, \mathbb{R})$  ist ein Banach-Raum.

**Folgerung.**

Seien  $E$  und  $F$  seminormierte Räume, so ist die Menge  $L(E, F) := \{f : E \rightarrow F \mid f \text{ ist linear und beschränkt}\}$  ein seminormierter Raum bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und den Seminormen der Form  $f \mapsto \|q \circ f|_B\|$  mit allen beschränkten  $B \subset E$  und allen SN'en  $q$  von  $F$ , siehe auch (4.4). Seine lokalkonvexe Topologie ist also jene der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen in  $E$ . Ist  $F$  (Folgen-)vollständig, so auch  $L(E, F)$ .

Falls  $F = \mathbb{K}$  ist so bezeichnen wir mit  $E' := L(E, \mathbb{K})$  den RAUM ALLER BESCHRÄNKTEN LINEAREN FUNKTIONALE auf  $E$  und mit  $E^*$  den TEILRAUM ALLER STETIGEN LINEAREN FUNKTIONALE auf  $E$ .

Falls  $f : E \rightarrow F$  ein beschränkter (bzw. stetiger) linearer Operator ist, so bezeichnen wir mit  $f^* : F' \rightarrow E'$  (bzw.  $f^* : F^* \rightarrow E^*$ ) den ADJUNGIERTEN OPERATOR, der durch  $f^*(\ell)(x) := \ell(f(x))$  gegeben ist.

**Beweis.** Es sei  $(f_i) \in L(E, F)$  ein Cauchy-Netz. Für jedes  $x \in E$  konvergiert somit  $f_i(x)$  gegen ein  $f(x) \in F$ . Weiters ist für jede beschränkte Menge  $A \subset E$  das Netz  $f_i|_A$  ein Cauchy-Netz in  $B(A, F)$ , und konvergiert somit gegen ein  $f_A \in B(A, F)$ . Da das auch punktweise für  $x \in A$  gelten muß, ist  $f_A(x) = f(x)$ . Die Abbildung  $f$  ist beschränkt, da  $f(A) = f_A(A)$  beschränkt ist. Sie ist linear, da  $f_i$  punktweise gegen  $f$  konvergiert! Schließlich konvergiert  $f_i \rightarrow f$  in  $L(E, F)$ , da für jedes  $A$  die Einschränkungen auf  $A$  es in  $B(A, F)$  tun.  $\square$

**3.6 Definition**

Eine BANACH-ALGEBRA ist eine normierte Algebra  $A$  die vollständig ist. Eines der Erz-Beispiele ist  $L(E) := L(E, E)$  für jeden Banach-Raum  $E$ ,

**Lemma.**

Jede Potenzreihe mit Koeffizienten in  $\mathbb{K}$  und Konvergenzradius  $r$  konvergiert auch auf dem Ball  $\{x \in A : \|x\| < r\}$  in jeder Banach-Algebra  $A$ .

**Beweis.** Es sei  $\sum_n \lambda_n z^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$ . Es genügt zu zeigen, daß  $\sum_n \lambda_n a^n$  absolut-konvergiert für alle  $\|a\| < r$ . Das ist offensichtlich der Fall, denn wegen  $\|\sum_{k=n}^{n+p} \lambda_k a^k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} |\lambda_k| \|a\|^k$  ist die Cauchy-Bedingung erfüllt.  $\square$

**3.7 Inversion****Folgerung.**

Die Menge der invertierbaren Elemente einer Banach-Algebra ist offen und die Inversion ist eine stetige Abbildung.

**Beweis.** Die Potenzreihe  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x^k$  konvergiert für  $\|x\| < 1$  und klarerweise gilt  $(1-x) \cdot f(x) = 1 = f(x) \cdot (1-x)$ , denn

$$\begin{aligned} (1-x) \cdot f(x) &= (1-x) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1-x) \cdot \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - x^{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Folglich ist der Ball  $\{y : \|y - 1\| < 1\}$  ganz in den invertierbaren Elementen enthalten und die Inversion  $y \mapsto f(1 - y)$  ist stetig auf dieser Umgebung. Für jedes andere invertierbare Element  $x_0$  ist  $\{y : \|y - x_0\| < \frac{1}{\|(x_0)^{-1}\|}\}$  eine Umgebung von invertierbaren Elementen  $y$  mit  $y^{-1} = (x_0 \cdot (x_0)^{-1} \cdot y)^{-1} = ((x_0)^{-1} \cdot y)^{-1} \cdot (x_0)^{-1}$  da  $\|(x_0)^{-1} \cdot y - 1\| \leq \|(x_0)^{-1}\| \cdot \|y - x_0\| < 1$ .  $\square$

**Inverse Funktionensatz.**

Es seien  $E$  und  $F$  Banach-Räume,  $n \geq 1$  und sei  $f : E \rightarrow F$  eine  $C^n$ -Abbildung. Falls die Ableitung  $f'(0)$  eine stetige Inverse besitzt, so ist  $f$  ein lokaler  $C^n$ -Diffeomorphismus bei  $0$ .

Eine Abbildung  $f : E \rightarrow F$  heißt DIFFERENZIERBAR in  $x \in E$  falls ein (eindeutiges)  $\ell \in L(E, F)$  existiert mit  $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{f(x+v) - f(x) - \ell(v)}{\|v\|} = 0$ . Die Abbildung  $\ell$  heißt ABLEITUNG von  $f$  in  $x$  und wird mit  $f'(x)$  bezeichnet.

Eine Abbildung  $f$  heißt STETIG DIFFERENZIERBAR falls sie differenzierbar in allen  $x \in E$  ist, und die Ableitung  $f' : E \rightarrow L(E, F)$ ,  $x \mapsto f'(x)$  stetig ist.

Rekursiv heißt sie  $n$ -MAL STETIG DIFFERENZIERBAR oder  $C^n$  falls sie differenzierbar ist und  $f' : E \rightarrow L(E, F)$  eine  $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbare Abbildung ist.

Sie heißt GLATT oder  $C^\infty$ , falls sie  $C^n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis.** O.B.d.A. dürfen wir annehmen, daß  $f(0) = 0$  (Translation um  $-f(0)$ ) und daß  $f'(0) = id$  (Komposition mit  $f'(0)^{-1}$ ). Es sei  $g := id - f$  die Abweichung von der Identität. Dann gilt  $g(0) = 0, g'(0) = 0$  und somit existiert ein  $r > 0$  mit  $\|g'(x)\| \leq \frac{1}{2}$  für  $\|x\| \leq r$ . Aus dem 1. Hauptsatz  $g(x) - g(y) = \int_0^1 g'(y + t(x - y))(x - y) dt$  folgt, daß  $\|g(x) - g(y)\| \leq \int_0^1 \|g'(y + t(x - y))\| \cdot \|x - y\| dt < 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \|x - y\|$ . Also ist  $g$  eine Kontraktion von  $\overline{B_r} \rightarrow \overline{B_{r/2}}$ , wobei  $B_r := \{x : \|x\| < r\}$ .

Wir wollen nun die Gleichung  $f(x) = y$  nach  $x$  auflösen. dazu schreiben wir sie in  $x = y - f(x) + x$  um. Das ist eine Fixpunktgleichung für die Funktion  $g_y : x \mapsto y + g(x) = y - f(x) + x$ . Die Funktion  $g_y$  ist für  $\|y\| \leq \frac{r}{2}$  eine Kontraktion  $\overline{B_r} \rightarrow \overline{B_r}$ , also existiert nach dem Banach'schen Fixpunktsatz ein eindeutiger Fixpunkt  $x_y \in \overline{B_r}$  von  $g_y(x_y) = x_y$ , d.h. eine Lösung von  $f(x_y) = y$ .

Die Abbildung  $f^{-1} : \overline{B_{r/2}} \rightarrow \overline{B_r}$ ,  $y \mapsto x_y$  ist stetig, denn für  $f(x_i) = y_i$  gilt:

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\| &\leq \|f(x_1) - f(x_2)\| + \underbrace{\|g(x_1) - g(x_2)\|}_{\leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|} \\ \Rightarrow \|x_1 - x_2\| &\leq 2\|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$

Die Abbildung  $f^{-1}$  ist auch differenzierbar, denn durch formales Differenzieren von  $(f \circ f^{-1})(y) = y$  erhalten wir mit  $f(x) = y$  nach der Kettenregel  $f'(x) \circ (f^{-1})'(y) = id$ , d.h.  $(f^{-1})'(y) = f'(x)^{-1}$ . Wir zeigen nun, daß dies in der Tat die Ableitung ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_0) - f'(x_0)^{-1}(y_1 - y_0)\|}{\|y_1 - y_0\|} \\ &= \frac{\|x_1 - x_0 - f'(x_0)^{-1}(f(x_1) - f(x_0))\|}{\|y_1 - y_0\|} \\ &\leq \|f'(x_0)^{-1}\| \cdot \underbrace{\frac{\|f'(x_0)(x_1 - x_0) - (f(x_1) - f(x_0))\|}{\|x_1 - x_0\|}}_{\rightarrow 0 \text{ da } x_1 - x_0 \rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{\|x_1 - x_0\|}{\|y_1 - y_0\|}}_{\leq 2} \\ &\rightarrow \|f'(x_0)^{-1}\| \cdot 0 \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Induktiv zeigt man nun, daß  $f^{-1}$  eine  $C^n$ -Funktion ist, denn

$$(f^{-1})' : E \xrightarrow{f^{-1}} E \xrightarrow{f'} B(E) \xrightarrow{(\cdot)^{-1}} B(E). \quad \square$$

### 3.8 Die Wurzel

**Satz von Stone Weierstraß.**

Es sei  $X$  ein topologischer Raum und  $A$  eine Punkte-trennende Teilalgebra von  $C(X)$  mit Eins. Dann ist  $A$  dicht in  $C(X)$ .

**Beweis nach [Zem77].** Wir nehmen zuerst  $X$  als kompakt an. Es erfüllt der Abschluß  $\overline{A}$  die selben Voraussetzungen, also dürfen wir annehmen, daß  $A$  abgeschlossen ist.

**Beh.** Falls  $0 \leq f \in A$ , so ist auch  $\sqrt{f} \in A$ :

Falls  $\|f - 1\| < 1$  so konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (f - 1)^k$  von  $\sqrt{f} = \sqrt{1 + (f - 1)}$  in der abgeschlossenen Teilalgebra  $A$ . Somit ist  $\sqrt{f} \in A$ .

Falls  $f \geq \alpha$  für eine Konstante  $\alpha > 0$ , so ist wegen  $0 < \|f\|_\infty < \infty$   $\frac{\alpha}{\|f\|_\infty} \leq \frac{1}{\|f\|_\infty} f \leq 1$  und somit  $0 \geq 1 - \frac{1}{\|f\|_\infty} f - 1 \leq 1 - \frac{\alpha}{\|f\|_\infty} < 1$  also  $\| \frac{1}{\|f\|_\infty} f - 1 \|_\infty < 1$ . Nach dem ersten Teil, liegt somit  $\sqrt{\frac{1}{\|f\|_\infty} f}$  in  $A$  und damit auch  $\sqrt{f} = \sqrt{\|f\|_\infty} \cdot \sqrt{\frac{1}{\|f\|_\infty} f}$ .

Sei schließlich  $f \geq 0$  beliebig. Dann ist nach dem zuvor gezeigten  $\sqrt{f + \frac{1}{n}} \in A$ . Und da

$$0 \leq \sqrt{f + \frac{1}{n}} - \sqrt{f} = \frac{f + 1/n - f}{\sqrt{f + 1/n} + \sqrt{f}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ist konvergiert  $\sqrt{f + \frac{1}{n}} \rightarrow \sqrt{f}$  und somit ist auch  $\sqrt{f}$  in  $A$ .

**Beh.** Mit  $f, g \in A$  sind auch  $|f|, \max\{f, g\}, \min\{f, g\} \in A$ :

Denn  $|f| = \sqrt{f^2}$ ,  $\max\{f, g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2}$  und  $\min\{f, g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ .

**Beh.** Für  $x_1 \neq x_0$  und  $y_1, y_0 \in \mathbb{R}$  existiert ein  $f \in A$  mit  $f(x_i) = y_i$  für  $i = 1, 2$ :

Da  $A$  Punkte-trennend ist, existiert ein  $h \in A$  mit  $h(x_1) \neq h(x_0)$ . Dann erfüllt aber die Zusammensetzung  $x \mapsto f(x) := y_0 \frac{h(x)-h(x_1)}{h(x_0)-h(x_1)} + y_1 \frac{h(x)-h(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)}$  von  $h$  mit der affinen Funktion  $t \mapsto y_0 \frac{t-h(x_1)}{h(x_0)-h(x_1)} + y_1 \frac{t-h(x_0)}{h(x_1)-h(x_0)}$  das Gewünschte.

**Beh.** Für  $f \in C(X)$  und  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $h \in A$  mit  $\|f - h\| \leq \varepsilon$ :

Für  $x, y \in X$  existiert nach der letzten Behauptung ein  $f_{x,y} \in A$ , welches auf  $\{x, y\}$  mit  $f$  übereinstimmt (Falls  $x = y$  ist, so sei  $f_{x,y}$  konstant gleich  $f(x) = f(y)$ ). Da  $f_{x,y} - f$  bei  $y$  verschwindet, existiert eine Umgebung  $U_y$  von  $y$  mit  $f_{x,y}(z) - f(z) < \varepsilon$  für  $z \in U_y$ . Da  $X$  kompakt ist, überdecken endlich viele  $U_{y_1}, \dots, U_{y_n}$  ganz  $X$ . Es sei  $f_x := \min\{f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_n}\} \in A$ . Dann gilt  $f_x(x) = f(x)$  und  $f_x(z) \leq f_{x,y_i}(z) < f(z) + \varepsilon$ , wobei  $i$  so gewählt wurde, daß  $z \in U_{y_i}$ . Es existiert somit eine Umgebung  $U_x$  von  $x$  mit  $f_x(z) - f(z) > -\varepsilon$  für alle  $z \in U_x$ . Da  $X$  kompakt ist überdecken auch endlich viele  $U_{x_1}, \dots, U_{x_m}$  ganz  $X$ . Sei schließlich  $h := \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\} \in A$ . Dann ist  $f(z) - \varepsilon < h(z) < f(z) + \varepsilon$  für alle  $z \in X$ , und somit  $\|h - f\| \leq \varepsilon$ .

Der Satz für beliebiges  $X$  folgt nun daraus, daß seine Seminormen gerade durch Suprema über kompakte Teilmengen  $K \subseteq X$  beschrieben werden, und auf diesen läßt sich  $f|_K$  durch  $g \in A|_K := \{g|_K : g \in A\}$  beliebig genau approximieren.  $\square$

**Approximation von stetigen Abbildungen durch Polynome.**

Es sei  $I$  ein kompaktes Intervall im  $\mathbb{R}^n$ . Dann sind die Polynome in  $C(I)$  dicht.  $\square$

**Komplexer Stone-Weierstraß.**

Es sei  $X$  ein kompakter Raum und  $A$  eine Punkte-trennende Teilalgebra von  $C(X, \mathbb{C})$  mit Eins, welche zusätzlich unter komplex-konjugieren abgeschlossen ist. Dann ist  $A$  dicht in  $C(X, \mathbb{C})$ .

**Beweis.** Jedes  $f \in C(X, \mathbb{C})$  läßt sich zerlegen in  $f = \Re f + i \cdot \Im f$  mit Realteil  $\Re f := \frac{f+\bar{f}}{2}$  und Imaginärteil  $\Im f := \frac{f-\bar{f}}{2i}$ . Da  $A$  Punkte-trennend ist, gilt gleiches auch für die Teilalgebra  $A_{\mathbb{R}} := \{f \in C(X, \mathbb{R}) : f \in A\}$  von  $C(X, \mathbb{R})$ , denn mit  $f \in A$  ist  $\Re f, \Im f \in A_{\mathbb{R}}$ . Nach dem reellen Stone-Weierstraß ist folglich  $A_{\mathbb{R}}$  dicht in  $C(X, \mathbb{R})$ , also existieren für  $f \in C(X, \mathbb{C})$  und  $\varepsilon > 0$  Funktionen  $f_j \in A_{\mathbb{R}}$  mit  $\|\Re f - f_1\| < \varepsilon/2$  und  $\|\Im f - f_2\| < \varepsilon/2$ . Folglich ist  $\|f - (f_1 + i f_2)\| < \varepsilon$  und  $f_1 + i f_2 \in A_{\mathbb{R}} + i \cdot A_{\mathbb{R}} \subseteq A$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Die Abgeschlossenheit unter der Konjugation kann nicht weggelassen werden. Sei nämlich  $K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$  und  $A$  die auf  $K$  Punkte-trennende Algebra der Polynome mit komplexen Koeffizienten. Wegen der Cauchy'schen Integralformel sind alle Funktionen im Abschluß von  $A$  holomorph auf  $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ , und somit ist dieser Abschluß sehr viel kleiner als  $C(K, \mathbb{C})$ . Siehe dazu auch (7.18).

**Die trigonometrischen Polynome liegen dicht.**

Die trigonometrischen Polynome liegen dicht im Raum  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  der  $2\pi$ -periodischen stetigen Funktionen auf  $\mathbb{R}$  bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz.

Unter einen TRIGONOMETRISCHEN POLYNOM versteht man eine (komplexe) Linearkombination von  $t \mapsto \sin(kt)$  und  $t \mapsto \cos(kt)$  mit  $k \in \mathbb{N}$ .

**Beweis.** Es sei  $S^1$  der Einheitskreis in  $\mathbb{C}$ . Die Abbildung  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1, t \mapsto e^{it}$  ist ein lokaler Homöomorphismus, und sie induziert klarerweise einen Algebraisomorphismus  $\exp^* : C(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , der bezüglich der  $\infty$ -Normen eine Isometrie ist. Die trigonometrischen Polynome übersetzen sich in die Linearkombinationen von  $z \mapsto z^k$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , denn  $(e^{it})^k = e^{itk} = \cos(tk) + i \sin(tk)$  und  $(e^{it})^{-k} = \cos(tk) - i \sin(tk)$ . Diese Linearkombination erzeugen eine Teilalgebra  $A$ , die klarerweise Punkte-trennend ist ( $\text{id} \in A$ ) und auch unter Konjugation abgeschlossen ist, da  $\bar{z} = \frac{1}{z}$  für  $|z| = 1$  gilt. Also folgt aus dem komplexen Stone-Weierstraß, daß  $A$  dicht liegt.  $\square$

**3.9 Die Exponential-Funktion****Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**

Unter einer HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG 1.TER ORDNUNG versteht man eine Differentialgleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  erster Ordnung, für welche  $f(t, x)$  in  $x$  linear ist, d.h. von der Form  $f(t, x) = A(t) \cdot x := A(t)(x)$  mit  $A : \mathbb{R} \rightarrow L(E)$  ist. Falls  $A(t)$  unabhängig von  $t$  ist, so spricht man von einer HOMOGENEN LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN. Solche Differentialgleichungen

$$x'(t) = A \cdot x(t)$$

wollen wir nun für Banach-Räume  $E$  und Anfangsbedingung  $x(0) = x_0 \in E$  lösen. Die wohlbekannte Lösung (siehe das Beispiel in (1.3))  $x(t) := e^{tA}x(0)$  des eindimensionalen Falles  $E = \mathbb{K}$  und somit  $A \in \mathbb{K}$ , läßt uns die allgemeine Lösung

$x(t) := e^{tA}(x_0)$  vermuten. Da die Potenzreihe  $\exp(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$  Konvergenzradius  $r = \infty$  hat, dürfen wir auch beliebige Elemente  $t \cdot A$  der Banach-Algebra  $L(E, E)$  einsetzen, und erhalten eine Abbildung  $t \mapsto e^{t \cdot A} \in L(E, E)$ . Diese ist differenzierbar (wie man leicht überprüft) mit Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{t \cdot A} &= \frac{d}{dt} \sum_k \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_k \frac{d}{dt} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k \geq 1} \frac{k t^{k-1}}{k!} A^k = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^{k+1} \\ &= A \circ \left( \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} A^k \right) = A \circ e^{tA} \end{aligned}$$

Da die Auswertung bei  $x_0 \in E$  eine stetig lineare Abbildung  $L(E, E) \rightarrow E$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= \frac{d}{dt} e^{tA}(x_0) = \frac{d}{dt} (\text{ev}_{x_0} \circ e^{tA}) = \text{ev}_{x_0} \circ \frac{d}{dt} e^{tA} = \text{ev}_{x_0} \circ A \circ e^{tA} \\ &= A(e^{tA}(x_0)) = A(x(t)) \end{aligned}$$

Also ist das die gewünschte Lösung mit der Anfangsbedingung  $x(0) = e^{0A}x_0 = x_0$ .

### Lineare Differentialgleichung mit beliebigen Koeffizienten

Unter einer (INHOMOGENEN) LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG 1. TER ORDNUNG versteht man eine Differentialgleichung  $x'(t) = f(t, x(t))$  erster Ordnung, für welche  $f(t, x)$  in  $x$  AFFIN ist, d.h. von der Form  $f(t, x) = g(t) + A(t) \cdot x$  mit  $(g : \mathbb{R} \rightarrow E)$  und  $(A : \mathbb{R} \rightarrow L(E))$ .

Für  $E := \mathbb{R}$  geht man üblicher Weise wie folgt vor: Zuerst betrachtet man den homogenen Fall  $g = 0$ . Dann ist  $A(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \frac{d}{dt} \ln(x(t))$  und somit

$$\ln(x(t)) = \ln(x(0)) + \int_0^t A(s) ds \Rightarrow x(t) = x(0) e^{\int_0^t A(s) ds}.$$

Nichts liegt also näher als im mehrdimensionalen Fall (d.h.  $E$  beliebig) den Ansatz

$$x(t) := e^{\int_0^t A(s) ds} \cdot x(0)$$

zu machen. Nun zur Probe:

$$x'(t) = \frac{d}{dt} e^{\int_0^t A(s) ds} \cdot x(0) \neq \frac{d}{dt} \int_0^t A(s) ds \cdot e^{\int_0^t A(s) ds} \cdot x(0) = A(t) \cdot x(t),$$

denn  $B'(t)$  und  $B(t) := \int_0^t A(s) ds$  kommutieren nicht im Allgemeinen und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{B(t)} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{B(t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (B'(t) B(t)^{k-1} + B(t) B'(t) B(t)^{k-2} + \dots + B(t)^{k-1} B'(t)) \\ &\neq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} B(t)^{k-1} B'(t). \end{aligned}$$

Wir müssen also anders vorgehen. Wegen (1.3) erhalten wandeln wir die Differentialgleichung in die äquivalente Integralgleichung

$$x(t) = x_0 + \int_0^t g(\tau) d\tau + \int_0^t A(\tau) \cdot x(\tau) d\tau$$

um. Wenn wir

$$\kappa(t, r) := \begin{cases} A(r) & \text{für } r \leq t \\ 0 & \text{für } r \geq t, \end{cases}$$

$K(x)(t) := \int_0^t \kappa(t, \tau) \cdot x(\tau) d\tau$  und  $f(t) := x_0 + \int_0^t g(\tau) d\tau$  setzen, dann ist dies die Fixpunktgleichung

$$x = K(x) + f,$$

und falls  $1 - K$  invertierbar ist, dann ist die Lösung  $x = (1 - K)^{-1}(f)$ .

### Volterra-Integralgleichung.

Wir wollen als nächstes die LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG  $n$ -TER ORDNUNG MIT NICHT-KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN und Anfangsbedingung behandeln:

$$u^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) u^{(i)}(t) = s(t), \quad u(0) = u_0, \dots, u^{(n-1)}(0) = u_{n-1}.$$

Wir wenden den Taylor'schen Lehrsatz der Ordnung  $n - k$  auf  $u^{(k)}$  an und erhalten:

$$u^{(k)}(t) = u^{(k)}(0) + \frac{u^{(k+1)}(0)}{1!} t + \dots \\ + \frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-k-1)!} t^{n-k-1} + \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} u^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$u^{(n)}(t) + \int_0^t \sum_{k < n} a_k(t) \frac{(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} u^{(n)}(\tau) d\tau = s(t) + p(t) =: f(t),$$

wobei  $p(t)$  eine Summe von Produkten von Potenzen von  $t$  mit den Koeffizienten Funktionen  $a_k$  und den Anfangswerten  $u_k$  ist. Also ist die rechte Seite  $f$  vollständig bekannt und wir haben die VOLTERRA-INTEGRALGLEICHUNG  $v = K v + f$  für  $v := u^{(n)}$  erhalten, wobei  $K$  der INTEGRALOPERATOR  $(K v)(t) := \int_0^t k(t, \tau) v(\tau) d\tau$  ist, welcher als INTEGRALKERN die stetige Funktion  $k(t, \tau) := - \sum_{k < n} a_k(t) \frac{(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}$  besitzt.

### Fredholm Integralgleichung, Sturm Liouville Randwertaufgabe.

Wir wollen nun die LINEARE RANDWERTAUFGABE 2-TER ORDNUNG MIT NICHT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN untersuchen:

$$u''(t) + a_1(t) u'(t) + a_0(t) u(t) = s(t), \quad R_a(u) = 0 = R_b(u),$$

wobei die Randbedingungen  $R_a(u) := r_{a,0} u(a) + r_{a,1} u'(a)$  und  $R_b(u) := r_{b,0} u(b) + r_{b,1} u'(b)$  sind. Setzt man  $p(t) := e^{\int_0^t a_1(\tau) d\tau} > 0$ ,  $q(t) := p(t) a_0(t)$  und  $f(t) := p(t) s(t)$ , dann lautet die Differentialgleichung

$$D(u) := (p u')' + q u = f.$$

Als lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung existieren zwei linear unabhängige Lösungen  $u_a$  und  $u_b$  der homogenen Gleichung  $D(u) = 0$ . Wir wählen diese (wenn möglich) so, daß  $R_a(u_a) = 0$  und  $R_b(u_b) = 0$ . Wir bestimmen die Lösung der inhomogenen Gleichung durch VARIATION DER KONSTANTEN, d.h.  $u := \langle c, u \rangle :=$

$c_a u_a + c_b u_b$ , unter leichtem Mißbrauch der Bezeichnungsweise. Es ist  $Du = p' \cdot \langle c', u \rangle + p \cdot (\langle c'', u \rangle + 2\langle c', u' \rangle)$ . Somit ist  $u$  eine Lösung, zumindest falls

$$\begin{aligned} c'_a u_a + c'_b u_b &= 0 \\ c'_a u'_a + c'_b u'_b &= \frac{f}{p} \end{aligned}$$

Wenn wir dieses lineare Gleichungssystem auflösen können (d.h. die sogenannte WRONSKI-DETERMINANTE  $w = u_a u'_b - u_b u'_a$  nirgends verschwindet), so erhalten wir

$$\begin{aligned} c'_a &= -\frac{f u_b}{p w} \\ c'_b &= \frac{f u_a}{p w}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$(p w)' = p (u_a u''_b - u_b u''_a) + p' (u_a u'_b - u_b u'_a) = u_a q u_b - u_b q u_a = 0,$$

also ist der obige Nenner  $p w$  konstant, und wir setzen ungleich Null voraus. Damit die Randbedingungen  $R_a(u) = 0 = R_b(u)$  erfüllt sind, sollte  $c_b(a) = 0$  und  $c_a(b) = 0$  sein, also ist nach Integration

$$\begin{aligned} c_a(t) &= -\int_b^t \frac{f u_b}{p w}(\tau) d\tau \\ c_b(t) &= \int_a^t \frac{f u_a}{p w}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} u(t) = (c_a u_a + c_b u_b)(t) &= \int_t^b \frac{u_a(t) u_b(\tau)}{p w} f(\tau) d\tau + \int_a^t \frac{u_b(t) u_a(\tau)}{p w} f(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b g(t, \tau) f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

wobei die sogenannte GREEN-FUNKTION  $g$  gegeben ist durch

$$g(t, \tau) := \begin{cases} \frac{u_a(t) u_b(\tau)}{p w} & \text{für } t \leq \tau \\ \frac{u_a(\tau) u_b(t)}{p w} & \text{für } t \geq \tau \end{cases}$$

und somit eine stetige symmetrische Funktion darstellt. Der Lösungsoperator ist also ein Integraloperator mit stetigen Kern  $g$ .

### Integralkerne

In der linearen Algebra behandelt man (endlich dimensionale) Vektorräume  $E$ . Nach Wahl einer Basis  $(e_i)_{i=0}^{n-1}$  erhält man einen linearen Isomorphismus von  $E \cong \mathbb{R}^n$  gegeben durch  $\sum_i x_i e_i \mapsto (x_i)_{i=0}^{n-1}$ . Bezüglich dieses Isomorphismuses läßt sich jede lineare Abbildung  $A : E \rightarrow E$  durch eine Matrix, d.h. eine Zahlenschema  $(a_{i,j})_{i,j=0,\dots,n-1} \in \mathbb{R}$  beschreiben, d.h.

$$Ax = \sum_i \underbrace{\left( \sum_j a_{i,j} x_j \right)}_{=: (Ax)^i} e_i.$$

Was wäre nun ein kontinuierliches Pendant zu dieser diskreten Version. Die Elemente in  $\mathbb{R}^n$  sind ja nichts anderes Abbildungen von  $I := \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei

wir anstelle von  $x(i)$  auch  $x_i$  schreiben. Eine Verallgemeinerung wären Räume  $E$  von Funktionen, wie z.B.  $C(I, \mathbb{R})$ , wobei nun  $I := [a, b]$  sei. Die Hoffnung ist nun zumindest gewisse stetige lineare Operatoren  $A \in L(E)$  durch eine kontinuierliche Version  $a : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$  der Matrixdarstellung zu beschreiben. Die bestimmende Gleichung (\*) wäre dann wohl in

$$(Ax)(t) = \int_I a(t, s) x(s) ds$$

zu übersetzen. So ein  $A$  nennt man INTEGRAL-OPERATOR mit INTEGRAL-KERN  $a : I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wie zuvor gezeigt, führt der Lösungsansatz der linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung auf eine Fixpunktgleichung der Form  $u = Ku + f$ , mit einem Integraloperator der Form  $K(x)(t) := \int_0^t \kappa(t, s) x(s) ds$  und jener der linearen Randwertaufgabe 2-ter Ordnung auf einen Lösungsoperator  $G$  der Form  $G(x)(t) := \int_a^b g(t, s) x(s) ds$  mit stetigen symmetrischen Kern  $g : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dabei entspricht  $K$  gerade eine Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix, denn

$$K(x)(t) = \int_0^t \kappa(t, s) x(s) ds = \int_a^b \kappa(t, s) x(s) ds,$$

wobei wir  $\kappa$  durch  $\kappa(t, s) := 0$  auf  $\{(t, s) : t < s\}$  fortsetzen.

Der Komposition zweier Integral-Operatoren  $A$  und  $B$  mit Integral-Kernen  $a$  und  $b$  ist wieder ein Integral-Operator  $A \circ B$  mit Integral-Kern  $a \star b$  gegeben durch

$$(a \star b)(t, s) := \int_I a(t, r) b(r, s) dr.$$

Die Norm eines Integral-Operators  $A$  mit Kern  $\alpha$  kann wie folgt abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &\leq \int_a^b |\alpha(t, s)| |x(s)| ds \leq (b-a) \|\alpha\|_\infty \|x\|_\infty \\ \Rightarrow \|Ax\|_\infty &\leq (b-a) \|\alpha\|_\infty \|x\|_\infty \Rightarrow \|A\|_\infty \leq (b-a) \|\alpha\|_\infty. \end{aligned}$$

Um nun die Gleichung  $(1 - K)x = f$  nach  $x$  aufzulösen, brauchen wir das inverse Element  $(1 - K)^{-1}$  in  $L(E, E)$ . Dazu betrachten wir wieder die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^\infty t^k$  von  $\frac{1}{1-t}$ . Diese hat Konvergenzradius 1, also dürfen wir jeden Operator  $K$  mit Norm  $\|K\| < 1$  einsetzen, und erhalten so das Inverse zu  $1 - K$ . Folglich hat die Fredholm'sche Integralgleichung

$$x = Ax + f \text{ mit } (Ax)(t) := \int_a^b \alpha(t, s) x(s) ds$$

für  $b - a < \frac{1}{\|\alpha\|_\infty}$  die Lösung  $x = (1 - A)^{-1}(f) = \sum_{k=0}^\infty A^k(f) = G(f)$ , wobei  $G$  der Integral-Operator mit Kern

$$g = \sum_{k=0}^\infty \underbrace{\alpha \star \dots \star \alpha}_k \text{ Faktoren}$$

ist.

Für die Volterra'sche Integralgleichung

$$x = Ax + f \text{ mit } (Ax)(t) := \int_0^t \alpha(t, s) x(s) ds \text{ für } |t| \leq b$$

ist die Zusatzbedingung  $b - a < \frac{1}{\|\alpha\|_\infty}$  nicht notwendig, denn  $\|A^n\| \leq \|\alpha\|_\infty^n \frac{b^n}{n!}$  wie man leicht mittels Induktion zeigt:

$$\begin{aligned} |(A^{n+1}x)(t)| &\leq \int_0^t |\alpha(t,s) (A^n x)(s)| ds \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \int_0^t |(A^n x)(s)| ds \\ &\leq \|\alpha\|_\infty \int_0^t \|\alpha\|_\infty^n \frac{s^n}{n!} \|x\|_\infty ds \\ &\leq \|\alpha\|_\infty^{n+1} \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Folglich ist  $\sqrt[n]{\|A^n\|} \leq b \|\alpha\|_\infty \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0$  und damit die Reihe  $\sum_k A^n$  nach dem Wurzelkriterium absolut konvergent, also konvergent und stellt somit das Inverse zu  $1 - A$  dar.

## 4. Konstruktionen

In diesem Kapitel lernen wir die wichtigsten Konstruktionen kennen, um aus vorhandenen seminormierten Räumen neue zu basteln. Insbesondere wenden wir das an, um den geeigneten Rahmen (nämlich Distributionen) für die Behandlung von linearen partiellen Differentialgleichungen zu entwickeln. Wir werden auch die für uns notwendigen Fakten der Maßtheorie zusammenfassen.

### 4.1 Initiale Strukturen

#### Motivation.

Für kompakte Räume  $X$  haben wir den Raum der stetigen Funktionen  $C(X, \mathbb{R})$  mittels der Supremumsnorm zu einem Banach-Raum gemacht. Für nicht kompaktes  $X$  geht das nicht mehr, da stetige Funktionen auf  $X$  nicht beschränkt sein müssen. Aber für jede kompakte Menge  $K \subseteq X$  können wir eine SN  $\|-\|_K$  durch  $\|f\|_K := \|f|_K\|_\infty$  definieren. Mittels der Familie dieser Seminormen für alle kompakten  $K \subseteq X$ , können wir also  $C(X, \mathbb{R})$  zu einen SNR machen.

Wir wollen nun das wesentliche dieser Konstruktion herauskitzeln. Ausgangspunkt ist also ein Vektorraum  $E := C(X, \mathbb{R})$  sowie eine Familie von linearen Abbildungen  $f_K : E \rightarrow E_K$  mit Werten in SNR'en  $E_K := C(K, \mathbb{R})$ . Die  $f_K$  sind in unserem Fall gegeben durch  $f_K(g) := g|_K$ . Ziel ist es nun mittels dieser Daten den Raum  $E$  möglichst kanonisch zu einem seminormierten Raum zu machen.

#### Satz über initiale Strukturen.

*Es sei eine Punkte-trennende Familie von linearen Abbildungen  $f_k : E \rightarrow E_k$  eines Vektorraums  $E$  in SNR'e  $E_k$  gegeben.*

*Die Menge*

$$\mathcal{P}_0 := \bigcup_k \{p \circ f_k : p \text{ Seminorm von } E_k\}$$

*ist eine Subbasis der größten Struktur (d.h. mit den wenigsten stetigen Seminormen) eines SNR'es  $E$ , so daß jedes  $f_k$  stetig ist. Wir nennen diese Struktur, die INITIALE STRUKTUR bezüglich der Abbildungen  $f_k$ .*

*Mit dieser Struktur hat  $E$  folgende universelle Eigenschaft:*

*Eine lineare Abbildung  $f : F \rightarrow E$  von einem SNR  $F$  nach  $E$  ist genau dann stetig, wenn alle Zusammensetzungen  $f_k \circ f$  es sind.*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f_k} & E_k \\ \uparrow f & \nearrow & \\ F & & \end{array} \quad \text{stetig, linear}$$

*Weiters gilt:*

*Die Topologie von  $E$  ist die initiale bezüglich der Familie der Abbildungen  $f_k$ , d.h. sie ist die größte, so daß alle  $f_k$  stetig sind.*

Für ein Netz  $(x_i)$  in  $E$  und  $x \in E$  gilt:  $x_i \rightarrow x$  in  $E \Leftrightarrow \forall k: f_k(x_i) \rightarrow f_k(x)$  in  $E_k$ .  
Für eine Teilmenge  $B \subseteq E$  gilt:  $B$  ist beschränkt in  $E \Leftrightarrow \forall k: f_k(B)$  ist beschränkt in  $E_k$ .

Ist die Familie der Abbildungen  $f_k$  endlich und sind die  $E_k$  normierbar so auch  $E$ .  
Ist die Familie abzählbar und sind die  $E_k$  abzählbar SNR'e so auch  $E$ .

### Beweis.

**Subbasis der größten Struktur.** Die  $f_k$  sind genau dann stetig, wenn  $p \circ f_k$  eine stetige SN auf  $E$  ist für alle (stetige) SN'en von  $E_k$ ; folglich hat der durch  $\mathcal{P}_0$  erzeugte seminormierte Raum  $E$  die kleinste Familie von SN'en, so daß alle  $f_k$  stetig sind.

**Initiale Topologie.** Da alle  $f_k$  bezüglich der von den SN'en erzeugten Topologie stetig sind, ist die initiale Topologie gröber oder gleich. Sei umgekehrt  $U = a + q_{<\varepsilon}$  ein Element der Subbasis der durch die SN'en  $q \in \mathcal{P}_0$  erzeugten Topologie. Dann ist  $q = p \circ f_k$  für ein  $k$  und eine (stetige) SN  $p$  von  $E_k$ . Somit ist  $U$  als Urbild  $U = (f_k)^{-1}(f_k(a) + p_{<\varepsilon})$  offen in der initialen Topologie bezüglich der  $f_k$ .

**Universelle Eigenschaft.** Für eine lineare Abbildung  $f : F \rightarrow E$  gilt:

$$\begin{aligned} & f \text{ ist stetig} \\ \Leftrightarrow & \forall q \in \mathcal{P}_0 : q \circ f \text{ ist stetig} \\ \Leftrightarrow & \forall k \forall p \text{ SN von } E_k : p \circ f_k \circ f \text{ ist stetig} \\ \Leftrightarrow & \forall k : f_k \circ f \text{ ist stetig.} \end{aligned}$$

**Konvergente Netze.** Für ein Netz  $(x_i)$  in  $E$  und  $x \in E$  gilt:

$$\begin{aligned} & x_i \rightarrow x \text{ in } E \\ \Leftrightarrow & \forall q \in \mathcal{P}_0 : q(x_i - x) \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow & \forall k \forall p \text{ SN von } E_k : p(f_k(x_i) - f_k(x)) = (p \circ f_k)(x_i - x) \rightarrow 0 \\ \Leftrightarrow & \forall k : f_k(x_i) \rightarrow f_k(x) \text{ in } E_k. \end{aligned}$$

**Beschränkte Mengen.** Für eine Teilmenge  $B \subseteq E$  gilt:

$$\begin{aligned} & B \text{ ist beschränkt in } E \\ \Leftrightarrow & \forall q \in \mathcal{P}_0 : q(B) \text{ ist beschränkt in } \mathbb{K} \\ \Leftrightarrow & \forall k \forall p \text{ SN von } E_k : p(f_k(B)) = (p \circ f_k)(B) \text{ ist beschränkt in } \mathbb{K} \\ \Leftrightarrow & \forall k : f_k(B) \text{ ist beschränkt in } E_k. \end{aligned}$$

**Separiertheit.** Es sei  $q(x) = 0$  für alle  $q \in \mathcal{P}_0$ , d.h.  $p(f_k(x)) = 0$  für alle  $k$  und alle (stetigen) SN'en  $p$  von  $E_k$ . Da  $E_k$  separiert ist, ist  $f_k(x) = 0$  für alle  $k$ . Da die  $f_k$  Punkte trennen, ist  $x = 0$ .

**Kardinalität einer Subbasis.** Nach Konstruktion ist die Subbasis der SN'en von  $E$  abzählbar, falls es die der  $E_k$  sind und Indexmenge der  $k$  abzählbar ist. Ist die Indexmenge endlich und alle  $E_k$  normierbar, so ist die Subbasis von  $E$  endlich. Wenn aber  $\mathcal{P}_0 := \{p_1, \dots, p_N\}$  eine endliche Subbasis der SN'en von  $E$  ist, so ist auch  $\{\max\{p_1, \dots, p_N\}\}$  eine Subbasis, und somit  $E$  normierbar.  $\square$

### 4.2 Folgerung. Struktur von Teilräumen.

Sei  $F$  ein linearer Teilraum eines SNR'es  $E$ . Wir versehen  $F$  mit der initialen Struktur bezüglich der Inklusion  $\iota : F \rightarrow E$ .

Dann ist die Topologie von  $F$  die Spurtopologie von  $E$ .

Die stetigen SN'en auf  $F$  sind genau die Einschränkungen von solchen auf  $E$ .

Eine Teilmenge von  $F$  ist genau dann beschränkt, wenn sie es in  $E$  ist.

Ein Teilraum eines (Folgen-) vollständigen Raumes ist genau dann (Folgen-) vollständig wenn er (Folgen-) abgeschlossen ist.

**Beweis.** Die Aussage über die Spurtopologie und beschränkte Teilmengen folgt direkt aus dem Satz.

**Stetige Seminormen.** Sei  $q$  eine stetige Seminorm von  $F$  und  $U_0 := q_{<1}$  ihr offener Einheitsball. Also gibt es endlich viele  $q_i \in \mathcal{P}_0 := \{p|_F : p \text{ ist SN von } E\}$  und ein  $K > 0$  mit  $q \leq K \cdot \max\{q_1, \dots, q_N\}$ . Seien  $p_i$  stetige SN'en von  $E$  mit  $(p_i)|_F = q_i$  und sei  $p := K \cdot \max\{p_1, \dots, p_N\}$ . Dann ist  $p$  eine stetige SN auf  $E$  und es gilt  $q \leq p|_F$ . Für die offene Einheitskugel  $U_1 := p_{<1}$  gilt somit nach dem letzten Lemma in (2.5):  $U_1 \cap F \subseteq U_0$ . Es sei nun  $U$  die absolut-konvexe Hülle von  $U_0 \cup U_1$ . Da  $U_0$  und  $U_1$  selbst absolut-konvex sind, ist

$$U = \{(1-t)u_0 + tu_1 : u_0 \in U_0, u_1 \in U_1, 0 \leq t \leq 1\} = \bigcup_{0 \leq t \leq 1} U_t,$$

wobei  $U_t := \{(1-t)u_0 + tu_1 : u_0 \in U_0, u_1 \in U_1\}$ . Da  $U_t = \bigcup_{u_0 \in U_0} (1-t)u_0 + tU_1$  ist, und  $U_1$  offen ist, ist auch  $U_t$  offen in  $E$  für  $t \neq 0$ .

Wir wollen nun zeigen, daß  $U_0 \subseteq \bigcup_{0 < t \leq 1} U_t$  ist, und somit  $U = \bigcup_{0 < t \leq 1} U_t$  ist. Als Nebenresultat erhalten wir damit, daß  $U$  offen ist. Sei dazu  $u_0 \in U_0 \subseteq F$ . Da  $U_0$  in  $F$  offen ist und  $U_1 \cap F$  eine 0-Umgebung in  $F$  ist, existiert ein  $0 < t \leq 1$ , s.d.  $tu_0 \in U_1 \cap F$  und  $(1+t)u_0 \in U_0$ . Damit ist aber  $u_0 = (1-t)(1+t)u_0 + ttu_0 \in U_t$  für dieses  $t > 0$ .

Weiters gilt  $U \cap F = U_0$ : Einerseits ist  $U_0 \subseteq U$  und  $U_0 \subseteq F$ . Andererseits sei  $u \in U \cap F$ , dann ist  $u \in U_t$  für ein  $0 < t \leq 1$ , d.h.  $u = (1-t)u_0 + tu_1$  mit  $u_0 \in U_0$  und  $u_1 \in U_1$ . Also ist  $u_1 = \frac{1}{t}(u - (1-t)u_0) \in F \cap U_1 \subseteq U_0$  und da  $U_0$  konvex ist, gilt  $u = (1-t)u_0 + tu_1 \in U_0$ .

Nun sei  $\tilde{q}$  das Minkowski-Funktional  $p_U$  von  $U$  (siehe (2.5)). Dann ist  $\tilde{q}|_F$  das Minkowski-Funktional von  $U \cap F = U_0 = q_{<1}$  und dieses stimmt nach (2.5) mit  $q$  überein.

**Vollständigkeit abgeschlossener Teilräume.** Es sei  $(x_i)_i$  ein(e) Cauchy-Netz (-Folge) in  $F$ . Da die Inklusion stetig und linear ist, ist  $x_i$  auch ein solches in  $E$ . Da  $E$  als (Folgen-) vollständig vorausgesetzt ist, konvergiert  $x_i$  gegen ein  $x \in E$ . Da  $F$  als (Folgen-) abgeschlossen in  $E$  vorausgesetzt ist, liegt  $x \in F$ . Also konvergiert nach dem Satz  $x_i$  gegen  $x$  in  $F$ .

**Abgeschlossenheit vollständiger Teilräume.** Es sei  $x_i$  ein gegen  $x$  in  $E$  konvergentes Netz (Folge), dann ist  $x_i$  ein(e) Cauchy-Netz (Cauchy-Folge) in  $E$ , und somit konvergiert das Netz  $x_{i,j} := x_i - x_j$  gegen 0 in  $E$ . Nach dem Satz konvergiert es also auch in  $F$ , d.h.  $x_i$  ist ein(e) Cauchy-Netz (Cauchy-Folge) in  $F$ . Da  $F$  als (Folgen-) vollständig vorausgesetzt ist, konvergiert  $x_i$  gegen ein  $y$  in  $F$ , und weil die Inklusion stetig ist, also auch in  $E$ . Da  $E$  separiert ist müssen die beiden Grenzwerte  $x$  und  $y$  übereinstimmen, also ist  $x = y \in F$ .  $\square$

### Teilräume des Banach-Raums $B(X)$ , siehe Lemma (3.5)

Sei  $X$  ein topologischer Raum. So ist  $C_b(X) := C(X) \cap B(X)$  ein abgeschlossener Teilraum von  $B(X)$  und somit selbst ein Banach-Raum.

Falls  $X$  lokalkompakt ist, so ist  $C_0(X) := \{f \in C(X) : \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$  seinerseits ein abgeschlossener Teilraum von  $C_b(X)$ , und somit selbst ein Banach-Raum.

#### 4.3 Folgerung. Struktur von Produkten.

Seien  $E_k$  SNR'e und  $E = \prod_k E_k$  ihr kartesisches PRODUKT, versehen mit der initialen Struktur bezüglich der Projektionen  $\text{pr}_k : E \rightarrow E_k$  auf die einzelnen Faktoren.

Dann ist die Topologie von  $E$  die Produkttopologie. Die Konvergenz ist die Koordinaten- (oder Komponenten-)weise Konvergenz. Eine Menge  $B$  ist in  $E$  beschränkt genau dann, wenn sie in einem Produkt  $\prod_k B_k$  beschränkter Mengen  $B_k \subseteq E_k$  enthalten ist. Das Produkt (Folgen-) vollständiger Räume ist (Folgen-) vollständig.

Ein Produkt bornologischer Räume ist wieder bornologisch falls es nicht aus zu vielen Faktoren besteht; Genauer falls die Indexmenge kleiner als die erste meßbare Kardinalzahl ist. Ob eine solche existiert hängt von der verwendeten Mengenlehre ab.

#### Beweis.

**Produkttopologie.** Die Produkttopologie ist per Definition die größte Topologie, s.d. die Projektionen  $\text{pr}_k : E \rightarrow E_k$  stetig sind, also ist dies die Topologie des SNR'es  $E$  nach dem Satz (4.1). Ebenso folgt die Aussage über Konvergenz aus dem Satz. Eine Basis ist gegeben durch die Produkte  $\prod_k U_k$  mit  $U_k \subseteq E_k$  offen und  $U_k = E_k$  bis auf endlich viele Indizes  $k$ .

**Beschränkte Mengen.** Eine Menge  $B \subseteq E$  ist nach dem Satz genau dann beschränkt, wenn  $B_k := \text{pr}_k(B) \subseteq E_k$  beschränkt ist für alle  $k$ . Da immer  $B \subseteq \prod_k B_k$  folgt das gewünschte.

**Vollständigkeit.** Sei  $x_i$  ein Cauchy-Netz in  $E$ , dann bildet die  $k$ -te Koordinate von  $x_i$  wegen der Stetigkeit und Linearität von  $\text{pr}_k$  ein Cauchy-Netz in  $E_k$ , und konvergiert somit in  $E_k$ . Nach Beschreibung der Konvergenz, konvergiert dann aber  $x_i$  gegen den Punkt  $x \in E$  dessen  $k$ -te Koordinate gerade  $\lim_i \text{pr}_k(x_i)$  ist.

**Bornologizität.** Für einen Beweis dieser Aussage, siehe [Jar81, S.282].  $\square$

#### Beispiele.

Sei eine punkttrennende Familie von linearen Abbildungen  $f_k : E \rightarrow E_k$  auf einem Vektorraum  $E$  mit Werten in SNR'en  $E_k$  gegeben. Dann ist die initiale Struktur auf  $E$  gerade durch die Einbettung von  $E$  in das Produkt  $\prod_k E_k$  gegeben, welche  $x \in E$  auf  $(f_k(x))_k \in \prod_k E_k$  abbildet.

Für einen topologischen Hausdorffraum  $X$  läßt sich also  $C(X, \mathbb{K})$  als Teilraum des Produkts  $\prod_K C(K, \mathbb{K})$  auffassen, wobei  $K$  die kompakten Teilmengen von  $X$  durchläuft. Die Topologie von  $C(X, \mathbb{K})$  ist dann natürlich jene der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen  $K \subseteq X$ . Man überlege sich, daß dieser Teilraum abgeschlossen ist, falls  $X$  ein Kelley-Raum ist, d.h. eine Menge  $A$  in  $X$  abgeschlossen ist genau dann, wenn ihr Durchschnitt  $A \cap K$  in  $K$  abgeschlossen ist, für alle kompakten  $K \subseteq X$ .

Sei  $G \subseteq \mathbb{C}$  offen, so ist der Raum der holomorphen Funktionen  $H(G, \mathbb{C})$  ein abgeschlossener Teilraum von  $C(G, \mathbb{C})$  und somit selbst ein vollständiger abzählbar SNR.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall, dann läßt sich der Raum  $C^\infty(I, \mathbb{R})$  der glatten Funktionen durch  $f \mapsto (f^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  als abgeschlossener Teilraum in  $\prod_{n \in \mathbb{N}} C(I, \mathbb{R})$  einbetten. Somit ist  $C^\infty(I, \mathbb{R})$  ein vollständiger abzählbar SNR. Seine Topologie ist die der gleichmäßigen Konvergenz in jeder Ableitung getrennt. Allgemeiner läßt

sich für jede offene Menge  $X \subset \mathbb{R}^m$  der Raum  $C^\infty(X, \mathbb{R})$  zu einem vollständigen abzählbar SNR machen.

#### 4.4 Finale Strukturen

##### Motivation.

Wir wollen nun den Raum  $E$  der konvergenten Potenzreihen zu einem SNR machen. Eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  ist natürlich durch ihre Koeffizienten  $a_n$  eindeutig bestimmt, und die Addition und Skalarmultiplikation konvergenter Potenzreihen drückt sich durch Addition und Skalarmultiplikation ihrer Koeffizienten aus. Also ist es naheliegend  $E$  als  $\{(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < \infty\}$  zu definieren.

Ein erster Ansatz wäre  $E$  mit der initialen Struktur als Teilraum des Produkts  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}} := \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{C}$  aufzufassen, aber darin ist er leider nicht abgeschlossen, denn die Polynome (= endliche Folgen) liegen dicht in  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  (Beweis!). Leider ist auch  $(a_n)_n \mapsto \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$  keine Seminorm. Wenn wir aber für  $r > 0$  den linearen Teilraum  $E_r$  der Potenzreihen mit Konvergenzradius  $1/(\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}) > r$  betrachten, so haben wir darauf eine SN nämlich  $(a_n)_n \mapsto \sup\{|a_n| r^n : n \in \mathbb{N}\}$ . Dies ist sogar eine Norm. Wir können also  $E$  als Vereinigung  $\bigcup_{r>0} E_r$  normierter Räume  $E_r$  schreiben. Nun wollen wir mittels der Familie von Inklusionen  $f_r : E_r \rightarrow E$  auf eine möglichst natürliche Weise  $E$  zu einem (vollständigen) SNR machen. Insbesondere sollen die Abbildungen  $f_r : E_r \rightarrow E$  stetig sein, also für eine stetige SN  $q$  auf  $E$  die Zusammensetzung  $q \circ f_r$  eine stetige SN auf  $E_r$  liefern.

##### Satz über finale Strukturen.

Sei  $f_k : E_k \rightarrow E$  eine Familie von linearen Abbildungen von SNR'en in einen Vektorraum. Die Menge

$$\mathcal{P} := \{p \text{ ist Seminorm auf } E : \forall k \text{ ist } p \circ f_k \text{ eine stetige Seminorm von } E_k\}$$

macht den Vektorraum  $E$  zu jenem nicht notwendig separierten seminormierten Raum, der die feinste Struktur trägt, s.d. jedes  $f_k : E_k \rightarrow E$  stetig ist. Wir nennen diese Struktur die FINALE STRUKTUR bezüglich der Familie von Abbildungen  $f_k$ . Mit dieser Struktur hat  $E$  die folgende universelle Eigenschaft: Eine lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  in einen seminormierten Raum  $F$  ist genau dann stetig, wenn alle Zusammensetzungen  $f \circ f_k : E_k \rightarrow F$  es sind. Sind alle  $E_k$  bornologisch, so auch  $E$ . Im allgemeinen gibt es weder für die Topologie, noch die Konvergenz, noch die beschränkten Mengen, noch die Separiertheit eine direkte Beschreibung ähnlich jener bei initialen Strukturen.

##### Beweis.

**Feinste Struktur.** Die Abbildungen  $f_k : E_k \rightarrow E$  sind genau dann stetig, wenn alle stetigen SN'en von  $E$  zu  $\mathcal{P}$  gehören. Bleibt also zu zeigen, daß  $\mathcal{P}$  einen seminormierten Raum beschreibt. Sei dazu  $q$  eine Seminorm auf  $E$ , für welche endlich viele  $q_i \in \mathcal{P}$  existieren und ein  $R > 0$ , s.d.  $q \leq R \cdot \max\{q_1, \dots, q_N\}$  ist. Dann gilt die gleiche Ungleichung auch für die Zusammensetzungen von  $q$  und  $q_i$  mit  $f_k$ , also ist  $q \circ f_k$  eine stetige SN auf  $E_k$ , und somit gehört  $q$  zu  $\mathcal{P}$ , also ist  $E$  zusammen mit  $\mathcal{P}$  ein seminormierter Raum nach Lemma (2.6), und die Struktur ist die feinste, s.d. alle  $f_k$  stetig sind. Daraus ergibt sich direkt die gewünschte universelle Eigenschaft.

**Bornologizität.** Sei  $f : E \rightarrow F$  eine beschränkte lineare Abbildung, dann ist auch  $f \circ f_k$  beschränkt, denn jede stetige Abbildung (wie  $f_k$ ) ist auch beschränkt, nach Lemma (3.2). Da  $E_k$  als bornologisch vorausgesetzt wurde, ist  $f \circ f_k : E_k \rightarrow F$  stetig. Wegen der universellen Eigenschaft ist folglich  $f$  stetig.  $\square$

Bezüglich der anderen Eigenschaften die nicht notwendig vererbt werden, schränken wir uns auf Spezialfälle ein.

#### 4.5 Folgerung. Quotienten.

Sei  $E$  ein SNR und  $F$  ein linearer Teilraum. Wir versehen den QUOTIENTEN-RAUM  $E/F := \{x + F : x \in E\}$  der Nebenklassen  $x + F$  in  $E$  bezüglich  $F$  mit der finalen Struktur bezüglich der kanonischen Projektion  $\pi : x \mapsto x + F$  von  $E \rightarrow E/F$ .

Dann trägt  $E/F$  die Quotienten-Topologie, d.h. die feinste Topologie s.d.  $\pi : E \rightarrow E/F$  stetig ist. Weiters ist  $\pi$  offen. Der Quotienten-Raum  $E/F$  ist separiert genau dann, wenn  $F$  abgeschlossen ist in  $E$ . Die stetigen SN von  $E/F$  sind genau die Abbildungen  $\tilde{q}(x + F) := \inf\{q(x + y) : y \in F\}$ , wobei  $q$  die stetigen Seminormen von  $E$  durchläuft. Ist  $E$  normierbar (bzw. abzählbar SNR) und  $F$  abgeschlossen so ist auch  $E/F$  normierbar (bzw. abzählbar SNR).

Bezüglich Vollständigkeit haben wir leider keine allgemeine Aussage, siehe aber (4.7).

#### Beweis.

**Stetige SN'en von  $E/F$ .** Zu jeder SN  $q$  auf  $E$  definieren wir eine neue SN  $q_F$  durch  $q_F(x) := \inf\{q(x + y) : y \in F\}$ . Dieses Infimum existiert, da  $q(x + y) \geq 0$ . Es ist  $q_F$  eine Seminorm, denn für  $\lambda \neq 0$  gilt

$$\begin{aligned} q_F(\lambda x) &= \inf\{q(\lambda x + y) : y \in F\} = \inf\{q(\lambda(x + \frac{1}{\lambda}y)) : y \in F\} \\ &= \inf\{q(\lambda(x + z)) : z \in \lambda F = F\} = |\lambda| q_F(x) \end{aligned}$$

und die Subadditivität von  $q_F$  folgt aus

$$\begin{aligned} q_F(x_1 + x_2) &= \inf\{q(x_1 + x_2 + y) : y \in F = F + F\} \\ &= \inf\{q(x_1 + x_2 + y_1 + y_2) : y_1 \in F, y_2 \in F\} \\ &\leq \inf\{q(x_1 + y_1) : y_1 \in F\} + \inf\{q(x_2 + y_2) : y_2 \in F\} \\ &= \inf\{q(x_1 + y_1) : y_1 \in F\} + \inf\{q(x_2 + y_2) : y_2 \in F\} \\ &= q_F(x_1) + q_F(x_2). \end{aligned}$$

Weiters ist  $(q_F)_{<1} \subseteq q_{<1} + F$  (in der Tat sogar gleich, und somit ist  $q_F$  das Minkowski-Funktional von  $q_{<1} + F$ ), denn  $1 > q_F(x) = \inf\{q(x + y) : y \in F\} \Rightarrow \exists y \in F : q(x + y) < 1$ , also  $x = (x + y) + (-y)$  mit  $x + y \in q_{<1}$  und  $-y \in -F = F$ . Falls  $q$  stetig ist, so auch  $q_F$ , denn  $q_F \leq q$ . Da  $q_F$  nach Konstruktion konstant ist auf Nebenklassen  $x + F$ , faktorisiert  $q_F$  zu einer Seminorm  $\tilde{q}$  auf  $E/F$ , die nach Konstruktion der finalen Struktur auch stetig ist. Umgekehrt sei  $\tilde{q}$  eine stetige SN auf  $E/F$ , dann ist  $q := \tilde{q} \circ \pi$  stetige SN auf  $E$  die konstant ist auf Nebenklassen  $x + F$ . Also ist  $q_F = q$  und  $\tilde{q}$  die zu  $q$  durch obige Konstruktion assoziierte SN auf  $E/F$ .

Die Aussage über die Kardinalität einer Subbasis ist nun evident.

**Quotiententopologie und Offenheit von  $\pi$ .** Eine Menge  $V \subseteq E/F$  ist offen in der Quotienten-Topologie genau dann, wenn  $\pi^{-1}(V)$  offen ist in  $E$ . Wir zeigen nun die Gleichheit der Topologien und die Offenheit von  $\pi$ .

Sei also  $U$  offen in  $E$ , dann ist  $\pi^{-1}(\pi(U)) = U + F = \bigcup_{y \in F} U + y$  offen in  $E$ , und somit  $V := \pi(U)$  offen in der Quotienten-Topologie.

Wenn  $V \subseteq E/F$  offen ist in der Quotienten-Topologie, dann ist  $U := \pi^{-1}(V)$  offen in  $E$ . Es sei  $0 \in V$ , dann genügt es o.B.d.A. zu zeigen, daß  $V$  eine 0-Umgebung in der von den Seminormen erzeugten Topologie ist. Es existiert eine stetige SN  $q$  auf

$E$  mit  $q_{<1} \subseteq U$  und folglich gilt  $(q_F)_{<1} \subseteq q_{<1} + F \subseteq U + F = U$ . Damit ist aber  $\tilde{q}_{<1} \subseteq V$ , denn

$$1 > \tilde{q}(x + F) = q_F(x) \Rightarrow x \in U = \pi^{-1}(V) \Rightarrow x + F = \pi(x) \in V,$$

und somit  $V$  eine 0-Umgebung in der von den SN'en erzeugten Topologie.

Ist  $V \subseteq E/F$  offen in der von den SN'en erzeugten Topologie, so ist  $U := \pi^{-1}(V) \subseteq E$  offen in  $E$ , da  $\pi$  stetig, und  $V = \pi(U)$ , da  $\pi$  surjektiv ist.

**Separiertheit.** Es sei  $E/F$  separiert. Dann ist

$$\{0\} = \bigcap \{q^{-1}(0) : q \text{ ist SN von } E/F\} \subseteq E/F$$

abgeschlossen, und somit  $F = \pi^{-1}(0) \subseteq E$  abgeschlossen.

Umgekehrt, sei  $F \subseteq E$  abgeschlossen. Dann ist  $E \setminus F$  offen und, da  $\pi$  eine offene Abbildung ist, auch  $\pi(E \setminus F) = E/F \setminus \{0\}$ . Also ist  $\{0\}$  in  $E/F$  abgeschlossen. Folglich ist  $E/F$  separiert, denn  $q(y) = 0$  für alle  $q$ , hat zur Folge, daß die konstante Folge 0 gegen  $y$  konvergiert und, da  $\{0\}$  abgeschlossen ist, folgt  $y = 0$ .  $\square$

**Kern einer Seminorm.**

Es sei  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Seminorm des SNR'es  $E$ , dann ist der Kern  $\text{Ker}(p) := p^{-1}(0)$  von  $p$  ein abgeschlossener Teilraum, denn  $p(x) = 0 = p(y)$  impliziert  $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) = |\lambda|0 = 0$  und  $0 \leq p(x+y) \leq p(x)+p(y) = 0+0$ . Somit ist  $E_p := E/\text{Ker}(p)$  mit  $\tilde{p}$  ein normierter Raum. Man beachte noch, daß  $p_F = p$ , denn  $p(x) - 0 = p(x) - p(-y) \leq p(x+y) \leq p(x) + p(y) = p(x) + 0$  für  $y \in \text{Ker}(p)$ .

Folglich ist jeder SNR  $E$  einbettbar als Teilraum in das Produkt  $\prod_p E_p$ , wobei  $p$  die Seminormen von  $E$  durchläuft. Die Einbettung ist gegeben durch  $x \mapsto (x+\text{Ker}(p))_p$ . Sie ist injektiv, da  $E$  separiert ist. Und  $E$  trägt die initiale Struktur bezüglich dieser Einbettung, da die  $\tilde{p} \circ \text{pr}_p : \prod_q E_q \rightarrow E_p \rightarrow \mathbb{R}$  eine Subbasis von SN'en am Produkt bilden.

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \prod_q E_q \\ p \downarrow & \searrow \pi_p & \downarrow \text{pr}_p \\ \mathbb{R} & \longleftarrow & E_p \\ & \tilde{p} & \end{array}$$

**4.6 Endlich-dimensionale SNR**

**Lemma. 1-dimensionale SNR'e.**

Sei  $E$  ein 1-dimensionaler SNR und  $0 \neq a \in E$ , dann ist die Abbildung  $f : \mathbb{K} \rightarrow E$ ,  $t \mapsto ta$  ein Isomorphismus von SNR'en (d.h. linearer Homöomorphismus). Jeder lineare Isomorphismus von  $E$  mit  $\mathbb{K}$  ist also ein Homöomorphismus.

**Beweis.** Da  $\{a\}$  eine Basis des Vektorraums  $E$  ist, ist  $f$  bijektiv, und jeder lineare Isomorphismus  $f : \mathbb{K} \rightarrow E$  sieht so aus mit  $a := f(1)$ . Weil die skalar-Multiplikation stetig ist, ist  $f$  stetig. Da  $E$  separiert ist, gibt es eine SN  $q$  mit  $q(a) \geq 1$ . Dann ist  $|f^{-1}(ta)| = |t| = \frac{q(ta)}{q(a)} \leq q(ta)$ , d.h.  $|f^{-1}| \leq q$ , also  $f^{-1}$  auch stetig.  $\square$

**Lemma. Stetige Funktionale.**

Sei  $E$  ein SNR und  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  ein lineares Funktional. Dann gilt:

- (1).  $f$  ist stetig;
- $\Leftrightarrow$  (2).  $|f|$  ist eine stetige Seminorm.
- $\Leftrightarrow$  (3). Der Kern  $\text{Ker}(f)$  ist abgeschlossen;

Falls hingegen  $f$  unstetig ist, so ist  $\text{Ker}(f)$  in  $E$  dicht.

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  2) Klar, da  $|\cdot|$  eine stetige Norm auf  $\mathbb{K}$  ist.

(2  $\Rightarrow$  3) Klar, da  $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(|f|)$ .

(3  $\Rightarrow$  1) Es genügt den Fall  $f \neq 0$  zu betrachten. Dann ist  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  surjektiv. Da  $F := \text{Ker}(f)$  abgeschlossen ist, ist  $E/F$  ein SNR nach (4.5). Da  $f|_F = 0$  ist, faktorisiert  $f$  über  $\pi : E \rightarrow E/F$  zu einer linearen Abbildung  $\tilde{f} : E/F \rightarrow \mathbb{K}$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & E/\text{ker}(f) \\ & \searrow f & \swarrow \cong \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

Da  $f$  surjektiv ist, gilt gleiches auch für  $\tilde{f}$ . Außerdem ist  $\tilde{f}$  injektiv, denn  $0 = \tilde{f}(\pi(x)) = f(x) \Rightarrow x \in \text{Ker}(f) \Rightarrow \pi(x) = 0$ . Also ist  $\tilde{f}$  ein Isomorphismus von SNR'en nach dem Lemma. Folglich ist  $f = \tilde{f} \circ \pi$  stetig als Zusammensetzung stetiger Abbildungen.

Sei nun  $f$  unstetig, also  $\text{Ker}(f)$  nicht abgeschlossen. Sei  $a \in \overline{\text{Ker}(f)} \setminus \text{Ker}(f)$ . O.B.d.A. sei  $f(a) = 1$ . Die Abbildung  $\text{Ker}(f) \times \mathbb{K} \rightarrow E$ ,  $(x, t) \mapsto x + ta$  stetig, linear und bijektiv, denn  $E \ni y \mapsto (y - f(y)a, f(y)) \in \text{Ker}(f) \times \mathbb{K}$  ist offensichtlich rechtsinvers dazu. Ihr Bild liegt in  $\overline{\text{Ker}(f)}$ , also ist letzteres ganz  $E$ .  $\square$

**Beispiele.**

Es sei  $E := C([0, 1], \mathbb{K})$  mit der 1-Norm. Dann ist  $\text{ev}_0 : E \rightarrow \mathbb{K}$  linear, aber nicht beschränkt (=stetig) und  $\text{Ker}(\text{ev}_0) = \{f \in E : f(0) = 0\}$  somit dicht, denn wir finden leicht stkw. affine Funktionen  $f_n \geq 0$  mit  $\int f_n = 1$  aber  $f_n(0) = n$ .

Ebenso ist  $\sum : E \rightarrow \mathbb{K}$  linear und nicht stetig (=beschränkt), wobei  $E$  der Raum der endlichen Folgen mit der  $\infty$ -Norm ist und  $\sum : x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ .

**Folgerung.**

Es sei  $F$  ein abgeschlossener Teilraum des SNR'es  $E$  der Kodimension 1 (d.h.  $\exists a \in E \setminus F$  s.d. der Vektorraum  $E$  durch  $F \cup \{a\}$  erzeugt wird). Dann gilt  $F \times \mathbb{K} \cong E$ , wobei der Isomorphismus durch  $(y, \lambda) \mapsto y + \lambda a$  gegeben ist.

**Beweis.** Die Abbildung  $(y, \lambda) \mapsto y + \lambda a$  ist klarerweise stetig. Sie ist surjektiv, da der Vektorraum  $E$  durch  $F \cup \{a\}$  erzeugt wird; und sie ist injektiv, da  $y + \lambda a = 0$  mit  $\lambda \neq 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{\lambda}y \in F$ .

$$\begin{array}{ccccc} F & \hookrightarrow & E & \twoheadrightarrow & E/F \\ & & & \searrow f & \downarrow \cong \\ & & & & \mathbb{K} \end{array}$$

Nun zur Umkehrabbildung. Dazu definieren wir ein lineares Funktional  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  durch  $f(y + \lambda a) := \lambda$ . Der Kern von  $f$  ist  $F$ , also abgeschlossen. Somit ist  $f$  stetig und damit auch die gewünschte Umkehrabbildung  $E \ni x \mapsto (x - f(x)a, f(x)) \in F \times \mathbb{K}$ .  $\square$

**Satz von Tychonoff über endlich dimensionale SNR'e.**

Für jeden SNR  $E$  gilt:

- (1).  $E$  ist endlich dimensional;

- $\Leftrightarrow$  (2).  $E \cong \mathbb{K}^n := \prod_{k=1}^n \mathbb{K}$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Genauer: Jeder lineare Isomorphismus  $E \cong \mathbb{K}^n$  ist auch ein Isomorphismus SNR'e.  
 $\Leftrightarrow$  (3).  $E$  ist lokalkompakt.  
 $\Leftrightarrow$  (4).  $E$  besitzt eine präkompakte 0-Umgebung.

Ein topologischer Raum heißt LOKALKOMPAKT falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis bestehend aus kompakten Mengen besitzt. Für einen Hausdorff-Raum genügt es dazu für jeden Punkt eine kompakte Umgebung zu finden und für einen SNR ist dies zur Existenz einer kompakten 0-Umgebung äquivalent!

Ein Teilmenge  $K$  eines SNR's heißt PRÄKOMPAKT, falls zu jeder 0-Umgebung  $U$  eine endliche Menge  $F$  existiert mit  $K \subseteq U + F = \bigcup_{y \in F} U + y$ .

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  2) Wir zeigen mit Induktion nach der Dimension  $n$ , daß jede lineare Bijektion  $\mathbb{K}^n \rightarrow E$  schon ein Homöomorphismus ist:

(n=1) ist bereits im obigen Lemma gezeigt.

(n+1) Es sei  $f : \mathbb{K}^{n+1} \rightarrow E$  eine lineare Bijektion. Klarerweise gibt es einen natürlichen topologischen Isomorphismus  $k : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \cong \mathbb{K}^{n+1}$ . Sei nun  $a$  das Bild unter  $k$  von  $(0, 1)$  in  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Es ist  $f|_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow f(\mathbb{K}^n) =: F$  eine lineare Bijektion, und  $F$  als Teilraum eines SNR's ein ebensolcher. Also ist nach Induktionsannahme  $f|_{\mathbb{K}^n} : \mathbb{K}^n \rightarrow F$  ein Homöomorphismus. Da  $\mathbb{K}^n = \prod_{i=1}^n \mathbb{K}$  vollständig ist, gilt gleiches für  $F$ , und somit ist  $F$  abgeschlossen in  $E$ , nach der Folgerung (4.2). Nach obiger Folgerung ist  $h : (y, \lambda) \mapsto y + \lambda f(a)$  ein Homöomorphismus und somit auch  $f = h \circ (f|_{\mathbb{K}^n} \times \text{id}_{\mathbb{K}}) \circ k^{-1} : \mathbb{K}^{n+1} \cong \mathbb{K}^n \times \mathbb{K} \rightarrow F \times \mathbb{K} \cong E$ .

(2  $\Rightarrow$  3) Ist eine direkte Folge des Satzes von Heine-Borel, denn danach ist der Einheitswürfel im  $\mathbb{R}^n$  eine kompakte 0-Umgebung.

(3  $\Rightarrow$  4) Jede kompakte Menge  $K$  ist präkompakt, da  $\{U + x : x \in K\}$  eine offene Überdeckung darstellt.

(4  $\Rightarrow$  1) Sei  $U$  eine präkompakte (absolut-konvexe) 0-Umgebung. Zur 0-Umgebung  $\frac{1}{2}U$  existiert eine endliche Menge  $F$ , s.d.  $U \subseteq F + \frac{1}{2}U$ . Das gilt erst recht, wenn wir  $F$  durch den erzeugten endlich-dimensionalen Teilraum, den wir wieder mit  $F$  bezeichnen, ersetzen. Wir wollen nun zeigen, daß  $F$  gleich  $E$  ist. Da  $F$  endlich-dimensional ist, ist  $F$  vollständig wegen (1  $\Rightarrow$  2), also ist  $F$  abgeschlossen nach Folgerung (4.2). Nun betrachten wir die kanonische Projektion  $E \rightarrow E/F$ . Die präkompakte Menge  $U$  ist auch beschränkt, denn für jede (absolut-konvexe) 0-Umgebung  $W$  existiert eine endliche Menge  $A$  mit  $U \subseteq A + W$ . Da  $W$  absorbierend ist und  $A$  endlich ist finden wir ein  $K > 0$ , s.d.  $A \subseteq K \cdot W$ , also ist  $U \subseteq (K + 1)W$ . Folglich ist  $V := \pi(U)$  in  $E/F$  eine beschränkte 0-Umgebung, also  $E/F$  nach Satz (2.9) normierbar, die Familie  $\frac{1}{2^n}V$  ist eine 0-Umgebungsbasis und somit  $\bigcap_n \frac{1}{2^n}V = \{0\}$ . Weiters haben wir  $V = \pi(U) \subseteq \pi(F + \frac{1}{2}U) = 0 + \frac{1}{2}\pi(U) = \frac{1}{2}V$ . Daraus erhalten wir mit Induktion  $V \subseteq \frac{1}{2^n}V$  und somit  $V \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^n}V = \{0\}$ . Da  $V$  als 0-Umgebung absorbierend sein muß, ist  $E/F = \{0\}$ , d.h.  $F = E$ .  $\square$

### Folgerung.

1. Alle Normen am  $\mathbb{K}^m$  sind äquivalent (d.h. erzeugen die gleiche Topologie), und allgemeiner alle Punkte-trennenden Mengen  $\mathcal{P}_0$  von Seminormen.
2. Es sei  $F$  ein endlich dimensionaler Teilraum eines SNR'es  $E$ . Dann ist  $F$  abgeschlossen und folglich  $E/F$  separiert.
3. Ist  $f : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung eines endlich dimensionalen SNR'es  $E$  in einen SNR  $F$ , so ist  $f$  stetig.

4. Ist  $F$  ein abgeschlossener Teilraum eines SNR's  $E$  und hat  $F$  endliche Kodimension in  $E$ , d.h.  $E/F$  ist endlich-dimensional, so ist  $E$  als SNR isomorph zu  $F \times (E/F)$ .

**Beweis.** (1) Es sei  $p$  eine Norm auf  $\mathbb{K}^m$ , dann ist nach dem Satz von Tychonoff  $(\mathbb{K}^m, p)$  topologisch isomorph zu  $(\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ , also ist die Norm  $p$  äquivalent zur unendlich-Norm. Folglich sind je zwei Normen äquivalent.

(2) Da  $F$  isomorph ist zu  $\mathbb{K}^m$  und  $\mathbb{K}^m$  vollständig ist, ist auch  $F$  vollständig, und damit abgeschlossen in  $E$ .

(3) O.B.d.A.  $E = \mathbb{K}^m$ . Jedes lineare  $f$  läßt sich als  $f(x) = \sum_{k=1}^n \text{pr}_k(x) f(e_k)$  schreiben, wobei  $e_k$  die Standard-Einheitsvektoren des  $\mathbb{R}^n$   $E$  sind. Da die Projektionen  $\text{pr}_k$  nach Konstruktion des Produkts stetig sind, ist es auch  $f$ .

(4) Wir betrachten die kanonische Projektion  $\pi : E \rightarrow E/F$ . Da sie surjektiv ist, existiert eine lineare rechts-Inverse  $f$  (Wir wähle Urbilder in  $E$  unter  $\pi$  einer Basis im endlich-dimensionalen Raum  $E/F$ ). Da  $E/F$  separiert ist ( $F$  ist abgeschlossen) ist  $f$  nach (3) stetig. Nun ist der gewünschte Isomorphismus  $E \rightarrow F \times E/F$  gegeben durch  $x \mapsto (x - f(\pi(x)), \pi(x))$ . Sein Inverses ist  $(y, z) \mapsto y + f(z)$ .  $\square$

### 4.7 Metrisierbare SNR

**Lemma.**

Es seien  $E_n$  NR. Dann ist die Topologie von  $E := \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n$  metrisierbar.

**Beweis.** Wir definieren eine Metrik  $d$  am Produkt  $E$  durch die punktweise konvergente Reihe

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|x_n - y_n\|}{1 + \|x_n - y_n\|}.$$

Dies ist wohldefiniert, da  $\frac{\|x_n - y_n\|}{1 + \|x_n - y_n\|} \leq 1$ , und  $(\frac{1}{2^n})_n$  summierbar ist, also nach der Hölder-Ungleichung auch das innere Produkt  $d(x, y) = \langle (\frac{1}{2^n})_n, (\frac{\|x_n - y_n\|}{1 + \|x_n - y_n\|})_n \rangle$  existiert. Es gilt die  $\Delta$ -Ungleichung, denn  $t \mapsto \frac{t}{1+t}$  ist monoton wachsend, da die Ableitung  $\frac{1+t-t}{(1+t)^2} > 0$  ist, und somit für  $\gamma \leq \alpha + \beta$  die Abschätzung

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta} = \frac{\alpha + \beta + 2\alpha\beta}{1 + \alpha + \beta + \alpha\beta} \geq \frac{\alpha + \beta + \alpha\beta}{1 + \alpha + \beta + \alpha\beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha + \beta} \geq \frac{\gamma}{1 + \gamma}.$$

gilt.

Falls  $\|x_i - y_i\| \leq \frac{1}{2^n}$  für  $i \leq n$  gilt, so ist  $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , denn

$$d(x, y) = \sum_i \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\|x_i - y_i\|}{1 + \|x_i - y_i\|} \leq \sum_{i \leq n} \frac{1}{2^i} \cdot \|x_i - y_i\| + \sum_{i > n} \frac{1}{2^i} \cdot 1 \leq 1 \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \cdot 1 = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Umgekehrt sei  $d(x, y) \leq \frac{1}{2^{2n}}$  so gilt  $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ , denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\|x_n - y_n\|}{1 + \|x_n - y_n\|} &\leq d(x, y) \leq \frac{1}{2^{2n}} \\ \Rightarrow \frac{\|x_n - y_n\|}{1 + \|x_n - y_n\|} &\leq \frac{1}{2^n} \\ \Rightarrow (2^n - 1) \cdot \|x_n - y_n\| &\leq 1. \end{aligned}$$

Somit erzeugt  $d$  die gleiche Topologie wie die Subbasis  $\{\|\text{pr}_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$  der Seminormen.  $\square$

**Folgerung.**

Es sei  $E$  ein SNR. Dann ist die Topologie von  $E$  genau dann metrisierbar, wenn  $E$  ein abzählbar SNR ist. Es gilt dann, daß jene Translations-invariante die Topologie erzeugende Metrik vollständig ist genau dann, wenn er als seminormierter Raum vollständig ist. Ein Fréchet-Raum ist also nichts anderes als ein vollständig metrisierbarer SNR.

**Beweis.** Es sei  $E$  metrisierbar. Dann bilden die Mengen  $U_n := \{x : d(x, 0) < \frac{1}{n}\}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  eine 0-Umgebungsbasis. Folglich gibt es stetige SN  $p_n$  mit  $(p_n)_{<1} \subseteq \overline{U_n}$ . Diese  $p_n$  bilden eine Subbasis: Sei nämlich  $p$  eine stetige SN, dann ist  $p_{<1}$  eine 0-Umgebung, also existiert ein  $n$  mit  $(p_n)_{<1} \subseteq U_n \subseteq p_{<1}$ , also ist  $p_n \geq p$ , nach (2.5).

Umgekehrt, sei  $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Subbasis der Seminormen von  $E$ , dann kann  $E$  als Teilraum des Produkts  $\prod_n E_n$  wie in (4.5) aufgefaßt werden, wobei  $E_n$  der normierte Raum ist, der aus  $E$  durch Herausfaktorisieren des Kerns von  $p_n$  entsteht. Nach dem Lemma ist dieses Produkt metrisierbar, und somit gilt gleiches auch für den Teilraum, da dieser nach (4.2) die Spurtopologie trägt.

**Vollständigkeit.** Es ist nur zu zeigen, daß eine Folge  $(x_n)_n$  genau dann bezüglich der Metrik Cauchy ist, wenn sie es bezüglich der Seminormen ist. Da aber die Metrik Translations-invariant ist, bedeutet ersteres, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  die Differenz  $x_n - x_m \in U_\varepsilon := \{y : d(y, 0) < \varepsilon\}$  für  $n$  und  $m$  hinreichend groß. Da die  $U_\varepsilon$  eine 0-Umgebungsbasis bilden, ebenso wie die Bälle  $p_{<\varepsilon}$  ist dies äquivalent dazu, daß für alle  $p$  und alle  $\varepsilon > 0$  die Ungleichung  $p(x_n - x_m) < \varepsilon$  für  $n$  und  $m$  hinreichend groß gilt.  $\square$

**Lemma.**

Sei  $F$  ein abgeschlossener Teilraum eines Fréchetraums  $E$ , dann ist auch  $E/F$  ein Fréchet-Raum, und jede konvergente Folge in  $E/F$  besitzt einen konvergenten Lift.

**Beweis.**

**Liften konvergenter Folgen.** Sei  $y_n \rightarrow y = \pi(x)$  in  $E/F$  und  $p_k \leq p_{k+1}$  eine abzählbare Basis der Seminormen. Also gilt  $\tilde{p}_k(y_n - y) \rightarrow 0$ , d.h.  $\exists n_k \in \mathbb{N} \forall n \geq n_k : \tilde{p}_k(y_n - y) < \frac{1}{k}$ . O.B.d.A. ist  $k \mapsto n_k$  streng monoton wachsend. Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $k$  maximal mit  $n_k \leq n$ . Nun wählen wir  $x_n \in \pi^{-1}(y_n)$  mit  $p_k(x_n - x) < \frac{1}{k}$ . Dann ist  $x_n$  der gewünschte Lift mit  $x_n \rightarrow x$ , denn  $\forall j \forall \varepsilon > 0 \exists k \geq j$  mit  $\frac{1}{k} < \varepsilon$  und somit ist  $p_j(x_n - x) \leq p_k(x_n - x) < \frac{1}{k} < \varepsilon$  für alle  $n \geq n_k$ .

**Vollständigkeit.** Es sei  $\lambda_n := \frac{1}{4^n}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $E/F$ . Wegen Lemma (3.4) genügt es zu zeigen, daß  $\sum_n \lambda_n y_n$  in  $E/F$  konvergiert. Da aber  $\frac{1}{2^n} y_n \rightarrow 0$  in  $E/F$ , existiert nach dem ersten Teil eine konvergente und damit beschränkte Folge  $x_n \in E$  mit  $\pi(x_n) = \frac{1}{2^n} y_n$ . Da  $E$  vollständig ist konvergiert die Reihe  $\sum_n \frac{1}{2^n} x_n$  in  $E$ , und wegen der Stetigkeit von  $\pi$  ebenso die Reihe  $\sum_n \pi(\frac{1}{2^n} x_n) = \sum_n \frac{1}{4^n} y_n$ .  $\square$

**4.8 Lemma. Koproducte.**

Es seien  $E_k$  SNR'e. Unter dem KOPRODUKT oder DIREKTEN SUMME der  $E_k$  verstehen wir den Vektorraum

$$E := \prod_k E_k := \{x \in \prod_k E_k : x_k = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } k\}$$

versehen mit der finalen Struktur bezüglich der Injektionen  $\text{inj}_k : E_k \rightarrow E$ , die  $x \in E_k$  auf den Punkt  $\text{inj}_k(x)$  abbilden, dessen  $k$ -te Komponente  $x$  ist und alle anderen 0 sind. Das Koproduct ist ein SNR.

Eine Subbasis der Seminormen auf  $E$  wird durch die SN'en  $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$  gebildet, wobei die  $p_k$  beliebige SN'en von  $E_k$  sind. Man beachte, daß nur endlich viele Summanden in der Summe ungleich 0 sind, und diese somit Sinn macht.

Eine Menge ist beschränkt in  $\coprod_i E_i$  falls sie schon in einer endlichen Teilsumme beschränkt enthalten ist.

Das Koprodukt (Folgen-)vollständiger Räume ist (Folgen-)vollständig.

Falls die Indexmenge endlich ist, stimmt das Koprodukt mit dem Produkt überein.

Falls die Indexmenge abzählbar ist, so bilden auch die SN'en  $p(x) := \sup\{p_k(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$  mit beliebigen SN'en  $p_k$  von  $E_k$  eine Subbasis.

### Beweis.

**Subbasis der SN'en.** Für jedes  $k$  sei  $p_k$  eine stetige SN auf  $E_k$ . Dann ist  $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$  eine wohldefinierte SN auf  $E$ . Die Zusammensetzung mit  $\text{inj}_k$  ist  $p \circ \text{inj}_k = p_k$  und somit stetig, also auch  $p$  nach Konstruktion der finalen Struktur.

Sei umgekehrt  $p$  eine stetige SN auf  $E$ . Dann ist  $p_k := p|_{E_k} = p \circ \text{inj}_k$  eine solche auf  $E_k$ , und es ist  $p(x) = p(\sum_k \text{inj}_k(x_k)) \leq \sum p_k(x_k)$ . Also bilden diese Seminormen eine Subbasis für  $E$ .

**Abzählbare Indexmenge.** Da  $\sup_k p_k(x_k) \leq \sum_k p_k(x_k)$  ist, definiert  $p(x) := \sup_k p_k(x_k)$  ebenso eine stetige SN. Umgekehrt ist wegen der Hölder-Ungleichung

$$\sum_k p_k(x_k) = \sum_k \frac{1}{2^k} (2^k p_k)(x_k) \leq \sup_k (2^k p_k)(x_k) \cdot \sum_k \frac{1}{2^k},$$

Also erzeugen die Suprema die gleichen stetigen SN'en wie die Summen.

Separiertheit ist nun klar.

**Endliche Indexmengen.** Im Falle einer endlichen Indexmenge haben wir als Basis  $\max\{p_1, \dots, p_N\}$  und das ist auch eine Basis des Produkts.

**Beschränktheit.** Eine Menge, die in einer endlichen Teilsumme beschränkt ist, ist es auch in der gesamten Summe, da die Inklusion wegen der universellen Eigenschaft stetig ist. Sei umgekehrt  $B$  in  $E$  beschränkt. Angenommen  $B$  liegt nicht in einer endlichen Teilsumme, dann gibt es unendlich viele  $k$  mit  $\text{pr}_k(B) \neq \{0\}$ . Wir wählen für jedes dieser  $k$  einen passenden Punkt  $b^k \in B$  mit  $(b^k)_k \neq 0$ . Da  $E_k$  separiert ist, existiert eine stetige Seminorm  $p_k$  auf  $E_k$  mit  $p_k(b^k) = k$ . Für die anderen  $k$  wählen wir  $p_k = 0$ . Sei  $p(x) := \sum_k p_k(x_k)$ . Dann ist  $p$  eine stetige Seminorm auf  $E$ , und somit  $p(B)$  beschränkt, aber  $k = p_k(b^k) \leq p(b^k) \in p(B)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

**Vollständigkeit.** Wir zeigen nur die Folgen-Vollständigkeit, für den Beweis der Vollständigkeit siehe [Jar81, S.111]. Es sei  $x_n$  eine Cauchy-Folge. Als solche ist sie beschränkt, also in einer endlichen Teilsumme enthalten. Da die Projektion auf diese Teilsumme, die die anderen Komponenten annulliert wegen der universellen Eigenschaft stetig ist, trägt die Teilsumme die Spurtopologie. Also ist  $x_n$  ein Cauchy-Folge in dieser endlichen Summe = Produkt, und somit ist sie konvergent nach (4.3) in dem endlichen Produkt und damit auch in  $E$ .  $\square$

### Bornologische Vektorräume.

Es trage  $E$  die finale Struktur bezüglich einer Familie von linearen Abbildungen  $f_k : E_k \rightarrow E$ , deren Bilder den Vektorraum  $E$  erzeugen. Dann läßt sich  $E$  auch als Quotient des Koprodukts  $\coprod_k E_k$  darstellen:

Sei nämlich  $F$  der Kern der stetigen linearen Abbildung  $\sum_k f_k : \coprod_k E_k \rightarrow E$ , welche  $x = (x_k)_k$  auf  $\sum_k f_k(x_k)$  abbildet. Diese Abbildung ist surjektiv, da die

Bilder  $f_k(E_k)$  nach Voraussetzung den Vektorraum  $E$  erzeugen. Folglich erhalten wir eine bijektive stetige Abbildung  $(\coprod_k E_k)/F \rightarrow E$ . Diese ist sogar ein Homöomorphismus, da  $E$  die finale Struktur bezüglich der Abbildungen  $f_k$  trägt.

Sei nun  $E$  ein SNR. Für jede beschränkte absolut-konvexe Menge  $B$  können wir den linearen Teilraum  $E_B$  von  $E$  betrachten der durch  $B$  erzeugt wird. Da  $B$  nach Konstruktion absorbierend in  $E_B$  ist, ist das Minkowski-Funktional  $p_B$  eine Seminorm auf  $E_B$ . Es ist sogar eine Norm, denn  $0 = p_B(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\} \Rightarrow \exists \lambda_n \rightarrow 0$  mit  $\frac{1}{\lambda_n}x \in B$ , also  $x = \lambda_n \frac{1}{\lambda_n}x \rightarrow 0$  und folglich  $x = 0$ . Weiters ist die Inklusion  $E_B \rightarrow E$  beschränkt auf der offenen Einheitskugel  $\subseteq B$ , also ist sie sogar stetig, da  $E_B$  normiert ist.

Der Raum  $E$  trägt nun genau dann die finale Struktur bezüglich all dieser Inklusionen, wenn  $E$  bornologisch ist:

Sei nämlich  $f : E \rightarrow F$  eine beschränkte lineare Abbildung, dann ist  $f|_{E_B} : E_B \rightarrow E \rightarrow F$  eine beschränkte lineare Abbildung auf einem normierten Raum, also stetig nach dem Lemma in (3.2). Wenn  $E$  die finale Struktur bezüglich der Teilräume  $E_B$  trägt, so ist  $f$  stetig, d.h.  $E$  bornologisch.

Umgekehrt sei  $E$  bornologisch. Allgemein ist die finale Struktur bezüglich der Abbildungen  $E_B \rightarrow E$  auf  $E$  feiner oder gleich der gegebenen auf  $E$ . Betrachten wir also die Identität  $f$  von  $E$  mit der gegebenen Struktur nach  $E$  mit der finalen. Sei  $B \subseteq E$  beschränkt und o.B.d.A. absolut-konvex. Dann ist die Inklusion  $E_B \rightarrow E$  stetig also beschränkt bezüglich der finalen Struktur auf  $E$ . Folglich ist  $f(B)$  beschränkt in  $E$ , d.h.  $f$  ist eine beschränkte lineare Abbildung, und da  $E$  bornologisch vorausgesetzt ist, ist  $f$  stetig. Also stimmen die beiden Strukturen überein.

Folglich sind die bornologischen Vektorräume genau die Quotienten von Koproducten normierter Räume. Vergleiche das mit der dualen Beschreibung SNR'e in (4.5).

## 4.9 Partielle Differentialgleichungen

### Definition.

Unter einer (vektorwertigen oder System von) PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNG(EN)  $n$ -TER ORDNUNG (oder kurz PDG) versteht man eine Gleichung der Form

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) = \mathbf{0}.$$

Eine Lösung ist eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x})$  von einem Banach-Raum  $T$  in einen anderen  $E$ , welche für alle  $\mathbf{x} \in T$  die Gleichung

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$$

erfüllt. Da die Ableitung  $\mathbf{u}^{(k)}(\mathbf{x})$  eine  $k$ -lineare symmetrische Abbildung, d.h. ein Element des Raums  $L_{sym}^k(T; E)$  ist, muß  $\mathbf{f}$  eine Abbildung auf dem Raum  $T \times E \times L(T, E) \times \dots \times L_{sym}^n(T, E)$  sein. Der Raum  $E \times L(T, E) \times \dots \times L_{sym}^n(T, E)$  ist gerade der Raum der Polynome von  $T$  nach  $E$  mit Grad höchstens  $n$ .

Falls  $T$  endlich dimensional ist, was im folgenden immer der Fall sein wird, so ist die  $k$ -te Ableitung eindeutig durch alle partiellen Ableitungen der Ordnung  $k$  gegeben. Für ein  $m$ -Tupel  $\alpha = (i_1, \dots, i_m)$  und ein  $m$ -Tupel  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{x}^\alpha$  das Produkt  $x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m}$  und mit  $|\alpha| = i_1 + \dots + i_m$ . Insbesondere kann dann die partielle Ableitung  $\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_m}}{(\partial x_1)^{i_1} \dots (\partial x_m)^{i_m}}$  als  $\partial^\alpha$  geschrieben werden, wobei  $\partial = (\partial_1, \dots, \partial_m) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$  ist. Die Funktion  $\mathbf{f}$  hat also als Variablen  $\mathbf{x}$  sowie  $\partial^\alpha u$  für alle  $|\alpha| \leq n$ .

**Spezielle Typen von PDG'en.**

Eine PDG  $n$ -ter Ordnung  $f(\mathbf{x}, u, u', \dots, u^{(n)}) = 0$  heißt **LINEAR** falls  $f$  affin ist in  $(u, u', \dots, u^{(n)})$ , d.h. sie sich schreiben läßt als

$$\sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \partial^\alpha u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}).$$

Die linke Seite ist also ein Polynom

$$P(\partial) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \partial^\alpha$$

in den Variablen  $\partial = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m})$  mit den Funktionen  $a_\alpha$  als Koeffizienten angewandt auf  $u$ . Unter einem linearen **PARTIELLEN DIFFERENTIAL-OPERATOR** (kurz **PDO**) versteht man gerade so ein Polynom  $D = P(\partial)$ .

Ist bei einer linearen PDG zusätzlich  $s = 0$ , so heißt sie **HOMOGEN**, andernfalls **INHOMOGEN**. Sind alle Koeffizientenfunktionen  $a_\alpha$  Konstante so spricht man von einer linearen PDG **MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN**.

**Lineare PDO'en 2-ter Ordnung.**

Jeder solche PDO mit konstanten Koeffizienten ist also von der Gestalt

$$P(\partial)(u) = a \cdot u + \sum_{i=1}^m a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} u + \sum_{i < j} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u.$$

Der homogene Anteil vom Grad 2 des Polynoms  $P$  ist also o.B.d.A. eine symmetrische quadratische Form  $P_2 : (x, y) \mapsto \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$  mit  $a_{i,j} = a_{j,i}$  am  $\mathbb{R}^m$ .

Der PDO heißt **ELLIPTISCH** falls diese Form definit ist, d.h. wenn  $P_2(\mathbf{x}) = 0$  als einzige Lösung  $\mathbf{x} = 0$  besitzt, oder äquivalent falls alle Eigenwerte strikt gleiches Vorzeichen besitzen. Dies läßt sich auch auf lineare PDO höherer Ordnung verallgemeinern.

Ein Beispiel ist der **LAPLACE-OPERATOR**  $\Delta := \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2$ . Die **LAPLACE-GLEICHUNG** ist die elliptische PDG  $\Delta(u) = 0$ . Ihre Lösungen heißen **HARMONISCHE FUNKTIONEN** oder auch **Potentiale**. Das **DIRICHLET-PROBLEM** ist die Randwertaufgabe für ein Gebiet  $G$  der Laplace-Gleichung, d.h.  $u(x) = u_0(x)$  für  $x \in \partial G$ . Das **VON NEUMANN PROBLEM** ist die Randwertaufgabe  $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0$  für alle  $x \in \partial G$ , wobei  $\nu$  der nach außen weisende Normalvektor an  $\partial G$  ist.

Falls die quadratische Form  $P_2$  als Eigenwert 0 besitzt, so heißt der PDO **PARABOLISCH**.

Z.B. ist die **WÄRMELEITUNGSGLEICHUNG**  $\Delta u = \frac{\partial}{\partial t} u$  parabolisch.

Ist 0 kein Eigenwert, aber gibt es Eigenwerte mit verschiedenen Vorzeichen so heißt der PDO **HYPERBOLISCH**.

Z.B. ist die **WELLENGLEICHUNG**  $\Delta u = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 u$  eine hyperbolische PDG. Das **CAUCHY-PROBLEM** ist die Anfangswertaufgabe  $\frac{\partial u}{\partial t} u(\mathbf{x}, 0) = b(\mathbf{x})$  mit  $u(\mathbf{x}, 0) = a(\mathbf{x})$ .

**Lineare PDG mit konstanten Koeffizienten****Der Green-Operator und die Green-Funktion.**

Falls wir eine lineare PDG  $D(u) = s$  mit konstanten Koeffizienten lösen wollen, so suchen wir also einen linearen Operator (den sogenannten **GREEN-OPERATOR**)

$G$ , welcher invers zu  $D$  ist, und somit die Lösung  $u$  aus  $s$  ausrechnet. Da  $D$  klarerweise mit partiellen Ableitungen kommutiert, muß gleiches auch für den inversen Operator  $G = D^{-1}$  gelten.

Wie wir bereits in (3.9) gesehen haben ist das Analogon zur Matrix-Darstellung

$$(A \cdot x)_i = \sum_j a_{i,j} x_j$$

einer linearen Abbildung  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Integral-Darstellung eines linearen Operators  $K$  auf Funktionenräumen durch einen INTEGRAL-KERN  $k$  wie folgt:

$$Kf : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y) f(y) dy.$$

Warnung: Integralkerne haben nichts mit Kernen im Sinn von "Urbild der 0" zu tun!

Nehmen wir nun an wir hätten einen linearen Operator  $K$ , welcher einen Integralkern  $k$  besitzt. Was bedeutet die Eigenschaft mit partiellen Ableitungen zu kommutieren für den Integralkern?

### Kern eines mit partiellen Ableitungen kommutierenden Operators.

Sei  $K$  ein linearer Operator, welcher eine Kerndarstellung

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y) f(y) dy$$

besitzt. Falls  $K$  mit allen partiellen Ableitungen vertauscht, so ist der Kern  $k(x, y)$  konstant längs der Geraden  $x - y = c$  und erfüllt somit  $k(x, y) = k(x - y, 0) =: k_0(x - y)$ . Das heißt der Operator ist durch Faltung mit  $k_0$  gegeben:

$$(Kf)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} k_0(x - y) f(y) dy =: (k_0 \star f)(x),$$

denn einerseits gilt durch Vertauschen einer partieller Ableitung mit dem Integral

$$\begin{aligned} ((\partial_j \circ K)(f))(x) &= \frac{\partial}{\partial x^j} (Kf)(x) = \frac{\partial}{\partial x^j} \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y) f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial x^j} k(x, y) f(y) dy \end{aligned}$$

und andererseits durch partielle Integration

$$\begin{aligned} ((K \circ \partial_j)(f))(x) &= (K(\partial_j f))(x) = \int_{\mathbb{R}^m} k(x, y) \frac{\partial}{\partial y^j} f(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial}{\partial y^j} k(x, y) f(y) dy. \end{aligned}$$

Da Gleichheit für alle  $f$  gelten soll, muß

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^j} k(x, y) + \frac{\partial}{\partial y^j} k(x, y) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} k(x + t e^j, y + t e^j)$$

sein und somit ist  $k(x + t e^j, y + t e^j)$  konstant in  $t$  für alle standard-Einheitsvektoren  $e^j$ . Insbesondere ist also

$$k_0(x - y) := k(x - y, 0) = k(x - \sum_j y_j e^j, y - \sum_j y_j e^j) = k(x, y).$$

### Faltung.

Der TRÄGER einer Funktion ist der Abschluß der Menge jener Punkte, in denen

die Funktion nicht 0 ist. Die FALTUNG zweier stetiger Funktionen (wobei eine einen kompakten Träger hat) ist definiert durch

$$(f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) g(y) dy.$$

Der Wert der Faltung an der Stelle 0 ist gerade

$$(f \star g)(0) = \int_{\mathbb{R}^m} f(-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} S(f)(y) \cdot g(y) dy =: \langle S(f), g \rangle.$$

Wobei  $S(f)$  die GESPIEGELTE FUNKTION  $S(f) : x \mapsto f(-x)$  ist. Diese Operation der Faltung ist wie man leicht sieht assoziativ, kommutativ und bilinear.

Für einen partiellen Differentialoperator  $D$  mit konstanten Koeffizienten gilt

$$D(f \star g) = D(f) \star g = f \star D(g),$$

denn

$$\begin{aligned} d_h(f \star g)(x) &:= d(f \star g)(x)(h) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(f \star g)(x+th) - (f \star g)(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x+th-y) - f(x-y)}{t} \cdot g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th-y) - f(x-y)}{t} \cdot g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} df(x-y)(h) \cdot g(y) dy \\ &= (df(\cdot)(h) \star g)(x) = (d_h f \star g)(x). \end{aligned}$$

### Green-Funktion.

Dies kann man nun auf lineare PDO'en mit konstanten Koeffizienten anwenden, denn diese vertauschen klarerweise mit partiellen Ableitungen, d.h. der Green-Operator  $G = D^{-1}$  sollte durch Faltung mit einer Funktion, der sogenannten GREEN-FUNKTION  $\varepsilon$ , gegeben sein. Es müßte also

$$s = D(G(s)) = D(\varepsilon \star s) = D(\varepsilon) \star s$$

für alle Inhomogenitätsterme  $s$  gelten. D.h.  $\delta := D(\varepsilon)$  wäre eine Einheit der Faltung.

Für  $s(-y) := \delta(y) \cdot y^2$  gilt

$$0 = s(0) = (s \star \delta)(0) = \int_{\mathbb{R}^m} s(-y) \delta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} y^2 \delta^2(y) dy.$$

Folglich muß  $y \delta(y) = 0$  sein für (fast) alle  $y$  und damit  $\delta(y) = 0$  sein für fast alle  $y \neq 0$ . Also kann  $\delta$  keine Funktion im üblichen Sinn sein.

Die linke Seite von

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x) f(-x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(-x) f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x) f(x) dx$$

definiert aber ein lineares Funktional  $f \mapsto f(0)$ , also scheint  $\delta$  ein solches Funktional auf einem Raum von Funktionen  $f$  zu beschreiben. Solche stetig linearen Funktionale nennt man DISTRIBUTIONEN. Die Distribution  $\delta(f) := f(0)$  heißt DIRAC'SCHE DELTA-DISTRIBUTION.

Im Falle von Randwert-Aufgaben sind die betrachteten Funktionen nur auf einem Gebiet  $\bar{G}$  definiert, und in diesem Fall ist der Green-Operator nicht durch eine Faltung gegeben, d.h. der Integralkern (die Green-Funktion) ist wirklich eine Funktion in 2 Variablen. Vergl. auch (3.9) und mein Skriptum [Kri96, Abschnitt 49].

### Testfunktionen und Distributionen.

Wir müssen uns nun Rechenschaft darüber ablegen, auf welchen Funktionen die Distributionen wirken sollen, und bezüglich welcher Topologie sie stetig sein sollen. Natürlich wollen wir, daß der Begriff der Distribution einen Erweiterung jenes der Funktion ist, also sollten wir zumindest stetige Funktionen  $f \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  durch  $f(g) := \langle f, g \rangle$  als Distributionen auffassen können. Damit aber das Integral einen Sinn hat, muß das Produkt  $f \cdot g$  gegen Unendlich stark abfallen. Da aber  $f$  beliebig wachsen darf, muß  $g$  sogar kompakten Träger besitzen. Als erster Ansatz für den Raum der Testfunktionen  $g$  drängt sich also der Raum der stetigen Funktionen mit kompakten Träger auf. Auf diesen haben wir schon zwei Strukturen kennengelernt, nämlich die als Teilraum des Fréchet-Raums  $C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ , und jene als Teilraum des Banach-Raums  $B(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ . Ist nun für eine stetige Funktion  $f$  das lineare Funktional  $g \mapsto \langle f, g \rangle$  stetig? Wählen wir insbesondere  $f = 1$ , dann ist  $\langle f, g_n \rangle = \int_{\mathbb{R}^m} g_n$ , und für die Konvergenz von  $\langle f, g_n \rangle$  genügt nicht die gleichmäßige Konvergenz (auf kompakten Mengen) der  $g_n$ . Wegen  $\int_{\mathbb{R}^m} |g| \leq \text{Volumen}(\text{Trg}(g)) \cdot \|g\|_\infty$ , sollte eine Folge nur dann konvergieren, wenn sie gleichmäßig konvergiert, und ihre Träger in einer festen kompakten Menge enthalten bleiben. Sei also  $C_K(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  der Raum der stetigen Funktionen von  $\mathbb{R}^m$  nach  $\mathbb{K}$ , welche Träger innerhalb der Menge  $K \subseteq \mathbb{R}^m$  haben. Dann ist  $C_K(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  versehen mit der gleichmäßigen Konvergenz ein abgeschlossener Teilraum von  $C_b(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  und somit ein Banach-Raum. Der Raum  $C_c(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  der stetigen Funktionen mit kompakten Träger ist dann die Vereinigung der Banach-Räume  $C_K(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  wobei  $K$  alle kompakten Mengen oder auch nur eine Basis der kompakten Mengen durchläuft (d.h. jede kompakte Menge ist in einer der Basis enthalten). Wir können also die finale Topologie auf ihm betrachten. Nun müssen wir uns überlegen, ob die konvergenten Folgen wirklich die sind, die schon in einer Stufe  $C_K(\mathbb{R}^m, \mathbb{K})$  konvergieren, und daß Folgenstetigkeit ausreicht.

Da wir Distributionen zum Lösen von Differentialgleichungen verwenden wollen, müssen diese differenzierbar sein. Wenn zwei Funktionen  $f$  und  $g$  differenzierbar sind, so ist  $\langle \partial_i f, g \rangle = -\langle f, \partial_i g \rangle$ , wie man mittels partieller Integration sieht. Wir könnten also für eine Distribution  $f$  die partielle Ableitung  $\partial_i f$  durch  $\partial_i f(g) := -f(\partial_i g)$  definieren. Also sollten unsere Testfunktionen sogar glatt sein, und wir müssen die gleiche Konstruktion für  $C_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = \bigcup_K C_K^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  durchführen. Der so definierte SNR  $C_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  wird auch mit  $\mathcal{D}$  bezeichnet. Die entsprechende Bezeichnungsweise für den Fréchet-Raum  $C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  ist  $\mathcal{E}$ .

### 4.10 Strikt induktive Limiten

#### Lemma.

*Es sei ein Vektorraum  $E$  gegeben, der sich als Vereinigung einer aufsteigenden Folgen  $E_n$  von linearen Teilräumen schreiben läßt. Weiters sei vorausgesetzt, daß die  $E_n$  so mit Seminormen versehen sind, daß  $E_n$  ein abgeschlossener seminormierter Teilraum des SNR's  $E_{n+1}$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Der Raum  $E$  mit der finalen Struktur bezüglich aller Inklusionen  $E_k \rightarrow E$  heißt dann STRIKT INDUKTIVER LIMES der  $E_n$  und man schreibt  $E = \varinjlim_n E_n$ . Die  $E_n$  nennen wir auch die STUFEN des induktiven Limes. Jede Seminorm eines  $E_n$  besitzt dann eine stetige Fortsetzung auf  $E$ . Jedes  $E_n$  ist abgeschlossen in  $E$ . Der Raum  $E$  ist separiert. Eine Menge ist in  $E$  beschränkt genau dann, wenn sie in einer Stufe enthalten ist und dort beschränkt ist. Sind alle  $E_n$  (Folgen-) vollständig so auch  $E$ .*

#### Beweis.

**Fortsetzbarkeit der SN'en.** Sei  $p_n$  eine SN von  $E_n$ . Da  $E_n$  ein Teilraum von  $E_{n+1}$  ist, gibt es nach (4.2) eine stetige Fortsetzung  $p_{n+1}$  auf  $E_{n+1}$ . Mittels Induktion erhalten wir eine Folge von sukzessiven Fortsetzungen  $p_k$  auf  $E_k$ . Sei nun  $p := \bigcup_k p_k$ . Dann ist  $p$  eine Seminorm auf  $E$  und die Spur auf jeder Stufe  $E_k$  ist  $p_k$ . Also ist  $p$  nach Definition der finalen Struktur stetig.

**Stufen als abgeschlossene Teilräume von  $E$ .** Da nach dem vorigen Punkt die stetigen SN'en von  $E_n$  gerade die Einschränkungen der stetigen SN'en von  $E$  sind, trägt  $E_n$  die Spurtopologie von  $E$ . Es sei  $x_i$  ein Netz in  $E_n$ , welches gegen  $x$  in  $E$  konvergiert. Da  $E = \bigcup_k E_k$ , existiert ein  $k \geq n$  mit  $x \in E_k$ . Da  $E_k \supseteq E_n$  ein topologischer Teilraum von  $E$  ist, konvergiert das Netz  $x_i$  in  $E_k$  gegen  $x$ . Nach Voraussetzung ist aber  $E_n$  abgeschlossen in  $E_k$  und folglich liegt  $x \in E_n$ , d.h.  $E_n$  ist abgeschlossen in  $E$ . Weiter folgt sofort, daß  $E$  separiert ist.

**Beschränktheit.** Es sei  $B \subseteq E$  eine beschränkte Menge. Wegen dem vorigen Punkt genügt es zu zeigen, daß  $B$  in einer Stufe enthalten ist (beschränkt ist es dort dann automatisch). Angenommen für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $B \not\subseteq E_n$ . Wir wählen nun  $b_1 \in B \setminus E_1$  und  $n_1$  mit  $b_1 \in E_{n_1}$ . Rekursiv erhalten wir eine streng monoton wachsende Folge  $(n_k)$  und  $b_k \in E_{n_k} \cap B \setminus E_{n_{k-1}}$ . Es sei  $p_1$  eine stetige SN auf  $E_{n_1}$  mit  $p_1(b_1) = 1$ ; das ist möglich da  $b_1 \notin E_1$  also  $b_1 \neq 0$ . Nun suchen wir induktiv stetige SN'en  $p_k$  auf  $E_{n_k}$ , mit  $p_{k+1}|_{E_{n_k}} = p_k$  und  $p_k(b_k) = k$ : Dazu betrachten wir den von  $E_{n_k}$  und  $b_{k+1}$  erzeugten Teilraum  $F$  von  $E_{n_{k+1}}$ . Da  $b_{k+1} \notin E_{n_k}$ , ist  $(x, \lambda) \mapsto x + \lambda b_{k+1}$  nach der Folgerung in (4.6) ein Isomorphismus  $E_{n_k} \times \mathbb{K} \cong F$ . Auf  $F$  definieren wir die stetige Seminorm  $q$  durch  $q(x + \lambda b_{k+1}) := p_k(x) + (k+1) \cdot |\lambda|$ . Nach (4.1) existiert eine stetige SN  $p_{k+1}$  auf  $E_{n_{k+1}}$ , welche  $q$  fortsetzt. Sei schließlich  $p := \bigcup_k p_k$ . Dann ist  $p$  eine stetige SN auf  $E$  und  $p(b_n) = n$ , also ist  $B$  nicht beschränkt.

**Vollständigkeit.** Es sei  $x_n$  eine Cauchy-Folge in  $E$ . Dann ist  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt, also nach obigem enthalten in einem  $E_n$ . Da  $E_n$  ein seminormierter Teilraum von  $E$  ist, ist  $x_n$  eine Cauchy-Folge in ihm, konvergiert also gegen ein  $x$  in  $E_n$ , also auch in  $E$ . Für einen Beweis im Falle der Vollständigkeit siehe [Jar81, S.86].  $\square$

### Beispiel.

Wir können nun den Raum  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  der glatten Funktionen mit kompakten Träger als strikten induktiven Limes  $\mathcal{D} = \varinjlim_K C_K^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  der Stufen  $C_K^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) : \text{Trg} \subseteq K\}$  auffassen, wobei  $K$  eine Basis der kompakten Mengen, z.B.  $(\{x : |x| \leq k\})_{k \in \mathbb{N}}$ , durchläuft.

Der so erhaltene SNR wird oft mit  $\mathcal{D}$  bezeichnet. Er ist nach (4.10) vollständig und bornologisch. Die stetigen (= beschränkten = Folgen-stetigen) linearen Funktionale auf  $\mathcal{D}$  heißen DISTRIBUTIONEN.

Ein anderes Beispiel ist der Raum  $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \varinjlim_n \mathbb{K}^n$  der endlichen Folgen.

## 4.11 Operationen auf Distributionen

Um nun lineare PDG für Distributionen zu lösen, müssen wir die auftretenden Terme auf Distributionen erweitern, d.h. zu gewissen (stetigen) Abbildungen  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  suchen wir Fortsetzungen  $\tilde{T} : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$ . Da  $\tilde{T}$  ein Operator zwischen Dualräumen sein soll, machen wir den Ansatz  $\tilde{T} = S^*$  mit  $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ . Wie immer

ist der duale Operator  $S^*$  zu  $S$  durch  $S^*(x')(y) := x'(Sy)$  definiert. Damit  $\tilde{T}$  eine Fortsetzung von  $T$  ist, d.h. folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{T} & \mathcal{D} \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{\tilde{T}} & \mathcal{D}' \end{array}$$

muß

$$\tilde{T}(\iota(f))(g) = S^*(\iota(f))(g) = \iota(f)(S(g)) = \langle f, S(g) \rangle$$

ident mit

$$\iota(T(f))(g) = \langle T(f), g \rangle$$

sein, d.h.  $S$  der FORMAL ADJUNGIERTE  $T^t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  zu  $T$  sein, also jener Operator  $T^t$ , welcher

$$\langle Tf, g \rangle = \langle f, T^t g \rangle \text{ für alle } f, g \in \mathcal{D}$$

erfüllt. Ist dieser gefunden so definiert man folglich die gesuchte Erweiterung als dualen Operator  $(T^t)^*$  zu  $T^t$  durch

$$\tilde{T}(g) := (T^t)^*(g) : f \mapsto g(T^t(f)).$$

### Ableitungen einer Distribution

Sind  $g$  und  $f$  glatte Funktionen und hat eine kompakten Träger so gilt

$$\begin{aligned} (\frac{\partial}{\partial x^1} g)(f) &= \int_{\mathbb{R}^m} (\frac{\partial}{\partial x^1} g(x)) f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \int_{\mathbb{R}} (\frac{\partial}{\partial x^1} g(x)) f(x) dx^1 d(x^2, \dots, x^m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{m-1}} \left( g(x) f(x) \Big|_{x^1=-\infty}^{+\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}} g(x) (\frac{\partial}{\partial x^1} f(x)) dx^1 \right) d(x^2, \dots, x^m) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} g(x) (\frac{\partial}{\partial x^1} f(x)) dx \\ &= -(\frac{\partial}{\partial x^1} f)(g), \end{aligned}$$

d.h.  $\partial_j^t = -\partial_j$ . Dies motiviert folgende Definition der PARTIELLEN ABLEITUNG für eine Distribution  $g$ :

$$(\partial^\alpha g)(f) = (-1)^{|\alpha|} g(\partial^\alpha f).$$

Es gilt dann klarerweise der Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit von partiellen Ableitungen.

Die HEAVISIDE-DISTRIBUTION  $H$  ist gegeben durch  $H(f) := \int_0^\infty f(x) dx$ , sie ist durch die Funktion

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \text{ gegeben.}$$

Die distributionelle Ableitung von  $H$  ist  $\delta$ . Das sieht man wie folgt:

$$H'(f) = -H(f') = - \int_0^\infty f'(x) dx = -f(x) \Big|_{x=0}^\infty = f(0) = \delta(f).$$

### 4.12 Vervollständigung

Wir wollen nun das Problem anpacken, was wir machen können, wenn sich ein Raum als nicht vollständig erweist. Man denke an die Situation  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Da “vervollständigt” man  $\mathbb{Q}$  zu  $\mathbb{R}$  indem man z.B. Dedekind-Schnitte betrachtet. Wir wollen eine ähnliche Konstruktion nun für SNR’e durchführen. Insbesondere sollte sich das dann auf den Raum  $C(I, \mathbb{K})$  mit der  $p$ -Norm anwenden lassen.

#### Vervollständigung.

Unter der VERVOLLSTÄNDIGUNG eines SNR’es  $E$  verstehen wir einen vollständigen SNR  $\tilde{E}$  zusammen mit einer stetigen linearen Abbildung  $\iota : E \rightarrow \tilde{E}$ , welche folgende universelle Eigenschaft besitzt:

Für jede stetige lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  in einen vollständigen SNR  $F$  existiert eine eindeutige stetige lineare Abbildung  $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow F$  mit  $\tilde{f} \circ \iota = f$ .

#### Bemerkung.

Die Vervollständigung eines SNR’es  $E$  ist bis auf Isomorphie eindeutig. Seien nämlich  $\iota_i : E \rightarrow E^i$  für  $i = 1, 2$  zwei Vervollständigungen von  $E$ . Dann existieren eindeutige stetige lineare Abbildungen  $\tilde{\iota}_1 : E^1 \rightarrow E^2$  und  $\tilde{\iota}_2 : E^2 \rightarrow E^1$  mit  $\tilde{\iota}_2 \circ \iota_1 = \iota_2$  und  $\tilde{\iota}_1 \circ \iota_2 = \iota_1$ . Also ist  $\tilde{\iota}_2 \circ \tilde{\iota}_1 \circ \iota_2 = \iota_2 = \text{id} \circ \iota_2$ , und wegen der Eindeutigkeit von  $\tilde{f}$  auch  $\tilde{\iota}_2 \circ \tilde{\iota}_1 = \text{id}$ .

#### Lemma.

Ist  $E$  ein dichter Teilraum eines SNR’es  $\tilde{E}$ . Die stetigen SN’en von  $\tilde{E}$  sind dann genau die eindeutigen Fortsetzungen von solchen auf  $E$ . Ist  $\mathcal{U}$  eine 0-Umgebungsbasis von  $E$ , so bilden die Abschlüsse  $\{\bar{U} : U \in \mathcal{U}\}$  in  $\tilde{E}$  eine 0-Umgebungsbasis von  $\tilde{E}$ . Jede stetige lineare Abbildung  $f : E \rightarrow F$  in einen vollständigen SNR  $F$  besitzt eine eindeutige stetige lineare Erweiterung  $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow F$ . Ist zusätzlich  $\tilde{E}$  vollständig, so ist  $E \rightarrow \tilde{E}$  eine Vervollständigung von  $E$ .

#### Beweis.

**Seminormen.** Nach (4.2) besitzt jede stetige Seminorm  $p$  von  $E$  eine ebensolche Fortsetzung  $\tilde{p}$  auf  $\tilde{E}$ . Da  $E$  in  $\tilde{E}$  dicht ist, ist  $\tilde{p}$  eindeutig bestimmt.

**0-Umgebungsbasis.** Es genügt  $\tilde{p}_{\leq 1} \subseteq \overline{p_{\leq 1}}$  zu zeigen (Es gilt sogar Gleichheit, denn zu  $\tilde{x} \in \overline{p_{\leq 1}}$  existiert ein Netz  $x_i \rightarrow \tilde{x}$  mit  $x_i \in p_{\leq 1}$ . Damit ist aber  $\tilde{p}(\tilde{x}) = \tilde{p}(\lim_i x_i) = \lim_i \tilde{p}(x_i) \leq 1$ ). Sei also  $\tilde{p}(\tilde{x}) \leq 1$ . Da  $E$  dicht liegt in  $\tilde{E}$  existiert ein Netz  $(x_i)$  in  $E$ , welches gegen  $\tilde{x}$  konvergiert (Betrachte als Indexmenge  $\{(V, x) : V \text{ ist Umgebung von } \tilde{x}, x \in V \cap E\}$  mit der Ordnung  $(V, x) \prec (V', x') :\Leftrightarrow V \supseteq V'$  und als Netz die Abbildung  $(U, x) \mapsto x$ ). Falls  $\tilde{p}(\tilde{x}) < 1$ , so ist  $x_i \in p_{\leq 1}$  für fast alle  $i$ , d.h.  $\tilde{x} \in \overline{p_{\leq 1}}$ . Andernfalls ist  $p(x_i) \neq 0$  für fast alle  $i$  und somit  $y_i := \frac{x_i}{p(x_i)} \in p_{\leq 1}$  und  $y_i \rightarrow \frac{\tilde{x}}{\tilde{p}(\tilde{x})} = \tilde{x}$ .

**Stetige Erweiterungen.** Es sei  $f : E \rightarrow F$  linear und stetig und  $\tilde{x} \in \tilde{E}$  beliebig. Da  $E$  in  $\tilde{E}$  dicht ist, existiert ein Netz  $(x_i)$  in  $E$ , welches in  $\tilde{E}$  gegen  $\tilde{x}$  konvergiert. Da  $\tilde{f}$  stetig sein soll, muß gelten  $\tilde{f}(\tilde{x}) := \tilde{f}(\lim_i x_i) = \lim_i \tilde{f}(x_i) = \lim_i f(x_i)$ . Es gibt also höchstens eine stetige Fortsetzung  $\tilde{f}$ , und diese muß durch  $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_i f(x_i)$  gegeben sein. Da  $x_i$  ein Cauchy-Netz ist und  $f$  (da linear) gleichmäßig stetig ist, gilt gleiches auch für  $f(x_i)$ , und somit konvergiert  $f(x_i)$ , da  $F$  vollständig ist.

Wir definieren  $\tilde{f}(\tilde{x})$  als diesen Grenzwert und müssen zeigen, daß er nicht von der Wahl des Netzes abhängt. Sei also  $x_j$  ein zweites Netz in  $E$ , welches gegen  $\tilde{x}$  konvergiert. Wir betrachten als Indexmenge das Produkt  $I \times J$  mit der Produkt-Ordnung, d.h.  $(i, j) \succ (i', j') :\Leftrightarrow (i \succ i') \& (j \succ j')$  und als Netz darauf die Abbildung  $(i, j) \mapsto$

$x_{i,j} := x_i - x_j$ . Dieses Netz konvergiert nun gegen  $\lim_i x_i - \lim_j x_j = \tilde{x} - \tilde{x} = 0$ , also konvergiert das Bildnetz  $f(x_{i,j}) = f(x_i) - f(x_j)$  gegen  $f(0) = 0$ , andererseits ist sein Limes aber gerade  $\lim_{i,j} f(x_{i,j}) = \lim_i f(x_i) - \lim_j f(x_j)$ , d.h. der Grenzwert  $\tilde{f}(\tilde{x})$  ist eindeutig.

Die Fortsetzung  $\tilde{f}$  ist linear: Sei  $\tilde{x}$  und  $\tilde{y}$  in  $\tilde{E}$ , dann existieren Netze  $x_i$  und  $y_j$  in  $E$  mit  $x_i \rightarrow \tilde{x}$  und  $y_j \rightarrow \tilde{y}$ . Also gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\tilde{x} + \lambda\tilde{y}) &= \tilde{f}\left(\lim_i x_i + \lambda \lim_j y_j\right) = \tilde{f}\left(\lim_{i,j} (x_i + \lambda y_j)\right) \\ &= \lim_{i,j} \tilde{f}(x_i + \lambda y_j) = \lim_{i,j} f(x_i + \lambda y_j) = \lim_{i,j} f(x_i) + \lambda f(y_j) \\ &= \lim_i f(x_i) + \lambda \lim_j f(y_j) = \tilde{f}(\tilde{x}) + \lambda \tilde{f}(\tilde{y}). \end{aligned}$$

Die Fortsetzung  $\tilde{f}$  ist stetig:

Beweis mittels SN'en: Es sei  $q$  eine stetige SN auf  $F$ . Dann ist  $q \circ f$  eine solche auf  $E$ , also existiert nach (4.2) eine stetige SN  $\widetilde{q \circ f}$  auf  $\tilde{E}$ , welche  $q \circ f$  fortsetzt. Es gilt  $\widetilde{q \circ f} = q \circ \tilde{f}$ , da

$$\begin{aligned} \widetilde{(q \circ f)}(\tilde{x}) &= \widetilde{(q \circ f)}(\lim_i x_i) = \lim_i \widetilde{(q \circ f)}(x_i) = \lim_i (q \circ f)(x_i) \\ &= q(\lim_i f(x_i)) = q(\tilde{f}(\lim_i x_i)) = (q \circ \tilde{f})(\tilde{x}) \end{aligned}$$

Beweis mittels 0-Umgebung: Sei nämlich  $V$  eine abgeschlossene 0-Umgebung von  $F$  und  $U$  eine solche von  $E$  mit  $f(U) \subset V$ . Dann gilt  $\tilde{f}(\bar{U}) \subset V$ , und  $\bar{U}$  ist eine 0-Umgebung in  $\tilde{E}$ . Sei nämlich  $\tilde{x} \in \bar{U}$ , dann existiert ein Netz  $x_i$  in  $U \subset E$ , welches gegen  $\tilde{x}$  konvergiert. Also ist  $\tilde{f}(\tilde{x}) = \lim_i f(x_i) \in \bar{V} = V$ .  $\square$

### Satz.

Jeder SNR  $E$  besitzt eine bis auf Isomorphie eindeutige Vervollständigung  $\iota: E \rightarrow \tilde{E}$ . Ist  $E$  normierbar (bzw. metrisierbar) so auch  $\tilde{E}$ .

**Beweis.** Wir behandeln zuerst den Fall, daß  $E$  ein normierter Raum ist. Dazu suchen wir einen vollständigen Raum, in welchen  $E$  isometrisch auf einen Teilraum eingebettet werden kann. Nach (3.5) ist der Dualraum  $E' := L(E, \mathbb{K})$  immer vollständig, also auch der Biduale  $E'' := (E')'$ . Nun betrachten wir die Abbildung  $\iota: E \rightarrow E''$ , gegeben durch  $\iota(x) = \text{ev}_x: x' \mapsto x'(x)$ . Diese ist klarerweise wohldefiniert, linear und stetig, denn

$$\|\iota(x)\| := \sup\left\{ \underbrace{|\iota(x)(x')|}_{|x'(x)| \leq \|x'\| \cdot \|x\|} : \|x'\| = 1 \right\} \leq \|x\|.$$

Bleibt zu zeigen, daß  $\iota$  eine Isometrie ist. Dazu genügt es ein  $x' \in E'$  zu finden mit  $x'(x) = \|x\|$  und  $\|x'\| = 1$ . Das bedeutet, daß die Hyperebene  $H := \{y : x'(y) = \|x\|\}$  durch  $x$  geht und die offene Kugel  $\{y : \|y\| < \|x\|\}$  nicht trifft, d.h. eine Tangentialebene an die Einheitssphäre ist, denn für  $y \in H$  gilt  $\|x\| = |x'(y)| \leq \|x'\| \|y\| = \|y\|$ . Die Existenz einer solchen werden wir in (7.13) (siehe auch (7.9)) mittels des Satzes von Hahn-Banach zeigen. Sei umgekehrt so eine abgeschlossene Hyperebene  $H$  durch  $x$  gegeben, die  $\{y : \|y\| < \|x\|\}$  nicht trifft. O.B.d.A. sei  $\|x\| = 1$ . Jede abgeschlossene Hyperebene ist nach (4.6) von der Form  $H = \{y : x'(y) = c\}$  mit  $c \in \mathbb{K}$  und  $x' \in E'$ . O.B.d.A. sei  $\|x'\| = 1$  und  $c \geq 0$ . Wegen  $x \in H$  ist  $x'(x) = c$ . Es ist  $|x'(x)| \leq \|x'\| \|x\| = 1$ . Angenommen  $c = x'(x) < 1$ , dann existiert ein  $z$  mit  $\|z\| = 1$  und  $c < x'(z) \leq \|x'\| = 1$ . Es sei  $w := \frac{c}{x'(z)} z$ . Dann ist  $\|w\| < 1$  und  $x'(w) = c$ , ein Widerspruch.

Als  $\tilde{E}$  nehmen wir nun den Abschluß des Bildes  $\iota(E)$  in  $E''$ . Dann ist  $\iota$  eine Einbettung von  $E$  auf den dichten Teilraum  $\iota(E)$  des Banach-Raums  $\tilde{E}$ , und somit nach obigem Lemma eine Vervollständigung.

Nun der Fall eines allgemeinen SNR'es  $E$ . Nach (4.5) läßt sich  $E$  auffassen als Teilraum eines Produkts normierter Räume  $E_p$ . Dieses wiederum, läßt sich auffassen als Teilraum des Produkts der Vervollständigungen  $\widetilde{E}_p$  der Faktoren. Also ist  $E$  ein Teilraum eines vollständigen SNR'es. Für  $\tilde{E}$  nehmen wir nun den Abschluß von  $E$  in diesem vollständigen SNR.  $\square$

### 4.13 Integration

#### Banach-Räume integrierbarer Funktionen.

Wir wollen nun vollständige Räume integrierbarer Funktionen finden. Die Idee dabei ist einen Raum integrierbarer Funktionen bezüglich der 1-Norm zu vervollständigen. Wir könnten dazu natürlich vom Raum der stetigen Funktionen ausgehen, oder sogar von jenem der Riemann-integrierbaren. Aber am einfachsten ist es mit den Treppenfunktionen zu beginnen, denn da benötigen wir vorerst keine Integrationstheorie.

Sei also  $\mathcal{A}$  die Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen von rechts-offenen Intervallen (d.h. Quadern)  $[a, b) := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i < b_i\}$  in  $X := \mathbb{R}^n$ , wobei  $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$ .

Dieses Mengensystem hat die folgenden Eigenschaften:

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$
3.  $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^m A_i \in \mathcal{A}$

Das Volumen eines solchen Intervalls definieren wir als  $\mu([a, b)) := \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$  bzw. als  $\infty$ , falls ein  $a_i = -\infty$  oder ein  $b_i = +\infty$ . Dann läßt sich  $\mu$  eindeutig zu einem sogenannten positiven Maß  $\mu$  fortsetzen, i.e. einer Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ , welche  $\sigma$ -additiv ist, d.h. sind die  $A_i \in \mathcal{A}$  paarweise disjunkt und ist auch  $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$  so gilt:  $\mu(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(A_i)$ .

Unter einer TREPPENFUNKTION verstehen wir dann die Elemente des linearen Raums  $T$  von Funktionen, welcher durch die CHARAKTERISTISCHEN FUNKTIONEN  $\chi_A$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $\mu(A) < \infty$  erzeugt wird, d.h.  $T := \{\sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{A_i} : A_i \in \mathcal{A}, \mu(A_i) < \infty, \lambda_i \in \mathbb{R}\}$ . Man beachte, daß für  $f \in T$  und jede Zahl  $c$  die Menge  $f_{<c}$  in  $\mathcal{A}$  liegt. Das INTEGRAL von  $f = \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{A_i}$  definieren wir als

$$\int_{\mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{A_i} d\mu := \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(A_i).$$

Integrieren ist somit ein lineares (wohldefiniertes!) Funktional auf  $T$  und mittels  $\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^m} |f| d\mu$  wird  $T$  zu einem normierten Raum. Also können wir nach (4.12) dessen Vervollständigung  $\tilde{T}$  betrachten. Dies ist ein Banach-Raum und das Funktional  $\int$  erweitert sich zu einem stetigen linearen Funktional  $\int$  auf  $\tilde{T}$ , und die Norm zu einer Norm  $\|\cdot\|_1$ . Für  $A \in \mathcal{A}$  ist auch  $\int_A f := \int_{\mathbb{R}^m} f \cdot \chi_A$  wohldefiniert.

Allerdings wissen wir nicht ob die Elemente  $\varphi \in \tilde{T}$  als Funktionen am  $\mathbb{R}^n$  aufgefaßt werden können. Dieses Problem wollen wir jetzt untersuchen.

#### Die Vervollständigung $\tilde{T}$ als integrierbare Funktionen.

Jedem  $\varphi \in \tilde{T}$  wollen wir also eine Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnen, die in einem gewissen Sinn integrierbar ist. Da  $T$  in der Vervollständigung  $\tilde{T}$  dicht liegt, existieren

$f_n \in T$ , s.d.  $\|\varphi - f_n\|_1 \rightarrow 0$  (Insbesondere ist  $f_n$  eine Cauchy-Folge in  $T$ ). Falls diese zumindest punktweise konvergiert, so wäre  $f : x \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ein Kandidat für die zu  $\varphi$  gehörende Funktion.

Im allgemeinen muß dies aber nicht der Fall sein, wie folgendes Beispiel zeigt:

Für  $n \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq k < 2^n$  sei  $f_{k+2^n} := \chi_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})}$ . Dann konvergiert  $f_n \rightarrow 0$  bezüglich der 1-Norm, denn  $\int_{[0,1]} f_{k+2^n} = \frac{1}{2^n}$ . Andererseits konvergiert  $f_n(x)$  für kein  $x \in [0, 1)$ , denn  $f_n(x)$  ist immer wieder gleich 0 und auch immer wieder gleich 1.

Das Problem bei diesem Beispiel ist, daß die Folge  $f_n(x)$  zwei Häufungspunkte besitzt, also betrachten wir vorerst monoton wachsende Folgen von Treppenfunktionen  $f_n$ :

**Lemma.**

*Sei eine monoton wachsende Folge von Treppenfunktionen  $f_n$  vorgeben. Dann konvergiert  $f_n$  bezüglich der 1-Norm genau dann in  $\tilde{T}$ , wenn die Integrale  $\int f_n$  (nach oben) beschränkt bleiben.*

*Unter dieser äquivalenten Bedingungen ist das Supremum  $\sup_n f_n(x)$  fast überall endlich.*

*Für jede Nullmenge findet man eine solche Folge von Treppenfunktionen  $f_n$ , welche auf dieser Menge divergiert.*

Man sagt, daß eine Aussage FAST ÜBERALL gilt, wenn sie mit Ausnahme einer Nullmenge gilt.

Eine NULLMENGE ist eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$ , mit der Eigenschaft, daß für jedes  $\varepsilon > 0$  Mengen  $A_n \in \mathcal{A}$  existieren mit  $A \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \varepsilon$ . Äquivalent dazu ist die Existenz von  $A_n \in \mathcal{A}$  mit  $A_n \subseteq A_{n+1}$  und  $\mu(A_n) \leq \varepsilon$  und  $A \subseteq \bigcup_n A_n$  (Hinweis: Ersetze  $A_n$  durch  $\bigcup_{k \leq n} A_k$ ).

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Sei  $f_n$  bezüglich der 1-Norm konvergent, dann ist  $f_n$  eine Cauchy-Folge also ist  $\int f_n$  beschränkt, da  $\int$  stetig und linear ist.

( $\Leftarrow$ ) Sei nun  $f_n$  eine wachsende Folge von Treppenfunktionen mit  $\sup_n \int f_n < \infty$ , dann existiert der Limes  $K$  der wachsenden beschränkten Folge  $\int f_n$ . Folglich gilt für  $n \geq m$ :

$$\int \underbrace{|f_n - f_m|}_{\geq 0} = \int f_n - \int f_m \rightarrow K - K = 0 \text{ für } n, m \rightarrow \infty,$$

also ist  $f_n$  eine Cauchy-Folge in  $T$ .

Sei  $g_n := f_n - f_0 \geq 0$  und  $K := \sup\{\int g_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Für  $\varepsilon > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_{\varepsilon,n} := \{x : g_n(x) \geq \frac{K}{\varepsilon}\}$ . Klarerweise ist  $A_{\varepsilon,n+1} \supseteq A_{\varepsilon,n} \in \mathcal{A}$  und es ist  $\mu(A_{\varepsilon,n}) \leq \varepsilon$ , denn wegen  $g_n \geq 0$  ist

$$\frac{K}{\varepsilon} \mu(A_{\varepsilon,n}) \leq \int_{A_{\varepsilon,n}} g_n \leq \int g_n \leq K.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} f_n(x) \text{ ist divergent} &\Leftrightarrow g_n(x) \text{ ist divergent} \\ &\Leftrightarrow g_n(x) \text{ ist unbeschränkt} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n : x \in A_{\varepsilon,n} \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : x \in \bigcup_n A_{\varepsilon,n}, \end{aligned}$$

also ist die Menge der Punkte  $x$ , wo  $g_n(x)$  divergiert, eine 0-Menge.

Sei nun  $N$  eine Nullmenge. Dann existieren für jedes  $n$  eine Folge von Intervallen  $A_{n,k} \in \mathcal{A}$ , s.d.  $A_{n,k} \subseteq A_{n,k+1}$ ,  $N \subseteq \bigcup_k A_{n,k}$  und  $\mu(A_{n,k}) \leq 2^{-n}$ . Es sei  $f_m := \sum_{n \leq m} \chi_{A_{n,m}} \in T$ . Dann gilt

$$\int f_m \leq \sum_{n \leq m} \int \chi_{A_{n,m}} \leq \sum_{n \leq m} \mu(A_{n,m}) \leq \sum_{n \leq m} 2^{-n} \leq 1.$$

Für alle  $x \in N$  divergiert  $f_m(x)$  für  $m \rightarrow \infty$ , denn für alle  $n$  existiert ein  $k_n$  mit  $x \in A_{n,k_n}$ . Wählen wir nun  $m := \max\{n, k_1, \dots, k_n\}$ , so gilt  $f_m(x) \geq \sum_{k=1}^n \chi_{A_{k,m}}(x) = n$ , also ist  $f_m(x)$  unbeschränkt.  $\square$

**Definition.**

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  heißt MESSBAR, wenn sie fast überall der Limes einer Folge von Funktionen  $f_n \in T$  ist.

Sie heißt LEBESGUE-INTEGRIERBAR, wenn die  $f_n$  zusätzlich so gewählt werden können, daß sie eine Cauchy-Folge in  $T$  bilden.

Sie heißt  $L^+$ -FUNKTION, wenn  $n \mapsto f_n$  noch zusätzlich monoton wachsend gewählt werden kann.

Wir wollen nun jedem Element  $\varphi \in \tilde{T}$  eine Lebesgue-integrierbare Funktion zuordnen. Dazu benötigen wir die

**Folgerung.**

Für jedes  $\varphi \in \tilde{T}$  existieren  $f_n \in T$ , welche bezüglich der 1-Norm gegen  $\varphi$  konvergieren, und welche fast überall punktweise (gegen eine Lebesgue-integrierbare Funktion) konvergieren.

**Beweis.** Da  $T$  dicht ist in  $\tilde{T}$ , existiert eine gegen  $\varphi$  in der 1-Norm konvergente Folge von Treppenfunktionen  $f_n \in T$ . Durch Übergang zu einer Teilfolge dürfen wir annehmen, daß für  $s_n := f_n - f_{n-1}$  die Reihe  $\sum_n \|s_n\|_1$  konvergiert (Hinweis: es existieren  $n_k$  mit  $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq \frac{1}{2^k}$ ). Also konvergiert die Reihe der positiven Anteile  $s_n^+ := \max\{s_n, 0\}$  und jene der negativen Anteil  $s_n^- := \max\{-s_n, 0\}$  fast überall, denn diese Reihen sind wachsend und  $\int \sum_{k \leq n} s_k^\pm = \sum_{k \leq n} \int s_k^\pm \leq \sum_{k \leq n} \int |s_k| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \|s_k\|_1 < \infty$ . Folglich konvergiert die Teleskopsumme  $f_n - f_0 = \sum_{k \leq n} s_k = \sum_{k \leq n} s_k^+ - \sum_{k \leq n} s_k^-$  fast überall.  $\square$

Der Raum  $L^+$  ist nicht abgeschlossen unter Differenzenbildung, aber es gilt die

**Folgerung.**

Der von  $L^+$  erzeugten Vektorraum besteht gerade aus den Lebesgue-integrierbaren Funktionen. D.h. eine Funktion  $f$  ist genau dann Lebesgue-integrierbar, falls zwei Funktionen  $g$  und  $h$  in  $L^+$  existieren, s.d.  $f = g - h$  ist.

**Beweis.** ( $\Downarrow$ ) Es sei  $f = g - h$ , wobei  $g, h \in L^+$ . Dann existieren Treppenfunktionen  $g_n$  und  $h_n$ , welche monoton fast überall gegen  $g$  und  $h$  konvergieren, und welche Cauchy-Folgen bezüglich der 1-Norm sind. Die Differenzfolge  $g_n - h_n$  konvergiert dann natürlich fast überall gegen  $f = g - h$  und ist eine Cauchy-Folge bezüglich der 1-Norm.

( $\Uparrow$ ) Es sei  $f_n$  eine Cauchy-Folge in  $T$ , welche fast überall gegen  $f$  konvergiert. Wir haben oben gezeigt, daß eine Teilfolge existiert, die sich in eine Differenz von zwei monotonen Folgen mit beschränkten Integralfolgen zerlegen läßt. Also ist  $f = g - h$ , wobei  $g$  und  $h$  die Grenzwerte fast überall dieser monotonen Folgen sind, d.h. in  $L^+$  liegen.  $\square$

Wir wollen nun eine Bijektion von  $\tilde{T}$  mit dem Raum der integrierbaren Funktionen finden. Dazu liegt es nahe die Abbildung zu betrachten, die einem  $\varphi \in \tilde{T}$  wie folgt eine integrierbare Funktion  $f$  zuordnet: Wir wählen eine gegen  $\varphi$  konvergente Folge von Treppenfunktionen  $f_n$ , die zusätzlich fast überall konvergiert. Die Funktion  $f$  definieren wir dann durch  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ . Damit ist aber  $f$  nur fast überall festgelegt. Also müssen wir anstelle des Raums der integrierbaren Funktionen den Quotientenraum

$$L^1 := \{f : f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\} / \{f : f = 0 \text{ f.ü.}\}.$$

Daß dies eine bijektive lineare wohldefinierte Abbildung von  $\tilde{T}$  auf  $L^1$  liefert, zeigt folgendes

**Lemma.**

*Es sei  $f_n$  eine Folge in  $T$ , welche gegen  $\varphi \in \tilde{T}$  konvergiert und für welche  $f_n$  fast überall gegen  $f$  konvergiert. Dann ist  $\varphi = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  fast überall.*

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es sei  $\varphi = 0$  und wir wählen eine Teilfolge, die wir wieder mit  $f_n$  bezeichnen, so daß  $\|f_n\|_1 \leq 2^{-n}$ . Wir müssen zeigen, daß  $N := \{x : \exists f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \neq 0\}$  eine Nullmenge ist. Es sei  $m \in \mathbb{N}$  und  $x \in N$ , dann ist  $|f(x)| > 2^{-n}$  für ein  $n > m$  und somit  $|f_k(x)| > 2^{-n}$  für ein  $k > 2n$ . Folglich ist  $N \subseteq \bigcup_{n>m} \bigcup_{k>2n} A_{n,k}$ , wobei  $A_{n,k} := \{x : |f_k(x)| > 2^{-n}\} \in \mathcal{A}$ . Weiters ist

$$2^{-k} \geq \|f_k\|_1 \geq 2^{-n} \mu(A_{n,k}) \Rightarrow \mu(A_{n,k}) \leq 2^{n-k}$$

und somit

$$\sum_{\substack{n>m \\ k>2n}} \mu(A_{n,k}) \leq \sum_{\substack{n>m \\ j:=k-2n>0}} 2^{n-k} = \sum_{n>m} 2^{-n} \sum_{j>0} 2^{-j} = 2^{-m}.$$

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $f = 0$  f.ü. und wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß  $\|f_{n+1} - f_n\| \leq 2^{-n}$ . Es sei  $N$  die 0-Menge  $\{x : \exists \lim_n f_n(x) \Rightarrow \lim_n f_n(x) \neq 0\}$ . Für fixes  $\varepsilon > 0$  und  $m \geq n$  sei  $A_{n,m} := \{x : \sum_{i=n}^m |f_{i+1}(x) - f_i(x)| > \varepsilon\}$ . Dann ist  $\mathcal{A} \ni A_{n,m} \subseteq A_{n,m+1}$  und  $\varepsilon \mu(A_{n,m}) \leq \int \sum_{i=n}^m |f_{i+1} - f_i| \leq \sum_{i=n}^m 2^{-i} \leq 2^{-n+1}$ . Für  $x \notin N \cup \bigcup_{m \geq n} A_{n,m}$  ist

$$|f_n(x)| \leq \underbrace{|f_{m+1}(x)|}_{\rightarrow 0 \text{ für } m \rightarrow \infty} + \underbrace{\sum_{i=n}^m |f_{i+1}(x) - f_i(x)|}_{\leq \varepsilon \text{ für alle } m}$$

Also ist

$$\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\} \subseteq N \cup \bigcup_{m \geq n} A_{n,m} \subseteq \bigcup_{m \geq n} A_{n,m} \cup N_{n,m},$$

wobei  $N \subseteq \bigcup_m N_{n,m}$  mit  $N_{n,m+1} \supseteq N_{n,m} \in \mathcal{A}$  und  $\mu(N_{n,m}) \leq \frac{1}{2^n}$ . Da die Mengen  $N_{n,m} \cup A_{n,m}$  monoton in  $m$  wachsen und

$$\mu(N_{n,m} \cup A_{n,m}) \leq \mu(N_{n,m}) + \mu(A_{n,m}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{2}{\varepsilon 2^n} = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)$$

ist

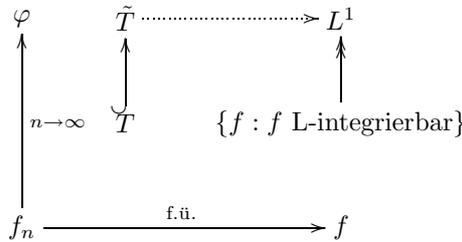
$$\mu(\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\}) \leq \sup\{\mu(N_{n,m} \cup A_{n,m}) : m \geq n\} \leq \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right).$$

Also konvergiert  $\mu(\{x : |f_n(x)| > \varepsilon\}) \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Man sagt auch  $f_n$  sei MASSKONVERGENT gegen 0.

Es sei  $\delta > 0$  beliebig und  $A_n := \{x : f_n(x) \neq 0\}$ . Dann liegt  $A_n \in \mathcal{A}$ ,  $\mu(A_n) < \infty$  und somit ist

$$\begin{aligned} \|f_k\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^m \setminus A_n} \underbrace{|f_k|}_{=|f_k - f_n|} + \int_{\{x \in A_n : |f_k| \leq \delta\}} \underbrace{|f_k|}_{\leq \delta} + \int_{\{x \in A_n : |f_k| > \delta\}} \underbrace{|f_k|}_{\leq |f_n| + |f_k - f_n|} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m \setminus A_n} |f_k - f_n| + \delta \mu(A_n) + \|f_n\|_\infty \mu(\{x : |f_k(x)| > \delta\}) + \int_{A_n} |f_k - f_n| \\ &\leq \|f_k - f_n\|_1 + \delta \mu(A_n) + \|f_n\|_\infty \mu(\{x : |f_k(x)| > \delta\}) \end{aligned}$$

Es existiert ein  $N(\varepsilon)$ , s.d. der 1.te Term kleiner als  $\varepsilon$  ist für  $k, n \geq N(\varepsilon)$ . Wir setzen  $n := N(\varepsilon)$ , dann existiert ein hinreichend kleines  $\delta > 0$ , s.d. der 2.te Term kleiner als  $\varepsilon$  ist. Da  $f_k$  maßkonvergent gegen 0 ist, existiert nun ein  $K \geq N(\varepsilon)$ , s.d. der letzte Term ebenfalls kleiner als  $\varepsilon$  ist für alle  $k \geq K$ . Folglich konvergiert  $\|f_k\|_1 \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .  $\square$



**Zusammenfassung.**

Die Vervollständigung  $\tilde{T}$  ist als Vektorraum isomorph zu  $L^1$ . Der Isomorphismus ist dadurch gegeben, daß man zu gegebenen  $\varphi \in \tilde{T}$  eine Cauchy-Folge  $f_n \in T$  wählt, die zusätzlich noch fast überall punktweise konvergiert. Und dann  $\varphi$  die Restklasse dieses Grenzwertes  $f$  zuordnet.

**Beweis.** Diese Abbildung ist wohldefiniert, denn die Differenz  $g_n - h_n$  zweier gegen  $\varphi$  konvergierender Folgen, konvergiert gegen 0, also konvergiert sie punktweise fast überall gegen  $0 = g - h$ .

Sie ist klarerweise linear und nach Konstruktion surjektiv. Injektiv ist sie, da  $f = 0$  fast überall die Aussage  $\varphi = 0$  zur Folge hat.

Sowohl  $\|\cdot\|_1$  als auch  $\int$  sind also wohldefiniert und stetig auf  $L^1$ , und es gilt  $\|f\|_1 = \int |f|$ , da diese Gleichung auf den dichten Teilraum  $T$  gilt. Die Abbildung  $\varphi \mapsto [f]$  ist folglich eine Isometrie von  $\tilde{T}$  mit  $L^1$ , und somit ist  $L^1$  die Vervollständigung von  $T$ .  $\square$

In der Integrationstheorie (siehe z.B. [Kri98]) zeigt man folgende Sätze über den Zusammenhang zwischen punktweiser Konvergenz und Konvergenz in der 1-Norm:

**Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz.**

$f_n$  integrierbar,  $\{\int_X f_n : n \in \mathbb{N}\}$  beschränkt,  $f_n$  monoton-wachsend. Dann konvergiert  $f_n$  fast überall gegen eine integrierbare Funktion  $f$  und  $\int f = \lim \int f_n$ .

**Lemma von Fatou.**

Es seien  $f_n$  nicht-negativ und integrierbar und konvergiert  $f_n$  gegen  $f$  fast überall, und ist  $\int f_n$  beschränkt, so ist  $f$  integrierbar.

**Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz.**

Es sei  $f_n$  integrierbar mit  $|f_n| \leq g$  fast überall, wobei  $g$  integrierbar ist. Falls  $f_n \rightarrow f$  fast überall, so ist  $f$  integrierbar und  $\lim_n \int_X f_n = \int_X f$ .

**Satz von Fubini.**

Es sei  $f$  am  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$  integrierbar. Dann existiert  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$  für fast alle  $x \in \mathbb{R}^{m-n}$ , weiters ist  $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy$  integrierbar am  $\mathbb{R}^{m-n}$  und

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^{m-n}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y) dy dx.$$

**Definition.**

Mit  $L^p$  bezeichnet man den Raum der meßbaren Funktionen, für welche  $|f|^p$  Lebesgue-integrierbar ist, modulo dem Teilraum der fast überall verschwindenden Funktionen. Für  $f \in L^p$  ist  $\|f\|_p := (\int |f|^p)^{1/p}$  wohldefiniert.

Für  $p = \infty$  definiert  $L^\infty$  als Quotient der beschränkten, meßbaren Funktionen modulo dem Teilraum der fast überall verschwindenden Funktionen. Die Norm  $\|f\|_\infty$  definiert man dann als die Quotienten Norm, d.h.

$$\|f\|_\infty := \inf\{\|g\|_\infty : g = f \text{ fast überall}\} = \inf\{\|f\|_{X \setminus N} : N \text{ ist Nullmenge}\}$$

Man zeigt leicht, daß für  $L^p$  die Hölder-Ungleichung und die Minkowski-Ungleichung gelten, und somit  $L^p$  ein normierter Raum ist. Mittels obiger Konvergenzsätze zeigt man dann:

**Proposition.**

Der Raum  $L^p$  ist ein Banach-Raum.

**Bemerkung.**

Falls  $I$  ein Intervall im  $\mathbb{R}^m$  ist, so nennt man  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar falls die Fortsetzung  $\tilde{f}$  durch 0 auf  $\mathbb{R}^m$  integrierbar ist. Man setzt  $\int_I f := \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{f}$ . Die auf diese Weise erhaltenen Teilräume  $L^p(I) \subseteq L^p(\mathbb{R}^m)$ ,  $f \mapsto \tilde{f}$ , sind dann ebenfalls Banach-Räume.

Falls  $\mu(I) < \infty$  und  $p \geq q$ , dann gilt  $L^p(I) \subseteq L^q(I)$ . Für  $q = 1$  folgt das aus der Hölder-Ungleichung  $\|f\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|1\|_q$ , und für  $p = \infty$  aus  $\|f\|_q \leq \|f\|_\infty \cdot \mu(I)^{1/q}$ . Nach der Hölder-Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_q^q &= \int |f|^q \cdot 1 \leq \left( \int (|f|^q)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{q}{p}} \cdot \left( \int 1^{1-\frac{p}{q}} \right)^{1/(1-\frac{p}{q})} \\ &= (\|f\|_p)^q \cdot \mu(I)^{1/(1-\frac{p}{q})}, \end{aligned}$$

und somit ist

$$\|f\|_q \leq \mu(I)^{1/(q-p)} \|f\|_p.$$

Insbesondere liegt  $L^\infty$  in  $\bigcap_{p < \infty} L^p$ : Es gilt aber nicht Gleichheit, denn  $x \mapsto \log(x)$  ist in  $L^p[0, 1]$  für alle  $p \geq 1$ , aber nicht in  $L^\infty$ .

Im diskreten Fall  $\ell^p \supseteq \ell^q$  für  $p \geq q$ , da die Reihenreste von  $\sum_k |x_k|^p$  durch die von  $\sum_k |x_k|^q$  dominiert werden ( $|x_k| \leq 1$ ).

Für unbeschränkte Intervalle  $I$  gelten im allgemeinen keine Relationen zwischen den  $L^p$ 's. Es gilt  $\frac{1}{x^p} \in L^1[1, +\infty) \Leftrightarrow p > 1$ , also ist  $\frac{1}{x^{1/p}} \in L^q \Leftrightarrow \frac{1}{x^{q/p}} \in L^1 \Leftrightarrow q > p$ , und somit  $\frac{1}{x^{1/p}} \in L^q \setminus L^p$  für  $q > p$ . Umgekehrt gilt  $\frac{1}{x^p} \in L^1(0, 1] \Leftrightarrow 0 < p < 1$ , also ist  $\frac{1}{x^{1/p}} \in L^q \Leftrightarrow \frac{1}{x^{q/p}} \in L^1 \Leftrightarrow q < p$ , und somit  $\frac{1}{x^{1/p}} \in L^q \setminus L^p$  für  $q < p$ .

**Sobolev-Räume.**

Man kann nun auch Vervollständigungen von Räumen differenzierbarer Funktionen bezüglich Analoga der  $p$ -Norm betrachten. Sei dazu  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  offen,  $k \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq p < \infty$ . Dann sei der SOBOLEV-RAUM  $W^{k,p}(\Omega)$  die Vervollständigung des normierten Raums aller Funktionen  $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$  mit  $\|f\|_{k,p} < \infty$  bezüglich der Norm

$$\|f\|_{k,p} := \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{1/p}.$$

Da  $C^\infty$  in  $C^k$  dicht liegt bezüglich der Norm  $\|f\| := \max\{\|\partial^\alpha f\| : |\alpha| \leq k\}$  kann man  $W^{k,p}$  ebensogut als Vervollständigung der entsprechenden Funktionen in  $C^k$  bezüglich der  $(k,p)$ -Norm definieren.

Man kann  $W^{k,p}$  auch mit den Distributionen  $f \in \mathcal{D}(\Omega)'$  identifizieren, für welche  $\partial^\alpha f \in L^p$  liegt für alle  $|\alpha| \leq k$ , siehe [Yos80, S.55] oder [BN73, S.149]. Die Vervollständigung von  $C_c^\infty$  bezüglich der  $(k,p)$ -Norm wird mit  $W_c^{k,p}$  bezeichnet. Für  $\Omega = \mathbb{R}^m$  gilt  $W^{k,2} = W_c^{k,2}$ , siehe [Yos80, S.58].

**4.14 Maßtheorie****Meßbare Mengen.**

Wir nennen eine Menge  $A \subset \mathbb{R}^n$  MESSBAR, falls  $\chi_A$  auf jedem kompakten Intervall  $K$  integrierbar ist. Mit  $\mu(A)$  bezeichnen wir das Supremum  $\int_K \chi_A$ . Dann hat die Familie  $\mathcal{M}$  aller meßbaren Mengen, die gleichen Eigenschaften wie  $\mathcal{A}$ , und zusätzlich ist auch noch die abzählbare Vereinigung meßbarer Mengen meßbar, nach den Satz über monotone Konvergenz. So eine Familie heißt  $\sigma$ -Algebra.

Die Funktion  $\mu$  ist dann ein Maß auf  $\mathcal{M}$ , und  $\mathcal{M}$  ist VOLLSTÄNDIG bezüglich dieses Maßes, d.h. ist  $M$  eine Nullmenge, so gehört  $M$  zu  $\mathcal{M}$  und  $\mu(M) = 0$ .

Man kann nun obige Konstruktion von  $L^p$  noch verallgemeinern, indem man mit einer beliebigen  $\sigma$ -ALGEBRA  $\mathcal{A}$  auf einer Menge  $X$  startet. D.h. mit eine Menge  $\mathcal{A}$  von Teilmengen von  $X$ , s.d. .

1.  $\emptyset \in \mathcal{A}$ ;
2.  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow X \setminus A \in \mathcal{A}$ ;
3.  $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ , abzählbar  $\Rightarrow \bigcup \mathcal{F} \in \mathcal{A}$ .

Das Paar  $(X, \mathcal{A})$  bezeichnet man dann als MESSRAUM.

Weiters benötigt man noch ein MASS  $\mu$  auf  $(X, \mathcal{A})$ , d.h. eine Abbildung  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ , welche  $\sigma$ -additiv ist, d.h.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ , abzählbar und paarweise disjunkt  $\Rightarrow \mu(\bigcup \mathcal{F}) = \sum_{A \in \mathcal{F}} \mu(A)$ .

Nun definiert man den Raum der ELEMENTAREN FUNKTIONEN als den von  $\chi_A$  mit  $A \in \mathcal{A}$  und  $\mu(A) < \infty$  erzeugten Raum.

Eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt MESSBAR, falls  $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$  für alle offenen  $U \subseteq \mathbb{R}$ . Da jede offene Menge  $U \subseteq \mathbb{R}$  abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen ist, jedes offene Intervall  $(a, b)$  der Durchschnitt von  $(-\infty, b) \cap (a, +\infty)$  ist, und  $(a, +\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \setminus (-\infty, a + \frac{1}{n})$  ist, genügt es, daß  $f_{<c} \in \mathcal{A}$  für alle  $c$ . Andererseits ist natürlich auch  $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$  für jede Borel-Menge  $A \subseteq \mathbb{R}$  (siehe (5.1)).

Eine Funktion ist ELEMENTAR, wenn sie meßbar ist und nur endlich viele Werte annimmt.

**Satz.**

Jede meßbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, +\infty]$  ist punktwieser Grenzwert einer monoton wachsenden Folge elementarer Funktionen. Ist  $f$  beschränkt, so ist die Konvergenz gleichmäßig. Die meßbaren Funktionen sind die punktwiesigen Grenzwerte von Folgen elementarer Funktionen. Der Raum der meßbaren Funktionen ist unter punktwiesigen Grenzwerten von Folgen abgeschlossen. Er ist ein Vektorraum und abgeschlossen unter  $\sup$ ,  $\inf$ ,  $\liminf$ ,  $\limsup$  und Zusammensetzung mit stetigen (oder sogar Borel-meßbaren) Funktionen.

**Beweis.** Es seien  $f_n$  meßbar, und  $f := \sup_n f_n$  sei überall endlich. Dann ist  $f$  meßbar, denn  $f_{\leq c} = \bigcap_n (f_n)_{\leq c}$ . Weiters ist  $\limsup_n f_n = \inf_n \sup_{k \geq n} f_k$  und  $\liminf_n f_n = \sup_n \inf_{k \geq n} f_k$  meßbar. Also ist auch  $\lim_n f_n$  meßbar.

Sei nun  $f$  meßbar. Da  $f = f^+ - f^-$  mit  $f^+ = \max(f, 0) \geq 0$  und  $f^- = \max(-f, 0) \geq 0$  ist, dürfen wir annehmen daß  $f \geq 0$ . Dann ist

$$f_n := \begin{cases} \frac{k}{n} & \text{falls } \frac{k}{n} \leq f(x) < \frac{k+1}{n} \text{ mit } k < n^2 \\ n & \text{falls } f(x) \geq n. \end{cases}$$

eine elementare Funktion (Achtung  $\mu(f^{-1})(a) \not\leq \infty$ ). Und  $(f_n)_n$  konvergiert punktwise von unten gegen  $f$ .  $\square$

**Definition.**

Ist  $\mathcal{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\mu$  ein Maß auf ihr. Dann ist klar was  $\int_X f d\mu$  für elementare, nicht-negative Funktionen bedeutet. Durch obigen Satz können wir für nicht-negative meßbare Funktionen  $f$ , das Integral  $\int_X f d\mu$  als  $\sup_n \int_X f_n d\mu$  definieren, wobei die  $f_n$  eine monoton wachsende Folge von elementaren nicht-negativen Funktionen bilden, die punktwise gegen  $f$  konvergiert. Eine solche Funktion  $f$  heißt INTEGRABEL falls  $\int_X f d\mu < \infty$ . Es gilt  $\int_X f d\mu = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  fast überall.

Eine meßbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  heißt INTEGRABEL, falls ihr positiver Teil  $f^+ := \max\{f, 0\}$  und ihr negativer Teil  $f^- := \max\{-f, 0\}$  integrabel sind. Mit  $\int_X f d\mu$  bezeichnet man dann  $\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ .

Wie oben definiert man nun  $L^1(\mathcal{A}, \mu)$ . Jede Funktion in  $L^1(\mathcal{A}, \mu)$  ist meßbar. Mit  $L^p(\mathcal{A}, \mu)$  bezeichnet man den Raum der meßbaren Funktionen, für welche  $|f|^p$  in  $L^1$  liegt, modulo Gleichheit fast überall. Es ist dann  $\|f\|_p := (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$  wohldefiniert.

Für  $p = \infty$  definiert  $L^\infty$  als Quotient der beschränkten, meßbaren Funktionen modulo "fast überall Gleichheit". Die Norm  $\|[f]\|_\infty$  definiert man dann als die Quotienten Norm, d.h.

$$\|[f]\|_\infty := \inf\{\|g\|_\infty : g = f \text{ fast überall}\} = \inf\{\|f|_{X \setminus N}\|_\infty : N \text{ ist Nullmenge}\}$$

Es gilt:

**Majorantenkriterium.**

Ist  $f$  meßbar und  $g$  integrabel, mit  $|f| \leq g$  fast überall, so ist auch  $f$  integrabel.

**Satz.**

Es ist  $L^p$  ein Vektorraum und es gelten die Hölder und die Minkowski-Ungleichung auch für diese Funktionen.  $L^p(\mathcal{A}, \mu)$  ist die Vervollständigung der elementaren Funktionen bezüglich der  $p$ -Norm. Für die Funktionen in  $L^p(\mathcal{A}, \mu)$  gelten wieder die Sätze über monotone und dominierte Konvergenz, sowie das Lemma von Fatou.

**Beweis.** Für die Minkowski-Ungleichung verwendet man, daß mit  $p$ -integrierbaren  $f$  und  $g$  auch  $f + g$  es ist, denn  $|f + g|^p \leq (2 \max\{|f|, |g|\})^p \leq 2^p \max\{|f|^p, |g|^p\}$  ist integrierbar nach dem Majorantenkriterium.

Für die Vollständigkeit genügt es nach (3.4) zu zeigen, daß jede absolut-summierbare Folge von Funktionen  $f_n$  summierbar ist. Wir setzen  $a_n := \sum_{k \leq n} |f_k| \in L^p$  und  $c := \sum_k \|f_k\|_p$ . Dann gilt  $a_n \in L^p$  und  $a_n$  ist monoton wachsend. Weiters ist  $\int (a_n)^p = \|a_n\|_p^p \leq c^p$ . Aus dem Satz über monotone Konvergenz für  $(a_n)^p$  folgt also, daß  $(a_n)^p$  fast überall gegen ein  $a \in L^1$  konvergiert. Da  $a \geq 0$  ist, konvergiert  $a_n$  fast überall gegen  $b := a^{1/p} \in L^p$ . Die Funktionen  $s_n := \sum_{k \leq n} f_k$  sind meßbar und konvergieren fast überall gegen eine Funktion  $s$ , da die Reihe  $\sum f_k$  sogar fast überall absolut-konvergiert. Die Funktion  $s$  ist daher ebenfalls meßbar, also auch  $s^p$ . Da  $|s^p| \leq a \in L^1$ , ist  $s^p \in L^1$  und damit  $s \in L^p$ .

Es bleibt zu zeigen, daß  $\|s_n - s\|_p^p \rightarrow 0$ : Da  $|s_n - s| \rightarrow 0$  fast überall, gilt gleiches auch für  $|s_n - s|^p$ , und da  $|s_n - s| \leq |s_n| + |s| \leq a_n + |s| \leq 2b \in L^p$  folgt aus dem Satz über dominierte Konvergenz, daß  $\int |s_n - s|^p \rightarrow 0$ .  $\square$

### Satz von Fubini.

Es seien  $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  bezüglich dem Produktmaß  $\mu_1 \otimes \mu_2$  integrierbar. Dann ist  $f(x, \cdot)$  fast überall bezüglich  $x$  eine  $\mu_2$ -integrierbare Funktion,  $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) d\mu_2(y)$  ist  $\mu_1$ -integrierbar und

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f d\mu_2 \right) d\mu_1.$$

Dabei ist die  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$  die von  $\{A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra, und  $\mu_1 \otimes \mu_2$  die eindeutige Fortsetzung des Maßes  $(A_1 \times A_2 \mapsto \mu_1(A_1) \mu_2(A_2))$ .

Eine Maßraum  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  heißt  $\sigma$ -ENDLICH falls  $A_n \in \mathcal{A}$  existieren mit  $\mu(A_n) < \infty$  und  $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

## 4.15 Faltung

Für stetige Funktionen  $f$  und  $g$  am  $\mathbb{R}^m$ , wobei eine kompakten Träger hat, haben wir in (4.9) die Faltung als

$$f \star g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x - y) g(y) dy$$

definiert. Wir wollen diese Definition nun ausdehnen.

### Lemma.

1.  $f \in L^p, g \in L^q, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$  mit  $1 \leq p, q, r \leq \infty \Rightarrow f \star g \in L^r$ ,  
 $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ .
2. Falls  $r = \infty$ , so gilt sogar  $f \star g \in C$ .

Die Faltung ist bilinear, kommutativ und assoziativ.

Interessante Spezialfälle sind:  $p = 1 \Rightarrow q = r$  sowie  $p = q = r = 1$ . Letzterer hat zur Folge, daß  $L^1$  bezüglich der Faltung eine Banach-Algebra ohne 1 wird. Siehe [BN73, S.90].

**Beweis.** Wir begnügen uns mit dem Fall  $p = q = r = 1$ . Dann ist  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$  meßbar auf  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  und  $\int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} |f(x)g(y)| d(x, y) = \|f\|_1 \|g\|_1$ , also ist wegen des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| |g(x - y)| dy dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| |g(x - y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^m} |g(x - y)| dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)| \int_{\mathbb{R}^m} |g(z)| dz dy \\ &= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 \end{aligned}$$

Wegen des Satzes von Fubini ist also  $|f(y)| |g(x - y)|$  fast überall für  $x$  bezüglich  $y$  absolut-integrierbar, d.h.  $(f \star g)$  ist definiert. Und  $f \star g$  ist integrierbar mit  $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ .  $\square$

Lokal Lebesgue-integrierbare Funktionen  $f$  können wir ebenfalls als Distributionen auffassen vermöge

$$f(g) := \int_{\mathbb{R}^m} f(x)g(x) dx.$$

Wegen der Minkowski-Ungleichung ist dies nämlich für  $g \in L^1$  mit kompakten Träger  $K$  wohldefiniert und beschreibt ein stetig lineares Funktional sogar auf  $L^1(K)$ . Z.B. definiert  $x \mapsto \log|x|$  eine lokal integrierbare Funktion und somit eine Distribution in  $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ . Deren Ableitung bezeichnen wir uner Mißbrauch der Notation mit  $\frac{1}{x}$ . Beachte aber, daß  $x \mapsto \frac{1}{x}$  nicht lokal integrierbar ist.

Wir wollen nun folgende Inklusionen auf Dichtheit überprüfen:

$$C_K^\infty \hookrightarrow C_k^\infty \twoheadrightarrow C^\infty \twoheadrightarrow C \twoheadrightarrow R \longrightarrow L^1 \twoheadrightarrow \mathcal{D}$$

### Träger einer Distribution

Nun wollen wir die Faltung auf Distributionen ausdehnen. Dazu benötigen wir den Begriff des Trägers auch für Distributionen. Eine Distribution  $\varphi$  auf  $\mathcal{D}(\Omega)$  hat zwar keine Werte in einzelnen Punkten, aber für offenes  $U \subseteq \Omega$  können wir definieren, was  $\varphi|_U = 0$  bedeutet: Man sagt  $\varphi$  verschwindet auf  $U$ , falls für alle  $f \in \mathcal{D}(\Omega)$  mit  $\text{Trg}(f) \subseteq U$  gilt:  $\varphi(f) = 0$ . Unter dem TRÄGER EINER DISTRIBUTION  $\varphi$  versteht man die kleinste abgeschlossene Menge  $A$ , s.d.  $\varphi|_{\mathbb{R}^m \setminus A} = 0$ . Diese Definition liefert für lokal integrierbare Funktionen die übliche Definition. Die Delta-Distribution  $\delta$  hat z.B. den kompakten Träger  $\{0\}$ . Man beachte weiters, daß  $\text{Trg}(\partial^\alpha \varphi) \subseteq \text{Trg}(\varphi)$  gilt.

**Lemma.**

*Eine Distribution hat genau dann kompakten Träger, wenn sie die Einschränkung einer (eindeutigen) stetig linearen Abbildung auf  $\mathcal{E}$  ist.*

**Beweis.** Es sei  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und linear. Dann existiert eine 0-Umgebung der Gestalt  $U := \{f : \|\partial^\alpha f|_K\| < \varepsilon \text{ für alle } |\alpha| \leq N\}$ , s.d.  $f \in U \Rightarrow |\varphi(f)| < 1$ . Sei nun  $f \in \mathcal{D}$  mit  $\text{Trg}(f) \subset \mathbb{R}^m \setminus K$ . Dann ist  $n \cdot f \in U$  für alle  $n$  und somit  $|\varphi(f)| \leq \frac{1}{n}$ , d.h.  $\varphi(f) = 0$ , d.h. der Träger von  $\varphi|_{\mathcal{D}}$  liegt in  $K$ .

Umgekehrt sei der Träger von  $\varphi$  kompakt. Wir wählen eine kompakte Menge  $K$ , deren Inneres den Träger enthält, und weiters eine glatte Funktion  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow [0, 1]$  mit  $h = 1$  auf einer Umgebung von  $\text{Trg}(\varphi)$  und  $\text{Trg}(h) \subset K$ . Dann ist die Abbildung  $f \mapsto h \cdot f$  von  $\mathcal{E} \rightarrow C_K^\infty(\mathbb{R}^m)$  wohldefiniert, linear und stetig (!). Weiters ist  $\varphi(f) =$

$\varphi(h \cdot f + (1-h) \cdot f) = \varphi(h \cdot f) + 0$  für alle  $f \in \mathcal{D}$ , und die rechte Seite definiert eine stetig lineare Abbildung  $\mathcal{E} \rightarrow C_K^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

### Faltung von Distributionen

Es seien  $g$  und  $f$  glatte Funktionen,  $f$  mit kompakten Träger. Die Spiegelung  $S(f)$  von  $f$  sei definiert durch  $x \mapsto f(-x)$  und die TRANSLATION  $T_a f$  von  $f$  um  $a$  durch  $x \mapsto f(x-a)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (g \star f)(x) &= (f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^m} S(f)(y-x) g(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} T_x(S(f))(y) g(y) dy = \langle T_x(S(f)), g \rangle = g(T_x(S(f))). \end{aligned}$$

Dies motiviert auch für eine Distribution  $\varphi$  die FALTUNG mit einer glatten Funktion  $f$  mit kompakten Träger als folgende Funktion zu definieren

$$(\varphi \star f)(x) := \varphi(T_x(S(f)))$$

In der Tat ist das Resultat sogar eine glatte Funktion.

**Beweis.** Es konvergiert

$$(\varphi \star f)(x+h) - (\varphi \star f)(x) = \varphi((T_h - id)T_x S f) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0,$$

da  $T_h f \rightarrow f$  in  $\mathcal{D}$ , also ist  $\varphi \star f$  stetig. Weiters konvergiert

$$\begin{aligned} \frac{(\varphi \star f)(x+h e_i) - (\varphi \star f)(x)}{h} &= \varphi \left( \frac{T_{h e_i} - id}{h} T_x S f \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \varphi(-\partial_i(T_x S f)) = \varphi(T_x S(\partial_i f)) = \varphi \star \partial_i f, \end{aligned}$$

also ist  $\varphi \star f$  differenzierbar und  $\partial_i(\varphi \star f) = \varphi \star \partial_i f$   $\square$

Insbesondere besteht folgender Zusammenhang zwischen Anwenden einer Distribution und Falten mit ihr:

$$\varphi(f) = \varphi(T_0(S(S(f)))) = (\varphi \star S(f))(0).$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ S \downarrow & & \uparrow \text{ev}_0 \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[\mathcal{L}]{\varphi \star (-)} & \mathcal{E} \end{array}$$

Berechnen wir als Beispiel

$$(\delta \star f)(x) = \delta(T_x(S(f))) = T_x(S(f))(0) = S(f)(0-x) = f(x),$$

d.h.  $\delta$  ist wirklich die gesuchte Einheit.

### Satz von Schwarz.

Die Faltungen mit Distributionen  $\varphi$  sind genau die stetigen linearen Abbildungen  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ , welche mit Translationen vertauschen.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Falten mit  $\varphi$  ist stetig: Es konvergiere  $f_n \rightarrow f$  in  $\mathcal{D}$ . Dann konvergiert  $T_x S f_n \rightarrow T_x S f$  in  $\mathcal{D}$  gleichmäßig für  $x$  in kompakten Mengen. Also konvergiert  $\varphi \star f_n \rightarrow \varphi \star f$  gleichmäßig auf kompakten Mengen, und wegen  $\partial^\alpha(\varphi \star f) = \partial^\alpha \varphi \star f$

auch in allen Ableitungen, d.h.  $\varphi \star f_n \rightarrow \varphi \star f$  in  $\mathcal{E}$ .  
Die Faltung vertauscht mit Translationen, da

$$\begin{aligned} (T_h \circ (\varphi \star f))(x) &= (\varphi \star f)(x - h) = \varphi(T_{x-h}Sf) = \varphi(T_x T_{-h}Sf) = \\ &= \varphi(T_x S T_h f) = (\varphi \star T_h f)(x). \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $L : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  eine stetig lineare Abbildung die mit Translationen vertauscht. Wir definieren  $\varphi(f) := L(Sf)(0)$ . Dann ist  $\varphi$  eine Distribution und

$$\begin{aligned} (\varphi \star f)(x) &= \varphi(T_x Sf) = L(ST_x Sf)(0) = L(T_{-x}SSf)(0) \\ &= T_{-x}(Lf)(0) = (Lf)(x). \quad \square \end{aligned}$$

Um nun die Faltung zweier Distributionen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  zu definieren, wobei eine - sagen wir  $\varphi_2$  - kompakten Träger hat nehmen wir die Assoziativität an, d.h. für  $f \in \mathcal{D}$  die Gleichung

$$(\varphi_1 \star \varphi_2) \star f = \varphi_1 \star (\varphi_2 \star f).$$

Die rechte Seite definiert eine stetig lineare Abbildung  $\mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_2 \star} \mathcal{D} \xrightarrow{\varphi_1 \star} \mathcal{E}$  die mit Translationen vertauscht. Also ist sie nach dem Satz von Schwarz durch Faltung mit einer Distribution gegeben, die wir  $\varphi_1 \star \varphi_2$  nennen. Deren Wirkung wird dann durch

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \star \varphi_2)(f) &= ((\varphi_1 \star \varphi_2) \star S(f))(0) := (\varphi_1 \star (\varphi_2 \star S(f)))(0) = \\ &= \varphi_1(S(\varphi_2 \star S(f))) = \varphi_1(S(\varphi_2) \star f) \end{aligned}$$

beschrieben. Äquivalent können wir auch die Abbildung  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  nehmen, welche  $f$  auf  $\varphi_2 \star (\varphi_1 \star f)$  abbildet.

Falten ist bilinear, kommutativ und assoziativ sofern höchstens ein Faktor nicht-kompakten Träger besitzt. Außerdem gilt  $\partial^\alpha(\varphi_1 \star \varphi_2) = (\partial^\alpha \varphi_1) \star \varphi_2 = \varphi_1 \star (\partial^\alpha \varphi_2)$ . Das liefert zum Beispiel

$$\delta' \star 1 = \delta \star 1' = \delta \star 0 = 0.$$

und  $\delta' \star H = \delta \star H' = \delta \star \delta = \delta$ . Somit gilt

$$(1 \star \delta') \star H = 0 \star H = 0 \neq 1 = 1 \star \delta = 1 \star (\delta' \star H).$$

**Lemma.**

Es sei  $f \geq 0$  eine glatte Funktion am  $\mathbb{R}^m$  mit kompakten Träger und  $\int_{\mathbb{R}^m} f = 1$ . Mit  $f_\varepsilon$  bezeichnen wir  $x \mapsto \varepsilon^{-m} f(\frac{x}{\varepsilon})$ . Dann gilt:  $f_\varepsilon \rightarrow \delta$  in  $\mathcal{E}'$ .

Man nennt solch ein Netz  $\varepsilon \mapsto f_\varepsilon$  eine APPROXIMIERENDE EINHEIT.

**Beweis.**

$$\begin{aligned} |f_\varepsilon(g) - \delta(g)| &= \left| \int f_\varepsilon(x) g(x) dx - \int f_\varepsilon(x) g(0) dx \right| \\ &\leq \int |f_\varepsilon(x) (g(x) - g(0))| dx \\ &\leq \underbrace{\|f_\varepsilon\|_1}_{=1} \cdot \|g'\|_\infty \cdot \underbrace{\sup\{|x| : x \in \text{Trg } f_\varepsilon = \varepsilon \text{Trg } f\}}_{\varepsilon \sup\{\text{Trg } f\}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

gleichmäßig für  $g$  in einer beschränkten Menge  $\square$

**Lemma.**

Weiters gilt  $f_\varepsilon \star \varphi \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{D}'$ . Insbesondere liegt  $C^\infty$  dicht in  $\mathcal{D}'$ .

**Beweis.** Da die Faltung mit  $\varphi$  stetig ist, konvergiert  $f_\varepsilon \star \varphi \rightarrow \delta \star \varphi = \varphi$  in  $\mathcal{D}'$   $\square$

**Lemma.**

Es sei  $f \in L^p$  und  $1 \leq p < \infty$ . Dann konvergiert  $\|T_h f - f\|_p \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .

**Beweis.** Wir wählen  $f_n \in C_c$  mit  $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$ . Da  $T_h$  eine Isometrie ist, gilt

$$\begin{aligned} \|T_h f - f\|_p &\leq \|T_h f - T_h f_n\|_p + \|T_h f_n - f_n\|_p + \|f_n - f\|_p \\ &\leq 2\|f - f_n\|_p + \|T_h f_n - f_n\|_p \\ &\leq 2\|f - f_n\|_p + \mu(\text{Trg}(f_n))^{1/p} \cdot \|T_h f_n - f_n\|_\infty \end{aligned}$$

und da  $f_n$  gleichmäßig stetig ist, konvergiert der letzte Ausdruck gegen 0.  $\square$

**Folgerung.**

Es sei  $g \in L^1$  und  $f_\varepsilon$  wie oben, dann konvergiert  $\|f_\varepsilon \star g - g\|_1 \rightarrow 0$ .

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon \star g - g\| &= \int \left| \int g(x-y) f_\varepsilon(y) dy - \int g(x) f_\varepsilon(y) dy \right| dx \\ &\leq \int \int |g(x-y) - g(x)| \cdot |f_\varepsilon(y)| dy dx \\ &= \int \|T_y g - g\|_1 \cdot |f_\varepsilon(y)| dy \\ &\leq \sup\{\|T_y g - g\|_1 : y \in \text{Trg}(f_\varepsilon)\} \cdot \|f_\varepsilon\|_1 \rightarrow 0 \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad \square \end{aligned}$$

Eine andere Möglichkeit die Faltung einzuführen, ist das DIREKTE PRODUKT  $\varphi_1 \otimes \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)'$  von Distributionen  $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  zu betrachten. Dazu zeigt man, daß  $\mathcal{D}(\Omega_1) \otimes \mathcal{D}(\Omega_2)$  dicht liegt in  $\mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , und somit durch  $(\varphi_1 \otimes \varphi_2)(f_1 \otimes f_2) := \varphi_1(f_1) \varphi_2(f_2)$  eine Distribution  $\varphi_1 \otimes \varphi_2$  auf  $\Omega_1 \times \Omega_2$  definiert wird.

Nun definiert man  $\varphi_1 \star \varphi_2$  durch  $(\varphi_1 \star \varphi_2)(f) := (\varphi_1 \otimes \varphi_2)(f \circ \text{add})$ , wobei  $\text{add} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  die Addition bezeichnet. Diese Definition macht Sinn, denn  $\text{Trg}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) = \text{Trg}(\varphi_1) \times \text{Trg}(\varphi_2)$  und somit ist  $\text{Trg}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \cap \text{Trg}(f \circ \text{add})$  kompakt.

**Multiplikation**

Die Gleichung

$$(g \cdot f)(h) = \int_{\mathbb{R}^m} (g \cdot f)(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} g(x) (f \cdot h)(x) dx = g(f \cdot h)$$

für glatte Funktionen  $g, f, h$  motiviert folgende Definition. Wir können auch das PRODUKT von einer Distribution  $g$  mit einer glatten Funktion  $f$  definieren durch seine Wirkung auf einer glatten Funktion  $h$  als

$$(g \cdot f)(h) := g(f \cdot h).$$

Z.B. ist  $\delta \cdot x = 0$ , denn  $(\delta \cdot x)(f) = \delta(x \cdot f) = (x \cdot f)(0) = 0 \cdot f(0) = 0$ . Weiters ist  $\frac{1}{x} \cdot x = 1$ , denn

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} \cdot x\right)(h) &= d \log(x \mapsto x h(x)) = -\log(x \mapsto \frac{d}{dx}(x h(x))) \\ &= -\int \log|x| (h(x) + x h'(x)) dx \\ &= -\int \log|x| h(x) + \int (1 + \log|x|) h(x) dx \\ &= \int h(x) dx = 1(h). \end{aligned}$$

Diese Multiplikation läßt sich nicht vernünftig (d.h. assoziativ) auf Distributionen ausdehnen, denn

$$\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \cdot \delta = 1 \cdot \delta = \delta \neq 0 = \frac{1}{x} \cdot 0 = \frac{1}{x} \cdot (x \cdot \delta).$$

Unter anderen deshalb hat [Col85] eine neue Art von Distributionen definiert und deren Theorie entwickelt.

## 5. Baire-Eigenschaft

In diesem Kapitel verwenden wir die Baire'sche Eigenschaft und ihre Verallgemeinerungen um die Stetigkeit gewisser linearer Abbildungen zu erkennen. Wir untersuchen dann auch die Konsequenzen für Fourier-Reihen.

### 5.1 Definition.

Es sei  $X$  ein topologischer Raum. Die von den offenen (oder äquivalent abgeschlossenen) Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt **BOREL'SCHE  $\sigma$ -ALGEBRA IM ERWEITERTEN SINN**. Die von den kompakten Mengen erzeugte  $\sigma$ -Algebra heißt **BOREL'SCHE  $\sigma$ -ALGEBRA**.

Die Borel-Mengen sind genau die Borel-Mengen im erweiterten Sinn, die in einer abzählbaren Vereinigung kompakter Mengen enthalten sind. D.h. für  $\sigma$ -kompakte Räume fallen die Borel-Mengen mit den Borel-Mengen im erweiterten Sinn zusammen.

Unter der **BAIRE'SCHEN  $\sigma$ -ALGEBRA** verstehen wir die kleinste  $\sigma$ -Algebra, s.d. alle stetigen reell-wertigen Funktionen meßbar sind. Die **BAIRE-MENGEN** sind die Elemente der Baireschen  $\sigma$ -Algebra.

Eine Funktion heißt **BAIRE-MESSBAR** (oder kurz **BAIRE'sch**), wenn sie meßbar bezüglich der Baire'schen  $\sigma$ -Algebra ist.

Ein **BOREL-MASS** ist ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra der Borel-Mengen, welches auf kompakten Mengen endlich ist. Ein **BAIRE-MASS** ist ein Maß auf der  $\sigma$ -Algebra der Baire-Mengen, welches auf den kompakten Baire-Mengen endlich ist.

### Satz.

*Es sei  $X$  ein lokalkompakter,  $\sigma$ -kompakter Raum. Dann wird die Baire'sche  $\sigma$ -Algebra von den kompakten  $G_\delta$ -Mengen erzeugt.*

*Die Baire-meßbaren Funktionen sind der Folgenabschluß der stetigen Funktionen (mit kompakten Träger) bezüglich punktwieser Konvergenz.*

*Ist  $X$  zusätzlich metrisierbar, so stimmen die Borel- und die Baire-Mengen überein.*

Unter einer  $G_\delta$ -MENGE versteht man eine Teilmenge die ein abzählbarer Durchschnitt von offenen Mengen ist.

**Beweis.** ( $\text{kp-}G_\delta \subseteq \text{Baire-Mengen}$ ) Es sei  $K$  eine kompakte  $G_\delta$ -Menge, dann ist also  $K = \bigcap_n U_n$  mit offenen  $U_n$ . Nach dem Satz von Urysohn existieren stetige Funktionen  $f_n : X \rightarrow [0, 1]$  mit  $f_n|_K = 1$  und  $f_n|_{X \setminus U_n} = 0$ . Die Folge  $g_n := \min\{f_1, \dots, f_n\} \in C(X, [0, 1])$  konvergiert dann punktwise monoton fallend gegen  $\chi_K$ , denn für jedes  $x \notin K$ , existiert ein  $n$  mit  $x \notin U_n$ , d.h.  $f_n(x) = 0$ . Somit ist  $\chi_K$  eine Baire-meßbare Funktion, und  $K := \chi_K^{-1}(1)$  eine Baire-Menge.

( $\text{Baire-Mengen} \subseteq \langle \text{kp-}G_\delta \rangle_{\sigma\text{-Algebra}}$ ) Da die Baire'sche  $\sigma$ -Algebra von den Urbildern der Intervalle  $[c, +\infty)$  bezüglich aller stetiger Funktionen erzeugt wird (siehe (4.4)), müssen wir nur zeigen, daß  $f^{-1}[c, +\infty)$  zu der von den kompakten  $G_\delta$ -Mengen erzeugten  $\sigma$ -Algebra gehört. Diese Urbilder sind klarerweise abgeschlossene  $G_\delta$ .

Da  $X$  als  $\sigma$ -kompakt vorausgesetzt wurde existieren kompakte Mengen  $K_n$  mit  $X = \bigcup_n K_n$ . Wegen der Lokalkompaktheit und dem Satz von Urysohn, finden wir  $g_n \in C_c(X, [0, 1])$  mit  $g_n|_{K_n} = 1$ . Damit ist aber  $f^{-1}[c, +\infty) = \bigcup_n f_{\geq c} \cap (g_n)_{\geq 1}$  und  $f_{\geq c} \cap (g_n)_{\geq 1} = (h_n)_{\geq 0}$  ist eine kompakte  $G_\delta$ -Menge, wobei  $h_n := \min\{f - c, g_n - 1\}$ .

( $\overline{C_c}^{\text{Flg}} \subseteq \text{Baire-Funktionen}$ ) Die Teilmenge der Baire-meßbaren Funktionen ist Folgen-abgeschlossen bezüglich punktweiser Konvergenz nach (4.14), also ist der Folgenabschluß der stetigen Funktionen (mit kompakten Träger) in den Baire-meßbaren Funktionen enthalten.

Betrachten wir nun jene Mengen  $A$ , für welche die charakteristische Funktion  $\chi_A$  im Folgen-Abschluß der stetigen Funktionen mit kompakten Träger liegt. Diese bilden eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}$ , da der punktweise Grenzwert von  $\chi_{A_n}$  wieder im Folgen-Abschluß liegt. Die kompakten  $G_\delta$ -Mengen  $K$  sind in  $\mathcal{A}$  enthalten, da nach dem ersten Teil des Beweises  $\chi_K$  der punktweise Grenzwert einer Folge stetiger Funktionen (mit kompakten Träger) ist. Also ist die Baire'sche  $\sigma$ -Algebra in  $\mathcal{A}$  enthalten, und somit sind die elementaren Baire-Funktionen im Folgenabschluß der stetigen Funktionen (mit kompakten Träger). Da aber jede meßbare Funktion punktweiser Grenzwert einer Folge elementarer Funktionen ist, gilt gleiches auch für alle Baire-meßbaren Funktionen.

Ist  $X$  metrisierbar, dann ist jede abgeschlossene Menge  $A$  eine  $G_\delta$ -Menge, denn  $A = \bigcap_n U_n$ , wobei  $U_n := \left\{x : \sup\{d(x, a) : a \in A\} < \frac{1}{n}\right\}$ .  $\square$

### 5.2 Definition.

Eine Teilmenge  $M \subseteq X$  eines topologischen Raums  $X$  heißt **NIRGENDS DICHT** falls kein Punkt in  $X$  eine Umgebung  $U$  besitzt in welcher  $M$  dicht liegt, d.h.  $U \subseteq \overline{M}$  erfüllt, also kurz gesagt dann, wenn das Innere des Abschlusses von  $M$  leer ist.

Eine Teilmenge heißt **MAGER**, falls sie eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn sie in der abzählbaren Vereinigung abgeschlossener Mengen mit leeren Inneren enthalten ist.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es sei  $M = \bigcup_n N_n$ , dann ist  $M \subseteq \bigcup_n \overline{N_n}$ .

( $\Leftarrow$ ) E sei  $M \subseteq \bigcup_n A_n$ , dann ist  $M = \bigcup_n (M \cap A_n)$  und  $\overline{M \cap A_n} \subseteq \overline{A_n}$ .  $\square$

Warnung: Mager zu sein ist keine Eigenschaft des topologischen Raumes  $M$  sondern hängt wesentlich vom umgebenden Raum  $X$  ab: Z.B. ist  $\{0\}$  nirgends dicht in  $\mathbb{R}$ , aber natürlich nicht mager in sich selbst. Jedoch gilt:

### Lemma.

*Falls  $M$  mager in  $X$  ist so auch in jedem Raum  $Y$  der  $X$  als topologischen Teilraum enthält.*

**Beweis.** Angenommen  $M$  ist mager in  $X$ , also  $M = \bigcup_n M_n$  mit  $M_n$  nirgends dicht in  $X$ , aber  $M$  wäre nicht mager in  $Y$ . Dann müßte der Abschluß  $\overline{M_n}^Y$  von  $M_n$  in  $Y$  für mindestens ein  $n$  eine nicht-leere offene Menge  $U \subseteq Y$  enthalten und da  $M_n$  dicht in  $\overline{M_n}^Y$  ist, wäre  $\overline{M_n}^X = \overline{M_n}^Y \cap X \supseteq U \cap X \supseteq U \cap M_n \neq \emptyset$ , also wäre  $M_n$  nicht nirgends dicht in  $X$ , ein Widerspruch.  $\square$

### Satz von Osgood.

*Jede Menge von reell-wertigen stetigen Funktionen die auf einer nicht mageren Menge  $X$  punktweise beschränkt ist, ist gleichmäßig beschränkt auf einer offenen, nicht-leeren Teilmenge.*

**Beweis.** Es sei  $\mathcal{F}$  die gegebene Familie von reell-wertigen Funktionen auf  $X$ . Es sei

$$A_{f,k} := \{x \in X : |f(x)| \leq k\}.$$

Dann ist  $A_{f,k}$  abgeschlossen, und folglich auch die Menge  $A_k := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} A_{f,k}$  der Punkte, auf welchen die  $f$ 's gleichmäßig durch  $k$  beschränkt sind. Nach Voraussetzung ist  $X := \{x : \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{F}\} < \infty\}$  nicht mager und klarerweise gilt  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ , folglich existiert ein  $k \in \mathbb{N}$  und eine offenen nicht leere Menge  $U$  mit  $U \subseteq A_k$ , d.h.  $\mathcal{F}$  ist gleichmäßig durch  $k$  auf  $U$  beschränkt.  $\square$

**Satz von Baire.**

*Konvergiert eine Folge von stetigen reell-wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum  $X$  punktweise, so ist die Grenzfunktion nur auf einer mageren Menge unstetig.*

**Beweis.** Konvergiere also die Folge stetiger Funktionen  $f_n \in C(X, \mathbb{R})$  punktweise gegen eine Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

Es sei  $A_{k,\varepsilon} := \{x \in X : |f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon\}$  und  $A_\varepsilon := \bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^\circ$  ist die Menge jener Punkte, wo  $f$  lokal durch ein  $f_k$  bis auf  $\varepsilon$  approximiert wird. Dann ist sowohl  $A_{k,\varepsilon}$  als auch  $A_\varepsilon$  wachsend in  $\varepsilon$ .

Wir behaupten daß  $f$  stetig ist in jedem Punkt aus  $\bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$  (Es gilt sogar Gleichheit). Falls  $a \in \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$ , so ist  $a \in A_\varepsilon$  für jedes  $\varepsilon > 0$ , und folglich existiert zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $a \in (A_{k,\varepsilon})^\circ$ , d.h. es existiert eine Umgebung  $U(a)$  mit  $|f(x) - f_k(x)| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in U(a)$ . Da  $f_k$  stetig ist können wir  $U(a)$  so klein wählen, daß  $|f_k(x) - f_k(a)| \leq \varepsilon$  ist für alle  $x \in U(a)$ . Somit gilt  $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| \leq 3\varepsilon$  für alle  $x \in U(a)$ , d.h.  $f$  ist stetig bei  $a$ .

Es bleibt also zu zeigen, daß  $X \setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$  mager ist. Sei dazu  $F_{k,\varepsilon} := \{x \in X : \forall n : |f_k(x) - f_{k+n}(x)| \leq \varepsilon\}$ . Dann ist  $F_{k,\varepsilon}$  abgeschlossen, da die  $f_i$  stetig sind, und  $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_{k,\varepsilon}$ , da die Folge der  $f_i$  punktweise konvergiert. Weiters ist  $F_{k,\varepsilon} \subseteq A_{k,\varepsilon}$ , da  $f_i$  punktweise gegen  $f$  konvergiert. Also ist auch das Innere von  $F_{k,\varepsilon}$  in jenem von  $A_{k,\varepsilon}$  enthalten, und folglich gilt:  $\bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^\circ \subseteq \bigcup_k (A_{k,\varepsilon})^\circ = A_\varepsilon$ . Für jede abgeschlossene Menge  $A$  ist  $A \setminus A^\circ$  abgeschlossen und nirgends dicht, also ist

$$\begin{aligned} X \setminus A_\varepsilon &\subseteq X \setminus \bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^\circ = \bigcup_l (F_{l,\varepsilon} \setminus \bigcup_k (F_{k,\varepsilon})^\circ) = \\ &= \bigcup_l \bigcap_k (F_{l,\varepsilon} \setminus (F_{k,\varepsilon})^\circ) \subseteq \bigcup_{l=k} (F_{k,\varepsilon} \setminus (F_{k,\varepsilon})^\circ) \end{aligned}$$

mager, und somit auch  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus A_{1/n}) = X \setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$ .  $\square$

**Definition.**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt BAIRE'SCH, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

1. Komplemente magerer Teilmengen sind dicht, d.h.  $M \subseteq X$ , mager  $\Rightarrow \overline{\sim M} = X$  (oder  $M^\circ = \emptyset$ ),
2.  $A_n$  abg.,  $A_n^\circ = \emptyset \Rightarrow (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^\circ = \emptyset$ ;
3.  $O_n$  offen,  $\overline{O_n} = X \Rightarrow (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{O_n}) = X$ .

**Beweis.**  $(1 \Rightarrow 2)$   $A_n$  abg.,  $A_n^\circ = \emptyset \Rightarrow M := \bigcup_n A_n$  mager  $\Rightarrow M^\circ = \emptyset$ .

$(2 \Leftrightarrow 3)$   $A_n$  abg.,  $A_n^\circ = \emptyset \Leftrightarrow O_n := \sim A_n$  offen,  $\overline{O_n} = X$ .  $\emptyset = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)^\circ = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sim O_n)^\circ = (\sim \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n)^\circ = \sim \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n}$ .

(2  $\Rightarrow$  1)  $M$  mager  $\Rightarrow M = \bigcup_n N_n$  mit  $\overline{N_n}^o = \emptyset$ .  $A_n := \overline{N_n} \Rightarrow M^o \subseteq (\bigcup_n A_n)^o = \emptyset$ .  $\square$

**Lemma.**

*Ein seminormierter Raum ist genau dann Baire'sch, wenn er nicht mager in sich selbst (oder einem umfassenden Raum) ist.*

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Diese Richtung gilt für jeden topologischen Raum  $X \neq \emptyset$ , denn wäre  $X$  mager im Baire'schen Raum  $X$ , dann wäre das Komplement von  $\emptyset = X \setminus X$  dicht, also  $X = \emptyset$ .

( $\Leftarrow$ ) Nach dem im Lemma nach Definition (5.2) gesagten ist jede nicht-magere Teilmenge  $M$  eines topologischen Raums  $X$  auch nicht mager in sich selbst. Sei also  $E$  ein seminormierter Raum, der nicht mager in sich selbst ist. Angenommen  $E$  ist nicht Baire'sch, d.h.  $\exists A_n$  abg.,  $A_n^o = \emptyset$  und  $\exists x : x \in (\bigcup_n A_n)^o$ , d.h.  $\bigcup_n A_n$  ist eine Umgebung von  $x$  und somit  $U := \bigcup_n (A_n - x) = (\bigcup_n A_n) - x =$  eine Umgebung von  $0$ , also absorbierend. Damit ist

$$E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} kU = \bigcup_{k,n} \bigcup_n (A_n - x),$$

also mager wegen  $(A_n - x)^o = A_n^o - x = \emptyset$ .  $\square$

**5.3 Baire-Hausdorff Kategorien-Theorem.**

*Jeder vollständig metrische Raum ist Baire'sch.*

*Jeder (lokal-)kompakte topologische Raum ist Baire'sch, siehe [CR78].*

Es gibt Baire'sche, abzählbar SNR'e die nicht vollständig sind, siehe [Jar81, S.97].

**Beweis.** Es sei  $A = \bigcup_n A_n$  eine magere Menge,  $x_0 \in X$  beliebig und  $r_0 > 0$ . Wir wählen nun für  $n \geq 1$  rekursiv Punkte  $x_n$  so, daß  $d(x_n, x_{n-1}) < r_{n-1}$ ,  $x_n \notin \overline{A_n}$  ( $\overline{A_n}$  hat leeres Inneres!) und Radien  $r_n \leq \frac{r_{n-1}}{2}$  mit  $B_n := \{x : d(x, x_n) \leq r_n\} \subseteq B_{n-1} \setminus \overline{A_n}$ . Dann ist  $x_n$  eine Cauchy-Folge, denn  $x_n \in B_m$  für  $n \geq m$ , also existiert  $\lim_n x_n =: x_\infty$  und liegt in  $B_m$  für alle  $m$ , damit aber in  $B_0 \cap (X \setminus A)$ , d.h.  $X \setminus A$  ist dicht.  $\square$

**Folgerung von Weierstrass.**

*Es gibt stetige Funktionen auf  $[0, 1]$ , die nirgends differenzierbar sind.*

**Beweis.** Es sei  $M_n := \{f \in C[0, 2] : \exists t \in [0, 1] \forall 0 < h \leq 1 : |\frac{f(t+h)-f(t)}{h}| \leq n\}$ . Dann ist  $M_n$  abgeschlossen in  $C[0, 2]$  und nirgends-dicht: Sonst enthielte  $M_n$  wegen des Approximationssatzes von Weierstrass eine Umgebung eines Polynoms. Das kann nicht sein, denn es gibt beliebig nahe Sägezahnkurven, mit beliebig großen Anstieg. Also ist  $\bigcup_n M_n$  mager, und somit existiert ein  $f \in C[0, 2]$  mit  $f \notin M_n$  für alle  $n$ , d.h. der Differenzenquotient von  $f$  ist unbeschränkt bei jedem  $t \in [0, 1]$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Der Satz von Baire liefert uns insbesondere für Fréchet-Räume  $E$  sofort, daß für jede punktweise konvergente Folge stetig linearer Funktionale  $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ , die Grenzfunktion  $f$  ein stetig lineares Funktional ist. Denn  $f$  muß nach dem Satz von Baire in den Punkten einer dichten Menge stetig sein, und somit mindestens in einem Punkt. Da aber klarerweise  $f$  auch linear sein muß, genügt das für die Stetigkeit überall.

Der Satz von Osgood liefert uns insbesondere für Fréchet-Räume  $E$ , daß jede punktweise beschränkte Familie  $\mathcal{F}$  von stetigen linearen Funktionalen  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  gleichgradig-stetig (siehe (5.4)), und somit beschränkt in  $L(E, \mathbb{R})$  ist. Denn nach dem Satz von Osgood existiert eine nicht-leere offene Menge  $O$ , auf welcher  $\mathcal{F}$  gleichmäßig beschränkt ist (durch  $K$ ). Sei  $\varepsilon > 0$ . Wir wählen ein  $a \in O$ , dann ist

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x+a)| + |f(-a)| \\ &\leq \sup\{|f(y)| : y \in O, f \in \mathcal{F}\} + \sup\{|f(-a)| : f \in \mathcal{F}\} \\ &\leq K + K_{-a} \end{aligned}$$

für alle  $x \in O - a$ , also ist  $\mathcal{F}(U) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$  für die  $0$ -Umgebung  $U := \frac{\varepsilon}{K+K_{-a}}(O - a)$ .

Leider ist aber jeder (strikt) induktive Limes einer echt aufsteigenden Folge von Fréchet oder insbesondere von Banach-Räumen nicht Baire'sch, denn die abgeschlossenen Stufen haben leeres Inneres, sonst wären sie absorbierend und somit gleich dem ganzen Raum.

Wir sollten also diese beiden Stetigkeits-Resultate noch wesentlich verallgemeinern. Sei dazu  $\mathcal{F}$  eine punktweise beschränkte Familie stetig linearer Abbildungen  $f : E \rightarrow F$ . Wir wollen Bedingungen finden, so daß jede solche Familie gleichgradig-stetig ist, d.h. für jede (abgeschlossene)  $0$ -Umgebung  $V$  in  $F$  die Menge  $U := \bigcap_{f \in \mathcal{F}} f^{-1}(V)$  eine  $0$ -Umgebung in  $E$  ist. Diese Menge ist als Durchschnitt abgeschlossener absolut-konvexer Mengen selbst abgeschlossen und absolut-konvex. Und sie ist absorbierend, denn für  $x \in E$  ist  $\mathcal{F}(x) := \{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$  beschränkt in  $F$ , also existiert ein  $K > 0$ , mit  $\mathcal{F}(x) \subseteq K \cdot V$ , und damit ist  $x \in K \cdot U$ . Folglich definieren wir:

**Definition.**

Eine Teilmenge  $U$  eines SNR's  $E$  heißt TONNE oder FASS (engl: barrel), falls sie abgeschlossen, absolut-konvex und absorbierend ist.

Ein SNR  $E$  heißt TONNELIERT (FASSBAR wäre mißverständlich; engl: BARRELLED oder BARRELED) falls jede Tonne eine Null-Umgebung ist; das ist genau dann der Fall wenn jede Seminorm, deren Einheitskugel abgeschlossen ist, stetig ist, denn die Tonnen sind genau die Einheitskugeln von solchen Seminormen: Sei nämlich  $A$  eine Tonne, dann ist das Minkowski-Funktional  $p$  von  $A$  nach (2.5) eine Seminorm deren Einheitskugel gerade  $A$  ist; die Umkehrung ist offensichtlich.

Wir haben also die Implikation  $(1 \Rightarrow 3)$  des folgenden Satzes bewiesen:

**5.4 Uniform Boundedness Principle.**

*Es sei  $E$  ein tonnelierter SNR und  $F$  ein beliebiger SNR, dann sind für jede Menge  $\mathcal{F}$  von stetigen linearen Abbildungen  $f : E \rightarrow F$  folgende Aussagen äquivalent*

- (1).  $\mathcal{F}$  ist punktweise beschränkt,  
d.h. für alle  $x \in E$  ist die Menge  $\mathcal{F}(x)$  in  $F$  beschränkt.
- $\Leftrightarrow$  (2).  $\mathcal{F}$  ist beschränkt in  $L(E, F)$ ,  
d.h. für alle beschränkten  $B \subseteq E$  ist  $\mathcal{F}(B)$  beschränkt in  $F$  (siehe (3.5)).
- $\Leftrightarrow$  (3).  $\mathcal{F}$  ist gleichgradig-stetig,  
d.h. zu jeder  $0$ -Umgebung  $V$  von  $F$  existiert eine  $0$ -Umgebung  $U$  von  $E$  mit  $f(U) \subseteq V$  für alle  $f \in \mathcal{F}$ .

**Beweis.** Wir haben bereits  $(1 \Rightarrow 3)$  gezeigt.

Die Implikationen  $(1 \Leftarrow 2 \Leftarrow 3)$  gelten allgemein:

(2  $\Leftarrow$  3) Es sei  $B \subseteq E$  beschränkt. Wir müssen zeigen, daß  $\mathcal{F}(B)$  in  $F$  beschränkt ist. Sei also  $V$  eine 0-Umgebung. Da  $\mathcal{F}$  gleichgradig-stetig ist, existiert eine 0-Umgebung  $U$  von  $E$  mit  $f(U) \subseteq V$ . Da  $B$  beschränkt ist existiert ein  $K > 0$  mit  $B \subseteq K \cdot U$ , und somit  $\mathcal{F}(B) \subseteq K \cdot V$ , d.h.  $\mathcal{F}(B)$  ist beschränkt.

(1  $\Leftarrow$  2) ist klar, da einzelne Punkte beschränkte Mengen sind.  $\square$

### Es gilt auch die Umkehrung.

D.h. ein Raum für den obige Äquivalenzen gelten ist tonneliert Sei nämlich  $U$  eine Tonne. Dann ist  $\{x' \in E^* : |x'(U)| \leq 1\}$  eine punktweise beschränkte Menge in  $E^*$ , und somit nach Voraussetzung gleichgradig-stetig, d.h. es existiert eine 0-Umgebung  $V \subseteq E$ , s.d.  $|x'(V)| \leq 1$  für alle  $x' \in E^*$  mit  $|x'(U)| \leq 1$ . Es würde folglich genügen zu zeigen, daß  $V \subseteq U$ . Dazu benötigen wir den Bipolarensatz (7.24), eine Folgerung aus dem Satz von Hahn-Banach: Falls  $x \notin U$ , einer abgeschlossenen absolut-konvexen Menge, so existiert ein  $x' \in E^*$  mit  $|x'(x)| > 1$  und  $|x'(U)| \leq 1$ .

Jene SNR'e  $E$ , für welche das Uniform Boundedness Principle für abzählbare Mengen  $\mathcal{F}$  gilt, heißen  $\aleph_0$ -TONNELIERT, siehe [Jar81, S.252]. Der Dualraum jedes metrisierbaren SNR's hat diese Eigenschaft.

### Lemma.

*Jeder Baire'sche SNR ist tonneliert. Tonneliert vererbt sich auf finale Strukturen und auf Produkte.*

**Beweis.** Sei  $A$  eine Tonne in einen Baire'schen SNR  $E$ , dann ist  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot A$ , und somit existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \cdot A^\circ = (n \cdot A)^\circ \neq \emptyset$ . Also existiert ein  $a \in A^\circ$ . Dann ist  $-a \in A^\circ$  und somit  $0 = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a \in A^\circ$ , d.h.  $A$  ist eine 0-Amgebung.

Es sei  $f_i : E_i \rightarrow E$  eine finale Familie und alle  $E_i$  seien tonneliert. Sei weiters  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Seminorm mit abgeschlossener Einheitskugel, dann gilt gleiches für  $q \circ f_i$ , denn  $(q \circ f_i)_{\leq 1} = (f_i)^{-1}(q_{\leq 1})$ . Also ist  $q \circ f_i$  stetig, und damit auch  $q$ .

Bezüglich Produkte siehe [Jar81, S.223].  $\square$

### Folgerung.

*Der Dualraum  $E^*$  jedes tonnelierten SNR'es der eine beschränkte Menge  $B$  besitzt, die in keinen endlich dimensionalen Teilraum enthalten ist, ist mit der Topologie der punktweisen Konvergenz nicht bornologisch.*

*Z.B. ist das für jeden unendlich dimensionalen Banach-Raum erfüllt.*

**Beweis.** Es sei  $B \subseteq E$  beschränkt. Dann ist die Polare  $B^\circ := \{x' \in E^* : \forall x \in B : |x'(x)| \leq 1\}$  absolut-konvex und gefräßig (d.h. absorbiert beschränkte Mengen) in  $E^*$ , denn  $A \subseteq E^*$  ist genau dann beschränkt, wenn es gleichmäßig beschränkt auf beschränkten Mengen von  $E$  ist. Wegen des Uniform Boundedness Principles sind die beschränkten Mengen in  $E^*$  genau die bzgl.  $\sigma(E^*, E)$  beschränkten. Wäre also diese Struktur bornologisch, so wäre  $B^\circ$  eine ihrer 0-Umgebungen, d.h. es würde eine endliche Menge  $A \subseteq E$  existieren mit  $A^\circ \subseteq B^\circ$ . Nach den Bipolarensatz (7.24) ist dann  $B \subseteq (B^\circ)_\circ \subseteq (A^\circ)_\circ = \langle A \rangle_{\text{abs.konv.}}$ , also in einem endlich dimensionalen Teilraum enthalten, ein Widerspruch zur Voraussetzung.  $\square$

### 5.5 Banach-Steinhaus Theorem.

*Der punktweise Grenzwert einer Folge stetig linearer Abbildungen von einem tonnelierten SNR  $E$  in einen SNR  $F$  ist eine stetig lineare Abbildung. D.h. der Raum  $LC(E, F) := L(E, F) \cap C(E, F)$  der stetig linearen Abbildungen ist bezüglich punktweiser Konvergenz Folgen-vollständig (aber nicht vollständig).*

**Beweis.** Seien  $f_n : E \rightarrow F$  stetig lineare Abbildungen. Es konvergiere  $f_n$  punktweise gegen  $f$ . Dann ist  $f$  klarerweise linear und  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  punktweise beschränkt. Also wegen des Uniform Boundedness Principle (5.4) gleichgradig-stetig, d.h. für alle (abgeschlossenen) 0-Umgebungen  $V$  existiert eine 0-Umgebung  $U$  mit  $f_n(U) \subseteq V$  für alle  $n$ . Dann gilt aber auch  $f(U) \subseteq \bar{V} = V$ , d.h.  $f$  ist stetig.  $\square$

**Folgerung.**

*Es seien  $E_1$  und  $E_2$  abzählbar SNR'e und  $E_2$  sei tonneliert. Dann ist jede bilineare Abbildung  $f : E_1 \times E_2 \rightarrow F$  mit Werten in einem beliebigen SNR  $F$ , die getrennt stetig ist, stetig.*

Dieses Resultat gilt auch für tonnelierte Räume mit einer abzählbaren Basis der Bornologie, siehe [Jar81, S.338].

Achtung:  $\langle -, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$  ist beschränkt aber nicht stetig, wobei  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$  das Koprodukt  $\coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$  von abzählbar vielen Faktoren  $\mathbb{R}$  bezeichnet!

**Beweis.** Da  $E_1$  und  $E_2$  abzählbar SNR'e sind, genügt zu zeigen, daß  $f$  beschränkt ist (die Folgenstetigkeit bei 0 folgt aus der Homogenität wie in der Folgerung in (3.2), die Stetigkeit folgt daraus mittels (2.8)). Sei also  $B_i \subseteq E_i$  beschränkt für  $i = 1, 2$ . Wir betrachten die Abbildung  $\check{f} : E_1 \rightarrow L(E_2, F)$ ,  $\check{f}(x_1) : x_2 \mapsto f(x_1, x_2)$ . Diese ist wohldefiniert, da  $f(x_1, \cdot)$  nach Voraussetzung linear und stetig ist. Sie ist auch linear, da  $f(\cdot, x_2)$  linear ist. Weiters ist  $\check{f}(B_1)$  punktweise beschränkt in  $L(E_2, F)$ , denn für  $x_2 \in E_2$  ist  $\check{f}(B_1)(x_2) = f(B_1 \times \{x_2\})$ . Da  $E_2$  tonneliert ist, ist  $f(B_1 \times B_2) = \check{f}(B_1)(B_2) \subseteq F$  beschränkt.  $\square$

**Folgerung.**

*Jede skalar-beschränkte Menge ist beschränkt.*

Es heißt eine Menge  $B \subset E$  SKALAR-BESCHRÄNKT, falls  $x'(B) \subset \mathbb{K}$  beschränkt ist für alle stetig linearen Funktionale  $x' \in E^*$ .

**Beweis.** Sei zuerst  $E$  ein normierter Raum, dann ist  $\iota : E \rightarrow E''$  eine Isometrie auf den Teilraum  $\iota(E)$ , wegen des Satzes von Hahn-Banach (siehe (7.9)). Die Menge  $\iota(B)$  ist punktweise beschränkt, denn für alle  $x' \in E'$  ist  $x'(B)$  als beschränkt vorausgesetzt. Da  $E'$  ein Banach-Raum ist, ist  $\iota(B)$  beschränkt in  $L(E', \mathbb{K})$ , nach dem Uniform Boundedness Principle (5.4), also ist  $B \subset E$  beschränkt.

Sei nun  $B \subset E$  skalar-beschränkt in einem beliebigen SNR  $E$ . Wir müssen zeigen, daß  $p(B)$  beschränkt ist, für jede stetige SN  $p$  von  $E$ . Es sei  $N := \ker(p)$ . Dann ist  $E_p := E/N$  ein normierter Raum, bezüglich der Seminorm  $\tilde{p}$  mit  $\tilde{p} \circ \pi = p$ , wobei  $\pi : E \rightarrow E_p$  die natürliche Quotienten-Abbildung ist. Es ist  $\pi(B)$  skalar-beschränkt im normierten Raum  $E_p$ , denn  $\tilde{\ell}(\pi(B)) = (\tilde{\ell} \circ \pi)(B)$  ist beschränkt für alle stetig linearen Funktionale  $\tilde{\ell}$  auf  $E_p$ . Also ist  $\pi(B)$  Norm-beschränkt nach dem ersten Teil, d.h.  $p(B) = \tilde{p}(\pi(B))$  ist beschränkt.  $\square$

Wir haben in (5.5) gesehen, daß die Baire-Eigenschaft die Stetigkeit gewisser linearer Abbildungen zur Folge hat. Wir wollen das noch weiter ausarbeiten. Sei dazu  $f : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung. Der GRAPH von  $f$  ist die Menge  $\text{Graph}(f) := \{(x, y) \in E \times F : f(x) = y\}$ . Der Graph ist genau dann abgeschlossen, wenn  $\text{Graph}(f) \ni (x_i, y_i) \rightarrow (x_\infty, y_\infty) \Rightarrow (x_\infty, y_\infty) \in \text{Graph}(f)$ , d.h. aus der Existenz der Grenzwerte  $\lim_i x_i$  und  $\lim_i f(x_i)$  die Gleichheit  $f(\lim_i x_i) = \lim_i f(x_i)$  folgt. Diese Bedingung ist klarerweise formal schwächer als die der Stetigkeit von  $f$ , wo ja die Existenz des 2. ten Grenzwertes nicht vorausgesetzt wird. Wir zeigen nun dennoch die Umkehrung unter geeigneten Voraussetzungen:

**5.6 Closed Graph Theorem.**

Es sei  $E$  ein Baire'scher SNR,  $F$  ein Fréchet-Raum und  $f : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung, deren Graph in  $E \times F$  abgeschlossen ist. Dann ist  $f$  stetig.

**Beweis.** Wir wählen eine 0-Umgebungs-Basis  $(V_n)_n$  von  $F$  bestehend aus abgeschlossenen und absolut-konvexer Mengen mit  $2V_{n+1} \subseteq V_n$ . Für jedes  $n$  ist  $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} k \cdot A_n$ , mit  $A_n := f^{-1}(V_n)$ . Da  $E$  als Baire'sch vorausgesetzt ist, enthält  $\overline{A_n}$  einen Punkt  $x$  so, daß  $x + U \subseteq \overline{A_n}$  für eine 0-Umgebung  $U$  von  $E$ . Dann gilt aber  $0 \in (x + U) - (x + U) \subseteq 2\overline{A_n} \subseteq \overline{A_{n-1}}$ , also existiert eine 0-Umgebung  $U_n$  mit  $U_n \subseteq \overline{A_{n-1}}$ .

Wir behaupten, daß  $f(U_{n+1}) \subseteq V_{n-1}$ . Sei dazu  $x \in U_{n+1} \subseteq \overline{A_n} \subseteq A_n + U_{n+2}$ , d.h. es existiert ein  $x_0 \in A_{n+0}$  mit  $x - x_0 \in U_{n+2}$ , und rekursiv finden wir  $x_k \in A_{n+k}$  mit  $x - \sum_{i=0}^k x_i \in U_{n+2+k}$ . Dann erfüllt  $\sum_k f(x_k)$  die Cauchy-Bedingung, denn  $\sum_{i=k}^{k+p} f(x_i) \in \sum_{i=k}^{k+p} V_{n+i} \subseteq \sum_{j=0}^p 2^{-j} V_{n+k} \subseteq V_{n+k-1}$ . Da  $F$  vollständig und  $V_{n-1}$  abgeschlossen ist existiert somit  $y := \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) \in V_{n-1}$ .

Falls  $E$  metrisierbar ist, dürfen wir annehmen, daß  $U_n$  eine 0-Umgebungs-Basis von  $E$  bildet, und somit  $\sum_k x_k$  gegen  $x$  konvergiert. Die Abgeschlossenheit des Graphen liefert dann  $f(x) = y \in V_{n-1}$ .

Im allgemeinen Fall, nehmen wir zwei beliebige symmetrische (abgeschlossene) 0-Umgebungen  $U$  und  $V$  in  $E$  und  $F$ . Da  $x - \sum_{i=0}^k x_i \in U_{n+2+k} \subseteq \overline{A_{n+1+k}} \subseteq A_{n+1+k} + U$ , existiert ein  $a_k \in A_{n+1+k}$ , mit  $x - \sum_{i=0}^k x_i \in a_k + U$ , i.e.  $x - (a_k + \sum_{i=0}^k x_i) \in U$ . Damit ist aber  $f(a_k) \in V_{n+1+k}$  eine 0-Folge, und somit ist  $y - f(a_k + \sum_{i=0}^k x_i) = (y - \sum_{i=0}^k f(x_i)) - f(a_k) \in V$  für  $k$  hinreichend groß. D.h.  $(x, y) + U \times V$  trifft den Graphen von  $f$  zumindest im Punkt  $a_k + \sum_{i=0}^k x_i$ . Da der Graph abgeschlossen ist, gilt  $f(x) = y$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Man kann die wesentliche Eigenschaft der Mengen  $V_n$  in  $F$  abstrakter fassen. Dazu nennt man eine Abbildung  $V$  von der Menge der endlichen Folgen natürlicher Zahlen in die absolut-konvexen Teilmengen eines SNR's  $F$ , ein VERVOLLSTÄNDIGENDES GEWEBE (ENGL.: COMPLETING WEB) falls

1.  $V(\emptyset) = F$ ;
2. für jede endliche Folge  $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n, k_{n+1})$  die Inklusion  $2V(\mathbf{k}, k_{n+1}) \subseteq V(\mathbf{k})$  gilt;
3. für jede endliche Folge  $\mathbf{k} := (k_1, \dots, k_n)$  jeder Punkt in  $V(\mathbf{k})$  absorbiert wird von  $\bigcup_{k_{n+1} \in \mathbb{N}} V(\mathbf{k}, k_{n+1})$ ;
4. und für jede unendliche Folge  $(k_1, k_2, \dots)$  und  $x_n \in V(k_1, \dots, k_n)$  die Reihe  $\sum_n x_n$  konvergiert.

Ein SNR  $F$  heißt "VERSPONNEN" (engl. webbed) falls er ein vervollständigendes Gewebe  $V$  besitzt.

**Lemma.**

Jeder Fréchet-Raum  $E$  ist versponnen. Folgen-abgeschlossene Teilräume, abzählbare Produkte, separierte Quotienten und abzählbare Koprodukte versponnener Räume sind versponnen. Das Closed Graph Theorem gilt auch für versponnene Räume  $F$ . Die Fréchet-Räume sind genau die Baire'schen versponnenen SNR'e.

**Beweis.** Jeder Fréchet-Raum  $E$  ist versponnen, dazu nehmen man nur eine 0-Umgebungs-Basis  $V_n$  wie oben und definiere  $V(k_1, \dots, k_n) := V_n$ .

Für Teilräume ist die Spur eines vollständigen Gewebes und für Quotienten das Bild eines solchen wieder ein solches.

Für restlichen Erbllichkeiten siehe [Jar81, S.90,91].

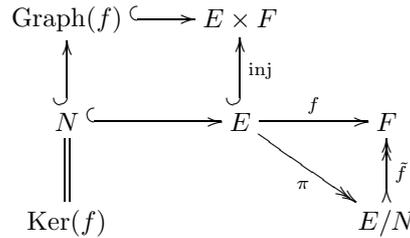
Der obige Beweis des Closed Graph Theorems läßt sich mit folgenden Änderungen direkt auf versponnen Räume  $F$  übertragen: Wir wählen induktiv  $k_n \in \mathbb{N}$  so, daß  $V_n := V(k_1, \dots, k_n)$  nicht mageres Urbild  $A_k := f^{-1}(V_n)$  hat. Dies geht wegen Eigenschaft (3) des Gewebes. Nun zeigt man wie im Beweis von (5.6), die Existenz von 0-Umgebungen  $U_n \subseteq \overline{A_{n-1}}$  mit  $f(U_n) \subseteq \overline{V_{n-1}}$ , womit die Stetigkeit von  $f$  gezeigt ist.

Für die letzte Aussage siehe [Jar81, S.94]. □

**5.7 Open Mapping Theorem.**

*Es sei  $E$  versponnen,  $F$  Baire'sch und  $f : E \rightarrow F$  linear und surjektiv mit abgeschlossenen Graphen. Dann ist  $f$  eine offene Abbildung, d.h. die Bilder aller offener Mengen sind offen.*

**Beweis.** Wäre  $f$  bijektiv, so könnten wir einfach (5.6) auf  $f^{-1}$  anwenden. Im allgemeinen betrachten wir das Diagramm:



Es sei  $f : E \rightarrow F$  linear, und das Bild  $F = f(E)$  Baire'sch. Da  $f$  abgeschlossenen Graphen hat, ist der Kern  $N := \text{inj}_1^{-1}(\text{Graph } f)$  von  $f$  abgeschlossen. Somit ist  $E/N$  selbst versponnen. Wir betrachten nun die bijektive Abbildung  $\tilde{f} : E/N \rightarrow F$ ,  $[x] \mapsto f(x)$ . Falls  $f$  abgeschlossenen Graphen hat, so gilt gleiches auch für  $\tilde{f}$ , denn  $\pi \times f : E \times F \rightarrow (E/N) \times F$  ist eine Quotientenabbildung (da offen), und  $(\pi \times f)^{-1}(\text{Graph } \tilde{f}) = \text{Graph } f$ . Die Umkehrung von  $\tilde{f}$  hat dann ebenfalls abgeschlossenen Graphen in  $F \times (E/N)$ , da die Spiegelung  $(E/N) \times F \rightarrow F \times (E/N)$  ein Isomorphismus ist. Folglich ist nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (5.6) die Abbildung  $\tilde{f}^{-1}$  stetig von  $F$  auf  $E/N$ , und damit  $f$  so wie  $\pi$  eine offenen Abbildung auf ihr Bild. □

**Folgerung.**

*Es sei  $f : E \rightarrow F$  eine stetige lineare Abbildung auf einem Fréchet-Raum  $E$  mit nicht-mageren Bild  $f(E)$  in  $F$ . Dann ist  $f$  surjektiv und sogar eine Quotienten-Abbildung, d.h.  $F \cong E/\text{Ker}(f)$ .*

**Beweis.** Unter diesen Voraussetzungen ist im Beweis des Open Mapping Theorems für  $f : E \rightarrow f(E)$  der Quotientenraum  $E/N$  ebenfalls ein Fréchet-Raum, weiters ist  $\tilde{f} : f(E) \leftarrow E/N$  stetig, und damit ein topologischer Isomorphismus. Damit ist aber auch  $f(E)$  vollständig und somit abgeschlossen in  $F$ . Wäre  $f(E) \neq F$ , so wäre  $f(E)$  nirgends dicht (0-Umgebungen sind absorbierend), ein Widerspruch dazu, daß  $f(E)$  als nicht mager vorausgesetzt wurde. □

## 5.8 Folgerungen

### Folgerung.

Die Inverse einer bijektiven stetigen linearen Abbildung zwischen Fréchet Räumen ist stetig.  $\square$

Wir wollen nun Stetigkeit von linearen Abbildungen mit Werten in Räumen glatter Funktionen untersuchen.

### Folgerung.

Es sei  $E$  ein Baire'scher Raum,  $F$  ein versponnener Raum und  $\mathcal{F}$  eine Punkte-trennende Familie von stetigen linearen Funktionalen auf  $F$ . Falls  $T : E \rightarrow F$  eine lineare Abbildung ist, deren sämtliche Zusammensetzungen  $f \circ T : E \rightarrow F \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f \in \mathcal{F}$  stetig sind, so ist  $T$  stetig.

**Beweis.** Wir wollen das Closed Graph Theorem (5.6) anwenden. Also müssen wir zeigen, daß  $T(x) = y$  aus  $x_i \rightarrow x$  und  $T(x_i) \rightarrow y$  folgt. Da die  $f \in \mathcal{F}$  stetig sind, ist  $f(T(x)) = (f \circ T)(\lim_i x_i) = \lim_i (f \circ T)(x_i) = f(\lim_i T(x_i)) = f(y)$ . Und da die  $f \in \mathcal{F}$  Punkte-trennend sind, ist  $T(x) = y$ .  $\square$

### Bemerkung.

Diese Folgerung gilt klarerweise auch noch, wenn  $E$  selbst nicht notwendig Baire'sch ist, aber die finale Struktur von Baire-Räumen trägt.

Insbesondere läßt sich das mit den Punkt-Evaluationen anstelle von  $\mathcal{F}$  auf die Fréchet-Räume  $C^n(U)$ ,  $C_K^\infty(U)$  und  $\mathcal{E}$ ; sowie auf die strikt induktiven Limiten  $C_c(X)$ ,  $C_c^n(U)$  und  $\mathcal{D}$  von Fréchet-Räumen anstelle von  $E$  anwenden.

So sieht man sehr einfach, daß die Abbildungen aus (4.11) und (4.15)

1.  $T_x, S, \partial^\alpha : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ ;
2.  $f \cdot (-) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  für  $f \in \mathcal{E}$ ;
3.  $\varphi \star (-) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  für  $\varphi \in \mathcal{D}'$  (vgl. (4.15));
4.  $\varphi \star (-) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  für  $\varphi \in \mathcal{E}'$

stetig sind, und daß die initiale Struktur von  $C(U)$  und  $C^\infty(U)$  auf  $H(U)$  ident ist. In der Tat ist

$$\begin{aligned} (\text{ev}_x \circ T_y)(f) &= f(x - y) = \text{ev}_{x-y}(f); \\ (\text{ev}_x \circ S)(f) &= f(-x) = \text{ev}_{-x}(f); \\ (\text{ev}_x \circ \partial^\alpha)(f) &= \partial^\alpha f(x); \\ \text{ev}_x(g \cdot f) &= g(x) \cdot f(x) = (g(x) \text{ev}_x)(f); \\ \text{ev}_x(\varphi \star f) &= \varphi(T_x(S(f))) = (\varphi \circ T_x \circ S)(f). \end{aligned}$$

Im Falle, wo der Zielraum  $\mathcal{D}$  ist, läßt sich auch das Closed Graph Theorem (5.6) für Fréchet-Räume anwenden, wenn man die Träger mitverfolgt. Z.B. gilt  $\text{Trg}(\varphi \star f) \subseteq \text{Trg} \varphi + \text{Trg} f$ .

### Bemerkung.

Das Closed Graph Theorem (5.6) hat auch das Uniform Boundedness Principle (5.4) für Baire'sche Räume zur Folge: Sei nämlich  $\mathcal{F} \subset E'$  punktweise beschränkt. Dann ist die Abbildung  $\iota : E \rightarrow B(\mathcal{F}, \mathbb{K})$ ,  $x \mapsto (f \mapsto f(x))$  eine wohldefinierte lineare Abbildung. Die Zusammensetzung mit  $\text{ev}_f : B(\mathcal{F}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$  ist gerade  $f$ , also stetig. Damit folgt nun, daß  $\iota$  stetig ist, denn  $B(\mathcal{F}, \mathbb{K})$  ist ein Banach-Raum, und somit existiert eine 0-Umgebung  $U$  mit  $|\mathcal{F}(U)| \subseteq [-1, 1]$ .

**Gegenbeispiel.**

Es sei  $E$  der Teilraum der endlichen Folgen in  $\ell^\infty$ , und  $f_n : (x_k)_{k=1}^\infty \mapsto \sum_{k \leq n} x_k$ . Dann sind die  $f_n \in L(E, \mathbb{R})$  punktweise beschränkt, bilden aber keine beschränkte Menge, denn  $\|f_n\| := \sup\{|\sum_{k \leq n} x_k| : (x_k)_{k=1}^\infty \in E \text{ und } \forall k : |x_k| \leq 1\} = n$ .

**Lemma.**

Es sei  $T : E \rightarrow F$ ,  $S : F' \rightarrow E'$  beide linear mit  $y'(Tx) = S(y')(x)$ , dann sind  $T$  und  $S$  beschränkt.

**Beweis.** Es sei  $B \subseteq E$  beschränkt. Dann ist  $y'(TB) = S(y')(B)$  beschränkt, d.h.  $TB$  skalar-beschränkt, also  $TB$  beschränkt nach der Folgerung in (5.5). Ist weiters  $A \subseteq F'$  beschränkt, so ist  $(SA)(B) = A(T(B))$  beschränkt in  $\mathbb{K}$ , d.h.  $SA$  ist beschränkt in  $E'$ .  $\square$

**5.9 Fourier-Reihen**

Das Problem der SCHWINGENDEN SAITE besteht darin die partielle Differentialgleichung  $(\frac{\partial}{\partial t})^2 u = k^2 (\frac{\partial}{\partial x})^2 u$  unter den Randbedingungen  $u(0, t) = 0 = u(\pi, t)$  und der Anfangsbedingung  $u(x, 0) = u_0(x)$  und  $\frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = u_1(x)$  zu lösen. Der Separationsansatz  $u(x, t) = v(x)w(t)$  führt auf die Gleichung  $v(x)w''(t) = k^2 v''(x)w(t)$ , und somit zu  $v''(x) = \lambda v(x)$  und  $w''(t) = k^2 \lambda w(t)$ , wobei  $\lambda$  den notwendigerweise konstanten Quotienten  $\frac{v''}{v} = \frac{1}{k^2} \cdot \frac{w''}{w}$  bezeichnet. Die Gleichung  $D(v) = \lambda \cdot v$  ist eine Eigenwertgleichung für den Operator  $D(v) := v''$ . Falls  $v$  eine nicht triviale Lösung, d.h. eine nicht überall verschwindend, ist, folgt aus  $\lambda \int_0^\pi v^2 = \int_0^\pi v v'' = v v'|_0^\pi - \int_0^\pi (v')^2 < 0$ , daß  $\lambda < 0$  ist. Die Lösungen der linearen Differentialgleichung  $v'' = \lambda v$  mit Anfangsbedingung  $v(0) = 0$  ist dann  $v(x) = a \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ . Aus  $v(\pi) = 0$  folgt  $n := \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\lambda = -n^2$ . Folglich erhalten wir Lösungen  $u(x, t) = \sin nx \cdot (a_n \cos(knt) + b_n \sin(knt))$ . Die allgemeine Lösung sollte dann eine Summe solcher Funktionen sein. Das führt zum Problem folgende Gleichungen zu lösen:

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

$$u_1(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k n b_n \sin nx$$

Es stellt sich also die Frage, ob sich jede  $2\pi$ -periodische Funktion als FOURIER-REIHE, d.h. einer Reihe der Form  $\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  bzw. komplex als  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ , schreiben läßt (Man beachte, daß  $e^{\pm inx} = \cos nx \pm i \sin nx$  ist). Es sei  $\exp_n \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  die Funktion  $x \mapsto e^{inx}$ .

Falls  $(c_n)_n \in \ell^1 := \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ , dann konvergiert die Reihe wegen der Hölderungleichung absolut und gleichmäßig, und stellt somit eine  $2\pi$ -periodische Funktion aus  $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cong C(S^1, \mathbb{C})$  dar. Da  $\langle \exp_n, \exp_m \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp_n(x) \overline{\exp_m(x)} dx = \delta_{n,m}$  ist, kann man die Koeffizienten  $c_n$  aus dem Produkt  $\langle f, \exp_n \rangle$  berechnen. Man beachte, daß dies gerade das normierte Lebesgue-Maß mit  $\mu(S^1) = 1$  verwendet.

Diese Integrale machen aber sogar für  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  Sinn, denn  $\exp_n$  ist meßbar und  $|f \cdot \exp_n| = |f| \in L^1$ . Wir nennen die komplexen Zahl  $c_n := \langle f, \exp_n \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$  den  $n$ -ten FOURIER-KOEFFIZIENTEN. Für diesen gilt nun der

**Satz von Riemann-Lebesgue.**

Es sei  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ , dann gilt  $c_n(f) \rightarrow 0$  für  $|n| \rightarrow \infty$ . Wenn  $\mathcal{F}(f) := (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$

und  $\mathcal{F}^{-1}(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \exp_k$  für  $x = (x_k)_k \in c_0$ , dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \end{array}$$

**Beweis.** Es ist  $\mathcal{F}$  stetig, denn  $|\mathcal{F}(f)_k| = |c_k(f)| = |\langle f, \exp_k \rangle| \leq \|f\|_1 \|\exp_k\|_\infty = \|f\|_1$ .

Ebenso ist  $\mathcal{F}^{-1}$  stetig, denn  $|\mathcal{F}^{-1}(c)(x)| = |\sum_k c_k \exp_k(x)| \leq \sum_k |c_k| = \|c\|_1$ .

Es sei  $\varepsilon > 0$ . Aus dem Weierstraß'schen Approximationssatz (3.8) folgt, daß ein trigonometrisches Polynom  $p$  existiert mit  $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - p(x)| dx < \varepsilon$ . Daraus folgt, daß  $|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - p(x)) e^{inx} dx| \leq \varepsilon$ . Somit genügt es die Aussage für trigonometrische Polynome  $p$  zu zeigen. Für das Polynom  $p : x \mapsto \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$  gilt:  $c_k(p) = 0$  für  $|k| > n$ .  $\square$

**Lemma.**

Die partial-Summen  $s_n(f) := \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e^{ikx}$  der Fourier-Reihe haben folgende Integral-Darstellung

$$s_n(f) : x \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-t) f(t) dt =: (D_n \star f)(x),$$

wobei der DIRICHLET-KERN  $D_n$  durch  $D_n(t) := \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}$  gegeben ist und eine stetige gerade Funktion ist.

Es gilt

$$\sup \left\{ \left| \int_a^b D_n(x) dx \right| : 0 \leq a \leq b \leq \pi, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$$

und

$$\|D_n\|_1 \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} s_n(f)(x) &= \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leq n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leq n} e^{ik(x-t)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} D_n(t) &:= \sum_{|k| \leq n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{k=0}^{2n} (e^{it})^k \\ &= e^{-int} \frac{e^{i(2n+1)t} - 1}{e^{it} - 1} = \frac{e^{i(n+1/2)t} - e^{-i(n+1/2)t}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\ &= \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

Es sei  $h(x) := \frac{1}{\sin x/2} - \frac{2}{x}$  für  $x \in (0, \pi]$  und  $h(0) := 0$ . Dann ist  $h \in C([0, \pi])$ . Folglich gilt:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b D_n(x) dx \right| &\leq \left| \int_a^b h(x) \sin((n+1/2)x) dx \right| + \left| \int_a^b \frac{2}{x} \sin((n+1/2)x) dx \right| \\ &\leq \pi \cdot \|h\|_\infty + 4 \sup\left\{ \left| \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx \right| : t \geq 0 \right\}, \end{aligned}$$

da mit  $s = (n+1/2)x$  folgendes gilt:

$$\int_a^b \frac{\sin((n+1/2)x)}{((n+1/2)x)} \cdot (n+1/2) dx = \int_\alpha^\beta \frac{\sin s}{s} ds = \int_0^\beta \frac{\sin s}{s} ds - \int_0^\alpha \frac{\sin s}{s} ds.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \|D_n\|_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left| \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)} \right| dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \right| dt \quad (\text{mit } s := \frac{t}{2} \text{ und Symmetrie}) \\ &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \right| dt, \quad (\text{da } 0 \leq \sin t \leq t) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \int_{\frac{k\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{(k+1)\pi}{2(2n+1)}} \left| \frac{\sin((2n+1)t)}{t} \right| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2(2n+1)}{(k+1)\pi} \int_{\frac{k\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{(k+1)\pi}{2(2n+1)}} |\sin((2n+1)t)| dt \\ &\geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{2n} \frac{2}{(k+1)\pi} \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} |\sin(t)| dt \quad (\text{mit } s = (2n+1) \cdot t) \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \int_0^{\pi/2} |\sin(t)| dt \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1}. \quad \square \end{aligned}$$

**Lemma.**

*Es sei  $f$  absolut-stetig und  $2\pi$ -periodisch. Dann konvergiert die Fourier-Reihe  $s_n(f)$  gleichmäßig gegen  $f$ .*

Dabei heißt eine Funktion ABSOLUT-STETIG, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodaß  $\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$  für jede endliche Folge disjunkter(!) Intervalle  $(a_k, b_k)$  mit  $\sum_{k=1}^n |b_k - a_k| < \delta$ .

Die absolut-stetigen Funktionen  $F$  sind fast überall differenzierbar und die Ableitung  $f := F'$  liegt in  $L^1$  und es gilt  $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ .

Umgekehrt ist die Stammfunktion  $F : x \mapsto \int_0^x f$  einer  $L^1$ -Funktion  $f$  absolut-stetig, und es gilt  $F'(x) = f(x)$  fast überall.

**Beweis.** Es sei  $s_n(f)$  die  $n$ -te symmetrische Partialsumme der Fourier-Reihe von  $f$ , so gilt wegen  $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2\pi$ :

$$\begin{aligned}
 |s_n f(0) - f(0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - f(0)) D_n(t) dt \right| \\
 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^t f'(s) ds D_n(t) dt \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{\pi} \int_0^t f'(s) D_n(t) ds dt + \int_{-\pi}^0 \int_0^t f'(s) D_n(t) ds dt \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{\pi} \int_0^t f'(s) D_n(t) ds dt - \int_{-\pi}^0 \int_t^0 f'(s) D_n(t) ds dt \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{\pi} \int_s^{\pi} f'(s) D_n(t) dt ds - \int_{-\pi}^0 \int_{-\pi}^s f'(s) D_n(t) dt ds \right| \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{\pi} f'(s) \int_s^{\pi} D_n(t) dt ds + \int_{-\pi}^0 f'(s) \left( - \int_{-s}^{\pi} D_n(-t) dt \right) ds \right| \\
 &\leq \|f'\|_1 \cdot \sup \left\{ \left| \int_s^{\pi} D_n(t) dt \right| : s \geq 0 \right\}.
 \end{aligned}$$

Wegen  $s_n(T_h(f)) = T_h(s_n(f))$  (!) erhalten wir diese Ungleichung überall. Es sei  $p$  ein trigonometrisches Polynom, welches  $\|p' - f'\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{K}$  erfüllt. Für  $k$  größer als der Grad von  $p$  gilt dann

$$\begin{aligned}
 |s_k(f)(x) - f(x)| &= |(s_k(f)(x) - p(x)) - (f(x) - p(x))| \\
 &= |s_k(f - p)(x) - (f - p)(x)| \\
 &\leq \|(f - p)'\|_1 \cdot K \leq \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon. \quad \square
 \end{aligned}$$

## 5.10 Operationen mit Fourier-Reihen

Für die Faltung gilt  $\mathcal{F}(f \star g)_k = \mathcal{F}(f)_k \cdot \mathcal{F}(g)_k$  oder kurz  $\boxed{\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f \star g)_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f \star g)(x) e^{-ikx} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) e^{-ikx} dy dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y) e^{-iky} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) e^{-ik(x-y)} dx dy \quad (\text{nach Fubini}) \\
 &= \mathcal{F}(f)_k \cdot \mathcal{F}(g)_k.
 \end{aligned}$$

Für die Spiegelung gilt  $\mathcal{F}(S(f))_k = \mathcal{F}(f)_{-k}$  oder kurz  $\boxed{\mathcal{F}(Sf) = S(\mathcal{F}f)}$ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(S(f))_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) e^{-ikx} dx \\
 &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(y) e^{iky} dy \quad (\text{mit } y := -x) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-i(-k)y} dy \\
 &= \mathcal{F}(f)_{-k}.
 \end{aligned}$$

Insbesondere sind die Fourier-Koeffizienten einer geraden Funktion gerade, die einer ungeraden Funktion ungerade.

Für Translationen ist  $\mathcal{F}(T_c(f))_k = e^{-ikc} \cdot \mathcal{F}(f)_k$ , oder kurz  $\boxed{\mathcal{F}(T_c f) = \exp_{-c} \cdot \mathcal{F} f}$  wenn  $\exp_c(x) := e^{ixc}$  bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(T_c(f))_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-c) e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-ik(y+c)} dy \text{ mit } y = x - c \\ &= e^{-ikc} \cdot \mathcal{F}(f)_k. \end{aligned}$$

Für die Multiplikation mit  $\exp_\ell : x \mapsto e^{i\ell x}$  gilt  $\mathcal{F}(\exp_\ell \cdot f)_k = \mathcal{F}(f)_{k-\ell}$  oder kurz  $\boxed{\mathcal{F}(\exp_\ell \cdot f) = T_\ell(\mathcal{F} f)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\exp_\ell \cdot f)_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{i\ell x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(k-\ell)x} dx \\ &= \mathcal{F}(f)_{k-\ell}. \end{aligned}$$

Für die Konjugation gilt  $\mathcal{F}(\bar{f})_k = \overline{\mathcal{F}(f)_{-k}}$  oder kurz  $\boxed{\mathcal{F}(\bar{f}) = S(\overline{\mathcal{F} f})}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{f})_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(x)} e^{-ikx} dx \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-i(-k)x} dx} \\ &= \overline{\mathcal{F}(f)_{-k}}. \end{aligned}$$

Für das Produkt zweier  $L^2$ -Funktionen gilt  $\boxed{\mathcal{F}(f \cdot g) = \mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g)}$ , wobei die Faltung zweier Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  und  $(b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  durch  $(a \star b)_k := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k-n} \cdot b_n$  gegeben ist:

Für  $k = 0$  folgt das aus der Parseval'schen Gleichung (siehe (6.11) und (6.13)):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \cdot g)_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx \\ &= \langle f, \bar{g} \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(\bar{g}) \rangle \\ &= \sum_k \mathcal{F}(f)_k \cdot \overline{\mathcal{F}(\bar{g})_k} \\ &= \sum_k \mathcal{F}(f)_k \cdot \mathcal{F}(g)_{-k} \\ &= (\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g))_0. \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall folgt nun folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f \cdot g)_k &= \mathcal{F}(f \cdot g \cdot \exp_{-k})_0 = \sum_j \mathcal{F}(f)_j \cdot \mathcal{F}(g \cdot \exp_{-k})_{-j} \\ &= \sum_j \mathcal{F}(f)_j \cdot \mathcal{F}(g)_{k-j} \\ &= (\mathcal{F}(f) \star \mathcal{F}(g))_k. \end{aligned}$$

Bezüglich Stammfunktionbildung gilt für  $f \in L^1$  mit Fourier-Koeffizienten  $c_k$ : Die durch  $F(x) := \int_0^x (f(t) - c_0) dt$  definierte Funktion  $F$  ist absolut-stetig und  $2\pi$ -periodisch, denn

$$F(x + 2\pi) - F(x) = \int_x^{x+2\pi} (f(t) - c_0) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt - 2\pi \cdot c_0 = 0.$$

Seien  $C_k$  die Fourier-Koeffizienten von  $F$ . Nun liefert partielle Integration für  $k \neq 0$ :

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \left[ F(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - c_0) \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt \right) \\ &= 0 + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt - c_0 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikt}}{ik} dt \right] \\ &= \frac{1}{ik} c_k + 0. \end{aligned}$$

Da für absolut-stetige  $F$  die Reihe  $\sum_k C_k e^{ikx} \rightarrow F(x)$  gleichmäßig konvergiert, folgt aus  $0 = F(0) = \sum_k C_k e^{ik0} = \sum_k C_k$  die Beziehung  $C_0 = -\sum_{k \neq 0} C_k$ . Da die Summe  $\sum_{k \neq 0} C_k = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{ik} c_k$  konvergiert, gilt gleiches für  $\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} c_k$ , also ist z.B.  $\sum_{k > 1} \frac{\sin(kx)}{\ln(k)}$  nicht die Fourier-Reihe einer  $L^1$ -Funktion.

Es gilt  $\int_a^b f(t) dt = \sum_k \int_a^b c_k e^{ikt} dt$  für  $f \in L^1$ :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt &= F(b) - F(a) + (b - a) c_0 \\ &= \sum_k C_k e^{ikb} - \sum_k C_k e^{ika} + (b - a) c_0 \\ &= \sum_{k \neq 0} \frac{c_k}{ik} (e^{ikb} - e^{ika}) + (1 - 1) C_0 + (b - a) c_0 \\ &= \sum_{k \neq 0} c_k \int_a^b e^{ikt} dt + c_0 \int_a^b e^{ik0} dt \\ &= \sum_k \int_a^b c_k e^{ikt} dt. \end{aligned}$$

Für absolut-stetiges und  $2\pi$ -periodisches  $f$  gilt  $\boxed{\mathcal{F}(f')_k = ik\mathcal{F}(f)_k}$ :

Da  $f$  absolut-stetig ist, existiert  $f'$  fast überall,  $f' \in L^1$  und  $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ . Es seien  $c_k$  die Fourier-Koeffizienten von  $f'$  und  $C_k$  jene von  $f$ , so gilt  $c_0 = 0$  und nach dem eben Bewiesenen, daß  $C_k = \frac{1}{ik} c_k$  für  $k \neq 0$ .

### Theorem.

Die Fourier-Koeffizienten liefern einen Isomorphismus von  $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  mit dem Fréchet-Raum  $s := \{(c_k)_k : k^n c_k \rightarrow 0 \text{ für alle } n\}$  der schnell fallenden Folgen, wobei wir diesen Raum mit den Normen  $\|(c_k)\|_p := \sup_k |c_k p(k)|$  versehen, wobei  $p$  alle Polynome durchläuft. Es genügt sich dabei auf Polynome der Form  $p(k) := (k^2 + 1)^d$  mit  $d \in \mathbb{N}$  zu beschränken.

$$\begin{array}{ccc}
 C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{F}} & s(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})
 \end{array}$$

**Beweis.** Es sei  $f \in C^\infty$ , dann ist  $f^{(n)} \in L^1$ , also gilt nach dem Satz von Riemann-Lebesgue, daß die Fourier-Koeffizienten  $(ik)^n c_k$  von  $f^{(n)}$  in  $c_0$  und somit jene von  $f$  in  $s$  liegen. Umgekehrt, falls  $(c_k) \in s$ , so ist  $(ik)^{n+2} c_k \in \ell^\infty$  und damit  $(ik)^n c_k \in \ell^1$ . Folglich ist  $f := \sum_k c_k \exp_k \in C^n$  für alle  $n$ , also  $f \in C^\infty$ . Die Abbildungen sind invers zueinander, einerseits, da das für  $(c_k)$  in  $\ell^1$  gilt, und andererseits, da es für absolut-stetige  $f$  gilt.

Das die Zuordnung sogar einen topologischen Isomorphismus liefert, folgt daraus, daß beides Fréchet-Räume sind, und die Punkt-Evaluationen stetig sind. Es genügt also die Beschränktheit von  $f \mapsto c_k(f) = \langle f, \exp_k \rangle$  für fixes  $k$  und die von  $(c_k) \mapsto \sum_k c_k e^{ikx}$  für fixes  $x$  zu zeigen. Diese folgen sofort aus der Hölderungleichung.  $\square$

### 5.11 Negative Aussagen über Konvergenz von Fourier-Reihen

Der Satz von Riemann-Lebesgue liefert aber keine vollständige Beschreibung des Vektorraums der Fourier-Koeffizienten aller  $L^1$ -Funktionen, denn es gilt

**Lemma.**

Das Bild  $\mathcal{F}(L^1)$  ist mager in  $c_0 := \{(\lambda_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \lim_{|n| \rightarrow \infty} \lambda_n = 0\} \subseteq \ell^\infty$ , wobei  $\mathcal{F}$  die Abbildung  $f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$  bezeichnet.

Ein konkretes Beispiel ist die Reihe  $\sum_{n \geq 2} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$ . Sie ist nicht die Fourier-Reihe einer  $L^1$ -Funktion, aber die Koeffizienten liegen in  $c_0$ .

**Beweis.** Angenommen  $E := \mathcal{F}(L^1)$  ist nicht mager, also Baire'sch. Die Abbildung  $f \mapsto \mathcal{F}(f)$  ist stetig, denn  $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$ , nach der Hölder'schen Ungleichung. Sie ist auch injektiv, denn falls die Fourier-Koeffizienten  $c_k$  einer  $L^1$ -Funktion  $f$  alle verschwinden, so gilt gleiches auch für die Fourier-Koeffizienten  $C_k = \frac{c_k}{ik}$  der absolut-stetigen Funktion  $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Da die Fourier-Reihe einer solchen Funktion gleichmäßig gegen diese konvergiert, ist  $F = 0$  und damit auch  $0 = F' = f$  fast überall. Nach dem Open Mapping Theorem (5.7) wäre  $\mathcal{F}$  somit surjektiv und  $\mathcal{F}^{-1}$  stetig, d.h.  $\|f\|_1 \leq \|\mathcal{F}^{-1}\| \|\mathcal{F}(f)\|_\infty$ . Für die Dirichlet-Kerne  $D_n$  gilt  $c_k(D_n) = 1$  für  $k \leq n$  und 0 sonst, somit ist  $\|\mathcal{F}(D_n)\|_\infty = 1$ . Andererseits gilt aber  $\|D_n\|_1 \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty$ , Widerspruch.  $\square$

**Lemma.**

Nicht für jedes  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  konvergiert die Fourier-Reihe in der 1-Norm. Die Menge der  $f$  in  $L^1$  für welche die Fourier-Reihe in der 1-Norm konvergiert ist sogar mager.

**Beweis.** Angenommen  $E := \{f \in L^1 : s_n(f) \text{ konvergiert für } n \rightarrow \infty \text{ in } L^1\}$  nicht mager, also Baire'sch. Die Operatoren  $s_n : E \rightarrow L^1$  sind punktweise beschränkt und wegen  $\|s_n(f)\| = \|f \star D_n\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|D_n\|_1$  auch stetig. Somit folgt aus dem Uniform Boundedness Principle (5.4), daß die Folge der Normen  $\|s_n\|$  beschränkt

ist. Das ist aber falsch, da  $\|D_n\|_1 = \|s_n\|$ , denn  $\|f_\varepsilon \star D_n - D_n\|_1 \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  und  $f_\varepsilon$  wie in (4.15).  $\square$

**Bemerkung.**

Von Kolmogorov stammt ein Beispiel einer  $L^1$ -Funktion, für welche die Fourier-Reihe in keinem einzigen Punkt konvergiert, siehe [Con85, S.22].

Es wurde von [Lus15] vermutet, daß die Fourier-Reihe jeder  $L^2$ -Funktion fast überall konvergiert. Das konnte von [?] gezeigt werden. [?] dehnte das Resultat auf alle  $L^p$  mit  $p > 1$  aus.

Vielleicht haben wir zuviel erwartet. Betrachten wir statt dessen stetige periodische Funktionen  $f$ , dann sollte die Fourier-Reihe von  $f$  mindestens punktweise konvergieren.

**Lemma.**

Die Menge der stetigen Funktionen  $f \in C(S^1, \mathbb{R})$ , für welche die Fourier-Reihe in einem fixen Punkt (sagen wir 0) konvergiert, ist mager in  $C(S^1)$ .

Es gilt sogar, daß zu jeder abzählbaren Teilmenge von  $S^1$ , es eine nicht magere Menge  $A$  gibt, die diese enthält, sowie eine stetige Funktion  $f \in C(S^1, \mathbb{R})$ , so daß die Fourier-Reihe von  $f$  in jedem Punkt von  $A$  divergiert.

**Beweis.** Wir zeigen das nur für den 0-Punkt. Angenommen  $E := \{f \in C_{2\pi} : s_n(f)(0) \text{ konvergiert in } \mathbb{C}\}$  ist nicht mager, also Baire'sch. Die linearen Funktionale  $x'_n : f \mapsto s_n(f)(0)$  auf  $E$  sind somit punktweise beschränkt und auch stetig, denn  $\|x'_n\| = \|D_n\|_1$ , da

$$|x'_n(f)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \right| \leq \|f\|_\infty \|D_n\|_1,$$

und falls  $f := \text{sgn } D_n$  so gilt Gleichheit. Man muß dazu also nur  $f$  durch stetige Funktionen approximieren, welche nur auf einer beliebig kleinen Menge nicht übereinstimmen. Nach dem Uniform Boundedness Principle muß auch  $\|x'_n\| = \|D_n\|_1$  beschränkt sein, ein Widerspruch.  $\square$

**Fourier-Reihen von Distributionen**

**Folgerung.**

Die Transponierte der Fourierentwicklung liefert einen Isomorphismus  $\mathcal{F}^* : s' \rightarrow (C_{2\pi}^\infty)'$ . Die Inverse dieses Isomorphismuses ist eine Fortsetzung der Fourierentwicklung  $\mathcal{F} : L^1[-\pi, \pi] \rightarrow c_0$ , wobei  $\iota : L^1[-\pi, \pi] \rightarrow (C_{2\pi}^\infty)'$  gegeben ist durch  $f \mapsto \left( g \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt \right)$  und  $\iota : c_0 \rightarrow s'$  durch  $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \left( (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_k \overline{y_k} \right)$ .

$$\begin{array}{ccc} L^1[-\pi, \pi] & \xrightarrow{\mathcal{F}} & c_0 \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ (C_{2\pi}^\infty)' & \xleftarrow{\mathcal{F}^*} & s' \end{array}$$

**Beweis.** Daß  $\mathcal{F}^*$  ein Isomorphismus ist, ist klar. Für die zweite Aussage verwenden wir, daß die endlichen Folgen dicht liegen in  $s$ , und somit die Punkt-Evaluationen an den Vektoren  $e^k$  der Standardbasis eine Punkte-trennende Familie sind. Daher

genügt es für alle  $k \in \mathbb{Z}$  die Gleichheit  $\text{ev}_{e^k} \circ \iota \circ \mathcal{F} = \text{ev}_{e^k} \circ (\mathcal{F}^{-1})^* \circ \iota$  zu zeigen. Sei also  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} (\text{ev}_{e^k} \circ (\mathcal{F}^{-1})^* \circ \iota)(f) &= \text{ev}_{e^k}((\mathcal{F}^{-1})^*(\iota(f))) = ((\mathcal{F}^{-1})^*(\iota(f)))(e^k) \\ &= (\iota(f))(\mathcal{F}^{-1}(e^k)) = (\iota(f))(\exp_k) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{e^{ikt}} dt = c_k(f) \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j(f) \delta_j^k = (\iota(\mathcal{F}(f)))(e^k) \\ &= \text{ev}_{e^k}(\iota(\mathcal{F}(f))) \\ &= (\text{ev}_{e^k} \circ \iota \circ \mathcal{F})(f). \quad \square \end{aligned}$$

Wir wollen nun die beiden auftretenden Dualräume näher bestimmen. Zuerst jener von  $s$ :

**Lemma.**

Der Dualraum von  $s$  kann mit dem Vektorraum der langsam wachsenden Folgen identifiziert werden. Dabei heißt eine Folge  $(y_k)_{k=-\infty}^{+\infty}$  langsam wachsend, falls ein auf  $\mathbb{Z}$  nirgends verschwindendes Polynom  $p$  existiert, sodaß  $\{\frac{y_k}{p(k)} : k \in \mathbb{Z}\}$  beschränkt ist. Die Folge  $(y_k)_k$  wird dabei durch  $(x_k) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k \cdot x_k$  als lineares Funktional auf  $s$  aufgefaßt und umgekehrt definiert jedes  $x' \in s'$  eine Folge  $(x'(e^k))_k$ . Die Topologie auf  $s'$  ist dann als die finale Topologie bezüglich der Banach-Räume

$$E_p := \left\{ (y_k)_{k=-\infty}^{+\infty} : \|(y_k)_k\| := \sup \left\{ \left| \frac{y_k}{p(k)} \right| : k \in \mathbb{Z} \right\} < \infty \right\}$$

gegeben.

**Beweis.** Es sei  $E$  die Vereinigung  $\bigcup_p E_p \subseteq \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ , versehen mit der finalen Struktur. Dabei können wir uns auf die Polynome  $p_d : t \mapsto (1+t^2)^d$  für  $d \in \mathbb{N}$  und somit die Räume  $E_d := E_{p_d}$  beschränken. Die Abbildung  $\iota : E \rightarrow s'$  ist wohldefiniert und stetig, da ihre Einschränkung auf  $E_p$  es ist, denn für  $y \in E_p$  und  $x \in s$  gilt:

$$\begin{aligned} |\iota(y)(x)| &\leq \sum_k \left| \frac{1}{1+k^2} \frac{y_k}{p(k)} (1+k^2) p(k) x_k \right| \\ &\leq \sum_k \frac{1}{1+k^2} \cdot \|y\| \cdot \|x\|_q. \end{aligned}$$

wobei  $q$  das Polynom  $t \mapsto (1+t^2)p(t)$  ist.

Die Abbildung ist injektiv, da  $\iota(y)(e^k) = y_k$  ist.

Die Abbildung ist surjektiv: Für  $x' \in s'$  sei  $y_k := x'(e^k)$ . Da  $x'$  stetig ist, existiert ein Polynom  $p$ , sodaß  $|x'(x)| \leq \|x\|_p$  für alle  $x \in s$ . Also ist  $|\frac{y_k}{p(k)}| = \frac{|x'(e^k)|}{\|e^k\|_p} \leq 1$ , d.h.  $y \in E_p$ . Es konvergiert  $\sum_{|k| \leq n} y_k e^k \rightarrow y$  in  $E_q$ , wobei  $q(t) = (1+t^2)p(t)$  und somit konvergiert  $\sum_{|k| \leq n} y_k \iota(e^k) \rightarrow \iota(y)$  in  $s'$ . Angewendet auf  $e^j$  liefert das

$$\iota(y)(e^j) = \sum_k y_k \iota(e^k)(e^j) = y_j = x'(e^j),$$

und da die  $e^j$  Punkte trennen, gilt  $\iota(y) = x'$ .

Die Abbildung  $\iota^{-1}$  ist beschränkt: Jede beschränkte Menge in  $s'$  ist nach (5.4) gleichgradig-stetig, also enthalten in

$$\{x' \in s' : |x'(x)| \leq \|x\|_p \text{ für alle } x \in s\}$$

für ein Polynom  $p$ . Für diese  $x'$  haben wir aber oben gezeigt, daß sie von  $y = \iota^{-1}(x')$  in der Einheitskugel von  $E_p$  stammen, also ist das Urbild dieser beschränkten Menge in  $E$  beschränkt.

Man kann zeigen, daß  $s'$  ein bornologischer Raum ist, und somit  $\iota^{-1}$  auch stetig ist.  $\square$

**Bemerkung.**

Nun zum anderen Dualraum  $(C_{2\pi}^\infty)'$ . Dessen Elemente wollen wir als Distributionen beschreiben, dazu benötigen wir eine Abbildung  $\mathcal{D} \rightarrow C_{2\pi}^\infty$ , eine solche ist durch das Periodifizieren  $\text{per} : f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{2k\pi}(f)$  gegeben. Diese Abbildung ist linear und stetig, da  $(\text{ev}_t \circ \text{per})|_{C_K^\infty} = \sum_{t-2k\pi \in K} f(t-2k\pi)$  es ist. Also induziert sie eine stetig lineare Abbildung  $\text{per}^* : (C_{2\pi}^\infty)' \rightarrow \mathcal{D}'$ .

Wie sieht das Bild dieser Abbildung aus? Da  $T_{2\pi}(\text{per}(f)) = \text{per}(f)$  ist, gilt für alle  $\varphi$  im Bild, daß  $\varphi(T_{2\pi}(f)) = \varphi(f)$  ist. Wir nennen eine solche Distribution  $2\pi$ -periodisch, denn die Verschiebung  $T_h$  von  $L_{loc}^1$ -Funktionen läßt sich auf Distributionen  $\varphi$  ausdehnen:

$$\begin{array}{ccc} L_{loc}^1 & \xrightarrow{T_h} & L_{loc}^1 \\ \downarrow \iota & & \downarrow \iota \\ \mathcal{D}' & \xrightarrow{T_h = T_{-h}^*} & \mathcal{D}' \end{array}$$

indem man  $T_h$  auf  $\mathcal{D}'$  als  $T_{-h}^*$  definiert, denn  $\langle f, T_h g \rangle = \langle T_{-h} f, g \rangle$ .

Wir wollen den abgeschlossenen Teilraum von  $\mathcal{D}'$ , welcher durch die  $2\pi$ -periodischen Distributionen gebildet wird, mit  $(\mathcal{D}')_{2\pi}$  bezeichnen. Um nun eine Umkehrabbildung zu  $(C_{2\pi}^\infty)' \rightarrow (\mathcal{D}')_{2\pi}$  zu finden, benötigen wir eine Abbildung  $C_{2\pi}^\infty \rightarrow \mathcal{D}$ . Das naheliegendste ist die Multiplikation  $\mu_h$  mit einem  $h \in \mathcal{D}$ . Damit  $\text{per} \circ \mu_h = id$  ist, muß für alle  $f \in C_{2\pi}^\infty$  folgendes gelten

$$\begin{aligned} f &= (\text{per} \circ \mu_h)(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{2k\pi}(h \cdot f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{2k\pi}(h) \cdot T_{2k\pi}(f) \\ &= \text{per}(h) \cdot f. \end{aligned}$$

Also sollte  $h$  so sein, daß  $\text{per } h = 1$ . Das ist möglich, denn sei  $h_0 \in \mathcal{D}$  mit  $h_0(t) \geq 1$  für  $|t| \leq \pi$ , dann ist  $h := \frac{h_0}{\text{per } h_0}$  die gewünschte Funktion. Die umgekehrte Identität  $\mu_h \circ \text{per} = id$  gilt zwar nicht, aber wenn man  $\varphi \in (\mathcal{D}')_{2\pi}$  auf beide Seiten anwendet gilt:

$$\begin{aligned} \varphi((\mu_h \circ \text{per})(f)) &= \varphi\left(h \cdot \sum_k T_{2k\pi}(f)\right) = \varphi\left(\sum_k h \cdot T_{2k\pi}(f)\right) \\ &= \sum_k \varphi(h \cdot T_{2k\pi}(f)) = \sum_k \varphi(T_{-2k\pi}(h \cdot T_{2k\pi}(f))) \\ &= \sum_k \varphi(T_{-2k\pi}(h) \cdot f) = \varphi\left(\sum_k T_{-2k\pi}(h) \cdot f\right) \\ &= \varphi(\text{per}(h) \cdot f) = \varphi(1 \cdot f) = \varphi(f) \end{aligned}$$

Also haben wir einen Isomorphismus  $(C_{2\pi}^\infty)' \rightarrow (\mathcal{D}')_{2\pi}$  erhalten.

**Lemma.**

Die Abbildungen  $\text{per} : \mathcal{D} \rightarrow C_{2\pi}^\infty$ ,  $f \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} T_{2k\pi}(f)$  und  $\mu_h : C_{2\pi}^\infty \rightarrow \mathcal{D}$ ,  $f \mapsto h \cdot f$ , für ein  $h \in \mathcal{D}$  mit  $\text{per}(h) = 1$ , induzieren einen Isomorphismus  $(C_{2\pi}^\infty)' \cong (\mathcal{D}')_{2\pi}$ .  $\square$

**Proposition.**

Via der beiden Isomorphismen  $s' \cong \{\text{langsam wachsende Folgen}\}$  und  $(C_{2\pi}^\infty)' \cong (\mathcal{D}')_{2\pi}$  sieht der Fourier-Isomorphismus  $s' \cong (C_{2\pi}^\infty)'$  wie folgt aus:

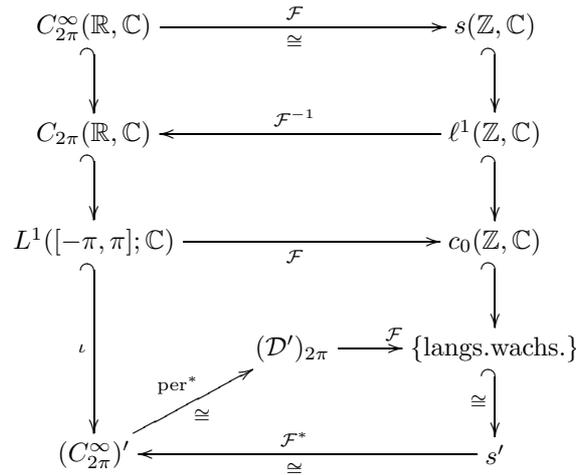
$$\begin{aligned} \varphi &\mapsto (\varphi(h \cdot \exp_k))_{k \in \mathbb{Z}} \\ (c_k)_{k \in \mathbb{Z}} &\mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp_k. \end{aligned}$$

**Beweis.** Die Fourier-Koeffizienten einer Distribution  $\varphi \in (\mathcal{D}')_{2\pi}$  sind durch

$$\begin{aligned} ((\mathcal{F}^{-1})^*((\mu_h)^*(\varphi)))(e^k) &= \varphi(\mu_h(\mathcal{F}^{-1}(e^k))) \\ &= \varphi(h \cdot \exp_k) \end{aligned}$$

gegeben. Die Fourier-Reihe einer langsam wachsenden Folge  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  ist als Distribution in  $(\mathcal{D}')_{2\pi}$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} f &\mapsto \text{per}^*(\mathcal{F}^*(\iota(c)))(f) = \iota(c)(\mathcal{F}(\text{per}(f))) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot c_k(\text{per}(f)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(t - 2j\pi) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t - 2j\pi) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi - 2j\pi}^{\pi - 2j\pi} f(s) e^{-ik(s+2j\pi)} ds \quad (\text{mit } t = s + 2j\pi) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-iks} ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \cdot \exp_k(f). \quad \square \end{aligned}$$



## 6. Hilbert-Räume

In diesem Kapitel untersuchen wir diejenigen Räume, welche die meiste geometrische Struktur besitzen. Von besonderem Interesse sind dabei orthonormal-Basen und der Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren. Wir wenden diesen dann auf Sturm-Liouville Eigenwert-Aufgaben an.

### 6.1 Bemerkung und Definition.

Kann man nicht doch einen Raum  $H$  integrierbarer Funktionen finden, die durch ihre Fourier-Entwicklung vollständig beschrieben werden? Die Fourier-Koeffizienten von  $f$  sind durch  $c_k(f) := \langle f, \exp_k \rangle$  gegeben. Das dabei auftretende Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  erinnert uns an das innere Produkt im  $\mathbb{R}^n$ , welches dazu benutzt werden kann um den Winkel  $\varphi$  zweier Vektoren  $x$  und  $y$  durch  $\cos \varphi = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$  zu bestimmen. Insbesondere ist  $\langle x, y \rangle = 0$  genau dann, wenn  $x$  und  $y$  normal aufeinander stehen. Wir sollten also die Gleichung  $\langle \exp_k, \exp_n \rangle = \delta_{k,n}$  dahingehend interpretieren können, daß diese Funktionen "orthonormal" sind. Im  $\mathbb{R}^n$  ist bezüglich einer orthonormalen Basis  $\{e^k : k = 1, \dots, n\}$  jeder Vektor  $x$  durch  $x = \sum_k \langle x, e^k \rangle e^k$  darstellbar. Es sollte also die Fourierentwicklung gerade die "Koordinaten"-Darstellung von  $f$  bezüglich der "Orthonormalbasis"  $\{\exp_k : k \in \mathbb{Z}\}$  sein. Damit das aber alles Sinn macht, muß  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  eine bilineare Abbildung von  $H \times H \rightarrow \mathbb{K}$  sein. Die Hölderungleichung erlaubt uns nur dann Funktionen  $f, g \in L^r$  einzusetzen, wenn  $r \geq p, q$  mit  $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq \frac{2}{r}$ , d.h.  $r \geq 2$ . Es gilt dann  $\langle f, f \rangle = \|f\|_2$ . Also ist der adäquate Raum  $L^2$ .

Wir wollen nun allgemeiner Vektorräume  $E$  betrachten, wo wir wie oben Winkel messen können. Sei dazu vorerst der Grundkörper  $\mathbb{R}$ . Dann benötigen wir eine bilineare Abbildung  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ , die eine Norm  $p$  durch  $p(x)^2 := b(x, x)$  definiert. Da  $b_{sym} : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(b(x, y) + b(y, x))$  die gleiche Norm induziert, können wir uns darauf beschränken, daß  $b$  symmetrisch ist. Die Bedingung, daß durch  $p(x)^2 := b(x, x)$  eine Seminorm  $p$  definiert ist, bedeutet, daß  $b(x, x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Die positive Homogenität von  $p$  folgt dann sofort aus der Bilinearität von  $b$ . Die Dreiecksungleichung gilt wegen  $p(x+y)^2 = b(x+y, x+y) = b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) \leq p(x)^2 + p(y)^2 + 2p(x)p(y)$ , denn  $b(x, y)^2 \leq b(x, x)b(y, y)$ , wie wir in (6.6) zeigen werden. Damit also  $p$  eine Norm ist, muß  $b(x, x) \geq 0$  für alle  $x$  sein, und  $b(x, x) = 0$  nur für  $x = 0$  gelten. Wir nennen eine solche symmetrische Bilinearform **POSITIV-DEFINIT**.

Ein **REELLER HILBERT-RAUM** ist ein Vektorraum  $H$  über  $\mathbb{R}$  zusammen mit einer positiv-definiten symmetrischen Bilinearform  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ , sodaß  $H$  bezüglich der Norm  $p(x)^2 := \langle x, x \rangle$  ein Banach-Raum ist.

Nun zum Fall komplexer Räume.

### 6.2 Lemma.

*Ein VR  $E$  über  $\mathbb{R}$  ist genau dann ein VR über  $\mathbb{C}$ , wenn eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $I : E \rightarrow E$  existiert, welche  $I^2 = -\text{id}$  erfüllt.*

**Beweis.** Falls  $E$  ein VR über  $\mathbb{C}$  ist, so ist  $I$  durch  $I(x) := ix$  gegeben. Umgekehrt definiert man  $(a + ib) \cdot x := a \cdot x + b \cdot I(x)$  und erhält so einen VR über  $\mathbb{C}$ .  $\square$

**Folgerung.**

Ein SNR  $E$  über  $\mathbb{R}$  definiert genau dann einen SNR über  $\mathbb{C}$ , wenn eine stetige  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $I : E \rightarrow E$  existiert, welche  $I^2 = -\text{id}$  erfüllt.

**Beweis.** Als Seminormen des komplexen VR  $E$  verwenden wir die positiv homogenen (bzgl. Skalaren in  $\mathbb{C}$ ) Seminormen des reellen Vektorraums. Diese Familie ist äquivalent, denn wenn  $p$  eine SN des reellen Vektorraums ist, so definieren wir eine komplexe SN  $p_{\mathbb{C}}$  durch

$$p_{\mathbb{C}}(x) := \sup\{p(\lambda x) : |\lambda| = 1\} \geq p(x).$$

Da  $I$  stetig ist, existiert eine SN  $q$  des reellen VR mit  $p(I(x)) \leq q(x)$ . Dann ist  $p((a + ib)x) = p(ax + bI(x)) \leq |a|p(x) + |b|q(x) \leq |a + ib| \sqrt{p(x)^2 + q(x)^2} \leq |a + ib|(p(x) + q(x))$ , also  $p_{\mathbb{C}} \leq p + q$ .  $\square$

**Bemerkung.**

Um eine Idee zu bekommen was ein komplexer Hilbert-Raum sein sollte versuchen wir zuerst aus einem beliebigen reellen Vektorraum einen komplexen machen. Man beachte, daß die zu reellen Vektorräumen von reellwertigen Funktionen gehörenden komplexen Vektorräumen komplexwertiger Funktionen gerade aus Paaren von Funktionen des reellen Vektorraums bestehen, nämlich dem real- und dem imaginär-Teil der komplexwertigen Funktion. Wir definieren also ganz allgemein die KOMPLEXIFIZIERUNG  $E_{\mathbb{C}}$  eines reellen Vektorraums  $E$  als  $E_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E = E \times E$ , und schreiben die Elemente  $(u, v) \in E_{\mathbb{C}}$  als  $u + iv$ . Die Multiplikation mit  $x + iy \in \mathbb{C}$  ist dann durch  $z \cdot (z' \otimes w) := (zz') \otimes w$ , d.h.  $(x + iy) \cdot (u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu)$  definiert. Klarerweise wird dadurch  $E_{\mathbb{C}}$  zu einem komplexen Vektorraum und die Abbildungen  $\iota : E \rightarrow E_{\mathbb{C}}, x \mapsto x + i0$  sowie  $\Re e : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E, (x + iy) \mapsto x$  sind  $\mathbb{R}$ -linear.

Damit  $\Re e : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  stetig wird, muß  $p \circ \Re e : E_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$  eine reelle stetige SN auf  $E_{\mathbb{C}}$  sein für jede stetige SN auf  $E$ . Damit die Skalarmultiplikation stetig ist, muß auch  $p_{\lambda}(w) := p(\Re e(\lambda w))$  eine reelle stetige SN auf  $E_{\mathbb{C}}$  für jedes  $|\lambda| = 1$  sein. Wir definieren  $p_{\mathbb{C}} := \sup\{p_{\lambda} : |\lambda| = 1\}$ . Es ist  $p_{\mathbb{C}}$  eine wohldefinierte reelle Seminorm auf  $E_{\mathbb{C}}$ , denn für  $\lambda = x + iy$  ist wegen der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} p_{\lambda}(u + iv) &= p\left(\Re e((x + iy)(u + iv))\right) = \\ &= p(xu - yv) \leq |x|p(u) + |y|p(v) \leq |\lambda| \sqrt{p(u)^2 + p(v)^2}. \end{aligned}$$

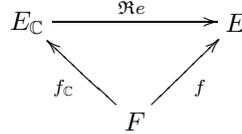
Sie ist sogar eine komplexe Seminorm, denn klarerweise gilt  $p_{\mathbb{C}}(\lambda w) = p_{\mathbb{C}}(w)$  für alle  $|\lambda| = 1$ . Wir nehmen als erzeugende Seminormen auf  $E_{\mathbb{C}}$  also die Familie aller  $p_{\mathbb{C}}$ , wobei  $p$  die stetigen Seminormen von  $E$  durchläuft.

**6.3 Proposition.**

Komplexifizieren  $E \mapsto E_{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E := E \times E$  liefert folgende Isomorphismen für VR'e  $E$  und  $G$  über  $\mathbb{R}$  sowie  $F$  über  $\mathbb{C}$ :

1. Erste universelle Problem:  $L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, F) \cong L_{\mathbb{R}}(E, F)$ ,  $h \mapsto h \circ \iota, (x + iy \mapsto f(x) + if(y)) \leftarrow f$ .
2. Zweite universelle Problem:  $L_{\mathbb{C}}(F, E_{\mathbb{C}}) \cong L_{\mathbb{R}}(F, E)$ ,  $h \mapsto \Re e \circ h, (x \mapsto f(x) - if(ix)) \leftarrow f$ .  
Verbaler formuliert bedeutet dies: Die reell-linearen Abbildungen  $f : F \rightarrow$

$E$  auf jedem komplexen Vektorraum  $F$  entsprechen in bijektiver Weise den komplex-linearen Abbildungen  $f_{\mathbb{C}} : F \rightarrow E_{\mathbb{C}}$  vermöge  $\Re e \circ f_{\mathbb{C}} = f$ .



3.  $L_{\mathbb{R}}(E, G)_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{R}}(E, G_{\mathbb{C}})$ ,  $f + ig \mapsto (x \mapsto f(x) + ig(x))$ ,  $(\Re e \circ h, \Im m \circ h) \leftarrow h$ .
4.  $L_{\mathbb{R}}(E, G)_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}}, G)$ ,  $f + ig \mapsto (x + iy \mapsto f(x) - g(y))$ ,  $h \leftarrow (h \circ \iota, -h \circ I \circ \iota)$ .

Alle Isomorphismen sind  $\mathbb{C}$ -linear, wobei die komplexe Struktur auf  $L_{\mathbb{R}}(F, E)$  durch  $i \cdot f := f \circ I$  und auf  $L_{\mathbb{R}}(E, F)$  durch  $i \cdot f := I \circ f$  gegeben sind.

Alle Isomorphismen sind auch Homöomorphismen, wenn wir  $E_{\mathbb{C}}$  mit der Produktstruktur versehen.

Wenn alle Räume Banach-Räume sind, so sind allerdings nur die Isomorphismen in (2) and (3) Isometrien.

**Beweis.** (2) Sei  $f : F \rightarrow E$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung. Falls eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f_{\mathbb{C}} : F \rightarrow E_{\mathbb{C}}$  existiert mit  $\Re e \circ f_{\mathbb{C}} = f$ , so ist  $\Im m \circ f_{\mathbb{C}} = -\Re e \circ i \circ f_{\mathbb{C}} = -\Re e \circ f_{\mathbb{C}} \circ i = -f \circ i$ , da  $\Re e(i(x + iy)) = -\Im m(x + iy)$ . Also ist  $f_{\mathbb{C}}$  eindeutig festgelegt, und zwar gilt  $f_{\mathbb{C}}(x) = \Re e f_{\mathbb{C}}(x) + i \Im m f_{\mathbb{C}}(x) = f(x) - if(ix)$ . Dies definiert nun wirklich eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $f_{\mathbb{C}}$ , denn sie ist klarerweise  $\mathbb{R}$ -linear und  $f_{\mathbb{C}}(ix) = f(ix) - if(iix) = f(ix) + if(x) = i(f(x) - if(ix)) = if_{\mathbb{C}}(x)$ .

Daß die universelle Eigenschaft auch für stetige und für beschränkte lineare Abbildungen richtig ist sieht man wie folgt:

Es ist  $p \circ \Re e \leq p_{\mathbb{C}}$ , d.h.  $\Re e : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E$  ist stetig, und

$$(p_{\mathbb{C}} \circ f_{\mathbb{C}})(z) = p_{\mathbb{C}}(f(z) - if(iz)) \leq \sqrt{p(f(z))^2 + p(f(iz))^2},$$

also ist auch  $f_{\mathbb{C}}$  stetig, falls  $f$  es ist.

Die Bijektion  $\Re e_* : L_{\mathbb{C}}(F, E_{\mathbb{C}}) \rightarrow L_{\mathbb{R}}(F, E)$  ist ein topologischer linearer Isomorphismus, da sie stetig und reell-linear ist und ihre Umkehrabbildung durch  $f \mapsto f - i \cdot f \cdot i$  gegeben ist. Sie ist auch komplex linear, wenn man  $L_{\mathbb{R}}(F, E)$  durch  $i \cdot f : x \mapsto f(ix)$  zu einem komplexen Vektorraum macht, denn  $(i \cdot \Re e_*(f))(x) = \Re e_*(f)(ix) = \Re e(f(ix)) = \Re e(i f(x)) = \Re e((i f)(x)) = (\Re e_*(i f))(x)$ .

Falls  $G$  ein reeller Vektorraum ist, so haben wir einen Isomorphismus  $L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}}, G) \cong L_{\mathbb{R}}(E, G)_{\mathbb{C}}$  von komplexen SNR'en: Dieser ist durch  $h \mapsto (x \mapsto h(x), x \mapsto -h(ix))$  gegeben. Sein Inverses ist  $(f, g) \mapsto ((x + iy) \mapsto (f(x) - g(y)))$ , denn eine Zusammensetzung ergibt  $h : (x + iy) \mapsto h(x) + h(iy) = h(x + iy)$  und die andere  $(f, g) = (x \mapsto f(x), x \mapsto -(-g(x)))$ . Das Inverse ist auch komplex-linear, denn  $(-g, f)$  wird auf  $(x, y) \mapsto -g(x) - f(y) = f(-y) - g(x)$  abgebildet.

Somit gilt  $L_{\mathbb{R}}(E, G)_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{C}}, G) \cong L_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{C}})$ . Explizit ist dieser Isomorphismus durch  $f + ig \mapsto (x + iy \mapsto (f(x) - g(y)) + i(f(y) + g(x)))$  gegeben.

Die Aussage über Isometrien zeigen wir in (6.5.2) und (6.5.3). □

### 6.4 Folgerung.

Für reelle VR  $E$  und  $G$  erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc}
 L_{\mathbb{C}}(G_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) & \xlongequal{(1)} & L_{\mathbb{R}}(G, E_{\mathbb{C}}) \\
 \parallel (2) & \swarrow & \parallel (3) \\
 L_{\mathbb{R}}(G_{\mathbb{C}}, E) & \xlongequal{(4)} & L_{\mathbb{R}}(G, E)_{\mathbb{C}}
 \end{array}$$

Der diagonale Isomorphismus ist durch

$$f + ig \mapsto (x + iy \mapsto (f(x) - g(y)) + i(f(y) + g(x)))$$

gegeben. Für Dualräume komplexer VR  $F$  erhalten wir:

$$L_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R}) \cong L_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C}).$$

**Beweis.**

□

**6.5 Bemerkungen.**

1. Die Komplexifizierung von  $\mathbb{R}$  ist isometrisch zu  $\mathbb{C}$ : Die komplexe Norm  $\|x + iy\|_{\mathbb{C}}$  zu  $\|(x, y)\|_{\infty}$  ist durch

$$\|x + iy\|_{\mathbb{C}} := \sup\{|ax - by| : |a + ib| = 1\} = \|(x, y)\|_2$$

gegeben.

2. Der kanonische Isomorphismus  $L_{\mathbb{C}}(F, E_{\mathbb{C}}) \cong L_{\mathbb{R}}(F, E)$  ist eine Isometrie: Denn einerseits ist  $\Re$  eine Kontraktion da  $\|\Re(x + iy)\| = \|x\| = \|\Re(1(x + iy))\| \leq \|x + iy\|_{\mathbb{C}}$  und andererseits ist für absolutkonvexe beschränkte Mengen  $B \subseteq F$

$$\begin{aligned} \sup\{p_{\mathbb{C}}(f_{\mathbb{C}}(x)) : x \in B\} &= \sup\{p(\Re(\lambda f_{\mathbb{C}}(x))) : |\lambda| = 1, x \in B\} \\ &= \sup\{p(\Re(f_{\mathbb{C}}(\lambda x))) : |\lambda| = 1, x \in B\} \\ &= \sup\{p(f(y)) : y \in B\}. \end{aligned}$$

3. Der kanonische Isomorphismus  $B(X, G)_{\mathbb{C}} \cong B(X, G_{\mathbb{C}})$  ist eine Isometrie, somit auch für  $C, C^{\infty}, L_{\mathbb{R}}(E, \cdot), \ell^{\infty}, c_0, s, s', \dots$ : Es sei  $p$  eine Seminorm auf  $G$  und  $h \in B(X, G)_{\mathbb{C}}$ , dann ist

$$\begin{aligned} \sup\{p_{\mathbb{C}}(h(x)) : x \in X\} &= \sup\{p(\Re(\lambda h(x))) : x \in X, |\lambda| = 1\} \\ &= \sup\{\sup\{p(\lambda h(x)) : x \in X\} : |\lambda| = 1\}. \end{aligned}$$

4. Der kanonische Isomorphismus  $\ell^p(I, G)_{\mathbb{C}} \cong \ell^p(I, G_{\mathbb{C}})$  ist keine Isometrie: Wir wählen  $I := 2$  und  $G := \mathbb{R}$  und betrachte  $(1, 0) + i(0, 1) \in \ell^p(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$ . Die Norm in  $\ell^p(2, \mathbb{C})$  ist dann  $\|(1, i)\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$ , die in  $\ell^p(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$  hingegen

$$\begin{aligned} \|(1, 0) + i(0, 1)\|_{\mathbb{C}} &:= \sup\{\|\Re(a + ib, -b + ia)\|_p : |a + ib| = 1\} \\ &\leq \sup\{\|(a, -b)\|_p : |a + ib| = 1\} \\ &= (2^{\frac{1}{2p}})1/p = 2^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} < 2^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

5. Die Komplexifizierung eines Hilbert-Raums ist kein Hilbert-Raum: In der Tat für  $x = (1, 0)$  und  $y = (0, i)$  in  $\ell^2(2, \mathbb{R})_{\mathbb{C}}$  gilt die Parallelogrammgleichung nicht, denn  $\|x\|_{\mathbb{C}} = 1 = \|y\|_{\mathbb{C}}$  aber

$$\|x \pm y\|_{\mathbb{C}} = \sup\{\|\Re(a + ib, \pm(i a - b))\|_2 : |a + ib| = 1\} = 1.$$

6. Die kanonischen Isomorphismen  $L_{\mathbb{R}}(G_{\mathbb{C}}, E) \cong L_{\mathbb{R}}(G, E)_{\mathbb{C}}, L_{\mathbb{R}}(G, E)_{\mathbb{C}} \cong L_{\mathbb{C}}(G_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$  und  $L_{\mathbb{C}}(G_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) \cong L_{\mathbb{R}}(G, E)_{\mathbb{C}}$  sind keine Isometrien: Es genügt

Für Hilbert-Räume könnten wir aber die Komplexifizierung undefinieren

dies für den ersten zu zeigen. Sei dazu  $E = \mathbb{R}$ ,  $G = \ell^2(2)$ ,  $f = \text{pr}_1$  und  $g = \text{pr}_2$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \|f + ig\|_{\mathbb{C}} &:= \sup\{\|\Re((a + ib)(f + ig))\| : |a + ib| = 1\} \\ &= \sup\{|af(x) - bg(x)| : \|x\|_2 = 1, |a + ib| = 1\} \\ &= \sup\{|ax_1 - bx_2| : \|(x_1, x_2)\|_2 = 1, \|(a, b)\|_2 = 1\} \leq 1 \\ \|x + iy \mapsto f(x) - g(y)\| &:= \sup\{|f(x) - g(y)| : \|x + iy\|_{\mathbb{C}} = 1\} \\ &= \sup\{|x_1 - y_2| : \|x + iy\|_{\mathbb{C}} = 1\} \geq 2, \end{aligned}$$

wenn wir  $x = (1, 0)$  und  $y = (0, -1)$  wählen.

7. Ist jeder komplexe SNR die Komplexifizierung eines reellen SNR? Für VR ist das richtig, denn nach Wahl einer Basis können wir ihm als Komplexifizierung des Teilraums der reellen Linearkombinationen auffassen.

**Bemerkung.**

Was sind nun die komplexen Hilbert-Räume? Diese sollten als reelle Vektorräume reelle Hilbert-Räume  $E$  sein, also durch eine positiv-definite, symmetrische, reelle bilineare Form  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sein. Weiters sollte wohl die Multiplikation mit  $i$  eine Isometrie bezüglich  $b$  sein, denn sie dürfte ja soetwas wie einer Drehung entsprechen, d.h.  $b(ix, iy) = b(x, y)$ . Wie wir gerade gesehen haben definiert die  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung  $b(\cdot, y)$  eine eindeutige  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $b(\cdot, y)_{\mathbb{C}} : E \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $b(x, y)_{\mathbb{C}} := b(x, y) - ib(ix, y)$ . Weiters ist  $b(y, x)_{\mathbb{C}} = b(y, x) - ib(iy, x) = b(x, y) - ib(x, iy) = b(x, y) - ib(ix, i^2y) = \overline{b(x, y)}_{\mathbb{C}}$ . Also ist  $b_{\mathbb{C}}$  eine SESQUI-LINEARE (d.h. in der ersten Variable linear und in der zweiten konjugiert-linear), KONJUGIERT-SYMMETRISCHE (d.h.  $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$ ) Form  $E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ . Eine Abbildung  $f : E \rightarrow F$  zwischen komplexen Vektorräumen heißt KONJUGIERT-LINEAR, falls  $f(x + \lambda \cdot y) = f(x) + \overline{\lambda} \cdot f(y)$  ist, für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  und  $x, y \in E$ . Falls  $b$  positiv-definit ist, so auch  $b_{\mathbb{C}}$ , denn  $b(x, x)_{\mathbb{C}} = \overline{b(x, x)_{\mathbb{C}}}$ , und somit  $b(x, x) = b(x, x)_{\mathbb{C}}$ . Das führt uns zur folgenden

**Definition.**

Ein KOMPLEXER HILBERT-RAUM ist ein Vektorraum  $H$  über  $\mathbb{C}$  zusammen mit einer HERMITE'SCHEN Form, d.h. einer sesqui-linearen, konjugiert-symmetrischen, positiv-definiten Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K}$ , sodaß  $H$  bezüglich der Norm  $p(x)^2 := \langle x, x \rangle$  eine Banach-Raum ist.

**6.6 Cauchy-Schwarz-Ungleichung.**

Für jede Hermite'sche Form  $b$  gilt:

$$|b(x, y)|^2 \leq b(x, x) \cdot b(y, y)$$

Vergleiche das mit der Hölder-Ungleichung für  $p = q = 2$ .

**Beweis.** Für fixe  $x$  und  $y$  und alle  $s \in \mathbb{R}$  gilt  $0 \leq b(tx + y, tx + y) = |t|^2 b(x, x) + 2\Re(t b(x, y)) + b(y, y) = s^2 b(x, x) + 2s |b(x, y)| + b(y, y) =: f(s)$  wobei  $b(x, y) =: |b(x, y)| e^{i\vartheta}$  und  $t := s \cdot e^{-i\vartheta}$ . Falls  $b(x, x) = 0$  ist, dann muß  $|b(x, y)| = 0$  sein. Ist hingegen  $b(x, x) > 0$ , so wird das Minimum von  $f$  bei  $s := -\frac{|b(x, y)|}{b(x, x)}$  angenommen. Aus  $f(s) \geq 0$  folgt nun die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.  $\square$

**6.7 Polarisierungssatz.**

Eine Funktion  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich genau dann als  $p(x) = \sqrt{b(x, x)}$  mit einer

(eindeutigen) Hermite'schen Form darstellen, wenn  $p$  eine Norm ist, welche die PARALLELOGRAMMFORMEL

$$p(x+y)^2 + p(x-y)^2 = 2(p(x)^2 + p(y)^2)$$

erfüllt.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es gilt die Parallelogrammformel:

$$\begin{aligned} p(x+y)^2 + p(x-y)^2 &= b(x,x) + b(x,y) + b(y,x) + b(y,y) \\ &\quad + b(x,x) - b(x,y) - b(y,x) + b(y,y) \\ &= 2(p(x)^2 + p(y)^2) \end{aligned}$$

sowie die  $\Delta$ -Ungleichung

$$\begin{aligned} p(x+y)^2 &= b(x,x) + 2\Re b(x,y) + b(y,y) \\ &\leq b(x,x) + 2|b(x,y)| + b(y,y) \\ &\leq b(x,x) + 2b(x,x)^{1/2}b(y,y)^{1/2} + b(y,y) \quad (\text{wegen (6.6)}) \\ &= (p(x) + p(y))^2. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) für  $\mathbb{R}$ -Vektorräume: Falls  $p(x)^2 = b(x,x)$  ist, so gilt durch Ausmultiplizieren  $4b(x,y) = b(x+y, x+y) - b(x-y, x-y)$ , also definieren wir  $b(x,y) := \frac{1}{4}(p(x+y)^2 - p(x-y)^2)$ . Dann ist  $b(x,x) = p(x)^2 \geq 0$  und  $b(x,y) = b(y,x)$ . Weiters gilt:

$$\begin{aligned} b(x,z) + b(y,z) &= \frac{1}{4} \left( p(x+z)^2 + p(y+z)^2 - p(x-z)^2 - p(y-z)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4 \cdot 2} \left( p(x+y+2z)^2 + p(x-y)^2 - p(x+y-2z)^2 - p(x-y)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( p\left(\frac{x+y}{2} + z\right)^2 - p\left(\frac{x+y}{2} - z\right)^2 \right) \\ &= 2b\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \end{aligned}$$

Aus  $b(0,z) = 0$  und  $y := 0$  folgt somit  $\frac{1}{2}b(x,z) = b(\frac{x}{2}, z)$ . Und damit weiters  $b(x,z) + b(y,z) = 2b(\frac{x+y}{2}, z) = b(x+y, z)$ . Da  $b$  bezüglich  $p$  stetig ist, folgt, daß  $b$  linear in der ersten Variable ist:

**Sublemma.** Jede additive und stetige Abbildung ist linear.

$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0 \\ f(-x) + f(x) &= f(0) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \\ f(2x) &= 2f(x) \Rightarrow f(nx) = nf(x) \\ &\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}y\right) = \frac{1}{n}f(y), \text{ mit } y := nx \\ &\Rightarrow f\left(\frac{n}{m}x\right) = \frac{n}{m}f(x) \\ &\Rightarrow f(tx) = \lim_{\mathbb{Q} \ni s \rightarrow t} s f(x) = t f(x). \end{aligned}$$

Sei nun  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ : Falls  $p(x)^2 = b(x,x)$  ist, dann ist  $b_{\mathbb{R}}(x,y) := \Re b(x,y)$  die eindeutige Bilinearform des vorigen Punktes, und somit  $b(x,y) = b_{\mathbb{R}}(x,y) - i b_{\mathbb{R}}(ix,y)$ . Wir definieren also  $b(x,y) := b_{\mathbb{R}}(x,y) + i b_{\mathbb{R}}(x, iy) = b_{\mathbb{R}}(x,y) - i b_{\mathbb{R}}(ix,y)$ , wobei  $b_{\mathbb{R}}$  die bilineare Abbildung des reellen Vektorraums ist. Dann gilt klarerweise

$b_{\mathbb{R}}(ix, iy) = b_{\mathbb{R}}(x, y)$ , und somit definiert  $b$  eine sesqui-lineare symmetrische Abbildung mit  $b(x, x) = b_{\mathbb{R}}(x, x) = p(x)^2$ .  $\square$

### 6.8 Satz des Pythagoras.

Es seien  $(x^k)_{k=1}^n$  endlich viele paarweise orthogonale Vektoren eines Hilbert-Raumes, dann ist  $\|\sum_{k=1}^n x^k\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x^k\|^2$ .

**Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n x^k \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=1}^n x^k, \sum_{j=1}^n x^j \right\rangle = \sum_{k,j=1}^n \langle x^k, x^j \rangle = \sum_{k=j} \langle x^k, x^j \rangle + \sum_{k \neq j} 0 \\ &= \sum_{k=1}^n \|x^k\|^2. \quad \square \end{aligned}$$

### 6.9 Minimalisierender Vektor.

Sei  $A$  eine abgeschlossene konvexe und nicht-leere Teilmenge eines Hilbert-Raumes  $H$  und  $x \in H$ . Dann existiert ein eindeutiger Punkt  $a_x \in A$  mit  $\|x - a_x\| = d(x, A) := \inf\{\|x - a\| : a \in A\}$ .

**Beweis.** OBdA. ist  $x = 0$  (Translation). Sei  $\delta := d(0, A) := \inf\{\|a\| : a \in A\}$ . Wir wählen  $a_n \in A$  mit  $\|a_n\| \rightarrow \delta$ . Dann bilden die  $a_n$  eine Cauchy-Folge, denn für  $a, a' \in A$  gilt

$$\begin{aligned} 2(\|a\|^2 + \|a'\|^2) &= \|a - a'\|^2 + \|a + a'\|^2 \\ &= \|a - a'\|^2 + 4\left\|\frac{1}{2}(a + a')\right\|^2 \geq \|a - a'\|^2 + 4\delta^2, \end{aligned}$$

da  $\frac{a+a'}{2}$  in der konvexen Menge  $A$  liegt. Also gilt

$$\|a - a'\|^2 \leq 2\left(\underbrace{\|a\|^2}_{\rightarrow \delta^2} + \underbrace{\|a'\|^2}_{\rightarrow \delta^2} - 2\delta^2\right) \rightarrow 0.$$

Da  $A$  abgeschlossen ist, ist  $a_x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in A$  und  $\|a_x\| = \lim_n \|a_n\| = \delta$ . Die Eindeutigkeit folgt aus  $\|a - a'\|^2 \leq 2(\delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2) = 0$ .  $\square$

### Beispiel.

Der affine abgeschlossene Teilraum  $A := \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0, \int_0^1 f = 1\}$  hat kein Element mit minimalen Abstand 1 zu 0.

Man vergleiche das mit der folgenden schwächeren Aussage für Banach-Räume:

### Satz.

Sei  $E$  ein Banach-Raum und  $F$  ein abgeschlossener Teilraum. Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein Punkt  $x \in E$  mit  $d(x, F) > 1 - \varepsilon$  und  $\|x\| = 1$ .

Für einen Beweis siehe [Lar73, S.16].

### Folgerung.

Sei  $A$  ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbert-Raums  $H$ ,  $x \in H$  und  $a \in A$ , dann gilt:

$$\|x - a\| = d(x, A) \Leftrightarrow x - a \perp A.$$

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) es sei  $\|x - a\| = d(x, A)$  und  $a' \in A$ , dann ist  $a + a' \in A$  und somit gilt:

$$\|x - a\|^2 \leq \|x - (a + a')\|^2 = \|(x - a) - a'\|^2 = \|x - a\|^2 - 2\Re\langle x - a, a' \rangle + \|a'\|^2.$$

Also ist  $2\Re\langle x - a, a' \rangle \leq \|a'\|^2$ . Es sei  $\langle x - a, a' \rangle = r e^{i\vartheta}$ , und wir ersetzen  $a'$  durch  $t e^{i\vartheta} a'$ . Dann ist  $2tr = \Re\langle x - a, a' \rangle \leq t^2 \|a'\|^2$ , also  $|\langle x - a, a' \rangle| = r = 0$  (für  $t \rightarrow 0$ ). D.h.  $\langle x - a, a' \rangle = 0$ , i.e.  $x - a \perp A$ .

( $\Leftarrow$ ) Es sei  $a' \in A$ . Dann ist  $x - a \perp a - a'$  und somit nach dem Satz von Pythagoras  $\|x - a'\|^2 = \|x - a\|^2 + \|a - a'\|^2 \geq \|x - a\|^2$ , d.h.  $\|x - a\| = d(x, A)$ .  $\square$

### Folgerung.

Jeder abgeschlossene Teilraum  $A$  eines Hilbert-Raums  $H$  besitzt eine ORTHONORMALPROJEKTION  $P$ , d.h. eine beschränkte lineare Abbildung  $P : H \rightarrow H$  mit  $P^2 = P$ , Bild  $\text{Im } P = A$  und Kern  $\text{Ker } P = A^\perp$ . Insbesondere ist  $H$  isomorph zur Summe der beiden abgeschlossenen Teilräume  $A$  und  $A^\perp$ .

**Beweis.** Wir betrachten die stetig lineare Abbildung  $A \times A^\perp \rightarrow H$ ,  $(a, a') \mapsto a + a'$ . Sie ist eine Isometrie, wenn man  $A \times A^\perp$  mit der Hilbert-Norm  $\|(a, a')\|^2 := \|a\|^2 + \|a'\|^2$  versieht, denn  $\|a + a'\|^2 = \|a\|^2 + \|a'\|^2 = \|(a, a')\|^2$ . Folglich ist auch  $A^\perp \cong \{0\} \times A^\perp$  abgeschlossen. Es sei  $x \in H$ , dann existiert nach (6.9) ein eindeutiger Vektor  $a_x \in A$  mit  $\|x - a_x\| = d(x, A)$ , und nach obiger Folgerung ist  $x - a_x \in A^\perp$ . Folglich ist unsere Abbildung surjektiv, und somit ein isometrischer Isomorphismus.

Bezüglich dieses Isomorphismus ist  $P$  gerade die Projektion auf den ersten Summanden  $A$  in  $A \oplus A^\perp$ .  $\square$

### 6.10 Riesz'sche Darstellungssatz.

Sei  $f : H \rightarrow \mathbb{K}$  ein beschränktes lineares Funktional auf dem Hilbert-Raum  $H$ , dann existiert ein eindeutiger Vektor  $h_f \in H$  mit  $f = \langle \cdot, h_f \rangle$ . Weiters gilt  $\|f\| = \|h_f\|$ .

**Beweis.** Zuerst die Existenz: Falls  $f = 0$ , so ist  $h = 0$ . Wir können also annehmen, daß  $f \neq 0$ . Dann ist der Kern  $A$  von  $f$  ein abgeschlossener echter Teilraum von  $H$ . Wir zerlegen nun  $H$  orthogonal in  $A$  und  $A^\perp$ . Sei  $h' \in A^\perp$  mit  $f(h') = 1$ . Dessen Existenz ist nach der obigen Folgerung gesichert. Für  $x \in H$  gilt  $f(x - f(x)h') = f(x) - f(x)f(h') = 0$ , also ist  $x - f(x)h' \in A$ , d.h.  $h' \perp x - f(x)h'$  und somit  $0 = \langle x - f(x)h', h' \rangle = \langle x, h' \rangle - f(x)\langle h', h' \rangle$ . Nun setze  $h := \frac{1}{\|h'\|^2} h'$ .

Die Eindeutigkeit folgt aus:

$$\langle \cdot, h_1 \rangle = \langle \cdot, h_2 \rangle \Rightarrow h_1 - h_2 \perp H \Rightarrow h_1 - h_2 \perp h_1 - h_2 \Rightarrow h_1 - h_2 = 0. \quad \square$$

### Folgerung.

Die Abbildung  $\iota : H \rightarrow H'$ ,  $x \mapsto \langle \cdot, x \rangle$  ist eine konjugiert-lineare surjektive Isometrie. Insbesondere ist der Dualraum  $H'$  eines Hilbert-Raums  $H$  mit der Operatornorm selbst ein Hilbert-Raum.

**Beweis.** Daß diese Abbildung konjugiert-linear ist, ist klar. Sie ist bijektiv nach dem vorigen Satz (6.10). Sie ist eine Isometrie, denn  $\|\iota(x)\| = \sup_y \frac{|\langle y, x \rangle|}{\|y\|} \leq \|x\|$ , nach der Cauchy-Schwarz Ungleichung, und Gleichheit wird angenommen für  $y := x$ .  $\square$

Man beachte aber, daß der Raum  $L(E, F)$  mit der Operatornorm selbst für Hilbert-Räume  $E$  und  $F$  nicht immer ein Hilbert-Raum ist.

### Folgerung.

Die Abbildung  $\iota : H \rightarrow H''$  ist ein isometrischer Isomorphismus für jeden Hilbert-Raum  $H$ .

**Beweis.** Das folgt aus der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\iota} & H'' \\ & \searrow \overline{\iota_H} & \swarrow \iota_H^* \\ & & H' \end{array}$$

denn

$$\begin{aligned} (\iota_H^* \circ \iota)(x)(y) &= \iota_H^*(\iota(x))(y) = \iota(x)(\iota_H(y)) = \iota_H(y)(x) = \langle y, x \rangle \\ &= \overline{\langle x, y \rangle} = \overline{\iota_H(x)(y)} = \overline{\iota_H}(x)(y). \quad \square \end{aligned}$$

**Definition.**

Ein SNR  $E$  heißt (REFLEXIV) SEMIREFLEXIV falls die kanonische Abbildung  $\iota : E \rightarrow E^{**}$  surjektiv (ein topologischer Isomorphismus) ist. Wir werden in (7.33) sehen, daß  $\iota$  genau dann eine Einbettung ist, wenn  $E$  tonneliert ist. Die Folgerung besagt also, daß jeder Hilbert-Raum reflexiv ist.

**6.11 Orthonormalbasen.**

Sei  $\{e_i : i \in I\}$  ein Orthonormalsystem (d.h. eine Familie paarweise orthogonaler und normierter Vektoren) eines Hilbert-Raums  $H$ , dann sind äquivalent:

- (1). Das lineare Erzeugnis der  $e_i$  liegt dicht;
- $\Leftrightarrow$  (2).  $\{e_i\}_{i \in I}$  ist maximal;
- $\Leftrightarrow$  (3). Nur der Nullvektor steht normal auf alle  $e_i$ ;
- $\Leftrightarrow$  (4).  $(\lambda_i) \mapsto \sum_i \lambda_i e_i$  definiert einen isometrischen Isomorphismus  $\ell^2(I) \rightarrow H$ .
- $\Leftrightarrow$  (5). Die FOURIER-ENTWICKLUNG:  $x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$ ;
- $\Leftrightarrow$  (6).  $\langle x, y \rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle e_i, y \rangle$ ;
- $\Leftrightarrow$  (7). Die PARSEVAL'SCHE GLEICHUNG:  $\|x\|^2 = \sum_i |\langle x, e_i \rangle|^2$ .

Ein Orthonormalsystem welches diese Eigenschaften erfüllt heißt ORTHONORMALBASIS.

Eine Reihe mit überabzählbarer Indexmenge heißt KONVERGENT, falls das Netz der endlichen Teilsummen konvergiert.

**Beweis.** Trivial sind die folgenden Implikationen:  $2 \Leftrightarrow 3$ ,  $5 \Rightarrow 1$  und  $5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 3$ .

(1  $\Rightarrow$  3) Falls ein  $e \in H$  existiert mit  $e \perp e_i$  für alle  $i$ , so annulliert das stetig lineare Funktional  $\ell := \langle \_, e \rangle$  den von den  $e_i$  erzeugten linearen Teilraum, also ist der Abschluß enthalten im Kern dieses stetigen Funktionals  $\ell$  und somit ist  $\ell = 0$ , also  $e = 0$ .

(3  $\Rightarrow$  4) Da  $\sum_i \lambda_i e_i$  wegen des Satzes von Pythagoras ein Cauchy-Netz bildet, denn  $\|\sum_i \lambda_i e_i\|^2 = \sum_i |\lambda_i|^2$ , ist die behauptete Abbildung wohldefiniert. Sie ist eine Isometrie wegen der gleichen Identität. Also ist sie injektiv auf ihr Bild, welches abgeschlossen ist. Falls sie nicht surjektiv ist, existiert nach (6.9) ein Vektor der normal auf das Bild und damit auf alle  $e_i$  steht. Das ist nach (3) ausgeschlossen.

(4  $\Rightarrow$  5) Es sei  $x = \sum_i \lambda_i e_i$ . Dann ist wegen der Stetigkeit des inneren Produkts:  $\langle x, e_j \rangle = \langle \sum_i \lambda_i e_i, e_j \rangle = \sum_i \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \lambda_j$ .

□

**Folgerung.**

Jeder Hilbert-Raum besitzt eine Orthonormalbasis.

**Beweis.** Wegen des Zorn'schen Lemmas gibt es eine maximale orthonormale Teilmenge. Diese ist nach dem vorigen Satz (6.11) eine orthonormale Basis.  $\square$

**Zorn'sche Lemma.**

*Es sei  $\mathcal{M}$  eine partiell geordnete Menge, sodaß jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, dann besitzt  $\mathcal{M}$  maximale Elemente.*

**Bemerkung.**

Dies ist eine nicht-triviale Folgerung aus dem Auswahlaxiom.

**Lemma.**

*Je zwei ONB des selben Hilbert-Raums haben die gleiche Kardinalität.*

**Beweis.** Wir dürfen annehmen, daß die Dimension unendlich ist. Es seien  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{B}'$  zwei Orthonormalbasen. Zu jedem  $e \in \mathcal{B}$  existiert wegen der Vollständigkeit von  $\mathcal{B}'$  ein  $e' \in \mathcal{B}'$  mit  $\langle e, e' \rangle \neq 0$ , d.h.  $\mathcal{B} = \bigcup_{e' \in \mathcal{B}'} \{e \in \mathcal{B} : \langle e, e' \rangle \neq 0\}$ . Jede der Teilmengen  $\{e \in \mathcal{B} : \langle e, e' \rangle \neq 0\}$  ist abzählbar, wegen  $\|e\|^2 = \sum_{e' \in \mathcal{B}'} |\langle e, e' \rangle|^2$  (Schubfachprinzip). Also ist die Kardinalität von  $\mathcal{B}$  kleiner oder gleich jener von  $\mathcal{B}'$  multipliziert mit  $\aleph_0$ , dieses Produkt ist für unendliche Kardinalzahlen gleich der von  $\mathcal{B}'$ . Da aus Symmetriegründen auch die umgekehrte Ungleichung gilt, sind die Kardinalitäten gleich.  $\square$

**6.12 Gram-Schmidt Orthonormalisierung.**

*Falls  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine lineare unabhängige Teilmenge eines Hilbert-Raums ist, so läßt sich rekursiv eine eindeutige orthonormale Familie  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konstruieren mit folgenden Eigenschaften:*

1. Für jedes  $n$  spannen  $\{e_k : k < n\}$  und  $\{x_k : k < n\}$  den gleichen Teilraum  $H_n$  auf.
2.  $e_n \in \mathbb{R}^+ \cdot x_n + H_n$ .

**Beweis.** Induktionsanfang: Es sei  $e_0 := \frac{1}{\|x_0\|} x_0$ .

Nun sei  $e_k$  für  $k < n$  bereits konstruiert. Es sei  $P_n : H \rightarrow H_n$  die Orthogonalprojektion (Sie hat folgende Gestalt:  $P_n(x) := \sum_{k < n} \langle x, e_k \rangle e_k$ ), weiters sei  $e'_n := x_n - P_n(x_n) \in (x_n + H_n) \cap H_n^\perp$  und schließlich sei  $e_n := \frac{1}{\|e'_n\|} e'_n$ . Dies ist wohldefiniert, da  $e'_n \neq 0$  wegen  $x_n \notin H_n$ . Somit ist  $e_n \in \mathbb{R}^+ \cdot (x_n + H_n) = \mathbb{R}^+ \cdot x_n + H_n$  und für die linearen Erzeugnisse gilt:

$$\langle e_0, \dots, e_n \rangle = H_n + \langle e'_n \rangle = H_n + \langle x_n \rangle = H_{n+1}. \quad \square$$

**Folgerung.**

*Ein Hilbert-Raum ist genau dann separabel, wenn er eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.*

Dabei heißt ein SNR SEPARABEL, wenn eine abzählbare dichte Teilmenge existiert, oder äquivalent wenn er eine abzählbare linear unabhängige Teilmenge besitzt, deren erzeugter Teilraum dicht liegt:

Falls wir eine abzählbare linear unabhängige Teilmenge haben, deren Erzeugnis dicht liegt, so bilden die endlichen Linearkombinationen mit Koeffizienten aus  $\mathbb{Q}$  (bzw.  $\mathbb{Q} \oplus i \cdot \mathbb{Q}$ ) eine abzählbare dichte Teilmenge. Umgekehrt sei  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine dichte Teilmenge, so wähle man rekursiv Vektoren  $e_n \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle_{VR}$  mit gleichem Erzeugnis, so daß  $\{e_n : e_n \neq 0\}$  linear unabhängig ist. Dann erzeugen die  $\{e_n : e_n \neq 0\}$  den gleichen dichten Teilraum wie die  $x_n$ .

**Beweis.** Falls  $H$  eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt, so ist  $H$  nach (6.11) isometrisch isomorph zu  $\ell^2$ , und der ist separabel, denn die Standard-Basis erzeugt den dichten Teilraum der endlichen Folgen.

Sei umgekehrt  $H$  separabel. Dann existiert also eine abzählbare linear unabhängige Teilmenge, deren Erzeugnis dicht liegt. Der Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozeß liefert dann eine abzählbare orthonormal Familie deren Erzeugnis ebenfalls dicht liegt. Diese ist dann aber eine Orthonormalbasis nach (6.11).  $\square$

**Folgerung.**

Falls  $H$  ein unendlich dimensionaler Hilbert-Raum ist, so ist  $L(H) := L(H, H)$  nicht separabel.

**Beweis.** Es sei  $\{e_i\}_{i \in I}$  eine ONB von  $H$ . Jede Funktion  $\varphi : I \rightarrow \{0, 1\}$  definiert ein Element  $\Phi \in L(H)$  durch  $\Phi(e_i) := (-1)^{\varphi(i)} e_i$ . Der Abstand zweier solcher  $\Phi$  in der Operatornorm ist mindestens 2. Zusammen bilden sie also eine diskrete Teilmenge der Kardinalität  $2^I$ .  $\square$

**6.13 Anwendung**

Klassische Fourier-Reihen: Da nach dem Approximationssatz von Weierstraß die trigonometrischen Polynome dicht liegen in  $C(S^1, \mathbb{C})$  und die stetige Abbildung  $C(S^1, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(S^1, \mathbb{C})$  dichtes Bild besitzt, bilden die Funktionen  $\exp_k : x \mapsto e^{ikx}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(S^1, \mathbb{C})$ . Insbesondere gilt also, daß die Fourier-Reihen-Entwicklung nach (6.11) einen isometrischen Isomorphismus  $L^2(S^1, \mathbb{C}) \cong \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ ,  $f \mapsto ((f, \exp_k))_{k \in \mathbb{Z}}$  mit Inversen  $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp_k$  liefert.

$$\begin{array}{ccc}
 C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \xleftarrow{\mathcal{F}^{-1}} & \ell^1(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L^2([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) & \xleftarrow[\mathcal{F}]{\mathcal{F}^{-1}} & \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 L^1([-\pi, \pi]; \mathbb{C}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & c_0(\mathbb{Z}, \mathbb{C})
 \end{array}$$

**Orthogonale Polynome**

Allgemeiner kann man anstatt der Schwingungsgleichung folgende lineare Differentialgleichung 2-ter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten auf einem Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  betrachten:

$$\frac{d}{dt} \left( \rho h \frac{du}{dt} \right) = -\lambda \rho u.$$

Dabei sind  $\rho$  und  $h$  geeignete fixe Funktionen  $I \rightarrow \mathbb{R}$ . Gesucht sind die  $\lambda \in \mathbb{R}$  für welche eine Lösung  $u$  existiert. Es gibt die folgenden klassischen Fälle:

- (1)  $I := [-1, 1]$ ,  $\rho(t) := (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$  mit  $\alpha, \beta > -1$ ,  $h(t) := 1-t^2$ .
- (2)  $I := [0, \infty]$ ,  $\rho(t) := e^{-t}t^\alpha$  mit  $\alpha > -1$ ,  $h(t) := t$ .
- (3)  $I := [-\infty, +\infty]$ ,  $\rho(t) := e^{-t^2/2}$ ,  $h(t) := 1$

Wir suchen also Eigenwerte  $\lambda$  und Eigenvektoren  $u$  (Man spricht auch von Eigenfunktionen) des lineare Differential Operators  $D : u \mapsto -\frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \rho h \frac{du}{dt} \right)$  mit nicht konstanten Koeffizienten.

Man kann zeigen, daß die Eigenwerte  $\lambda_n := -n(P_1'(x) + \frac{n-1}{2}h''(x))$  sind und die zugehörigen Eigenfunktionen proportional zu  $P_n := \frac{1}{\rho}(\rho \cdot h^n)^{(n)}$  (Rodriguez-Formel) sind. Die obigen klassischen Differentialgleichungen haben folgende Eigenwerte

1. Jakobi:  $(1-t^2)u'' + ((\beta-\alpha) - (\alpha+\beta+2)t)u' + \lambda u = 0$ ,  $\lambda = n(n+1+\alpha+\beta)$
2. Laguerre:  $tu'' + (\alpha+1-t)u' + \lambda u = 0$ ,  $\lambda = n$
3. Hermite:  $u'' - tu' + \lambda u = 0$ ,  $\lambda = n$

Die Spezialfälle der Jakobi-Differentialgleichung für  $\alpha = \beta =: \gamma - \frac{1}{2}$  sind

1. Gegenbauer:  $\gamma > -\frac{1}{2}$ :  $\lambda = n(n+2\gamma)$
2. Tschebyschef 1.ter Art:  $\gamma = 0$ , d.h.  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ :  $\lambda = n^2$ .
3. Legendre  $\gamma = \frac{1}{2}$ , d.h.  $\alpha = \beta = 0$ :  $\lambda = n(n+1)$
4. Tschebyschef 2.ter Art:  $\gamma = 1$ , d.h.  $\alpha = \beta = +\frac{1}{2}$ :  $\lambda = n(n+2)$ .

Die zugehörigen Eigenfunktionen (Lösungen) sind Polynome, welche durch das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren aus den Polynomen  $(1, t, t^2, \dots)$  im Hilbert-Raum  $L^2_\rho(I, \mathbb{R})$  gewonnen werden. Dabei ist das innere Produkt  $\langle f, g \rangle_\rho := \int_I f(t)\overline{g(t)}\rho(t)dt$ .

## 6.14 Kompakte Operatoren

Den Zusammenhang der in der Funktional-Analyse wichtigen präkompakten Mengen und den in der Topologie wichtigen kompakten Mengen gibt folgendes

### Lemma.

Für eine abgeschlossene Teilmenge  $A$  eines vollständigen SNR'es sind äquivalent:

- (1).  $A$  ist präkompakt;
- $\Leftrightarrow$  (2).  $A$  ist kompakt;
- $\Leftrightarrow$  (3).  $A$  ist ABZÄHLBAR KOMPAKT, d.h. jede abzählbare Überdeckung besitzt eine endliche Teilüberdeckung;
- $\Leftrightarrow$  (4). jede abzählbare Teilmenge von  $A$  hat einen Häufungspunkt;

**Beweis.** (1  $\Rightarrow$  2) Mittels Netze: Ein Netz heißt UNIVERSELL falls für jede Teilmenge des Raumes es schließlich in dieser liegt oder schließlich außerhalb liegt, siehe [CR78, S.90]. Ein Hausdorff-Raum ist genau dann kompakt, wenn jedes universelle Netz konvergiert, siehe [CR78, S.111]. Sei also  $x_i$  ein universelles Netz in einer präkompakten Menge  $A$ , und sei  $U$  eine absolut-konvexe 0-Umgebung. Dann existiert eine endliche Menge  $A_0 \subseteq A$  mit  $A \subseteq A_0 + \frac{1}{2}U$ . Da  $x_i$  universell ist, existiert ein  $a \in A_0$ , sodaß  $x_i$  in  $a + \frac{1}{2}U$  schließlich (sonst wäre  $x_i \notin A_0 + \frac{1}{2}U \supseteq A$  schließlich). Also ist  $x_i - x_j \in (a + \frac{1}{2}U) - (a + \frac{1}{2}U) \subseteq U$  für  $i, j$  hinreichend groß. D.h.  $x_i$  ist ein Cauchy-Netz und konvergiert somit wegen der Vollständigkeit von  $E$ .

(2  $\Rightarrow$  3) ist trivial.

(3  $\Rightarrow$  4) Seien  $A_0 := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$  abzählbar. Falls  $A_0$  keinen Häufungspunkt besitzt, so ist  $A_n := \{a_k : k \geq n\}$  abgeschlossen und hat die endliche Durchschnittseigenschaft. Also existiert ein  $a \in \bigcap_n A_n$ , ein Widerspruch.

(4  $\Rightarrow$  1) Angenommen  $A$  ist nicht präkompakt. Dann existiert eine symmetrische Null-Umgebung  $U$ , sodaß für keine endliche Menge  $F$  die Inklusion  $A \subseteq F + U$  gilt. Wir konstruieren nun rekursiv eine Folge  $a_n \in A$ . Es sei  $a_0 \in A$  beliebig.  $a_n \notin \{a_k : k < n\} + U$ . Dann ist  $a_k - a_n \notin U$  für alle  $k \neq n$ . Also kann  $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$  keinen Häufungspunkt besitzen (andernfalls lägen unendlich viele  $a_n$  in der  $\frac{1}{2}U$ -Umgebung um ihm).  $\square$

**Folgerung.**

Eine Teilmenge eines SNR's  $E$  ist genau dann präkompakt, wenn sie RELATIV-KOMPAKT in der Vervollständigung von  $E$  liegt, d.h. dort kompakten Abschluß hat.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Wenn  $A$  präkompakt ist in  $E$ , so auch in der Vervollständigung  $\tilde{E}$  und somit auch der Abschluß. Nach obigen Lemma ist dieser also sogar kompakt.

( $\Leftarrow$ ) Der Abschluß in der Vervollständigung sei also kompakt. Nach obigen Lemma ist er auch präkompakt und damit auch die Menge selbst in der Vervollständigung und folglich auch in  $E$ .  $\square$

**Lemma.**

Eine Teilmenge  $A$  eines Fréchet-Raums ist genau dann präkompakt (oder gleichbedeutend relativkompakt), wenn eine Nullfolge  $(x_n)$  existiert, sodaß  $A$  in der abgeschlossenen konvexen Hülle der  $x_n$  enthalten ist.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Es sei  $(U_n)$  eine 0-Umgebungsbasis absolut-konvexer abgeschlossener Mengen des Fréchet-Raums  $E$  mit  $2U_{n+1} \subseteq U_n$  und  $U_0 = E$ . Wir konstruieren rekursiv eine Folge  $(A_n)$  von präkompakten Teilmengen und endliche Teilmengen  $F_n \subseteq A_n$ . Wir setzen  $A_0 := A$ . Es sei  $A_n$  bereits konstruiert. Dann existiert eine endliche Menge  $F_n \subseteq A_n$  mit  $A_n \subseteq F_n + \frac{1}{2^n}U_n$ . Es sei nun  $A_{n+1} := (A_n - F_n) \cap \frac{1}{2^n}U_n$ . Diese Menge ist präkompakt. Es seien  $x_{k_n+1}, \dots, x_{k_{n+1}}$  die Elemente von  $2^n F_n$ . Da

$$F_n \subseteq A_n \subseteq \frac{1}{2^{n-1}}U_{n-1},$$

konvergiert  $x_n \rightarrow 0$ . Sei nun  $a \in A = A_0 \subseteq F_0 + \frac{1}{2^0}U_0$ . Dann existieren  $a_0 \in F_0$  und  $u_0 \in U_0$  mit  $a = a_0 + u_0$ . Da  $a - a_0 = u_0 \in (A_0 - F_0) \cap \frac{1}{2^0}U_0 = A_1 \subseteq F_1 + \frac{1}{2^1}U_1$ , existieren  $a_1 \in F_1$  und  $u_1 \in U_1$  mit  $a = a_0 + a_1 + \frac{1}{2}u_1$ . Rekursiv erhalten wir eine Folge  $a_i \in F_i$  und  $u_i \in U_i$  mit  $a = \sum_{i < n} a_i + \frac{1}{2^n}u_n$ . Da  $u_n$  eine Nullfolge ist, konvergiert  $\sum_i a_i$  gegen  $a$ . Nun existieren  $k_i < k(i) \leq k_{i+1}$  mit  $a_i = \frac{1}{2^i}x_{k(i)}$ . Wenn wir  $\lambda_{k(i)} := \frac{1}{2^i}$  und sonst 0 setzen, so ist  $a = \sum_i \lambda_i x_i$  in der abgeschlossenen konvexen Hülle der  $x_i$ .

( $\Leftarrow$ ) Wir zeigen, daß die absolut-konvexe abgeschlossene Hülle  $\langle B \rangle_{\text{abs.konv.,abg.}}$  einer präkompakten Menge  $B$  selbst präkompakt ist:

Sei  $V := \frac{1}{3}U$  mit  $U$  abg. und absolut konvex. Dann existiert eine endliche Menge  $M$  mit  $B \subseteq M + V$  und somit gilt:

$$\langle B \rangle_{\text{abs.konv.}} \subseteq \langle M \rangle_{\text{abs.konv.}} + V \subseteq M_1 + 2V,$$

da  $\langle M \rangle_{\text{abs.konv.}}$  präkompakt ist (als stetiges Bild des 1-Balls in  $\ell^1(M)$ ), und somit eine endliche Menge  $M_1$  existiert mit  $\langle M \rangle_{\text{abs.konv.}} \subseteq M_1 + V$ . Schließlich ist

$$\langle B \rangle_{\text{abs.konv.,abg.}} = \overline{\langle B \rangle_{\text{abs.konv.}}} \subseteq \overline{M_1 + 2V} \subseteq M_1 + 2V + V \subseteq M_1 + U. \quad \square$$

**6.15 Satz von Arzela-Ascoli.**

Es sei  $X$  ein kompakter Raum und  $F$  ein SNR. Dann ist eine Teilmenge  $\mathcal{E} \subseteq C(X, F)$  genau dann präkompakt, wenn sie gleichgradig-stetig und punktweise präkompakt ist.

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Da  $ev_x : C(X, F) \rightarrow F$  stetig und linear ist, ist  $ev_x(\mathcal{E})$  in  $F$  präkompakt, d.h.  $\mathcal{E}$  punktweise präkompakt.

Sei nun  $p$  eine SN von  $F$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $\mathcal{W} := \{f \in C(X, F) : \forall x \in X : p(f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}\}$  eine 0-Umgebung in  $C(X, F)$ , also existiert eine endliche Menge  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq \mathcal{E}$  mit  $\mathcal{F} \subseteq \{f_1, \dots, f_n\} + \mathcal{W}$ . Für jedes  $i$  existiert wegen der Stetigkeit

von  $f_i$  eine Umgebung  $U_i$  von  $x$  mit  $p(f_i(x') - f_i(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$  für alle  $x \in U_i$ . Dann ist  $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$  eine Umgebung von  $x$  und für alle  $x' \in U$  und  $f \in \mathcal{E}$  gilt:

$$p(f(x) - f(x')) \leq p(f(x) - f_i(x)) + p(f_i(x) - f_i(x')) + p(f_i(x') - f(x')) \leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

wobei  $i$  so gewählt ist, daß  $f - f_i \in \mathcal{W}$ . Also ist  $\mathcal{E}$  gleichgradig-stetig.

( $\Leftarrow$ ) Die typische 0-Umgebung in  $C(X, F)$  ist von der Form

$$\mathcal{W} := \{f \in C(X, F) : p(f(x)) \leq \varepsilon\}$$

mit einer SN  $p$  von  $F$  und einem  $\varepsilon > 0$ . Da  $\mathcal{E}$  gleichgradig-stetig ist existiert für jedes  $x \in X$  eine Umgebung  $U(x)$ , s.d.  $p(f(x') - f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$  für  $x' \in U(x)$  und  $f \in \mathcal{E}$ . Da  $X$  kompakt ist, existiert eine endliche Menge  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$  s.d.  $\{U(x_i) : i = 1, \dots, n\}$  ganz  $X$  überdeckt. Es sei  $\{f_i : i = 1, \dots, n\}$  eine stetige Partition der 1 für diese endliche Überdeckung. Da  $\mathcal{E}$  punktweise relativ kompakt ist, ist  $\mathcal{E}(\{x_1, \dots, x_n\}) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{E}(x_i)$  präkompakt und folglich existiert eine endliche Menge  $A$  mit  $\mathcal{E}(\{x_1, \dots, x_n\}) \subseteq A + \{y : p(y) \leq \frac{\varepsilon}{2}\}$ . Für jede der endliche vielen Abbildung  $h : \{1, \dots, n\} \rightarrow A$  sei  $\tilde{h} := \sum_{i=1}^n h(i) f_i$ .

Wir behaupten, daß  $\mathcal{E} \subseteq \bigcup_h \{f : \|f - \tilde{h}\| < \varepsilon\} = \{\tilde{h} : h \in A^{\{1, \dots, n\}}\} + \mathcal{W}$ :

Es sei dazu  $f \in \mathcal{E}$ . Für jedes  $x_i$  wählen wir ein  $h_i \in A$  mit  $|f(x_i) - h_i| < \varepsilon$ . Es sei  $h : i \mapsto h_i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} p\left(f(x) - \tilde{h}(x)\right) &= p\left(f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) h(i)\right) = p\left(\sum_{i=1}^n f_i(x) f(x) - \sum_{i=1}^n f_i(x) h(i)\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n f_i(x) p(f(x) - h(i)) \\ &\leq \sum_{x \in U_i} f_i(x) \left(p(f(x) - f(x_i)) + p(f(x_i) - h(i))\right) \\ &\leq \sum_{x \in U_i} f_i(x) \varepsilon \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n f_i(x) = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung.**

In metrischen kompakten Räumen  $X$  sieht man die Existenz von Zerlegungen der 1 die einer endlichen offenen Überdeckung  $\mathcal{U}$  untergeordnet sind wie folgt: Für jede abgeschlossene Menge  $A$  ist  $x \mapsto d(x, A)$  eine stetige Funktion (da  $|d(x, A) - d(x', A)| \leq d(x, x')$ ) die genau auf  $A$  verschwindet. Also ist  $f_U(x) := \frac{d(x, X \setminus U)}{\sum_{V \in \mathcal{U}} d(x, X \setminus V)}$  die gesuchte Partition der 1.

**Satz von Fréchet-Kolmogorov.**

Es sei  $1 \leq p < \infty$ . Dann ist eine Teilmenge  $\mathcal{E} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$  genau dann präkompakt, wenn sie beschränkt ist und folgende zwei Bedingungen erfüllt:

1.  $\sup_{f \in \mathcal{E}} \|T_h(f) - f\|_p \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  ;
2.  $\sup_{f \in \mathcal{E}} \|f|_{\{x:|x| \geq r}\}\|_p \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow \infty$ .

**Beweisskizze.** ( $\Rightarrow$ ) Jede präkompakte Menge ist beschränkt und für einzelne  $f \in L^p$  gilt (1) und (2) nach (4.15). Sei also  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert eine endliche Menge  $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq L^p$ , s.d. für jedes  $f \in \mathcal{E}$  ein  $i$  existiert mit  $\|f - f_i\|_p \leq \varepsilon$ . Somit ist

$$\|T_h(f) - f\| \leq \|T_h f - T_h f_i\| + \|T_h f_i - f_i\| + \|f_i - f\| \leq 2\varepsilon + \|T_h f_i - f_i\|$$

und damit (1) erfüllt. Analog sieht man (2).

( $\Leftarrow$ ) In (4.15) haben wir approximierende Einheiten  $f_\varepsilon \in C_c$  studiert. Für diese galt  $\|f_\varepsilon \star g - g\|_p \rightarrow 0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dies folgte aus  $\|T_h g - g\|_p \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ . Da letzteres nach (1) nun gleichmäßig für  $g \in \mathcal{E}$  gilt, gilt auch ersteres. Also genügt es die Präkompaktheit von  $\{f_\varepsilon \star g : g \in \mathcal{E}\}$  zu zeigen. Wegen (2) genügt es dies in  $L^p(B)$  für  $B := \{x : \|x\| \leq r\}$  zu zeigen. Da  $f_\varepsilon \star \mathcal{E} \subseteq C$  ist, und die Inklusion  $C(B) \rightarrow L^p(B)$  stetig ist, genügt es die Präkompaktheit in  $C(B)$  zu zeigen. Dies folgt aus dem Satz von Arzelà-Ascoli, denn nach (4.15) ist

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon \star g\|_\infty &\leq \|f_\varepsilon\|_q \|g\|_p \\ |(f_\varepsilon \star g)(x') - (f_\varepsilon \star g)(x)| &\leq \int |(f_\varepsilon(x' - y) - f_\varepsilon(x - y))g(y)| dy \\ &\leq \|T_{x'-x} f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{o^0} \|g\|_B \|1\|_1 \\ &\leq \|T_{x'-x} f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_{o^0} \mu(B)^{1/q} \|g\|_B \|1\|_p, \end{aligned}$$

und letzteres geht gegen 0 für  $x' \rightarrow x$  da  $f_\varepsilon$  glm. stetig ist. □

**Definition.**

Ein SNR  $E$  heißt SEMI-MONTEL, falls jede beschränkte abgeschlossene Menge kompakt ist. Er heißt MONTEL, falls er zusätzlich tonneliert ist.

Ein Operator  $T$  heißt PRÄKOMPAKT, falls eine 0-Umgebung  $U$  existiert, deren Bild  $T(U)$  präkompakt ist. Öfter findet man in der Literatur den für Banach-Räume äquivalenten Begriff KOMPAKTER OPERATOR, d.h. eine 0-Umgebung mit relativ kompakten Bild existiert. Wir wollen im folgenden den abgeschlossenen Einheitsball im Banach-Raum  $E$  mit  $B_E$  bezeichnen.

**6.16 Lemma.**

*Ein Operator auf einem Hilbert-Raum ist genau dann (prä)kompakt, falls er gleichmäßig durch stetige Operatoren mit endlich dimensionalem Bild approximiert werden kann.*

Warnung: Der analoge Satz für Banach-Räume ist falsch!

**Beweis.** Klarerweise ist jeder Operator mit endlich dimensionalen Bild kompakt. Außerdem ist der Raum der Operatoren mit kompakten Bild Folgen-abgeschlossen: Seien nämlich  $T_n$  kompakte Operatoren, welche gegen einen Operator  $T$  konvergieren, dann ist  $T_n(B_H)$  relativ kompakt: Sei  $\varepsilon > 0$  und  $n$  so, daß  $\|T_n - T\| < \varepsilon$ . Dann existieren  $\|h_j\| \leq 1$  mit  $T_n(B_H) \subseteq \bigcup_{j=1}^m T_n(h_j) + \varepsilon \cdot B_H$ . Falls also  $\|h\| \leq 1$ , so existiert ein  $j \leq m$  mit  $\|T_n h_j - T_n h\| \leq \varepsilon$  und somit

$$\begin{aligned} \|Th_j - Th\| &\leq \|Th_j - T_n h_j\| + \|T_n h_j - T_n h\| + \|T_n h - Th\| \\ &< \|T - T_n\| + \varepsilon + \|T - T_n\| \\ &< 3\varepsilon, \end{aligned}$$

also ist  $T(B_H) \subseteq \bigcup_{j \leq m} Th_j + 3\varepsilon \cdot B_H$ . Das heißt das Bild  $T(B_H)$  ist präkompakt und somit relativ kompakt.

Umgekehrt sei  $T$  kompakt. Dann ist der Abschluß von  $T(B_H)$  kompakt, und der von  $T(B_H)$  erzeugte abgeschlossene Teilraum  $H_0$  ist wegen dem Lemma in (6.14) separabel. Sei  $(e_n)_n$  eine Orthonormalbasis von  $H_0$  und  $P_n$  die Orthonormalprojektion von  $H$  auf  $\langle \{e_k : k < n\} \rangle$ . Dann ist  $T_n := P_n \circ T$  ein endlich dimensionaler Operator und  $\|T_n - T\| \rightarrow 0$ , da  $P_n \rightarrow \text{id}$  glm. auf kompakten Mengen. Im Detail sieht man das wie folgt:

Dazu zeigen wir zuerst, daß  $\|T_n h - Th\| \rightarrow 0$  für jedes  $h \in B_H$ . Sei nämlich  $k := Th$ .

Dann ist  $k \in H_0$ , also konvergiert  $T_n h = P_n k$  gegen  $k = Th$ .

Da  $T$  kompakt ist, gibt es für  $\varepsilon > 0$  Vektoren  $h_1, \dots, h_m \in B_H$  mit

$$T(B_H) \subseteq \bigcup_{j=1}^m Th_j + \varepsilon \cdot B_H.$$

Falls also  $\|h\| \leq 1$  ist, so finden wir ein  $j$  mit  $\|Th - Th_j\| \leq \varepsilon$ . Also gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , daß

$$\begin{aligned} \|Th - T_n h\| &\leq \|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|P_n(Th_j - Th)\| \\ &\leq \|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|Th_j - Th\| \\ &\leq \varepsilon + \|Th_j - T_n h_j\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Es genügt also  $\|Th_j - T_n h_j\| < \varepsilon$  zu machen für die endlich vielen  $j$ . Das geht nach dem oben Gesagten.  $\square$

### Folgerung.

Es sei  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  stetig. Dann ist der Operator  $K : f \mapsto K(f)$  ( $x \mapsto \int_a^b k(x, y) f(y) dy$ ) mit Integralkern  $k$  ein kompakter Operator von  $C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ .

**1. Beweis.** Nach dem Weierstraß'schen Approximationssatz existieren Polynome  $p_n$  in zwei Variablen, mit  $\|p_n - k\|_\infty \rightarrow 0$ . Der Operator  $K_n$  mit Integralkern  $p_n$  hat endlich dimensionales Bild, denn falls  $p_n : (x, y) \mapsto \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j$  mit  $d = \deg(p_n)$ , so ist

$$\begin{aligned} (K_n f)(x) &= \int_a^b \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i y^j f(y) dy \\ &= \sum_{i+j \leq d} a_{i,j} x^i \int_a^b y^j f(y) dy \end{aligned}$$

und somit liegt das Bild im Raum der Polynome von fixen Grad kleiner gleich als jenem von  $p_n$ .

Schließlich konvergiert  $K_n$  gegen  $K$ , denn

$$|(K_n - K)f(x)| \leq \int_a^b |k(x, y) - p_n(x, y)| |f(y)| dy \leq |b-a| \|k - p_n\|_\infty \|f\|_\infty \rightarrow 0. \quad \square$$

**2. Beweis.** Es genügt zu zeigen, daß  $K(B)$  relativ kompakt ist für die Einheitskugel  $B$  in  $C([a, b])$ . Wegen des Satzes von Arzela-Ascoli müssen wir nur die gleichgradige Stetigkeit beweisen, denn die punktweise Beschränktheit folgt aus  $|(Kf)(x)| \leq |b-a| \|k\|_\infty \|f\|_\infty$ . Es ist

$$|(Kf)(x) - (Kf)(x')| \leq \int_a^b |k(x, y) - k(x', y)| |f(y)| dy \leq |b-a| \varepsilon \|f\|_\infty,$$

da  $k$  auf der kompakten Menge gleichmäßig stetig ist, und somit ein  $\delta > 0$  existiert, mit  $|k(x, y) - k(x', y)| < \varepsilon$  für alle  $y$  und alle  $|x' - x| < \delta$ .  $\square$

### Lemma.

Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum,  $k \in L^2(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ . Dann definiert  $Kf : x \mapsto \int_X k(x, y) f(y) d\mu(y)$  einen stetigen Operator  $K : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  mit  $\|K\| \leq \|k\|_2$ .

**Beweis.** Da  $|k|^2$  integrierbar ist, ist nach dem Satz von Fubini für fast alle  $x$  die Funktion  $k(x, \cdot) \in L^2$ . Folglich ist nach der Hölderungleichung  $Kf(x) := \langle k(x, \cdot), f \rangle$  für diese  $x$  wohldefiniert. Falls  $Kf$  meßbar ist, so gilt wegen der Hölderungleichung

$$\begin{aligned} \|Kf\|_2^2 &= \int |Kf(x)|^2 d\mu(x) = \int \left| \int k(x, y) f(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(x) \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \int \left( \int |k(x, y)|^2 d\mu(y) \cdot \int |f(y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x) = \|k\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Sei nun  $f \in L^2$ . Dann existieren Treppenfunktionen  $f_k$  mit  $\|f_k - f\|_2 \rightarrow 0$ . Für meßbare  $A$  und  $B$  mit  $\mu(A) < \infty$ ,  $\mu(B) < \infty$  gilt nach der Hölderungleichung, daß  $k$  auf  $A \times B$  integrierbar ist, und damit nach dem Satz von Fubini, daß  $x \mapsto \int_B k(x, y) d\mu(y) = \int k(x, y) \chi_B(y) d\mu(y) = K(\chi_B)(y)$  auf  $A$  integrierbar und damit meßbar ist. Folglich ist  $Kf_k$  meßbar für jede Treppenfunktion  $f_k$ . Es konvergiert  $Kf_k(x) \rightarrow Kf(x)$  für fast alle  $x$ , da wegen der Hölderungleichung  $|Kf(x)| \leq \int |k(x, y) f(y)| d\mu(y) \leq \|k_x\|_2 \cdot \|f\|_2$ . Also ist  $Kf$  meßbar, und damit  $K$  ein beschränkter linearer Operator mit  $\|K\| \leq \|k\|_2$ .  $\square$

**Lemma.**

Es sei  $e_i$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ , wobei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum ist. Dann bilden die  $e_{i,j} := e_i \otimes \bar{e}_j : (x, y) \mapsto e_i(x) \overline{e_j(y)}$  eine Orthonormalbasis von  $L^2(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$

**Beweis.** Es ist trivial, daß sie eine orthonormale Familie bilden. Es sei  $f \in L^2(X \times X)$ . Dann ist nach dem Satz von Fubini,  $f_y := f(\cdot, y) \in L^2(X)$  für fast alle  $y$ , und somit ist  $f_i : y \mapsto \langle e_i, f_y \rangle$  fast überall wohldefiniert. Da  $\overline{f_i(y)} = \int f(x, y) \overline{e_i(x)} d\mu(x)$  ist  $f_i \in L^2$  nach dem vorigen Lemma. Da weiters

$$\begin{aligned} \|f_i\|^2 &= \sum_j |\langle e_j, f_i \rangle|^2 \quad (\text{Parseval'sche Glg.}) \\ &= \sum_j \left| \int_X \overline{f_i(y)} e_j(y) d\mu(y) \right|^2 \\ &= \sum_j \left| \int_X \int_X f(x, y) \overline{e_i(x)} e_j(y) d\mu(x) d\mu(y) \right|^2 = \sum_j |\langle f, e_{i,j} \rangle|^2 \end{aligned}$$

ist  $f_i = 0$  f.ü., falls  $f$  normal auf alle  $e_{i,j}$  steht. Damit ist aber  $f_y = 0 \in L^2(X)$  für fast alle  $y$  und somit  $f = 0$  fast überall.  $\square$

**Folgerung.**

Es sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $k \in L^2(X \times X, \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}, \mu \otimes \mu)$ . Dann definiert  $Kf : x \mapsto \int_X k(x, y) f(y) d\mu(y)$  einen kompakten Operator auf  $L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$  und  $\|K\| \leq \|k\|_2$ .

**1. Beweis.** Jedes  $k \in L^2(X \times X)$  ist nach dem vorigen Lemma eine abzählbare Summe  $k = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} e_{i,j}$ , die in der 2-Norm konvergiert. Die endlichen Teilsummen definieren als Integral-Kerne Operatoren  $K_n$  mit endlich dimensionalen Bild. Wegen  $\|(K - K_n)f\| \leq \|(k - k_n)\|_2 \cdot \|f\|_2$  konvergieren diese  $K_n$  gegen  $K$ . Also ist  $K$  kompakt.  $\square$

**2. Beweis für  $X = \mathbb{R}^n$ .** Wegen des Satzes von Fréchet-Kolmogorov folgt dies aus:

$$\begin{aligned} \|T_h Kf - Kf\|_2^2 &= \int_X \left| \int_X (k(x-h, y) - k(x, y)) f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \|T_{(h,0)} k - k\|_2^2 \cdot \|f\|_2^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ glm. für } \|f\| \leq 1 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|Kf|_{\{x:|x|\geq r\}}\|_2^2 &= \int_{|x|\geq r} \left| \int k(x,y) f(y) dy \right|^2 dx \\ &\leq \int_{|x|\geq r} |k(x,y)|^2 d(x,y) \|f\|_2^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty \text{ g.l.m. für } \|f\| \leq 1 \end{aligned}$$

□

**Proposition.**

Es seien  $E$  und  $F$  Banach-Räume und  $T \in L(E, F)$  präkompakt. Dann ist  $T^* \in L(F^*, E^*)$  präkompakt.

**Beweis.** Da  $T(B_E)$  präkompakt ist, existieren zu jedem  $\varepsilon > 0$  endlich viele Punkte  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq B_E$  mit

$$\forall x \in B_E \exists i : \|Tx - Tx_i\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$R(y^*) := (y^*Tx_1, \dots, y^*Tx_n)$ ,  $R \in L(F^*, \mathbb{K}^n)$  endl. dimensional  $\Rightarrow R(B_{F^*})$  präkompakt, d.h.  $\exists \{y_1^*, \dots, y_m^*\} \subseteq B_{F^*} : \forall y^* \in B_{F^*} \exists j : \frac{\varepsilon}{3} \geq \|R(y^*) - R(y_j^*)\| = \max_k |T^*(y^*)(x_k) - T^*(y_j^*)(x_k)|$ . Für  $x \in B_E$  gilt somit

$$\begin{aligned} |T^*(y^*)(x) - T^*(y_j^*)(x)| &\leq \\ &\leq |y^*(Tx) - y_j^*(Tx)| \\ &\leq |y^*(Tx) - y^*(Tx_i)| + |y^*(Tx_i) - y_j^*(Tx_i)| + |y_j^*(Tx_i) - y_j^*(Tx)| \\ &\leq \|y^*\| \|Tx - Tx_i\| + |y^*(Tx_i) - y_j^*(Tx_i)| + \\ &\quad + \|y_j^*\| \|Tx_i - Tx\| \\ &\leq 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist  $\|T^*(y^*) - T^*(y_j^*)\| \leq \varepsilon$  und somit  $T^*(B_{E^*})$  präkompakt.

□

**6.17 Spektraltheorie kompakter selbstadjungierter Operatoren**

Für Operatoren  $T \in L(E, F)$  zwischen Hilbert-Räumen können wir den adjungierten Operator  $T^* \in L(F^*, E^*)$  vermöge der konjugiert-linearen Isomorphismen  $\iota$  auch als Element  $T^* \in L(F, E)$  auffassen:

$$\begin{array}{ccc} E & \xleftarrow{T^*} & F \\ \downarrow \iota_E & & \downarrow \iota_F \\ E^* & \xleftarrow{T^*} & F^* \end{array}$$

Dieses ist durch

$$\begin{aligned} \langle x, T^*y \rangle &= \iota(T^*y)(x) = T^*(\iota(y))(x) \\ &= \iota(y)(Tx) = \langle Tx, y \rangle \end{aligned}$$

festgelegt. Ein linearer Operator  $T$  auf einem Hilbert-Raum heißt SELBSTADJUNGIERT (symmetrisch), falls  $T = T^*$  ist, d.h.  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$  für alle  $x, y$  gilt. Ein solcher Operator ist nach (5.8) automatisch stetig.

**Lemma.**

Es sei  $y \in c_0$ , dem Banach-Raum der 0-Folgen, dann ist der Multiplikations-Operator  $(x_k)_k \mapsto (\lambda_k x_k)_k$  von  $\ell^2 \rightarrow \ell^2$  kompakt. Er ist zusätzlich symmetrisch falls alle  $\lambda_k$  reell sind.

**Beweis.** Dieser Operator  $T$  wird offensichtlich durch die Multiplikations-Operatoren der Folgenabschnitte von  $\lambda$  approximiert. Diese Operatoren haben endlich dimensionales Bild. Der adjungierte Operator  $T^*$  ist durch  $(y_k)_k \mapsto (\overline{\lambda_k y_k})_k$  gegeben, denn  $\langle x, T^* y \rangle = \langle T x, y \rangle = \sum_i \lambda_i x_i \overline{y_i} = \sum_i x_i \overline{\lambda_i y_i}$ .  $\square$

Wir werden nun zeigen, daß sich jeder kompakte selbstadjungierte Operator auf einem Hilbert-Raum nach Wahl einer passenden ONB so schreiben läßt.

**Lemma.**

Es sei  $T$  ein symmetrischer Operator am Hilbert-Raum  $H$ . Dann gilt

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T x, x \rangle|.$$

**Beweis.** Da  $T$  symmetrisch und  $H$  ein Hilbert-Raum ist, gilt  $\overline{\langle T x, x \rangle} = \langle x, T x \rangle = \langle T^* x, x \rangle = \langle T x, x \rangle$ , d.h.  $\langle T x, x \rangle \in \mathbb{R}$ .

Für jedes  $x$  mit  $\|x\| = 1$  gilt:  $|\langle T x, x \rangle| \leq \|T x\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\|$ . Es sei  $M := \sup_{\|x\|=1} |\langle T x, x \rangle|$ . Für  $\lambda > 0$  gilt wegen der Parallelogrammgleichung und da  $T$  symmetrisch ist:

$$\begin{aligned} 4\|T x\|^2 &= \left\langle T(\lambda x + \frac{1}{\lambda} T x), \lambda x + \frac{1}{\lambda} T x \right\rangle - \left\langle T(\lambda x - \frac{1}{\lambda} T x), \lambda x - \frac{1}{\lambda} T x \right\rangle \\ &\leq M \left( \|\lambda x + \frac{1}{\lambda} T x\|^2 + \|\lambda x - \frac{1}{\lambda} T x\|^2 \right) \\ &= 2M \left( \lambda^2 \|x\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|T x\|^2 \right). \end{aligned}$$

Falls  $\|T x\| \neq 0$ , so liefert  $\lambda^2 = \|T x\|/\|x\|$  die fehlende Ungleichung  $\|T x\| \leq M \|x\|$ . Für  $\|T x\| = 0$  ist diese trivial.  $\square$

**Lemma.**

Es sei  $T$  ein symmetrischer kompakter Operator am Hilbert-Raum  $H$ . Dann existiert ein Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda| = \|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T x, x \rangle|$ . Die normierten Eigenvektoren  $x$  zu Eigenwerten  $\lambda$  mit  $|\lambda| = \|T\|$  sind genau die Lösungen von  $|\langle T x, x \rangle| = \|T\|$ .

Wie in der linearen Algebra heißt  $\lambda \in \mathbb{K}$  EIGENWERT von  $T \in L(E)$ , falls  $T x = \lambda x$  für ein  $x \neq 0$ . Die entsprechenden  $x$  heißen EIGENVEKTOREN zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Beweis.** Da nach dem vorigen Lemma  $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle T x, x \rangle|$  ist, existiert ein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $|\lambda| = \|T\| > 0$  und eine Folge  $(x_n)$  mit  $\|x_n\| = 1$  und  $\langle T x_n, x_n \rangle \rightarrow \lambda$ . Aus

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T x_n - \lambda x_n\|^2 = \|T x_n\|^2 - 2\lambda \langle T x_n, x_n \rangle + \lambda^2 \|x_n\|^2 \\ &\leq \|T\|^2 - 2\lambda \langle T x_n, x_n \rangle + \|T\|^2 \rightarrow 2\|T\|^2 - 2\lambda^2 = 0 \end{aligned}$$

folgt  $T x_n - \lambda x_n \rightarrow 0$ . Da  $T$  kompakt ist, dürfen wir nach Wahl einer Teilfolge annehmen, daß  $T x_n$  konvergiert. Folglich konvergiert auch  $x_n$ , sagen wir gegen  $x$  mit  $\|x\| = 1$  und somit ist  $T x = \lambda x$ . Offenbar gilt  $|\langle T x, x \rangle| = |\lambda| = \|T\|$ . Umgekehrt ist jede normierte Lösung  $x$  der Gleichung  $|\langle T x, x \rangle| = \|T\|$  ein Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda := \langle T x, x \rangle$ , denn obige Ungleichung liefert für  $x$  anstelle von  $x_n$  die Gleichung  $\|T x - \langle T x, x \rangle x\|^2 = 2(\|T\|^2 - \langle T x, x \rangle^2) = 0$ , d.h.  $T x = \lambda x$ .  $\square$

Man beachte, daß wir nicht die Vollständigkeit von  $E$  sondern nur die relativ-Kompaktheit von  $T(B_E)$  im Beweis verwendet haben.

**Spektral Satz kompakter selbstadjungierter Operatoren.**

Es sei  $T$  ein symmetrischer kompakter Operator am (nicht notwendig vollständigen)

Hilbert-Raum  $H$ . Dann erhält man eine Orthonormalfolge von Eigenvektoren  $u_n$  indem man die Variationsaufgabe  $|\langle Tx, x \rangle| \rightarrow \max$  unter den sukzessiven Nebenbedingungen  $\|x\| = 1$  und  $\langle x, u_k \rangle = 0$  für  $k < n$  löst bis das Maximum gleich 0 ist. Sei  $\lambda_n$  die zugehörige Folge von Eigenwerten, dann gilt für alle  $x \in H$ :

$$T(x) = \sum_n \lambda_n \langle x, u_n \rangle u_n.$$

Auf diese Weise erwischen wir alle Eigenwerte  $\neq 0$ .

**Beweis.** Wir gehen unter Anwendung des Lemmas induktiv vor. Es sei  $H_n := \{u_k : k < n\}^\perp$ . Die Einschränkung  $T_n$  von  $T$  auf  $H_n$  hat Werte in  $H_n$ , denn  $\langle T(x), u_k \rangle = \langle x, T(u_k) \rangle = \langle x, \lambda_k u_k \rangle = \lambda_k \cdot 0$ , für alle  $x \in H_n$  und  $k < n$ . Also ist  $T_n : H_n \rightarrow H_n$  ein kompakter Operator mit  $\|T_n\| \leq \|T_{n-1}\|$ . Und wir können das Lemma rekursiv anwenden. So erhalten wir paarweise orthonormale Vektoren  $u_n$  und Eigenwerte  $\lambda_n$  mit  $|\lambda_n| = \|T_n\|$  fallend in  $n$ . Falls sie abbrechen ist alles klar. Falls ihr Betrag gegen ein  $\delta > 0$  konvergiert, so ist  $T$  nicht kompakt, denn die Bilder der beschränkten orthonormalen Folge  $(u_n)$  sind orthogonal und in der Norm nach unten beschränkt, können also keinen Häufungspunkt besitzen (denn  $\|T(u_k)\| \geq \delta \Rightarrow \|T(u_k) - T(u_j)\|^2 = \|T(u_k)\|^2 + \|T(u_j)\|^2 \geq 2\delta^2$  für  $k \neq j$ ). Also konvergieren sie gegen 0. Für jedes  $x \in H$  liegt  $x_n := x - \sum_{k < n} \langle x, u_k \rangle u_k \in H_n$ . Folglich ist  $\|x_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k < n} |\langle x, u_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$  (Pythagoras) und  $\|Tx_n\| \leq \|T_n\| \cdot \|x_n\| = |\lambda_n| \cdot \|x_n\| \leq |\lambda_n| \|x\|$ . Also konvergiert  $\|Tx_n\|$  gegen 0, d.h.  $\sum_k \lambda_k \langle x, u_k \rangle u_k$  konvergiert gegen  $Tx$ .

Wir haben auch jeden Eigenwert ungleich 0 erwischt, denn gäbe es einen Eigenvektor  $u \perp u_k$  für alle  $k$  (Je zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen normal, denn  $Tu = \lambda u, Tv = \mu v \Rightarrow \lambda \langle u, v \rangle = \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \mu \langle u, v \rangle = \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle$ , da  $\mu \langle v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ , also  $\mu$  reell ist), dann wäre  $Tu = \sum_k \lambda_k \langle u, u_k \rangle u_k = 0$ , d.h. der zugehörige Eigenwert wäre 0.  $\square$

### Anwendungen auf Sturm-Liouville Eigenwertaufgaben

Wir haben in (3.9) gezeigt, daß, falls die Lösungen  $u = u_a$  und  $u = u_b$  der homogenen Glg. mit Anfangsbedingungen  $R_a(u_a) := r_{a,0} u_a(a) + r_{a,1} u'_a(a) = 0$  beziehungsweise  $R_b(u_b) := r_{b,0} u_b(b) + r_{b,1} u'_b(b) = 0$  eine nicht verschwindende WRONSKIDETERMINANTE  $w := u_a u'_b - u_b u'_a$  besitzen, so ist die Lösung der Differentialgleichung  $D(u) := (pu')' + qu = f$  unter den Randbedingungen  $R_a(u) = 0 = R_b(u)$  durch

$$u(x) = \int_a^b g(x, t) f(t) dt$$

gegeben, wobei die Green-Funktion  $g$  die folgende stetige symmetrische Funktion ist.

$$g(x, t) := \begin{cases} \frac{u_a(x) u_b(t)}{p \cdot w} & \text{für } t \geq x \\ \frac{u_a(t) u_b(x)}{p \cdot w} & \text{für } t \leq x \end{cases}.$$

Wir wollen nun wie in (6.13) das Sturm-Liouville'sche Eigenwertproblem

$$D(u) = \mu u$$

mit Randbedingung  $R_a u = 0 = R_b u$  behandeln. Es sei  $g$  die obige Green-Funktion. Dann muß eine Lösung  $u$  des Eigenwertproblems die Gleichung

$$u(x) = \int_a^b g(x, t) \mu u(t) dt$$

erfüllen. Das ist eine Eigenwertgleichung  $u = \mu K(u)$ , wobei  $K$  der Integraloperator  $Ku(x) := \int_a^b g(x,t)u(t)dt$  mit Integralkern  $g$  ist. Da  $g$  stetig ist, ist  $K : L^2[a,b] \rightarrow L^2[a,b]$  kompakt nach (6.16). Und weil  $g$  symmetrisch ist, ist  $K$  selbstadjungiert. Also existiert nach dem Spektralsatz eine Nullfolge von Eigenwerten  $\lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und Eigenfunktionen  $u_n$ , sodaß  $Ku = \sum_n \lambda_n \langle u, u_n \rangle u_n$ .

Jedes  $u$  (im Bild von  $K$ ), läßt sich wie folgt entwickeln. Es sei  $f := D(u)$  und damit  $u = K(f)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} u = K(f) &= \sum_n \lambda_n \langle f, u_n \rangle u_n = \sum_n \langle f, \lambda_n u_n \rangle u_n \\ &= \sum_n \langle f, K u_n \rangle u_n = \sum_n \langle K f, u_n \rangle u_n \\ &= \sum_n \langle u, u_n \rangle u_n. \end{aligned}$$

## 7. Satz von Hahn Banach

In diesem Kapitel geht es um die Reichhaltigkeit des Raums der stetig linearen Funktionale auf seminormierten Räumen, und den geometrischen Trennungseigenschaften die daraus folgen. Wir wenden das an um einige Dualräume zu bestimmen und auch auf Fragen der komplexen Analysis.

Unser erstes Ziel ist es möglichst viele lineare Funktionale  $\ell$  zu finden, die natürlich stetig sein sollen, d.h.  $|\ell| \leq q$  für eine (fixe) Seminorm  $q$  erfüllen. Mit Beträgen rechnet sich es jedoch schwer und lineare Funktionale und Seminormen lassen sich nicht gut vergleichen. Allerdings haben wir bereits eine gemeinsame Verallgemeinerung, nämlich sublineare Funktionale in (2.1) eingeführt. Somit wenden wir uns zuerst der Ungleichung  $\ell \leq q$  für sublineares  $q$  zu.

### 7.1 Lemma.

*Es sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine Abbildung ist minimal unter allen sublinearen Abbildungen  $E \rightarrow \mathbb{R}$  genau dann, wenn sie linear ist.*

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Es sei  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  linear und  $q : E \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear und  $q \leq \ell$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \ell(x) + \ell(-x) \geq q(x) + q(-x) \geq q(0) = 0 \Rightarrow q(x) = -q(-x) \\ &\Rightarrow \ell(x) \geq q(x) = -q(-x) \geq -\ell(-x) = \ell(x) \Rightarrow q(x) = \ell(x). \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Es sei  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  minimal. Angenommen  $p$  ist nicht additiv, dann existieren  $a, b \in E$  mit  $p(a+b) < p(a) + p(b)$ . Wir versuchen nun eine kleiner sublineare Abbildung zu finden. Offensichtlich ist  $x \mapsto p(x+a) - p(a)$  konvex und im Punkt  $b$  kleiner als  $p$ . Um auch  $\mathbb{R}^+$ -Homogenität zu erreichen betrachten wir  $p_a(x) := \inf_{t>0} (p(x+ta) - tp(a))$ . Diese Definition macht Sinn, da  $-p(-x) \leq p(x+ta) - tp(a)$ . Weiters gilt  $p(x+ta) - tp(a) \leq p(x)$ , also gilt  $p_a \leq p$  und  $p_a(b) \leq p(a+b) - p(a) < p(b)$ .

$p_a$  ist  $\mathbb{R}^+$ -homogen, denn für  $\lambda > 0$  gilt:

$$\begin{aligned} p_a(\lambda x) &= \inf_{t \geq 0} (p(\lambda x + ta) - tp(a)) \\ &= \inf_{t \geq 0} (p(\lambda(x + \frac{t}{\lambda}a)) - tp(a)) \\ &= \inf_{t \geq 0} \lambda (p(x + \frac{t}{\lambda}a) - \frac{t}{\lambda}p(a)) \\ &= \lambda \cdot \inf_{s \geq 0} (p(x + sa) - sp(a)) \\ &= \lambda \cdot p_a(x). \end{aligned}$$

Da  $x \mapsto p(x+ta) - p(a)$  konvex ist gilt gleiches für  $p_a$ . Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität.

Aus der Additivität folgt nun aber auch die  $\mathbb{R}$ -Linearität, denn  $p$  ist ungerade, wegen  $p(-x) + p(x) = p(0) = 0$ . □

**Folgerung.**

Es sei  $E$  ein VR über  $\mathbb{R}$  und  $p : E \rightarrow \mathbb{R}$  sublinear, so existiert ein lineares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \leq p$ .

**Beweis.** Wir wollen das Lemma von Zorn auf die Menge

$$\mathcal{S} := \{q \leq p : q \text{ ist sublinear}\}$$

anwenden. Sei  $\mathcal{L}$  eine linear geordnete Teilmenge von  $\mathcal{S}$ . Dann ist  $\inf_{q \in \mathcal{L}} q =: q_0 \in \mathcal{L}$  eine untere Schranke von  $\mathcal{L}$ : In der Tat ist  $q_0$  wohldefiniert, denn andernfalls gäbe es ein  $x \in E$  so, daß  $\mathcal{L}(x)$  nach unten unbeschränkt ist. Dann gäbe es aber  $q_n \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{S}$  mit o.B.d.A.  $q_n(x) \leq -n$  und  $q_n \leq q_{n-1}$ . Folglich wäre:

$$0 \leq q_n(x) + q_n(-x) \leq -n + q_1(-x) \Rightarrow \forall n : q_1(-x) \geq n,$$

ein Widerspruch. Wir können also das Lemma von Zorn anwenden und erhalten ein minimales Element  $q \in \mathcal{S}$ , das nach dem Lemma linear sein muß.  $\square$

**7.2 Satz von Hahn und Banach.**

Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$  und  $F$  ein linearer Teilraum. Sei  $q$  ein sublineares Funktional auf  $E$  und  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  eine lineare Abbildung, welche  $f \leq q|_F$  erfüllt. Dann existiert eine Fortsetzung  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  welche linear ist,  $\tilde{f}|_F = f$  und  $\tilde{f} \leq q$  auf  $E$  erfüllt.

**Beweis.** Wir betrachten  $\tilde{q} : x \mapsto \inf_{y \in F} (q(x+y) - f(y))$ . Analog zum Beweis von (7.1) folgt, daß  $\tilde{q}$  wohldefiniert, sublinear und  $\tilde{q} \leq q$  (setze  $y := 0$ ) ist: In der Tat ist  $q(x+y) - f(y) \geq -q(-x) + q(y) - f(y) \geq -q(-x)$ . Für  $x \in F$  ist  $\tilde{q}(x) \leq q(x-x) + f(x) = f(x)$ .

Nach der Folgerung in (7.1) existiert also ein lineares  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f} \leq \tilde{q} \leq q$ . Es gilt  $\tilde{f}|_F = f$ , denn für alle  $y \in F$  ist  $\tilde{f}(y) \leq \tilde{q}(y) \leq f(y)$  und somit  $\tilde{f}|_F = f$ , da  $f$  als lineare Abbildung minimal ist.  $\square$

**7.3 Folgerung.**

Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $F$  ein linearer Teilraum. Sei  $q$  eine Seminorm auf  $E$  und  $f : F \rightarrow \mathbb{K}$  eine lineare Abbildung, welche  $|f| \leq q|_F$  erfüllt. Dann existiert eine Fortsetzung  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{K}$ , welche linear ist,  $\tilde{f}|_F = f$  und  $|\tilde{f}| \leq q$  auf  $E$  erfüllt.

**Beweis.** Zuerst für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ : Es sei  $q$  eine Seminorm und  $|f| \leq q|_F$ . Nach (7.2) existiert ein lineares  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f} \leq q$ . Das impliziert aber  $|\tilde{f}| \leq q$ , denn  $-\tilde{f}(x) = \tilde{f}(-x) \leq q(-x) = q(x)$ .

Ist nun der Grundkörper  $\mathbb{C}$ , dann betrachten wir  $f_{\mathbb{R}} := \Re e f$ . Es gilt  $f_{\mathbb{R}} \leq |f| \leq q|_F$ . Also existiert nach dem zuvor Gesagten eine  $\mathbb{R}$ -lineare Fortsetzung  $\tilde{f}_{\mathbb{R}} : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{f}_{\mathbb{R}} \leq q$ . Nun sei  $\tilde{f}$  die nach (6.3.2)  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $x \mapsto \tilde{f}_{\mathbb{R}}(x) - i \tilde{f}_{\mathbb{R}}(ix)$ . Dann ist  $\tilde{f}|_F = f$  und  $\Re e(\tilde{f}) = \tilde{f}_{\mathbb{R}} \leq q$ . Für  $x \in E$  sei  $r e^{i\vartheta} = \tilde{f}(x)$  mit  $r \geq 0$ . Dann ist  $\mathbb{R} \ni |\tilde{f}(x)| = r = \tilde{f}(e^{-i\vartheta} x) = \tilde{f}_{\mathbb{R}}(e^{-i\vartheta} x) \leq q(e^{-i\vartheta} x) = q(x)$ .  $\square$

**7.4 Folgerung.**

Es sei  $E$  ein SNR und  $F$  ein linearer Teilraum von  $E$ . Jedes stetige lineare Funktional  $f : F \rightarrow \mathbb{K}$  besitzt eine stetig lineare Fortsetzung  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{K}$ . Ist  $E$  normiert, dann existiert ein  $\tilde{f}$ , welches zusätzlich  $\|\tilde{f}\| = \|f\|$  erfüllt.

Für beschränkte lineare Abbildungen ist dieser Satz im allgemeinen falsch.

**Beweis.** Da  $f$  stetig ist, ist  $|f|$  eine stetige Seminorm auf  $F$ . Nach (4.2) existiert eine Fortsetzung zu einer stetigen Seminorm  $q$  auf  $E$ . Nach (7.3) existiert eine

Fortsetzung von  $f$  zu einem linearen Funktional  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{K}$ , welches  $|\tilde{f}| \leq q$  erfüllt und somit stetig ist.

Ist  $E$  zusätzlich normiert. So kann für  $q$  die Abbildung  $x \mapsto \|f\| \cdot \|x\|$  gewählt werden. Also gilt  $|\tilde{f}(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$ , d.h.  $\|f\| \leq \|\tilde{f}\| \leq \|f\|$ . Folglich gilt die gewünschte Gleichheit.  $\square$

**7.5 Folgerung.**

Es sei  $E$  ein SNR und  $\{x_1, \dots, x_n\}$  linear unabhängig und  $\ell_i \in \mathbb{K}$ , dann existiert ein  $\ell \in E^*$  mit  $\ell(x_i) = \ell_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

**Beweis.** Es sei  $F$  der lineare Teilraum, welcher von  $\{x_1, \dots, x_n\}$  erzeugt wird. Auf ihm ist durch  $\ell(x_i) = \ell_i$  ein eindeutiges lineares Funktional definiert, welches nach (4.6) stetig ist. Nach (7.4) existiert eine stetige Fortsetzung  $\ell$  auf  $E$ , und diese hat die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

**7.6 Folgerung.**

Jeder endlich dimensionale Teilraum eines SNR's besitzt ein topologisches Komplement. Vergleiche mit (4.6) im Falle endlicher Codimension.

**Beweis.** Es sei  $F$  ein  $n$ -dimensionaler Teilraum von  $E$ . Wir wählen eine Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  von  $F$  und definieren lineare Funktionale  $\ell_k : F \rightarrow \mathbb{K}$  durch  $\ell_k(e_i) = \delta_{k,i}$ . Diese sind automatisch stetig und besitzen somit stetig lineare Fortsetzungen  $\tilde{\ell}_k : E \rightarrow \mathbb{K}$ . Somit erhalten wir eine stetige Abbildung  $p : E \rightarrow F$  definiert durch  $p(x) = \sum_{k=1}^n \tilde{\ell}_k(x) e_k$ . Diese erfüllt  $p|_F = id$ . Und somit erhalten wir eine Zerlegung  $E \cong F \oplus K$ , wobei  $K$  der Kern von  $p$  ist. Der Isomorphismus ist gegeben durch  $x \mapsto (p(x), x - p(x))$  und in die umgekehrte Richtung durch die Addition  $(y, k) \mapsto y + k$ .  $\square$

**7.7 Folgerung.**

Auf jedem SNR sind die stetig linearen Funktionale Punkte-trennend. Mehr noch: Es sei  $F$  ein abgeschlossener linearer Teilraum in einem SNR  $E$  und  $a \in E \setminus F$ . Dann existiert ein  $\ell \in E^*$  mit  $\ell|_F = 0$  und  $\ell(a) = 1$ .

Falls  $E$  normiert ist, so kann  $\ell \in E^*$  so gewählt werden, daß  $d(a, F) \cdot \|\ell\| = 1$ .

Ist  $q$  eine Seminorm von  $E$  mit  $q|_F = 0$ , so kann  $\ell \in E^*$  so gewählt werden, daß  $|\ell| \leq q$  und  $\ell(a) = q(a)$  anstelle von  $\ell(a) = 1$ .

**Beweis.** Wir definieren ein Funktional  $\ell$  auf  $F_a := F \oplus \mathbb{R} \cdot a$  durch  $\ell(x + ta) := t$ , also mit  $\ell|_F = 0$  und  $\ell(a) = 1$ . Dann ist  $\ell$  auf  $F_a$  linear, und somit existiert nach (7.4) eine stetig lineare Fortsetzung  $\tilde{\ell}$  auf  $E$ .

Falls  $E$  normiert ist, so ist  $\|\ell\| \leq 1/d(a, F)$ , denn  $|\ell(x + ta)| \cdot d(a, F) \leq |t| \cdot \|a - (-\frac{x}{t})\| = \|x + ta\|$ . Es gilt sogar Gleichheit, denn es existieren  $x_n \in F$  mit  $\|a - x_n\| \rightarrow d(a, F)$ , und somit gilt  $1 = \ell(a - x_n) \leq \|\ell\| \cdot \|a - x_n\| \rightarrow \|\ell\| \cdot d(a, F)$ . Nach (7.4) kann die Fortsetzung  $\tilde{\ell}$  nun so gewählt werden, daß  $\|\tilde{\ell}\| = \|\ell\| \leq \frac{1}{d(a, F)}$ .

Sei schließlich  $q$  eine SN von  $E$  mit  $q|_F = 0$ , dann definieren wir  $\ell : F_a \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\ell(x + ta) := tq(a)$ , d.h.  $\ell(a) = q(a)$  und  $|\ell| \leq q$ , denn  $|\ell(x + ta)| = |t|q(a) = q(ta) = q(x + ta)$ . Somit können wir die Erweiterung  $\tilde{\ell}$  nach (7.3) so wählen, daß auch  $|\tilde{\ell}| \leq q$ .  $\square$

**7.8 Folgerung.**

Ist  $E$  ein SNR und  $F$  ein linearer Teilraum, so ist der Abschluß  $\overline{F}$  von  $F$  gegeben durch  $\bigcap \{\ker \ell : \ell \in E^*, \ell|_F = 0\}$ .

**Beweis.** Klarerweise ist  $\ker \ell \supseteq \overline{F}$  für alle stetig linearen Funktionale  $\ell \in E^*$  mit  $\ell|_F = 0$ .

Ist umgekehrt  $a \notin \overline{F}$ , so existiert nach (7.7) ein stetiges lineares Funktional  $\ell : E \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $\ell(a) = 1$  und  $\ell(F) = 0$ , folglich ist  $a \notin \bigcap \{\ker \ell : \ell \in E^*, \ell|_F = 0\}$ .  $\square$

### 7.9 Folgerung.

Sei  $E$  normiert und  $x \in E$ , so gilt  $\|x\| = \max\{|\ell(x)| : \ell \in E^*, \|\ell\| = 1\}$ , d.h.  $\iota : E \rightarrow E^{**}$  ist eine Isometrie.

**Beweis.** ( $\geq$ ) gilt, da  $|\ell(x)| \leq \|\ell\| \cdot \|x\|$ .

( $\leq$ ) gilt, da nach (7.7) ein  $\ell \in E'$  existiert mit  $\|\ell\| = 1/d(x, 0) = 1/\|x\|$  und  $\ell(x) = 1$ . Wir ersetzen dieses  $\ell$  durch  $\|x\| \cdot \ell$  und erhalten somit  $\|\ell\| = 1$  und  $\ell(x) = \|x\|$ .

Die natürliche Abbildung  $\iota$  ist eine Isometrie, da

$$\|\iota(x)\| = \sup\{\underbrace{|\iota(x)(x^*)|}_{|x^*(x)|} : x^* \in E^*, |x^*| = 1\} = \|x\|. \quad \square$$

### 7.10 Folgerung.

Sei  $T : E \rightarrow F$  beschränkt linear zwischen normierten Räumen. Dann ist  $\|T^*\| = \|T\|$ .

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup\{\|T^*(y^*)\| : \|y^*\| = 1\} \\ &= \sup\{\sup\{|T^*(y^*)(x)| : \|x\| = 1\} : \|y^*\| = 1\} \\ &= \sup\{\underbrace{|T^*(y^*)(x)|}_{|y^*(T(x))|} : \|x\| = 1, \|y^*\| = 1\} \\ &= \sup\{\sup\{|\iota(T(x))(y^*)| : \|y^*\| = 1\} : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|\iota(T(x))\| : \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \text{ nach (7.9)} \\ &= \|T\|. \quad \square \end{aligned}$$

### 7.11 Folgerung.

Ist der Dualraum eines normierten Raums separabel so auch er selbst.

Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel  $(\ell^1)' = \ell^\infty$  zeigt, siehe (7.16).

**Beweis.** Es sei  $D^* \subseteq E^*$  eine abzählbare dichte Teilmenge. Für jedes  $x^* \in D^*$  wählen wir ein  $x \in E$  mit  $\|x\| = 1$  und  $|x^*(x)| \geq \frac{\|x^*\|}{2}$ . Es sei  $D$  die Menge all dieser  $x$  mit  $x^* \in D^*$ . Wir behaupten, daß der davon erzeugte Teilraum dicht liegt. Wegen (7.8) genügt es zu zeigen, daß jedes  $x^* \in E^*$ , welches auf  $D$  verschwindet, schon 0 ist. Sei also  $x^*$  ein solches. Da  $D^*$  dicht liegt in  $E^*$  existiert eine Folge  $x_n^* \in D^*$  mit  $\|x_n^* - x^*\| \rightarrow 0$ . Sei  $x_n$  die zugehörige Folge in  $D$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|x_n^* - x^*\| &= \sup\{|(x_n^* - x^*)(x)| : \|x\| = 1\} \\ &\geq |(x_n^* - x^*)(x_n)| = |x_n^*(x_n)| \geq \frac{1}{2}\|x_n^*\| \end{aligned}$$

Also konvergiert  $x_n^*$  gegen 0, d. h.  $x^* = 0$ .  $\square$

## Trennungssätze

### 7.12 Trennungssätze.

Es seien  $A$  und  $B$  disjunkte konvexe nicht leere Teilmengen eines reellen SNR's  $E$ . Dann existiert ein stetig lineares Funktional  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  und ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , so daß für alle  $a \in A$  und alle  $b \in B$  folgendes gilt:

1. Falls  $A$  offen ist, so gilt  $f(a) < \gamma \leq f(b)$ ;
2. Falls  $A$  und  $B$  offen sind, so gilt  $f(a) < \gamma < f(b)$ ;
3. Falls  $A$  abgeschlossen und  $B$  kompakt ist, so gilt  $f(a) < \gamma < f(b)$ .

Die affine Hyperebene  $\{x \in E : f(x) = \gamma\}$  trennt somit die beiden Mengen, d.h. diese liegen auf verschiedenen Seiten von ihr.

**Beweis.** (1) Es ist  $U := A - B$  ist offen und konvex und  $\{0\} \cap U = \emptyset$ . Wir wählen ein  $u \in U$  und setzen  $V := U - u$  mit zugehörige Minkowski-Funktional  $q := q_V$  (dieses ist nach (2.5) sublinear). Sei weiters  $F := \{tu : t \in \mathbb{R}\}$  und  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(tu) := -t$  (wohldefiniert, da  $u \neq 0$ ). Dann ist  $f|_U < 0$ , denn  $f(U) \subseteq \mathbb{R}$  ist konvex,  $-1 = f(u) \in f(U)$  und  $0 \notin f(U)$ . Folglich ist  $f \leq q|_F$ , denn für  $v \in F$  mit  $q(v) < 1$  ist  $v \in V = U - u$ , also  $0 > f(u + v) = f(v) - 1$ , d.h.  $f(v) < 1$ . Nach dem Satz (7.2) von Hahn-Banach existiert eine Erweiterung zu einem stetig linearen Funktional auf  $E$  (welches wir wieder mit  $f$  bezeichnen) mit  $f \leq q$ . Für  $x \in U$  ist  $x - u \in V \subseteq q_{\leq 1}$  und somit  $1 \geq q(x - u) \geq f(x - u) = f(x) + 1$ , d.h.  $f(x) \leq 0$ .

Somit ist  $f(a - b) \leq 0$ , d.h.  $f(a) \leq \gamma := \inf f(B) \leq f(b)$ . Ist nun  $A$  offen, so auch  $f(A)$  und damit ist  $f(a) < \gamma$  für alle  $a \in A$ .

(2) Ist zusätzlich  $B$  offen, so folgt analog zum eben gesagten  $f(b) > \gamma$  für alle  $b \in B$ .

(3) Da  $A$  abgeschlossen ist, existiert zu jedem  $y \notin A$  eine offene absolut-konvexe 0-Umgebung  $U_y$ , so daß  $A \cap (y + 3U_y) = \emptyset$ . Da  $B$  kompakt ist, gibt es endlich viele  $y_i \in B$ , so daß  $B \subseteq \bigcup_i (y_i + U_i)$  mit  $U_i := U_{y_i}$ . Wegen  $(y_i + 2U_i) \cap (A + U_i) = \emptyset$  sind für  $U := \bigcap_i U_i$  die beiden offenen konvexen Mengen  $A + U$  und  $B + U$  disjunkt. Also folgt die Behauptung aus (2).  $\square$

### 7.13 Folgerung.

Sei  $E$  ein SNR,  $U$  eine nicht leere konvexe offene Teilmenge und  $F$  ein linearer Teilraum der  $U$  nicht trifft. So existiert eine abgeschlossene Hyperebene  $H \supseteq F$ , welche  $U$  nicht trifft.

**Beweis.** Sei vorerst  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Nach (7.12.1) folgt mit  $A := U$  und  $B := F$  die Existenz von  $f \in E^*$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) < \gamma \leq f(b)$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ . Da  $b := 0 \in F$  ist  $\gamma \leq 0$  und somit  $U \cap \text{Ker}(f) = \emptyset$ . Weiters ist  $F \subseteq \text{Ker}(f)$ , denn  $f(y) \neq 0$  impliziert  $f(y) < 0$  oder  $f(y) > 0$  und damit  $f(-y) < 0$ , dann ist aber für ein geeignet gewähltes Vielfaches  $f(ty) < \gamma$ , ein Widerspruch.

Sei nun  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Nach dem ersten Fall existiert ein  $\mathbb{R}$ -lineares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) < 0$  für  $x \in U$  und  $f|_F = 0$ . Dann ist  $\tilde{f} : x \mapsto f(x) - i f(ix)$   $\mathbb{C}$ -linear, mit  $0 \notin \tilde{f}(U)$  und  $F \subseteq \text{Ker}(\tilde{f})$ . (Beachte, daß komplexe Hyperebenen kleiner sind als reelle).  $\square$

### 7.14 Folgerung.

Die abgeschlossene konvexe Hülle einer Teilmenge eines reellen SNR ist der Durchschnitt aller Halbräume, die sie enthalten. Vgl. dies mit (7.8).

Dabei versteht man unter einem HALBRAUM eine Teilmenge des Vektorraums der Gestalt  $\{x : f(x) \leq \gamma\}$  mit einem  $f \in E^*$  und  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

**Beweis.** Folgt wie (7.8) unter Verwendung von (7.12.3) oder (7.15) anstatt (7.7): In der Tat sind Halbräume offensichtlich abgeschlossen und konvex, also ist die abgeschlossen konvexe Hülle von  $A$  in diesen Durchschnitt enthalten. Sei umgekehrt  $b$  nicht in der abgeschlossenen konvexen Hülle von  $A$ . Dann existiert nach (7.12.3) ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  und ein stetig lineares Funktional  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a) < \gamma < f(b)$  für alle  $a \in A$ . Also liegt  $A$  im Halbraum  $\{x : f(x) \leq \gamma\}$  nicht aber  $b$ , und somit liegt  $b$  auch nicht im Durchschnitt dieser.  $\square$

Als nächstes eine Verallgemeinerung von (7.7).

**7.15 Lemma.** [Maz33].

Es sei  $E$  SNR über  $\mathbb{K}$ , weiters  $A \subseteq E$  abgeschlossen und konvexe und  $b \notin A$ .

1. Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $0 \in A$ , so existiert ein stetiges lineares Funktional  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(b) > 1$  und  $f(a) \leq 1$  für alle  $a \in A$ .
2. Falls  $A$  absolut-konvex ist, dann existiert ein stetiges lineares Funktional  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(b) > 1$  und  $|f(a)| \leq 1$  für alle  $a \in A$ .

**Beweis.** (1) Nach (7.12.3) für die kompakte Menge  $B := \{b\}$  existiert ein  $f \in E^*$  und ein  $\gamma \in \mathbb{R}$  mit  $f(a) < \gamma < f(b)$  für alle  $a \in A$ . Da  $a := 0 \in A$  ist  $0 = f(a) < \gamma$  und somit  $g := \frac{1}{\gamma} f : E \rightarrow \mathbb{R}$  das gewünschte Funktional mit  $g(a) < 1 < g(b)$  für alle  $a \in A$ .

(2) Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ist, so folgt dies aus den ersten Teil, denn dann ist mit  $a \in A$  auch  $-a \in A$  und somit  $-f(a) = f(-a) < 1$ , insgesamt also  $|f(a)| < 1$ .

Sei nun  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Es existiert nach dem eben gesagten ein stetig  $\mathbb{R}$ -lineares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|f(a)| \leq 1 < f(b)$  für alle  $a \in A$ . Es nimmt die  $2\pi$ -periodische Funktion  $t \mapsto f(e^{it}b)$  ihr Maximum an einer Stelle  $\beta$  an. An dieser muß ihre Ableitung  $f(i e^{i\beta}b)$  verschwinden. Nun betrachten wir das  $\mathbb{C}$ -lineare stetige Funktional  $\tilde{f} : x \mapsto f(e^{i\beta}x) - i f(i e^{i\beta}x)$ . Es ist  $\tilde{f}(b) = f(e^{i\beta}b) \geq f(b) > 1$  und für  $a \in A$  sei  $\tilde{f}(a) = r e^{i\vartheta}$  die Polarzerlegung. Dann ist  $0 \geq r = e^{-i\vartheta} \tilde{f}(a) = \tilde{f}(e^{-i\vartheta}a) = f(e^{i\beta} e^{-i\vartheta}a) \leq 1$ , da  $e^{i(\beta-\vartheta)}a \in A$  ist.

2. Beweis: Wie im Beweis von (7.12.3) existiert eine offene absolut konvexe 0-Umgebung  $U$  mit  $(A + U) \cap (b + U) = \emptyset$ . Also existiert eine  $\mathbb{K}$ -lineare stetige Abbildung  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $f(b + U) \cap f(A + U) = \emptyset$ . Wegen  $a := 0 \in A$  ist  $f(b) \neq f(a) = 0$  und somit können wir  $f$  durch  $\frac{1}{f(b)} f$  ersetzen. Dann ist  $f(A) \subseteq \mathbb{K}$  absolut-konvex und  $f(b) = 1 \notin f(A + U) = f(A) + f(U)$  mit offenen  $f(U)$ . Folglich existiert ein  $0 < \gamma < 1$  mit  $f(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \gamma\}$ , denn falls  $|f(x)| \geq 1$  für ein  $x \in A + U$  wäre, so wäre  $f(\frac{x}{f(x)}) = 1$  mit  $\frac{x}{f(x)} \in A + U$ .  $\square$

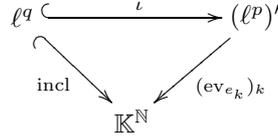
## Dualräume wichtiger Beispiele

**7.16 Lemma.**

Es sei  $1 \leq p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , dann ist  $(\ell^p)' = \ell^q$ . Weiters ist  $(c_0)' = \ell^1$ . Man beachte insbesondere, daß  $c_0 \neq \ell^\infty = (\ell^1)' = (c_0)''$ .

Wir werden in (7.34) zeigen, daß  $c_0$  nicht Dualraum eines Banach-Raums sein kann.

**Beweis.** Die durch  $x \mapsto (y \mapsto \langle x, y \rangle)$  gegebene Abbildung  $\iota : \ell^q \rightarrow (\ell^p)'$  ist wegen der Hölderungleichung eine wohldefinierte Abbildung mit  $\|\iota(x)\| \leq \|x\|$ .



Wir zeigen nun die Surjektivität: Sei dazu  $\lambda \in (\ell^p)'$ . Falls ein  $x \in \ell^q$  existiert mit  $\iota(x) = \lambda$ , so müßte  $x_k = \iota(x)(e^k) = \lambda(e^k)$  sein. Wir definieren also  $x_k := \lambda(e^k)$ . Es seien  $\lambda_n \in (\ell^p)'$  gegeben durch

$$\lambda_n(y) := \lambda(y|_{\{1, \dots, n\}}) = \lambda\left(\sum_{k \leq n} y_k e^k\right) = \sum_{k \leq n} y_k x_k.$$

Dann konvergiert  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  punktweise, da  $\sum_k y_k e_k \rightarrow y$  konvergiert in  $\ell^p$  (bzw. in  $c_0$ ). Also ist

$$\lambda(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \leq n} x_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

Somit gilt  $|\sum_k x_k y_k| \leq \|\lambda\| \|y\|_p$ . Für fixes  $n$  definieren wir ein  $y \in \ell^p$  durch  $y_k := \bar{x}_k |x_k|^{q-2}$  falls  $x_k \neq 0$  und  $k \leq n$  und 0 sonst. Es gilt  $|y_k|^p = |x_k|^q$  und somit

$$\sum_{k \leq n} |x_k|^q = \sum_{k \leq n} x_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k \leq \|\lambda\| \|y\|_p = \|\lambda\| \left(\sum_{k \leq n} |x_k|^q\right)^{1/p}$$

Also ist  $\|x\|_q \leq \|\lambda\|$  und somit  $x \in \ell^q$ . □

**Verallgemeinerung.**

Für  $1 \leq p < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  gilt:  $L^q(X) = (L^p(X))^*$  (Für  $p = 1$  nur falls  $X$   $\sigma$ -endlich ist).

Für einen Beweis siehe z.B. [Con85, S.381].

**7.17 Folgerung.**

Die stetigen Funktionale auf  $C([0, 1])$  sind genau die Riemann-Stieltjes-Integrale mit Funktionen von beschränkter Variation als Integrator

Man rufe sich aus der Analysis in Erinnerung, daß in Analogie zu Riemann-Summen die RIEMANN-STIELTJES-SUMMEN einer Funktion  $f$  bezüglich einer anderen Funktion  $g$ , einer Zerlegung  $Z := \{0 = t_1 < \dots < t_n = 1\}$  und eines Zwischenvektors  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  mit  $t_{i-1} < \xi_i < t_i$  durch

$$R_g(f, Z, \xi) := \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

gegeben sind. Die Funktion  $f$  heißt RIEMANN-STIELTJES-INTEGRIERBAR bezüglich  $g$  mit Integral  $\int_0^1 f dg$ , falls der Limes  $\int_0^1 f dg := \lim_{|Z| \rightarrow 0} R_g(f, Z, \xi)$  existiert, wobei  $|Z| := \max\{t_i - t_{i-1} : 1 \leq i \leq n\}$ .

**Beweis.** Es läßt sich leicht zeigen (siehe [Heu80, Analysis 1, §90-93]), daß für stetiges  $f$  und jede Funktion  $g$  von beschränkter Variation  $V(g)$  das Riemann-Stieltjes-Integral  $\int_0^1 f dg$  existiert und  $|\int_0^1 f dg| \leq \|f\|_{\infty} \cdot V(g)$  erfüllt. Folglich ist  $g \mapsto (f \mapsto \int_0^1 f dg)$  eine beschränkte lineare Abbildung mit Norm kleiner oder gleich 1.

Sei nun umgekehrt  $\ell$  ein stetig lineares Funktional auf  $C([0, 1])$ . Wir wollen eine Funktion  $g$  finden, mit  $\ell(f) = \int_0^1 f dg$  für alle stetigen  $f$ . Dazu beachte man, daß

$\int_0^1 \chi_{[0,s]} dg = g(s) - g(0)$  ist. Da das Riemann-Stieltjes-Integral unverändert bleibt, wenn man zu  $g$  eine Konstante wie z.B.  $-g(0)$  addiert, dürfen wir annehmen, daß  $g(0) = 0$  ist und es liegt nun nahe  $g$  durch  $g(s) := \ell(\chi_s)$  mit  $\chi_s := \chi_{[0,s]}$  zu definieren. Diese Definition macht aber vorerst keinen Sinn, da  $\chi_s$  nicht stetig ist. Nach dem Satz (7.4) von Hahn-Banach dürfen wir aber annehmen, daß  $\ell$  auf  $B([0, 1])$  normerhaltend fortgesetzt ist.

Behauptung:  $g$  ist von beschränkter Variation.

Sei  $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$  eine Partition von  $[0, 1]$ , dann definieren wir  $f_k := e^{-i\varphi_k}$ , wobei  $g(t_k) - g(t_{k-1}) = r_k e^{i\varphi_k}$  ist. Schließlich sei  $f$  die Treppenfunktion die Wert  $f_k$  auf  $(t_{k-1}, t_k]$  hat, d.h.  $f = \sum_{k=1}^n f_k(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})$ . Dann ist  $f \in B([0, 1])$  und  $\|f\|_\infty \leq 1$  also

$$\|\ell\| \geq |\ell(f)| = \left| \sum_{k=1}^n f_k(g(t_k) - g(t_{k-1})) \right| = \sum_{k=1}^n |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

und somit  $V(g) \leq \|\ell\|$ .

Behauptung: Für  $f \in C([0, 1])$  ist  $\ell(f) = \int_0^1 f dg$ .

Sei dazu  $Z := \{0 = t_0 < \dots < t_n = 1\}$  eine Partition und  $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  ein Zwischenvektor. Mit  $f_Z \in B([0, 1])$  bezeichnen wir  $f_Z := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})$ . Es gilt  $f = \lim_{|Z| \rightarrow 0} f_Z$  in  $B([0, 1])$  und da  $\ell$  stetig ist folgt:

$$\begin{aligned} \ell(f) &= \ell\left(\lim_{|Z| \rightarrow 0} f_Z\right) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} \ell(f_Z) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} \ell\left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\chi_{t_k} - \chi_{t_{k-1}})\right) \\ &= \lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(g(t_k) - g(t_{k-1})) = \int_0^1 f dg. \quad \square \end{aligned}$$

Die Abbildung  $BV([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])'$  ist jedoch nicht injektiv selbst wenn man  $g(0) = 0$  fordert, siehe [Alt85, S.121]: Um Injektivität zu erzwingen, kann man  $g(0) = 0$  und  $g(x) = g(x+)$  für alle  $0 < x < 1$  fordern.

**7.18 Darstellungssatz von Riesz.**

Es sei  $X$  ein kompakter Raum. Dann ist die Abbildung  $\mu \mapsto (f \mapsto \int_X f d\mu)$  ein isometrischer Isomorphismus vom Raum der Bairemaße auf  $C(X)'$ .

Unter einem regulären Borel-Maß  $\mu$  versteht man ein signiertes Maß  $\mu$  (d. h. eine  $\sigma$ -additive Abbildung) auf der Algebra der Borel-Mengen, welches REGULÄR ist, d. h.

$$|\mu|(A) = \sup\{|\mu(K)| : K \subseteq A, K \text{ kompakt}\},$$

wobei daß (positive) Maß  $|\mu|$  durch

$$|\mu|(A) := \sup\left\{\sum_n |\mu(A_n)| : A_n \in \mathcal{A}, A = \bigcup_n A_n, A_n \text{ paarweise disjunkt}\right\}$$

definiert ist. Unter der Variationsnorm  $\|\mu\|$  versteht man dann  $\|\mu\| := |\mu|(X)$ .

Auf kompakten Räumen stehen die Baire-Maße in eindeutiger Korrespondenz zu den regulären Borel-Maßen, d.h. lassen sich eindeutig von den Baire-Mengen auf die Borel-Mengen fortsetzen.

**Beweis.** Man sieht leicht, daß diese Abbildung eine Isometrie ist. Schwierig ist die Umkehrung, siehe [Jar81, S.139]. □

**Folgerung.**

Der Dualraum von  $C(X)$  für vollständig reguläres  $X$  besteht gerade aus den regulären Borel-Maßen mit Träger in kompakten Teilmengen von  $X$ .

**Beweis.** Zu jedem  $\mu \in C(X)^*$  existiert ein kompaktes  $K \subseteq X$  und ein  $C > 0$  mit  $|\mu(f)| \leq C \|f|_K\|_\infty$ . Folglich ist  $\text{Trg}(\mu) \subseteq K$ , d.h. o.B.d.A.  $\mu \in C(K)^*$ , also nach (7.18) durch ein reguläres Borel-Maß auf  $K$  gegeben.  $\square$

**Runge's Theorem.**

Sei  $K \subset \mathbb{C}$  kompakt und  $A \subseteq \mathbb{C}_\infty \setminus K$  eine Menge, die jede Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{C}_\infty \setminus K$  trifft. Ist  $f$  holomorph in einer Umgebung von  $K$ , dann existieren rationale Funktionen mit Polen in  $A$  welche gleichmäßig auf  $K$  gegen  $f$  konvergieren.

Dabei bezeichnet  $\mathbb{C}_\infty$  die Riemann'sche Zahlensphäre, d.h. die Einpunkt-Kompaktifizierung  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  der Ebene  $\mathbb{C}$ .

**Beweis.** Wir bezeichnen mit  $R_A(K) := \{ \frac{p}{q}|_K : p, q \text{ sind Polynome, } q^{-1}(0) \subseteq A \}$  die Menge aller rationalen Funktionen auf  $K$  mit Polen in  $A$ . Sei  $E := \{f|_K : f \text{ ist holomorph auf einer Umgebung von } K\}$  der Teilraum von  $C(K)$  jener Funktionen, die eine holomorphe Erweiterung auf eine Umgebung von  $K$  besitzen. Wir müssen zeigen, daß der Abschluß von  $R_A(K)$  den Raum  $E$  umfaßt. Wegen (7.8) genügt es zu zeigen, daß jedes  $\mu \in C(K)'$  welches auf  $R_A(K)$  verschwindet auf ganz  $E$  verschwindet (Nach dem Darstellungssatz von Riesz ist solch ein  $\mu$  durch ein reguläres signiertes Borel-Maß gegeben).

Sei also  $f|_K$  in  $E$  mit  $f : U \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph auf einer offenen Menge  $U$  die  $K$  enthält. Nach der *Cauchy'schen Integralformel* gibt es endlich viele  $C^1$ -Kurven (ja sogar Geradenstücke)  $c_k$  in  $U \setminus K$ , sodaß

$$f(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

für alle  $z \in K$ . Also ist

$$\mu(f) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \mu \left( z \mapsto \int_{c_k} \frac{f(w)}{w-z} dw \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f(w) \underbrace{\mu \left( z \mapsto \frac{1}{w-z} \right)}_{=: -\hat{\mu}(w)} dw.$$

**Sublemma.**

Es sei  $\mu \in C(K, \mathbb{C})^*$  mit  $K \subseteq \mathbb{C}$  kompakt. Dann ist durch

$$\hat{\mu}(w) := \mu \left( z \mapsto \frac{1}{z-w} \right)$$

eine holomorphe Funktion  $\hat{\mu} : \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben mit Ableitungen

$$\frac{\hat{\mu}^{(n)}(w)}{n!} = \mu \left( z \mapsto \frac{1}{(z-w)^{n+1}} \right) \text{ für } z \in \mathbb{C} \setminus K$$

$$\frac{\hat{\mu}^{(n)}(\infty)}{n!} = -\mu \left( z \mapsto z^{n-1} \right) \text{ für } n > 0$$

**Beweis.** Es ist  $r : (\mathbb{C} \setminus K) \times K \rightarrow \mathbb{C}$  definiert durch  $(z, w) \mapsto \frac{1}{z-w}$  stetig, und somit  $w \mapsto r_w : z \mapsto r(z, w)$  eine stetige Abbildung  $\mathbb{C} \setminus K \rightarrow C(K, \mathbb{C})$ . Damit ist auch  $\hat{\mu} : w \mapsto \hat{\mu}(r_w)$  stetig. Die Abbildung  $\hat{\mu}$  ist sogar holomorph, denn

$$\frac{\hat{\mu}(w') - \hat{\mu}(w)}{w' - w} = \mu \left( z \mapsto \frac{1}{(z-w')(z-w)} \right) \rightarrow \mu(r_w^2) \text{ für } w' \rightarrow w,$$

also ist  $\hat{\mu}'(w) = \mu(r_w^2)$ . Analog zeigt man  $\hat{\mu}^{(n)}(w) = n! \mu(r_w^{n+1})$ .

Wegen  $r_w \rightarrow 0$  für  $w \rightarrow \infty$ , ist  $\hat{\mu}$  durch  $\hat{\mu}(\infty) := 0$  holomorph auf  $\mathbb{C}_\infty \setminus K$  fortsetzbar. Als Taylorentwicklung von  $\hat{\mu}$  bei  $\infty$  – d.h. jene von  $w \mapsto \hat{\mu}(\frac{1}{w})$  bei 0 – erhalten wir:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(w) &= \mu\left(z \mapsto \frac{1}{z-w}\right) = \frac{1}{w} \mu\left(z \mapsto \left(1 - \frac{z}{w}\right)^{-1}\right) = -\frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(z \mapsto \left(\frac{z}{w}\right)^n\right) \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{w^{n+1}} \mu(z \mapsto z^n). \end{aligned}$$

Also gilt für die Ableitung

$$\frac{1}{n!} \hat{\mu}^{(n)}(\infty) = -\mu\left(z \mapsto z^{n-1}\right) \quad \square$$

Nun können wir den Beweis von Runge’s Theorem vervollständigen. Wegen  $\mu|_{R_A(K)} = 0$ , ist die Taylorentwicklung von  $\hat{\mu}$  bei jedem  $a \in A$  gleich 0, und da  $\hat{\mu}$  holomorph ist und  $A$  alle Komponenten von  $\mathbb{C}_\infty \setminus K$  trifft ist  $\hat{\mu} = 0$  auf  $\mathbb{C}_\infty \setminus K$  und somit  $\mu(f) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f(w) \hat{\mu}(w) dw = 0$ .  $\square$

**Folgerung.**

Falls  $K$  kompakt ist und  $\mathbb{C} \setminus K$  zusammenhängend ist, so läßt sich jede auf einer Umgebung von  $K$  holomorphe Funktion durch eine Folge von Polynomen gleichmäßig auf  $K$  approximieren.

**Beweis.** Für  $A := \{\infty\}$  sind die rationalen Funktionale mit Polen in  $A$  nach dem Fundamentalsatz der Algebra gerade die Polynome.  $\square$

**Satz.**

Es sei  $U \subseteq \mathbb{C}$  offen. Der Dualraum des Fréchet-Raums  $H(U)$  läßt sich mit  $H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus U)$ , dem Raum der Keime holomorpher Funktionen  $f$  auf  $\mathbb{C}_\infty \setminus U$  mit  $f(\infty) = 0$  identifizieren.

Unter einem KEIM EINER FUNKTION auf  $K$  versteht man eine Äquivalenzklasse von lokal um  $K$  definierten Funktionen, wobei “äquivalent” bedeutet, daß sie auf einer Umgebung von  $K$  übereinstimmen.

**Beweis.** Es sei  $[g] \in H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus U)$ , d.h.  $g$  auf einer Umgebung  $W$  von  $\mathbb{C}_\infty \setminus U$  holomorph. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei der Rand von  $W$  durch endlich viele  $C^1$ -Kurven  $c_k$  parametrisierbar. Dann definiert

$$\mu_g(f) := \sum_k \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} \frac{f(z)}{z-w} dz$$

ein stetig lineares Funktional auf  $C(U) \supseteq H(U)$ . Diese Definition hängt nur vom Keim  $[g]$  von  $g$  ab, denn wenn  $W_1$  eine kleiner Umgebung von  $\mathbb{C}_\infty \setminus U$  mit  $C^1$ -parametrisierbaren Rand in  $W$  ist, dann ist sowohl  $g$  als auch  $f$  holomorph auf  $W \setminus \overline{W_1}$  und somit verschwindet nach dem Cauchy’schen Integralsatz daß Integral von  $f \cdot g$  über den Rand  $\partial(W \setminus \overline{W_1})$ , dieses ist aber gerade die Differenz  $\int_{\partial W} f \cdot g - \int_{\partial W_1} f \cdot g$ .

Umgekehrt sei  $\mu \in H(U)^*$  und wegen des Satzes von Hahn-Banach o.B.d.A.  $\mu \in C(U, \mathbb{C})^*$ . Dann ist der Träger von  $\mu$  eine kompakte Teilmenge  $K \subseteq U$ , d.h.  $\mu \in C(K, \mathbb{C})^*$ . Die Abbildung  $\hat{\mu} : \mathbb{C}_\infty \setminus K \rightarrow \mathbb{C}$  ist nach obigen Sublemma holomorph und wegen der Cauchy’schen Integralformel ist wie im Beweis von Runge’s Theorem

$$\mu(f) = -\sum_k \frac{1}{2\pi i} \int_{c_k} f(w) \hat{\mu}(w) dw \quad \text{für } f \in H(U),$$

also ist  $\mu$  durch ein “inneres Produkt” mit  $\hat{\mu} \in H_0(\mathbb{C}_\infty \setminus K)$  gegeben.

**Grundlagen der Dualitätstheorie**

**7.19 Definition. Annihilatoren.**

Es sei dazu  $E$  ein SNR und  $F$  ein Teilraum. Mit  $F^\circ$  bezeichnen wir den ANNIHILATOR von  $F$  in  $E^*$ , d.h.  $F^\circ := \{\ell \in E^* : \ell|_F = 0\}$ . Ist  $E$  ein Hilbertraum, so können wir  $E^*$  mit  $E$  nach (6.10) identifizieren. Der Menge  $F^\circ$  entspricht dann via  $\iota : E \rightarrow E^*$  genau das orthogonale Komplement  $F^\perp$  von  $F$ , denn

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F : 0 = \langle y, x \rangle = \iota(x)(y) \Leftrightarrow \iota(x)|_F = 0 \Leftrightarrow \iota(x) \in F^\circ.$$

Falls  $G$  ein Teilraum von  $E^*$  ist, so bezeichnen wir mit  $G_\circ$  den ANNIHILATOR von  $G$  in  $E$ , d.h.

$$\begin{aligned} G_\circ &:= \{x \in E : \forall g \in G : 0 = g(x) = \iota(x)(g)\} = \bigcap \{\ker g : g \in G\} \\ &= \{x \in E : \iota(x)|_G = 0\} = \iota^{-1}(G^\circ), \end{aligned}$$

wobei  $\iota : G \rightarrow G^{**}$  die kanonische Injektion ist.

**7.20 Folgerung.**

Ist  $E$  ein SNR und  $F$  ein Teilraum, so ist sein Abschluß  $\overline{F} = (F^\circ)_\circ$ .

**Beweis.** Aus (7.8) folgt:

$$\overline{F} = \bigcap \{\ker \ell : \ell|_F = 0\} = \bigcap \{\ker \ell : \ell \in F^\circ\} = (F^\circ)_\circ. \quad \square$$

**7.21 Folgerung.**

Es sei  $T : E \rightarrow F$  eine stetig lineare Abbildung zwischen SNR'en. Dann gilt  $(\text{Im } T)^\circ = \ker(T^*)$ . Weiters ist  $\overline{\text{Im } T} = (\ker T^*)_\circ$ .

**Beweis.** Die erste Gleichung gilt, da  $y' \in (\text{Im } T)^\circ \Leftrightarrow \forall x : 0 = y'(Tx) = T^*(y')(x) \Leftrightarrow T^*(y') = 0$ , d.h.  $y' \in \ker T^*$ . Aus (7.20) folgt weiters  $\overline{\text{Im } T} = ((\text{Im } T)^\circ)_\circ = (\ker T^*)_\circ$ . □

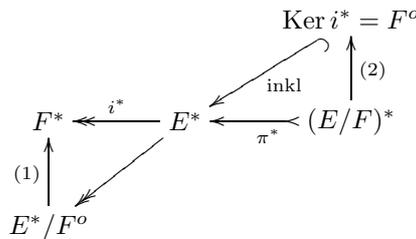
**7.22 Folgerung.**

Es sei  $F$  ein abgeschlossener linearer Teilraum eines SNR's  $E$ . Dann existieren natürliche stetig lineare Bijektionen  $E'/F^\circ \rightarrow F'$  und  $(E/F)' \rightarrow F^\circ$ . Falls  $E$  normiert ist, so sind diese Isometrien.

**Beweis.** Wir dualisieren die Sequenz

$$F \xhookrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} E/F$$

und erhalten folgendes Diagramm



Da  $\pi$  surjektiv ist, ist  $\pi^*$  injektiv und nach dem Fortsetzungssatz (7.4) ist  $\iota^* : E^* \rightarrow F^*$  surjektiv. Wegen  $i^* \circ \pi^* = (\pi \circ i)^* = 0$  existieren die eindeutig bestimmten stetig linearen Abbildungen (1) :  $E^*/F^\circ \rightarrow F^*$  und (2) :  $(E/F)^* \rightarrow F^\circ$ . Die erste ist gegeben durch  $x^* + F^\circ \mapsto i^*(x^*) = x^*|_F$  und die zweite durch  $\ell \mapsto \pi^*(\ell) = \ell \circ \pi$ .

Da  $i^*$  und  $E^* \rightarrow E^*/F^\circ$  surjektiv sind und den gleichen Kern  $F^\circ$  besitzen ist (1) bijektiv. Da  $\pi^*$  injektiv ist gilt gleiches für (2) und (2) ist auch surjektiv, denn jedes  $y^* \in F^\circ \subseteq E^*$  verschwindet auf  $F$  und faktorisiert somit zu einem  $\ell \in (E/F)^*$  via  $y^* = \ell \circ \pi = \pi^*(\ell)$ .

Falls nun  $E$  normiert ist, so sind die beiden vertikalen Abbildungen nach (7.10) Kontraktionen. Zu  $y^* \in F^*$  existiert nach (7.4) ein  $x^* \in E^*$  mit  $\|x^*\| = \|y^*\|$  und  $\iota^*(x^*) = y^*$ . Somit ist  $\|x^* + F^\circ\| \leq \|x^*\| = \|\iota^*(x^*)\|$ , d.h. (1) eine Isometrie. Gleiches gilt für (2), denn  $\pi^*$  ist eine Isometrie da  $|\ell(x + F^\circ)| = |\ell(\pi(x + y))| = \|\pi^*(\ell)(x + y)\| \leq \|\pi^*(\ell)\| \|x + y\|$  für alle  $y \in F^\circ$  und somit  $\|\ell\| \leq \|\pi^*(\ell)\|$ .  $\square$

**Definition.**

Eine DUALE PAARUNG ist eine bilineare Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  auf dem Produkt zweier Vektorräume, welche nicht degeneriert ist, d.h. aus  $\forall x : \langle x, y \rangle = 0$  folgt  $y = 0$  und genauso mit vertauschten Variablen.

Wir können also z.B. die Elemente  $y \in F$  via  $\langle \cdot, y \rangle$  als lineare Funktionale auf  $E$  auffassen. Unter der schwachen Topologie  $\sigma(E, F)$  auf  $E$  verstehen wir die initiale Topologie bezüglich aller dieser Funktionale mit  $y \in F$ .

Eine Basis von SN'en ist durch die Funktionen  $x \mapsto |\langle x, y \rangle|$  mit  $y \in F$  gegeben. Diese Topologie heißt schwach, weil sie schwächer ist als jede Topologie für welche jedes  $y \in F$  ein stetiges lineares Funktional  $x \mapsto \langle x, y \rangle$  auf  $E$  definiert.

Wir sagen, daß eine Struktur eines SNR'es auf  $E$  mit der dualen Paarung  $\langle E, F \rangle$  VERTRÄGLICH ist, falls  $F$  der Raum der stetigen linearen Funktionale bezüglich dieser Struktur ist, d.h. die natürliche Abbildung  $F \rightarrow E^*$  eine wohldefinierte Bijektion ist.

**7.23 Lemma.**

Es sei  $\langle E, F \rangle$  eine duale Paarung. Dann ist  $F$  isomorph zum Raum  $E^*$  der stetig linearen Funktionale auf  $E$  bezl. der schwachen Topologie  $\sigma(E, F)$ . Genauer, die natürliche Abbildung  $\iota : F \rightarrow E^*$ ,  $y \mapsto \langle \cdot, y \rangle$  ist eine Bijektion.

**Beweis.** Die Abbildung  $\iota$  ist klarerweise wohldefiniert, linear und injektiv. Es bleibt also nur die Surjektivität zu zeigen. Sei dazu  $\ell : E \rightarrow \mathbb{K}$  ein bezüglich  $\sigma(E, F)$  stetiges lineares Funktional auf  $E$ . Wegen der Stetigkeit existieren  $y_1, \dots, y_n \in F$  mit  $|\ell(x)| \leq p(x) := \max\{|\langle x, y_i \rangle| : i = 1, \dots, n\}$ . Insbesondere ist  $\bigcap_{i \leq n} \ker \ell_i \subseteq \ker \ell$ , wobei  $\ell_i := \iota(y_i)$  ist. Es sei  $f := (\ell_1, \dots, \ell_n) : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ . Dann faktorisiert  $\ell$  eindeutig als lineares Funktional über  $f : E \rightarrow f(E) \subset \mathbb{K}^n$ . Diese Faktorisierung läßt sich von dem Teilraum  $f(E)$  zu einem linearen Funktional  $\mu : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  fortsetzen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \ker f & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{f} & f(E) & \hookrightarrow & \mathbb{K}^n \\
 \downarrow \text{inkl} & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \ker \ell & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{\ell} & \ell(E) & \hookrightarrow & \mathbb{K}
 \end{array}$$

Ein solches  $\mu$  ist von der Gestalt  $\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i$  für gewisse skalare  $\mu_i \in \mathbb{K}$ . Also ist  $\ell = \mu \circ f = \sum_{i=1}^n \mu_i \ell_i = \iota(\sum_{i=1}^n \mu_i y_i) \in \iota(F)$ .  $\square$

**7.24 Bipolarensatz.**

Es sei  $\langle E, F \rangle$  eine duale Paarung, und  $A \subseteq E$ . Dann ist  $(A^\circ)_\circ$  der  $\sigma(E, F)$ -Abschluß der absolut-konvexen Hülle von  $A$ . Dabei ist  $A^\circ := \{y \in F : |\langle x, y \rangle| \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}$ , die POLARE von  $A$ ; und analog für  $B \subseteq F$  ist  $B_0 := \{x \in E : |\langle x, y \rangle| \leq 1 \text{ für alle } y \in B\}$ .

Man beachte, daß die hier definierte Polare  $A^\circ$  für lineare Teilräume  $A$  mit dem in (7.19) definierten Annihilator  $A^\circ$  übereinstimmt, denn  $\forall a \in A : |\langle a, y \rangle| \leq 1 \Leftrightarrow \forall a \in A \forall t > 0 : t \cdot |\langle a, y \rangle| = |\langle t \cdot a, y \rangle| \leq 1$ , i.e.  $\langle a, y \rangle = 0$

**Beweis.**  $(\supseteq)$  Klarerweise ist  $(A^\circ)_o$  als Polare  $\sigma(E, F)$ -abgeschlossen und absolut-konvex, weiters ist offensichtlich  $A \subseteq (A^\circ)_o$ .

$(\subseteq)$  Angenommen  $x \in E$  ist nicht in der rechten Seite. Nach (7.15) existiert ein  $y \in F$  mit  $y(x) > 1$  und  $|y(z)| \leq 1$  für alle  $z$  im (Abschluß der absolut-konvexen Hülle von)  $A$ . Also ist  $y \in A^\circ$  und  $x \notin (A^\circ)_o$ .  $\square$

### 7.25 Lemma.

*Es sei  $A \subset E$  eine konvexe Menge die für eine verträgliche Struktur bezüglich der dualen Paarung  $\langle E, F \rangle$  abgeschlossen ist. Dann ist  $A$  für jede andere solche Struktur ebenfalls abgeschlossen.*

**Beweis.** Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  sehen wir aus (7.14), daß  $A$  der Durchschnitt der Halbräume ist, die  $A$  enthalten. Diese verwenden aber nur die stetigen linearen Funktionale, also ist  $A$  bezüglich jeder verträglichen Topologie abgeschlossen.

Im Fall  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  liefert der Realteil der dualen Paarung  $E \times F \rightarrow \mathbb{C}$  eine Paarung  $E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  als reelle Vektorräume und eine Struktur auf  $E$  als komplexer SNR ist genau dann verträglich mit der komplexen Paarung, wenn sie es mit dem Realteil ist, denn die  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung  $\iota : E \rightarrow L_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C})$ ,  $x \mapsto \langle x, \cdot \rangle$  ist genau dann surjektiv, wenn  $\Re \circ \iota : E \rightarrow L_{\mathbb{C}}(F, \mathbb{C}) \rightarrow L_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{R})$ ,  $x \mapsto \Re(\langle x, \cdot \rangle)$  es ist. Somit folgt alles aus dem reellen Fall.  $\square$

### 7.26 Satz von Mackey.

*Eine Teilmenge von  $E$  ist genau dann beschränkt, wenn sie bezüglich einer (jeder) verträglichen Topologie  $\tau$  beschränkt ist.*

**Beweis.** Wir haben in (5.5) mittels des Satzes von Hahn-Banach und dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gezeigt, daß eine Menge genau dann beschränkt ist, wenn sie unter allen stetig linearen Funktionalen beschränkt ist. Diese hängen aber nicht von der verträglichen Topologie ab.  $\square$

### Bemerkung.

Es sei  $X$  eine Menge,  $F$  ein SNR und  $\mathcal{B}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ . Unter der Topologie der *gleichmäßigen Konvergenz* auf den Mengen in  $\mathcal{B}$  am Raume aller auf  $B \in \mathcal{B}$  beschränkten Abbildungen  $X \rightarrow F$ , versteht man die durch die SN'en  $f \mapsto \|(p \circ f)|_B\|_\infty$  erzeugte Topologie, wobei  $B$  ganz  $\mathcal{B}$  und  $p$  die SN'en von  $F$  durchläuft.

Beachte, daß eine Menge  $\mathcal{F}$  von solchen Abbildungen genau dann beschränkt ist, wenn sie gleichmäßig auf jeder Menge  $B \in \mathcal{B}$  beschränkt ist:

$(\Leftarrow)$  Sei  $B \in \mathcal{B}$  und  $p$  eine SN von  $F$ . Nach Voraussetzung ist  $\mathcal{F}(B)$  in  $F$  beschränkt, also existiert ein  $K > 0$  mit  $p(f(x)) \leq K$  für alle  $x \in B$  und  $f \in \mathcal{F}$ , d.h.  $\mathcal{F} \subseteq K \{f : p(f(x)) \leq 1 \forall x \in B\}$ .

$(\Rightarrow)$  Sei  $\mathcal{F}$  beschränkt,  $B \in \mathcal{B}$  und  $p$  eine SN von  $F$ . Dann ist  $\{f : p(f(x)) \leq 1 \forall x \in B\}$  eine 0-Umgebung, also existiert ein  $K > 0$  mit  $\mathcal{F} \subseteq K \{f : p(f(x)) \leq 1 \forall x \in B\} = \{f : p(f(x)) \leq K \forall x \in B\}$ , also ist  $p(\mathcal{F}(B))$  durch  $K$  beschränkt und somit  $\mathcal{F}(B)$  beschränkt.

Ist insbesondere  $X = E$  eine SNR über  $\mathbb{K}$  und  $F = \mathbb{K}$  und  $\mathcal{B}$  eine unter Homothetien abgeschlossene Menge beschränkter Mengen in  $E$ , d.h. mit  $B \in \mathcal{B}$  und  $\lambda > 0$  ist  $\lambda B \in \mathcal{B}$ , dann bilden die Polaren  $B^\circ := \{x^* \in E^* : \forall x \in B : |x^*(x)| \leq 1\}$  mit  $B \in \mathcal{B}$  eine 0-Umgebungssubbasis der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf

den Mengen aus  $\mathcal{B}$ . Ist  $\mathcal{B}$  zusätzlich unter Vereinigungen abgeschlossen, so ist dies eine 0-Umgebungsbasis.

In (7.9) habe wir gezeigt, daß die kanonische Abbildung  $\iota : E \rightarrow E^{**}$  für normierte Räume  $E$  eine Isometrie ist. Wir wollen nun untersuchen inwieweit sich das auf allgemeine SNR überträgt.

Für die übliche Topologie auf  $L(E^*, \mathbb{K})$  der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen  $B \subseteq E^*$  bilden die  $B^o$  eine 0-Umgebungsbasis. Stetigkeit von  $\iota$  würde also bedeuten, daß  $\iota^{-1}(B^o) = B_o$  eine 0-Umgebung wäre und somit  $B \subseteq (B_o)^o$  gleichgradig stetig wäre.

Wir zeigen nun, daß, wenn wir auf  $(E^*)^*$  die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf jeder gleichgradig stetigen Teilmenge  $B \subseteq E^*$  verwenden, die Abbildung  $\iota : E \rightarrow (E^*)^*$  eine Einbettung SNR'e ist.

### 7.27 Folgerung.

*Die Topologie auf einem SNR  $E$  ist die der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Teilmengen von  $E^*$ . Die natürliche Abbildung  $E \rightarrow E^{**}$  ist also eine Einbettung, falls man den Zielraum mit der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Teilmengen von  $E^*$  versieht. Man beachte, daß diese natürliche Abbildung bezüglich der üblichen Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen nicht einmal stetig ist.*

**Beweis.** Sei  $U$  eine abgeschlossene absolut-konvexe 0-Umgebung in  $E$ . Nach (7.25) ist  $U$  auch  $\sigma(E, E^*)$ -abgeschlossen, also ist  $(U^o)_o = U$  nach dem Bipolarenatz (7.24). Da klarerweise  $U^o$  gleichgradig-stetig ist, ist  $U = (U^o)_o$  eine Nullumgebung bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Mengen.

Umgekehrt sei  $V = A_o = \iota^{-1}(A^o)$  eine typische Nullumgebung für die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf gleichgradig-stetigen Mengen  $A \subseteq E^*$ . Dann existiert eine abgeschlossene absolut-konvexe 0-Umgebung  $U$  in  $E$  mit  $A \subseteq U^o$ . Somit ist  $V = A_o \supseteq (U^o)_o = U$ , also  $V$  eine 0-Umgebung von  $E$ .  $\square$

### 7.28 Satz von Alaoglu-Bourbaki.

*Jede gleichgradig-stetige Teilmenge von  $E^*$  ist relativ-kompakt bzgl.  $\sigma(E^*, E)$ .*

**Beweis.** Wir müssen dies nur für Polare  $U^o$  von 0-Umgebungen  $U$  zeigen. Dazu betrachten wir die duale Paarung  $\langle E, F \rangle$ , wobei  $F$  aus allen linearen Funktionalen besteht. Es bezeichne  $\bullet$  die Polare bezüglich dieser Paarung. Dann ist  $U^\bullet \subseteq F$  abgeschlossen und beschränkt bzgl.  $\sigma(F, E)$ . Die natürliche Abbildung  $\iota : F \rightarrow \prod_E \mathbb{K}$ ,  $y \mapsto (\langle x, y \rangle)_{x \in E}$  ist linear, injektiv, hat als Bild einen abgeschlossenen Teilraum (der punktweise Grenzwert linearer Abbildungen ist linear) und die schwache Topologie  $\sigma(F, E)$  ist gerade so definiert, daß  $\iota$  initial ist. Das Bild von  $U^\bullet$  ist also wegen des Satzes von Tychonov (Produkte kompakter Räume sind kompakt) kompakt und damit ist  $U^\bullet$  selbst  $\sigma(F, E)$ -kompakt. Wegen  $E^* \subseteq F$ , gilt  $U^o \subseteq U^\bullet$ , aber auch die Umkehrung, denn  $x \in U^\bullet$  ist stetig bezüglich der 0-Umgebung  $U$ . Also ist  $U^o$  bzgl.  $\sigma(F, E)$  kompakt. Da aber  $\sigma(F, E)$  auf  $E^*$  gerade die Topologie  $\sigma(E^*, E)$  induziert, ist alles gezeigt.  $\square$

### Folgerung.

*Die abgeschlossene Einheitskugel  $K$  im Dualraum  $E^*$  eines normierten Raumes  $E$  ist  $\sigma(E^*, E)$ -kompakt. Folglich ist  $E$  isometrisch isomorph zu einem Teilraum von  $C(K)$ , wobei die Einbettung durch  $\iota : E \rightarrow E^{**} \rightarrow C(K)$ ,  $x \mapsto (x^* \mapsto x^*(x))$  gegeben ist.*  $\square$

Da die Einheitskugel in der Normtopologie wegen (4.6) genau dann kompakt ist, wenn  $E$  endlich dimensional ist, ist andernfalls  $\sigma(E^*, E)$  echt größer als diese.

**Definition.**

Es sei  $\langle E, F \rangle$  eine duale Paarung. Dann versteht man unter der MACKEY-TOPOLOGIE  $\mu(E, F)$  auf  $E$  die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den  $\sigma(F, E)$ -kompakten, absolut-konvexen Mengen in  $F$ .

**7.29 Satz von Mackey-Arens.**

*Eine Topologie auf  $E$  ist genau dann mit der dualen Paarung  $\langle E, F \rangle$  verträglich, wenn sie zwischen der schwachen Topologie  $\sigma(E, F)$  und der Mackey-Topologie  $\mu(E, F)$  liegt.*

**Beweis.** Wir zeigen zuerst die Verträglichkeit von  $\mu(E, F)$ . Sei dazu  $\ell : E \rightarrow \mathbb{K}$  ein bezüglich  $\mu(E, F)$  stetiges lineares Funktional. Also existiert eine  $\sigma(F, E)$ -kompakte absolut-konvexe Menge  $K \subseteq F$  mit  $|\ell(K_o)| \leq 1$ . Wir betrachten nun die duale Paarung  $\langle E, G \rangle$ , wobei  $G \supseteq F$  den Raum aller linearer Funktionale auf  $E$  bezeichnet. Da  $\sigma(G, E)$  auf  $F$  die Topologie  $\sigma(F, E)$  induziert, ist  $K \subseteq F \subseteq G$  auch  $\sigma(G, E)$ -kompakt und somit abgeschlossen. Aus dem Bipolarensatz folgt, daß  $K = (K_\bullet)^\bullet$  ist, wobei wie zuvor  $\bullet$  die Polare bezüglich  $\langle G, E \rangle$  bezeichnet. Wegen  $|\ell(K_o)| \leq 1$  liegt  $\ell \in (K_\bullet)^\bullet = K$ , also auch in  $F$ . D.h. der  $\mu(E, F)$ -Dual von  $E$  ist in  $F$  enthalten.

Die Umkehrung folgt sofort daraus, daß jedes  $y \in F$  bezüglich  $\sigma(E, F)$  und damit auch bezüglich  $\mu(E, F)$ -stetig ist.

Sei nun  $\tau$  eine verträgliche Topologie auf  $E$ . Da alle  $y \in F$  bzg.  $\tau$  stetige Funktionale sind, ist  $\tau$  feiner als die schwache Topologie  $\sigma(E, F)$ .

Andererseits sei  $U$  eine 0-Umgebung in  $E$  bzg.  $\tau$ . Wegen (7.27) dürfen wir annehmen, daß sie von der Form  $K_o$  ist, mit gleichgradig-stetigen  $K \subseteq F$ , d.h. o.B.d.A. mit  $K = V^\circ$  für eine  $\tau$ -0-Umgebung  $V \subseteq E$ . Wegen dem Satz von Alaoglu-Bourbaki (7.28) ist die absolut-konvexe Menge  $K = V^\circ$  bezüglich  $\sigma(F, E)$  kompakt, und somit  $U$  eine 0-Umgebung bezüglich der Mackey-Topologie  $\mu(E, F)$ .  $\square$

**7.30 Bemerkung.**

Für einen SNR  $E$  betrachten wir die duale Paarung  $E \times F \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $F := E^*$ . Wir haben die folgenden Typen von  $\sigma(F, E)$ -abgeschlossenen absolut-konvexen Teilmengen  $B \subseteq E^*$ :

1. Die konvexe Hüllen endlicher Teilmengen;
2. Die gleichgradig stetigen;
3. Die  $\sigma(F, E)$ -kompakten;
4. Die Banach-Scheiben;
5. Die auf beschränkten Teilmengen in  $E$  glm. beschränkten;
6. Die auf Punkten in  $E$  beschränkten.

Dabei heißt eine Menge  $B \subseteq F$  BANACH-SCHEIBE falls sie absolut-konvex und  $\sigma(F, E)$ -beschränkt ist und der deshalb wohldefinierte normierte Raum  $F_B$  vollständig ist;

Die entsprechenden Topologien auf  $E$  der glm. Konvergenz auf den jeweiligen Mengen in  $F$  haben als Basis von  $\sigma(E, F)$ -abgeschlossenen, absolut-konvexen Nullumgebungen gerade die Polaren der aufgelisteten Mengen. Diese Topologien sind also

1. Die schwache Topologie  $\sigma(E, F)$  nach Definition;
2. Die ursprüngliche Topologie von  $E$  nach (7.27);
3. Die Mackey-Topologie  $\mu(E, F)$  nach Definition;

4. Diese hat keinen Namen;
5. Die mit den Tonnen als 0-Umgebungsbasis;
6. Die mit den gefräßigen Tonnen als 0-Umgebungsbasis.

Dabei nennt man eine Menge GEFRÄSSIG, falls sie jede beschränkte Teilmenge in  $F$  absorbiert.

Für die beiden letzten Topologien verwendet man folgendes:

$B_o$  absorbiert  $A \Leftrightarrow \langle A, B \rangle$  ist beschränkt, d.h.  $B$  ist gleichmäßig beschränkt auf  $A$ . In der Tat ist  $|\langle A, B \rangle| \leq K \Leftrightarrow A \subseteq K B_o$ .

Folglich sind die Polaren von den Mengen in (6) und (5) gerade die Tonnen bzw. die gefräßigen Tonnen.

Die Polare  $B_o$  einer auf endlichen/beschränkten Mengen beschränkten Menge absorbiert nämlich nach dem gerade Gesagten alle endlichen/beschränkten Mengen. Und umgekehrt ist für jede Tonne  $A = (A^o)_o$  nach dem Bipolarenaussatz (7.24) und somit nach dem oben Gesagten  $A^o$  beschränkt auf endlichen/beschränkten Mengen, da  $A = (A^o)_o$  diese Mengen absorbiert.

Wir wollen nun zeigen, daß die aufgezählten Topologien in der angegebenen Reihenfolge stärker werden, oder äquivalent, daß die entsprechenden Inklusionen der zugrundeliegenden Mengensysteme gelten. Für (1)  $\Rightarrow$  (2) und (5)  $\Rightarrow$  (6) ist das trivial, (2)  $\Rightarrow$  (3) ist (7.28). Die verbleibenden Implikationen (3)  $\Rightarrow$  (4)  $\Rightarrow$  (5) werden in den folgenden beiden Sätzen gezeigt:

### 7.31 Lemma.

*Jede  $\sigma(E, F)$ -kompakte absolut-konvexe Menge ist eine Banach-Scheibe.*

**Beweis.** Sei dazu  $(x_n)_n$  eine Cauchy-Folge in  $E_B$ . Dann ist  $p_B(x_n) < K$  für ein  $K > 0$  und alle  $n$  und somit  $x_n \in K B$ . Da  $K B$   $\sigma(E, F)$ -kompakt ist, existiert eine gegen ein  $x_\infty \in K B$   $\sigma(E, F)$ -konvergente Teilfolge. Für  $\varepsilon > 0$  ist  $p_B(x_n - x_m) < \varepsilon$  für  $n$  und  $m$  hinreichend groß und damit  $x_n - x_m \in \varepsilon B$ . Da  $\varepsilon B$   $\sigma(E, F)$ -abgeschlossen ist und eine Teilfolge der  $x_m$  gegen  $x_\infty$  konvergiert, liegt  $x_n - x_\infty \in \varepsilon B$  für hinreichend große  $n$  und damit ist  $p_B(x_n - x_\infty) \leq \varepsilon$ . Also konvergiert  $x_n \rightarrow x_\infty$  in  $E_B$ .  $\square$

### 7.32 Banach-Mackey-Theorem.

*Jede Tonne absorbiert jede Banach-Scheibe. Folglich sind Banach-Scheiben in  $F = E^*$  gln. auf beschränkten Mengen in  $E$  beschränkt.*

**Beweis.** Es sei  $B \subseteq E$  eine Banach-Scheibe, d.h.  $B$  ist absolut-konvex,  $\sigma(E, F)$ -beschränkt und der bezüglich dem Minkowski-Funktional  $p_B : E_B \rightarrow \mathbb{R}$  normierte Raum  $E_B := \langle B \rangle_{\text{VR}}$  ist vollständig. Es bezeichne  $i : E_B \rightarrow E$  die lineare Inklusion.

Weiters sei  $A \subseteq E$  eine Tonne, d.h. absolut-konvex,  $\sigma(E, F)$ -abgeschlossen und absorbierend. Dann ist das Minkowski-Funktional  $p_A$  auf  $\langle A \rangle_{\text{VR}} = E$  eine wohldefinierte Seminorm. Es sei  $E_{(A)}$  der Quotientenraum  $E/\ker(p_A)$  und  $\pi : E \rightarrow E_{(A)}$  die kanonische lineare Quotientenabbildung. Die Seminorm  $p_A$  faktorisiert über  $\pi : E \rightarrow E_{(A)}$  zu einer Norm  $E_{(A)} \rightarrow \mathbb{R}$  und diese können wir eindeutig zur Norm  $\widetilde{p_A}$  auf der Vervollständigung  $\widetilde{E_{(A)}}$  fortsetzen.

Es ist offensichtlich  $A \subseteq \pi^{-1}(\pi(A)) \subseteq (p_A)_{\leq 1}$ . Es gilt Gleichheit, denn aus  $1 \geq p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$  folgt die Existenz einer Folge  $\lambda_n \searrow 1$  mit  $x_n \in \lambda_n A$  und somit ist  $A \ni \frac{1}{\lambda_n} x_n \rightarrow x$ . Da  $A$  bezüglich  $\sigma(E, F)$  abgeschlossen ist schließlich  $x \in A$ .

Wir wollen nun die Stetigkeit der Zusammensetzung

$$E_B \xrightarrow{i} (E, \sigma(E, F)) \xrightarrow{\pi} E_{(A)} \hookrightarrow \widetilde{E_{(A)}}$$

zeigen. Nach (5.8) genügt es dazu eine Punkte-trennende Familie stetig linearer Funktionale  $\tilde{\lambda}$  auf  $\widetilde{E_{(A)}}$  zu finden, für die Zusammensetzung  $\tilde{\lambda} \circ \pi \circ \iota : E_B \rightarrow \mathbb{K}$  stetig ist.

Jedes  $y \in A^\circ \subseteq F$  erfüllt  $\{x \in E : |\langle x, y \rangle| \leq 1\} \supseteq A = (p_A)_{\leq 1}$  und somit ist für das zugehörige lineare Funktional  $|y| \leq p_A$ . Dieses faktorisiert also über  $\pi : E \rightarrow E_{(A)}$  zu einer Kontraktion  $\ell : E_{(A)} \rightarrow \mathbb{K}$  und hat somit eine stetige Fortsetzung  $\tilde{\ell} : \widetilde{E_{(A)}} \rightarrow \mathbb{K}$ . Die Zusammensetzung  $\tilde{\ell} \circ \pi \circ \iota = y \circ \iota : E_B \rightarrow \mathbb{K}$  ist stetig(=beschränkt), denn  $B$  ist  $\sigma(E, F)$ -beschränkt.

Bleibt zu zeigen, daß diese  $\tilde{\lambda}$  Punkte-trennend auf  $\widetilde{E_{(A)}}$  wirken. Sei dazu  $0 \neq \tilde{x} \in \widetilde{E_{(A)}}$ , d.h.  $\tilde{p}_A(\tilde{x}) > 0$ . Dann existiert ein  $x \in E$  mit  $\tilde{p}_A(\tilde{x} - \pi(x)) < \frac{1}{2}\tilde{p}_A(\tilde{x}) =: \delta > 0$ . Es ist folglich  $p_A(x) = \tilde{p}_A(\pi(x)) > \delta$ . Nach (7.15.2) existiert ein  $y \in A^\circ \subseteq F$  mit  $y(\frac{x}{\delta}) > 1$ . Das zugehörige  $\tilde{\ell} : \widetilde{E_{(A)}} \rightarrow \mathbb{K}$  erfüllt somit  $|\tilde{\ell}| \leq \tilde{p}_A$  und  $\tilde{\ell}(\pi(x)) = y(x) > \delta$ . Also ist

$$\begin{aligned} |\tilde{\ell}(\tilde{x})| &\geq |\tilde{\ell}(\pi(x))| - |\tilde{\ell}(\tilde{x} - \pi(x))| \\ &\geq |y(x)| - \tilde{p}_A(\tilde{x} - \pi(x)) > \delta - \delta = 0 \end{aligned}$$

Den zweiten Teil zeigen wir nun wie folgt: Sei dazu  $B \subseteq F$  eine Banach-Scheibe und  $C \subseteq E$  beschränkt. Dann ist  $C$  punktweise auf  $F$  beschränkt und somit  $C^\circ \subseteq E$  eine Tonne. Wegen dem ersten Teil existiert ein  $K > 0$  mit  $B \subseteq K C^\circ$ , d.h.  $B$  ist auf  $C$  durch  $K$  beschränkt.  $\square$

### Bemerkung.

Damit  $\iota : E \rightarrow (E^*)^*$  bzgl. der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den Mengen in  $\mathcal{B}$  benötigen wir nach dem vor (7.27) gezeigten, daß diese gleichgradig stetig sind, d.h.  $B_o$  eine 0-Umgebung ist. Offensichtlich ist  $B_o = \bigcap_{x^* \in \mathcal{B}} \{x : |x^*(x)| \leq 1\}$  abgeschlossen und absolut-konvex.

Wenn  $\mathcal{B}$  die Menge aller beschränkten Teilmengen von  $E^* = L(E, \mathbb{K})$  bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Mengen in  $E$  ist, d.h. gerade die auf beschränkten Mengen in  $E$  gleichmäßig beschränkten Mengen von  $E^*$  sind, dann ist  $B_o$  sogar gefräßig, denn aus  $A \subseteq E$  beschränkt folgt,  $\exists K > 0$  mit  $|x^*(x)| \leq K$  für alle  $x \in A$  und  $x^* \in \mathcal{B}$  und somit ist  $A \subseteq K B_o$ .

Ist andererseits  $\mathcal{B}$  die Menge aller beschränkten Teilmengen von  $E^* = L(E, \mathbb{K})$  bezüglich der punktweisen Konvergenz ist, d.h. gerade die auf endlichen Mengen in  $E$  gleichmäßig beschränkten Mengen von  $E^*$  sind, dann ist  $B_o$  zumindest absorbierend, denn aus  $a \in E$  endlich folgt,  $\exists K > 0$  mit  $|x^*(a)| \leq K$  für alle  $x^* \in \mathcal{B}$  und somit ist  $a \in K B_o$ .

Dies liefert nun:

### 7.33 Folgerung.

*Die Topologie eines SNR's  $E$  ist genau dann die der gleichmäßigen Konvergenz auf pktw. beschränkten Mengen von  $E^*$ , falls  $E$  tonneliert ist.*

*Sie ist genau jene der gleichmäßigen Konvergenz auf beschränkten Mengen von  $E^* \subseteq L(E, \mathbb{K})$ , falls  $E$  infra-tonneliert ist, d.h. jede gefräßige Tonne eine Nullumgebung ist.*

*In beiden Fällen ist sie auch gleich  $\mu(E, E^*)$ .*

Dabei heißt ein SNR INFRA-TONNELIERT oder auch QUASI-TONNELIERT falls jede gefräßige Tonne eine 0-Umgebung ist. Beachte, daß offensichtlich sowohl alle bornologischen als auch alle tonnelierten SNR's infra-tonneliert sind.

Verwandt damit ist auch noch der Begriff ULTRA-BORNOLOGISCH, falls jede Banachdisks fressende absolut-konvexe Menge eine 0-Umgebung ist. Offensichtlich sind ultra-bornologische Räume sowohl bornologisch als auch tonneliert.

**Beweis.** Wegen obigen Inklusionen bilden die (gefräßigen) Tonnen gerade eine Nullumgebungsbasis der genannten Topologien der glm. Konvergenz. Diese stimmt also genau dann mit jener von  $E$  überein, wenn diese Tonnen 0-Umgebungen sind, d.h. der Raum (infra-)tonneliert ist.

Da  $\mu(E, E^*)$  zwischen der Topologie von  $E$  und jenen der glm. Konvergenz liegt, gilt in diesen Fällen Gleichheit.  $\square$

## Nochmals Kompakte Mengen

### 7.34 Satz von Krein-Milman.

*Es sei  $K$  eine kompakte konvexe Teilmenge eines SNR'es. Dann ist  $K$  die abgeschlossene konvexe Hülle ihrer Extrempunkte*

$$\begin{aligned} \text{ext } K &:= \{a \in K : K \setminus \{a\} \text{ ist konvex}\} \\ &= \{a \in K : \forall x, y \in K \forall 0 < t < 1 : a = tx + (1-t)y \Rightarrow x = a = y\}. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß  $K \neq \emptyset$ . Die beiden Beschreibungen von EXTREMAL-PUNKTEN sind äquivalent, denn es ist  $K \setminus \{a\}$  genau dann konvex, wenn für alle  $x, y \in K$  mit  $x \neq a, y \neq a$  und alle  $0 < t < 1$  gilt:  $tx + (1-t)y \neq a$ , oder äquivalent:  $tx + (1-t)y = a \Rightarrow x = a$  oder  $y = a$ . Wegen  $ta + (1-t)y = a$  ist aber  $x = a$  und  $y = a$  äquivalent.

Der wesentliche Teil besagt, daß  $\text{ext } K$  nicht leer ist. Dazu bezeichnen wir eine Teilmenge  $A \subseteq K$  als EXTREMAL in  $K$ , falls  $\forall x, y \in A \forall 0 < t < 1 : tx + (1-t)y \in A \Rightarrow x, y \in A$ . Eine einpunktige Menge  $\{a\}$  ist genau dann extremal, wenn  $a$  ein Extrempunkt ist. Es sei

$$\mathcal{E} := \{A \subseteq K : A \text{ ist extremal in } K, \text{ abgeschlossen (=kompakt) und konvex}\}.$$

**Es existieren Extrempunkte.** Klarerweise ist  $\mathcal{E}$  unter Durchschnittsbildungen abgeschlossen. Wir wollen nun das Lemma von Zorn auf  $\mathcal{E}_0 := \mathcal{E} \setminus \{\emptyset\}$  anwenden. Die endlichen Durchschnitte jeder linear geordneten Teilmenge  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{E}_0$  sind nicht leer, also wegen der endlichen Durchschnittseigenschaft (ist jeder endliche Durchschnitt nicht leer, so auch der gesamte) kompakter Mengen ist auch der gesamte Durchschnitt in  $\mathcal{E}_0$ . Nach dem Lemma von Zorn gibt es (zu jedem  $B \in \mathcal{E}_0$ ) also ein minimales Element  $A \in \mathcal{E}_0$  (mit  $A \subseteq B$ ).

Wir behaupten, daß  $A$  einelementig ist. Es sei  $x, y \in A$ . Falls  $x \neq y$  so existiert nach (7.5) ein stetig lineares Funktional  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) \neq f(y)$ .

**Beh.** Ist  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und konvex so ist  $A_f := A \cap f^{-1}(\sup f(A)) \in \mathcal{E}_0$ :

Da  $f$  stetig ist und  $A$  kompakt ist, wird das Supremum  $M := \sup f(A)$  von  $f(A)$  angenommen, also ist  $\emptyset \neq A_f$  abgeschlossen.

Wir behaupten, daß  $A_f$  extremal in  $A$  ist. Sei dazu  $x, y \in A$  mit  $\{\lambda x + (1-\lambda)y : 0 < \lambda < 1\} \cap A_f \neq \emptyset$ . Also ist  $f(x), f(y) \leq M$ . Folglich ist für  $z := tx + (1-t)y \in A_f$  mit  $0 < t < 1$  folgendes richtig:

$$\begin{aligned} M &= f(z) \leq tf(x) + (1-t)f(y) \\ &\Rightarrow tf(x) \geq M - (1-t)f(y) \geq (1-(1-t))M = tM \geq tf(x) \\ &\Rightarrow f(x) = M \text{ und analog } f(y) = M \Rightarrow x, y \in A_f \end{aligned}$$

Folglich ist  $A_f$  eine nicht leere extremale Teilmenge von  $A$ , also auch in  $K$  extremal. Sie ist konvex, da  $f$  linear und  $A$  konvex ist. Wegen der Minimalität von  $A$  folgt  $A = A_f$ . Dies ist ein Widerspruch, da  $f$  auf  $\{x, y\} \subseteq A$  nicht konstant ist.

Es sei nun  $B$  die abgeschlossene konvexe Hülle von  $\text{Ext}(K)$ . Klarerweise gilt  $B \subseteq K$ . Angenommen  $B \neq K$ , dann existiert ein  $a \in K \setminus B$  und somit nach (7.15) ein stetig lineares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(b) < f(a)$  für alle  $b \in B$ , also ist  $B \cap K_f = \emptyset$ . Da  $f$  linear ist, ist wie oben gezeigt  $K_f \in \mathcal{E}_0$  und nach dem ersten Teil existiert ein Extrempunkt  $b$  von  $K_f$  und somit auch von  $K$ , d.h.  $b \in \text{Ext}(K) \cap K_f \subseteq B \cap K_f = \emptyset$ , ein Widerspruch.  $\square$

**Folgerung.**

*Weder  $c_0$  noch  $L^1(\mathbb{R})$  sind Dualräume von normierten Räumen.*

**Beweis.** Falls ein Banach-Raum  $E$  topologisch isomorph zum Dualraum eines normierten Raumes  $F$  ist, so muß sein abgeschlossener Einheitsball in einem Vielfachen der dualen Kugel von  $F$  enthalten sein. Er ist also eine  $\sigma(E, F)$ -abgeschlossene Teilmenge des nach (7.28)  $\sigma(E, F)$ -kompakten dualen Balls. Also ist er selbst  $\sigma(E, F)$ -kompakt, und besitzt nach dem Satz (7.34) von Krein-Milman Extrempunkte. Dies ist aber weder für  $c_0$  noch für  $L^1(\mathbb{R})$  der Fall:

Sei nämlich  $x = (x_k)_k \in c_0$  mit  $\|x\|_\infty \leq 1$ . Dann existiert ein  $k$  mit  $|x_k| < 1$  und nach Wahl eines  $\varepsilon > 0$  mit  $|x_k| + \varepsilon \leq 1$  gilt für die beiden Punkte

$$x^\pm : j \mapsto \begin{cases} x_j & \text{für } j \neq k \\ x_k \pm \varepsilon & \text{für } j = k \end{cases}$$

gilt:  $x = \frac{1}{2}(x^+ + x^-)$ ,  $x^+ \neq x \neq x^-$  und  $\|x^\pm\| \leq 1$ . Also ist  $x$  kein Extrempunkt.

Nun sei  $[f] \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_1 \leq 1$ . O.B.d.A. sei  $\|f\| \neq 0$ . Dann existiert eine meßbare Teilmenge  $X_0$  in  $\mathbb{R}$  mit  $0 < \int_{X_0} |f| < \|f\|_1$ . Es gilt die analoge Ungleichung dann auch für  $X_1 := \mathbb{R} \setminus X_0$ . Nun sei  $t_i := \|f\|_{X_i} / \|f\| > 0$  und  $t_i f_i := f \cdot \chi_{X_i}$  für  $i = 0, 1$ . Dann ist  $\|f_i\| = \|f\|$ ,  $f_0 \neq f \neq f_1$ ,  $f = t_0 f_0 + t_1 f_1$  und  $t_0 + t_1 = 1$ . Also ist  $f$  kein Extrempunkt.  $\square$

## 8. Lösung partieller Differentialgleichungen

In diesem Kapitel entwickeln wir das nötige Instrumentarium (nämlich die Fourier-Transformation) um schließlich die Existenz von Lösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu beweisen.

### 8.1 Bemerkung.

Sei  $D = P(\partial)$  ein partieller linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, also  $P$  ein Polynom  $P(x) = \sum_{|k| \leq m} a_k x^k$  in  $(x_1, \dots, x_n)$  mit komplexen Koeffizienten  $a_k$ . Wie wir in (4.9) gesehen haben, genügt es eine Fundamentallösung, d.h. eine distributionelle Lösung  $\varepsilon$  von

$$\left( P(\partial)\varepsilon = \right) D(\varepsilon) = \delta$$

zu finden, da dann  $u := \varepsilon \star f$  eine Lösung von

$$D(u) = D(\varepsilon \star f) = D(\varepsilon) \star f = \delta \star f = f$$

ist.

Fundamentallösungen für klassische Differentialoperatoren wie den Laplace-Operator, den Wärmeleitungs-Operator und den Cauchy-Riemann-Operator waren lange bekannt. In [Mal55] und unabhängig [Ehr54] wurde allgemein die Existenz von Fundamentallösungen jeder linearen partiellen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gezeigt. In [Hör58] wurde die Existenz temperierter Fundamentallösungen gezeigt.

Wie wir in (5.10) gesehen haben, verwandelt der Übergang zu Fourier-Koeffizienten (partielle) Ableitungen in Multiplikation mit den Variablen (mal  $i$ ). Anwendung auf  $D(\varepsilon) = P(\partial)\varepsilon$  würde also  $P(ix) \cdot \mathcal{F}(\varepsilon)(x)$  liefern und somit die Gleichung  $D(\varepsilon) = \delta$  in  $P(i_\cdot) \cdot \mathcal{F}(\varepsilon) = \mathcal{F}(\delta)$  umwandeln. Die Fundamentallösung  $\varepsilon$  sollte also durch  $\varepsilon = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\delta)/P(i_\cdot))$  gegeben sein. Die Fourier-Reihen-Entwicklung aus Kapitel (5) funktioniert aber nur für  $2\pi$ -periodische Funktionen. Wir müssen sie also auf nicht periodische Funktionen erweitern.

Sei vorerst  $f \in \mathcal{D}$  mit  $\text{Trg}(f) \subseteq [-\pi, \pi]$ . Dann läßt sich  $f$  zu einer eindeutigen glatten periodischen Funktion  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  fortsetzen, und somit gilt nach (5.10) für  $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \tilde{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(\tilde{f})(k) e^{ikx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) e^{-iky} dy e^{ikx}.$$

Ist  $f \in \mathcal{D}$  beliebig, so ist für alle  $M$  mit  $\text{Trg}(f) \subseteq M \cdot [-\pi, \pi]$  die Funktion  $f_M$  definiert durch  $f_M(x) := f(M \cdot x)$  eine glatte Funktion mit Träger in  $[-\pi, \pi]$ , und

somit ist für  $|x| \leq M\pi$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_M(x/M) = \sum_k \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_M(y) e^{-iky} dy e^{ikx/M} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} f(M \cdot y) e^{-iky} dy e^{ikx/M} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-ikz/M} dz e^{ikx/M} \quad (\text{mit } y = \frac{z}{M}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_k \frac{1}{M} \mathcal{F}f(k/M) e^{ikx/M} \end{aligned}$$

wobei

$$\mathcal{F}f(y) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ixy} dy$$

ist. Die letzte Summe ist nun aber eine Riemann-Summe von

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(y) e^{iyx} dy$$

bezüglich der Partition  $\{\frac{k}{M} : k \in \mathbb{Z}\}$ . Also gilt mit  $M \rightarrow \infty$ :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(y) e^{iyx} dy.$$

**Definition.**

Es sei  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , dann ist die FOURIER-TRANSFORMIERTE  $\mathcal{F}(f)$  wie folgt definiert:

$$\mathcal{F}f : y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx.$$

Wir wollen die Fourier-Transformation aber auch auf Distributionen anwenden. Dazu benötigen wir die Stetigkeit der linearen Abbildung  $\mathcal{F}$  zwischen zwei Funktionenräumen glatter Funktionen. Da wir auch die inverse Fourier-Transformation benötigen, sollte  $\mathcal{F}$  ein Isomorphismus sein.

Die Fourier-Transformierte einer Funktion  $f \in \mathcal{D}$  ist glatt und für ihre Ableitung gilt:

$$\partial_j(\mathcal{F}f) = \mathcal{F}(x \mapsto -ix_j f(x))$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \partial_j(\mathcal{F}f)(y) &= \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial}{\partial y_j} e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -i x_j f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= \mathcal{F}(x \mapsto -i x_j f(x))(y). \quad \square \end{aligned}$$

**Bemerkung.**

Diese Formel zeigt, daß  $\mathcal{F}$  Multiplikation mit Koordinaten in partielle Ableitungen übersetzt. Die inverse Fourier-Transformation

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i\langle y, x \rangle} dy$$

läßt sich offensichtlich auch als  $\mathcal{F}^{-1}f = \frac{1}{(2\pi)^n} S(\mathcal{F}f)$  schreiben. Also sollte  $\mathcal{F}^{-1}$  und damit  $\mathcal{F}$  partielle Ableitungen in Multiplikation mit Koordinaten übersetzen: In der Tat gilt folgende Formel:

$$\mathcal{F}(\partial_j f)(y) = i y_j \mathcal{F}f(y).$$

**Beweis.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \partial_j f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^m} f(x) (-i y_j) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \quad (\text{wegen part. Int.}) \\ &= i y_j \mathcal{F}f(y). \quad \square \end{aligned}$$

Um die Invertierbarkeit der Fourier-Transformation zu erreichen liegt es also nahe den Raum  $\mathcal{S}$  der glatten Funktionen  $f$  zu betrachten, für die beliebige Ausdrücke der Form  $x \mapsto x^\alpha \partial^\beta f(x)$  beschränkt sind. Dazu definieren wir:

**Definition.**

Mit  $\mathcal{S}$  bezeichnen wir den Raum aller SCHNELL FALLENDEN  $C^\infty$ -FUNKTIONEN, d.h. Funktionen deren sämtliche partiellen Ableitungen  $\partial^\alpha f$  die Eigenschaft besitzen, daß für jedes Polynom  $p$  der Ausdruck  $\|f\|_{p,\alpha} := \sup\{|p(z) \partial^\alpha f(z)| : z \in \mathbb{R}^n\}$  endlich ist. Bezüglich dieser Seminormen ist  $\mathcal{S}$  ein Fréchet-Raum, denn wir können uns auf die abzählbar vielen Polynome  $x \mapsto (1 + |x|^2)^k$  mit  $k \in \mathbb{N}$  beschränken.

Für  $f \in \mathcal{S}$  konvergiert das folgende uneigentliche Riemann-Integral und definiert somit die FOURIER-TRANSFORMATION von  $f$ :

$$\mathcal{F}f(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx.$$

**Lemma.**

Es ist  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  eine wohldefinierte stetig lineare Abbildung, welche für  $f \in \mathcal{S}$  folgende Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\partial_j f)(y) &= i y_j \mathcal{F}f(y) \\ \mathcal{F}(x \mapsto x_j f(x)) &= -i \partial_j (\mathcal{F}f) \end{aligned}$$

**Beweis.** Wie oben zeigt man die Gültigkeit der beiden Gleichungen. Aus ihnen folgt sofort, daß mit  $f \in \mathcal{S}$  auch  $\mathcal{F}(f)$  in  $\mathcal{S}$  liegt. Die lineare Abbildung  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  ist nach (5.8) auch stetig, denn  $\text{ev}_y \circ \mathcal{F} : f \mapsto \langle f, e^{-i\langle \cdot, y \rangle} \rangle$  ist offensichtlich stetig für alle  $y \in \mathbb{R}^n$ .  $\square$

**Lemma.**

Es gelten für  $f \in \mathcal{S}$  folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\bar{f})(y) &= S(\overline{\mathcal{F}f})(y) = \overline{\mathcal{F}f}(-y) \\ \mathcal{F}(T_a f)(y) &= e^{-i\langle a, y \rangle} \mathcal{F}f(y) \\ \mathcal{F}(x \mapsto e^{i\langle x, a \rangle} f(x))(y) &= T_a(\mathcal{F}f)(y) \\ \mathcal{F}(f_\mu)(y) &= \frac{1}{\mu^n} \mathcal{F}f\left(\frac{y}{\mu}\right) \\ \mathcal{F}(x \mapsto e^{-|x|^2/2})(y) &= (2\pi)^{n/2} e^{-|y|^2/2} \end{aligned}$$

wobei  $f_\mu(x) := f(\mu \cdot x)$  ist.

**Beweis.** Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(\bar{f})(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)} e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{i\langle x, y \rangle} dx} \\
 &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, -y \rangle} dx} \\
 &= \overline{\mathcal{F}f(-y)} \\
 \mathcal{F}(T_a f)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-a) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle z+a, y \rangle} dz \\
 &= e^{-i\langle a, y \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle z, y \rangle} dz \\
 &= e^{-i\langle a, y \rangle} \mathcal{F}f(y) \\
 \mathcal{F}(x \mapsto e^{-i\langle x, a \rangle} f(x))(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, a \rangle} e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, a+y \rangle} dx \\
 &= \mathcal{F}f(a+y) \\
 &= T_{-a}(\mathcal{F}f)(y) \\
 \mathcal{F}(f_\mu)(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\mu \cdot x) e^{-i\langle x, y \rangle} dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle \frac{x}{\mu}, y \rangle} \frac{1}{\mu^n} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} f(z) e^{-i\langle x, \frac{y}{\mu} \rangle} \frac{1}{\mu^n} dz \\
 &= \frac{1}{\mu^n} \mathcal{F}f\left(\frac{y}{\mu}\right)
 \end{aligned}$$

Für die Fourier-Transformation von  $x \mapsto e^{-|x|^2/2}$  siehe [Yos80, S.148]. □

#### Fourier-Inversions-Formel.

Die Fourier-Transformation  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  ist ein Isomorphismus mit inverser Transformation  $\mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{S} \circ \mathcal{F}$ , d.h.

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}f = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{S}(\mathcal{F}f) : x \mapsto \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{i\langle y, x \rangle} dy.}$$

**Beweis.** Wegen Fubini gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot g(z) e^{i\langle x, z \rangle} dz &= \int_{\mathbb{R}^n} g(z) e^{i\langle x, z \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, z \rangle} f(y) dy dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, z \rangle} g(z) f(y) dz dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(y-x) \cdot f(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(z) \cdot f(x+z) dz. \end{aligned}$$

Ersetzen von  $g$  durch  $x \mapsto g(\varepsilon x)$  mit Fourier-Transformierten  $y \mapsto \frac{1}{\varepsilon^n} \mathcal{F}g(\frac{y}{\varepsilon})$  liefert

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(z) \cdot g(\varepsilon z) e^{i\langle x, z \rangle} dz = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(z) \cdot f(x + \varepsilon z) dz$$

und mit  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(z) e^{i\langle x, z \rangle} dz = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(z) dz.$$

Wählen wir nun  $g(x) := e^{-|x|^2/2}$  und verwenden wir  $\mathcal{F}g(y) = (2\pi)^{n/2} e^{-|y|^2/2}$  und  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/2} dx = (2\pi)^{n/2}$  so erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, z \rangle} \mathcal{F}f(z) dz = (2\pi)^n f(x). \quad \square$$

### Selbstadjungiertheit.

Die Fourier-Transformation ist formal selbstadjungiert, d.h.

$$\boxed{\langle \mathcal{F}f, g \rangle = \langle f, \mathcal{F}g \rangle.}$$

**Beweis.** Dies sieht man sofort durch Einsetzen von  $x = 0$  in der Formel

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f(z) g(z) e^{i\langle x, z \rangle} dz = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(y) f(x+y) dy$$

im obigen Beweis. □

### Parseval'sche Formel.

$$\boxed{\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g \rangle.}$$

**Beweis.** Das folgt wegen

$$\mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g}) = S(\overline{\mathcal{F}\mathcal{F}g}) = S(\overline{(2\pi)^n Sg}) = (2\pi)^n \bar{g}$$

aus:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}f \cdot \overline{\mathcal{F}g} = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}g}) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \bar{g}. \quad \square$$

### Multiplikativität.

Bezüglich Faltung und Produkt haben wir:

$$\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}g$$

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}f \star \mathcal{F}g.$$

**Beweis.** Die Formel für die Faltung folgt mittels Fubini wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f \star g)(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} (f \star g)(x) dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y, z \rangle} e^{-i\langle y, z \rangle} f(y) g(x - y) dx dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, z \rangle} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x-y, z \rangle} g(x - y) dx \right) f(y) dy \\
 &= \mathcal{F}g(z) \cdot \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle y, z \rangle} f(y) dy \\
 &= \mathcal{F}g(z) \cdot \mathcal{F}f(z)
 \end{aligned}$$

Die Formel für die Transformierte eines Produkts erhalten wir aus dem Satz von Fubini und der Fourier-Inversions-Formel:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f \cdot g)(z) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} f(x) g(x) dx \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} g(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, y \rangle} \mathcal{F}f(y) dy dx \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z-y \rangle} g(x) \mathcal{F}f(y) dx dy \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z-y \rangle} g(x) dx \right) \mathcal{F}f(y) dy \\
 &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}g(z - y) \mathcal{F}f(y) dy \\
 &= (2\pi)^{-n} (\mathcal{F}g \star \mathcal{F}f)(z). \quad \square
 \end{aligned}$$

## 8.2 Fourier-Transformation von Distributionen

### Definition.

Unter dem Raum der TEMPERIERTEN DISTRIBUTIONEN verstehen wir den Dualraum  $\mathcal{S}'$  des in (8.1) definierten Fréchet-Raums  $\mathcal{S}$ .

Da  $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$  jeweils dicht ist, induziert jede Distribution mit kompakten Träger eine eindeutige temperierte Distribution, und jede temperierte Distribution definiert eine eindeutige Distribution in  $\mathcal{D}'$ . Um die Dichtheit von  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$  einzusehen, wähle eine Funktion  $h \in \mathcal{D}$ , die lokal um 0 identisch 1 ist und beachte, daß dann  $f_\varepsilon$  definiert durch  $x \mapsto f(x) \cdot h(\varepsilon x)$  in  $\mathcal{S}$  gegen  $f$  konvergiert. Man beachte, daß jede lokale  $L^1$ -Funktion  $f$ , welche nicht schneller wächst als ein bestimmtes Polynom  $p$ , eine temperierte Distribution  $\varphi_f : g \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \overline{f(x)} dx$  definiert. Das Integral ist absolut-konvergent, da

$$|g(x) f(x)| \leq \left| p(x) (1 + |x|^2)^{n+1} g(x) \right| \cdot \frac{1}{(1 + |x|^2)^{n+1}} \cdot \left| \frac{1}{p(x)} f(x) \right|.$$

Wegen der formalen Selbstadjungiertheit von  $\mathcal{F}$  und der Fourier-Inversions-Formel, ist die durch

$$\mathcal{F}(\varphi) : f \mapsto \varphi(\mathcal{F}f)$$

definierte Fourier-Transformation ein Isomorphismus von  $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}'$ .

**Proposition.**

Für die Fourier-Transformierte von temperierten Distributionen gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi \star f) &= \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(f) \text{ für } \varphi \in \mathcal{S}', f \in \mathcal{S} \\ \mathcal{F}(\varphi \star \psi) &= \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\psi) \text{ für } \varphi \in \mathcal{S}', \psi \in \mathcal{E}'\end{aligned}$$

Weiters gilt **Plancherel's Satz**:

Es sei  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  aufgefaßt als Distribution in  $\mathcal{S}'$ . Dann ist  $\mathcal{F}(f) \in L^2$  und es gilt die Parseval'sche Formel  $\|\mathcal{F}(f)\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|f\|_2$ .

Falls  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $\mathcal{F}(f)$  stetig.

**Beweis.** Es seien  $f, g \in \mathcal{S}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{F}f \cdot g) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \mathcal{F}(\mathcal{F}f) \star \mathcal{F}g \\ &= \mathcal{F}f \star \mathcal{F}g\end{aligned}$$

und für  $\varphi \in \mathcal{S}'$  somit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi \star f)(g) &= (\varphi \star f)(\mathcal{F}g) \\ &= (\varphi \star f \star S(\mathcal{F}g))(0) \\ &= \varphi(Sf \star \mathcal{F}g) \\ &= \varphi(\mathcal{F}(\mathcal{F}f \cdot g)) \\ &= \mathcal{F}\varphi(\mathcal{F}f \cdot g) \\ &= (\mathcal{F}f \cdot \mathcal{F}\varphi)(g).\end{aligned}$$

Nun sei  $\varphi \in \mathcal{S}'$ ,  $\psi \in \mathcal{E}'$ ,  $f_\varepsilon$  eine approximierende Einheit, und  $\psi_\varepsilon := \psi \star f_\varepsilon$ . Dann gilt  $\varphi \star \psi_\varepsilon = \varphi \star \psi \star f_\varepsilon$  und somit  $\mathcal{F}(\varphi \star \psi_\varepsilon) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\psi_\varepsilon) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\psi) \cdot \mathcal{F}(f_\varepsilon)$ . Und für  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir  $\mathcal{F}(\varphi \star \psi) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(\psi)$ .

Es sei  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$  aufgefaßt als Distribution in  $\mathcal{S}'$ . Dann ist  $\mathcal{F}(\varphi) \in L^2$  und es gilt Parseval's Formel  $\|\mathcal{F}(\varphi)\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\varphi\|_2$ .

Für alle  $f \in \mathcal{S}$  gilt nach obiger Formel von Parseval:

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}(\varphi)(f)| &= |\varphi(\mathcal{F}f)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \mathcal{F}f \right| \\ &\leq \|\varphi\|_2 \|\mathcal{F}(f)\|_2 = (2\pi)^{n/2} \|\varphi\|_2 \|f\|_2\end{aligned}$$

Folglich ist nach den Riesz'schen Darstellungssatz  $\mathcal{F}(\varphi) \in L^2$  und  $\|\mathcal{F}(\varphi)\| \leq (2\pi)^{n/2} \|\varphi\|_2$ . Auf ähnliche Weise gilt:

$$\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\|_2 \leq (2\pi)^{-n/2} \|\varphi\|_2$$

und somit

$$\|\varphi\|_2 = \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi\|_2 \leq (2\pi)^{-n/2} \|\mathcal{F}\varphi\|_2 \leq \|\varphi\|_2$$

also gilt Gleichheit.

Falls  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $\mathcal{F}(f)$  stetig. Da das Integral  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z \rangle} f(x) dx$  absolutkonvergiert ist  $\mathcal{F}(z)$  wohldefiniert und wir erhalten wegen  $|e^{-i\vartheta} - 1| = 2|\sin(\vartheta/2)|$ :

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(z) - \mathcal{F}f(z_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x, z_0 \rangle} \left( e^{-i\langle x, z - z_0 \rangle} - 1 \right) f(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{-i\langle x, z - z_0 \rangle} - 1 \right| \cdot |f(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sin \frac{\langle x, z - z_0 \rangle}{2} \right| \cdot |f(x)| dx \\ &\leq 2 \int_{|x| \leq A} \left| \sin \frac{\langle x, z - z_0 \rangle}{2} \right| \cdot |f(x)| dx \\ &\quad + 2 \int_{|x| > A} |f(x)| dx \rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0. \quad \square \end{aligned}$$

Es ist nun formal sehr einfach eine Fundamentallösung zu konstruieren. Wendet man nämlich die Fourier-Transformation auf  $P(\partial)\varepsilon = \delta$  mit  $\partial = -i\frac{\partial}{\partial x}$  an, so erhält man  $P \cdot \mathcal{F}(\varepsilon) = 1$ , d.h.  $\mathcal{F}(\varepsilon) = \frac{1}{P}$ , also sollte  $\varepsilon$  die Inverse Fourier-Transformierte von  $\frac{1}{P}$  sein. Das macht jedoch Schwierigkeiten wegen der reellen Nullstellen des Polynoms  $P$ . Die Schwierigkeit kann jedoch durch geeignete Wahl des Integrationsbereichs behoben werden, siehe [Hör58] oder [Tre71], wir schlagen allerdings einen anderen Weg ein.

### 8.3 Satz über die Fourier-Laplace Transformierte.

Für jede Distribution  $\varphi \in \mathcal{E}'$  mit kompakten Träger erweitert sich die Fourier-Transformierte  $\mathcal{F}(\varphi)$  zu einer ganzen Funktion am  $\mathbb{C}^n$  vermöge  $\mathcal{F}(\varphi)(z) := \varphi(e^{-i\langle -, z \rangle})$ .

**Beweis.** Der Ausdruck  $\varphi(e^{-i\langle -, z \rangle})$  ist wohldefiniert, denn  $\varphi \in \mathcal{E}'$  und  $x \mapsto e^{-i\langle x, z \rangle}$  ist in  $\mathcal{E}$ .

Bleibt zu zeigen, daß er auf reellen Argumenten mit der Fourier-Transformierten übereinstimmt: Sei dazu  $f_\varepsilon$  eine approximierende Einheit, d.h.  $\varphi \star f_\varepsilon \rightarrow \varphi$  in  $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ . Da  $\mathcal{F}$  stetig ist, gilt  $\mathcal{F}(\varphi \star f_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{F}(\varphi)$  und andererseits:

$$\mathcal{F}(\varphi \star f_\varepsilon)(z) = (\varphi \star f_\varepsilon)(e^{-i\langle -, z \rangle}) \rightarrow \varphi(e^{-i\langle -, z \rangle})$$

gleichmäßig für  $e^{-i\langle -, z \rangle}$  aus jeder beschränkten Menge in  $\mathcal{E}$ . Wie man leicht sieht ist die Familie  $e^{-i\langle -, z \rangle}$  beschränkt, wenn  $z$  in einer beschränkten Menge in  $\mathbb{C}^n$  läuft. Folglich konvergieren die zugehörigen Distributionen  $\mathcal{F}(\varphi \star f_\varepsilon)$  gegen die durch  $z \mapsto \varphi(e^{-i\langle -, z \rangle})$  gegebene Distribution auf  $\mathcal{D}$ , i.e.  $\mathcal{F}(\varphi)$  ist die dadurch gegebene Distribution in  $\mathcal{D}'$ .

Da die Abbildung  $z \mapsto e^{-i\langle -, z \rangle}$  eine holomorphe Abbildung von  $\mathbb{C}^n \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$  ist und  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige lineare Abbildung ist, ist auch  $z \mapsto \varphi(e^{-i\langle -, z \rangle})$  holomorph. Man kann das auch wie folgt direkt zeigen:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}\varphi(y + t e_j) - \mathcal{F}\varphi(y)}{t} &= \frac{1}{t} \left( \varphi(e^{-i\langle -, y + t e_j \rangle}) - \varphi(e^{-i\langle -, y \rangle}) \right) \\ &= \varphi \left( \frac{1}{t} \left( e^{-i\langle -, y + t e_j \rangle} - e^{-i\langle -, y \rangle} \right) \right) \\ &= \varphi \left( x \mapsto e^{-i\langle x, y \rangle} \frac{e^{-itx_j} - 1}{t} \right) \\ &\rightarrow \varphi(x \mapsto -i x_j e^{-i\langle x, y \rangle}). \quad \square \end{aligned}$$

### Paley-Wiener-Schwartz Theorem.

Das Bild  $\mathcal{F}(\mathcal{E}')$  aller Distributionen mit kompaktem Träger unter der Fourier-Laplace-Transformation besteht genau aus jenen ganzen Funktionen  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

für welche folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\exists A \exists N \in \mathbb{N} \exists C \forall z \in \mathbb{C}^n : |F(z)| \leq C(1 + |z|)^N e^{A|\Im mz|}.$$

Das Bild  $\mathcal{F}(\mathcal{D})$  der glatten Funktionen mit kompaktem Träger unter der Fourier-Laplace-Transformation besteht genau aus jenen ganzen Funktionen  $F : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ , für welche folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\exists A \forall N \in \mathbb{N} \exists C \forall z \in \mathbb{C}^n : |F(z)| \leq C(1 + |z|)^{-N} e^{A|\Im mz|}.$$

**Beweis.** Es sei  $F(z) = \varphi(e^{-i\langle \cdot, z \rangle})$  die Fourier-Laplace-Transformierte einer Distribution  $\varphi \in \mathcal{E}'$ . Dann existiert eine Konstante  $C$ , ein  $N \in \mathbb{N}$  und eine  $A > 0$  mit

$$|\varphi(f)| \leq C \cdot \sup_{|\alpha| \leq N, |x| \leq A} |\partial^\alpha f(x)| \text{ für alle } f \in \mathcal{E}.$$

Es sei  $\exp_z$  die Funktion  $\exp_z(x) := e^{-i\langle x, z \rangle}$ . So gilt  $|\partial^\alpha \exp_z(x)| = |(iz)^\alpha \cdot \exp_z| \leq |z^\alpha| e^{\langle x, \Im mz \rangle}$  und somit

$$\begin{aligned} |F(z)| = ph(\exp_z) &\leq C \cdot \sup_{|\alpha| \leq N, |x| \leq A} |\partial^\alpha \exp_z(x)| \leq C \cdot \sup_{|\alpha| \leq N, |x| \leq A} |z|^{|\alpha|} e^{\langle x, \Im mz \rangle} \\ &\leq C \cdot (1 + |z|)^N \cdot e^{A|\Im mz|}. \end{aligned}$$

Dies zeigt die eine Richtung.

Sei nun  $F$  die Fourier-Laplace-Transformierte einer Funktion  $f \in \mathcal{D}$  und sei  $A$  so, daß der Träger von  $f$  im  $A$ -Ball enthalten ist. Aus

$$(iz)^\alpha \mathcal{F}f(z) = \mathcal{F}(\partial^\alpha f)(z) = \int_A e^{-i\langle x, z \rangle} \partial^\alpha f(x) dx$$

erhalten wir für jedes  $N \in \mathbb{N}$  ein  $C > 0$  mit

$$(1 + |z|^2)^{N/2} |\mathcal{F}f(z)| \leq C \cdot e^{A|\Im mz|}$$

und wegen  $0 \leq \frac{\sqrt{1+|z|^2}}{1+|z|} \rightarrow 1$  und somit  $0 < c_0 \leq \frac{(1+|z|^2)^{N/2}}{(1+|z|)^N} \leq C_0$  für gewisse Konstanten  $c_0$  und  $C_0$  gilt die gewünschte Bedingung.

Nehmen wir nun umgekehrt an, daß die zweite Bedingung gilt und definieren wir

$$f(x) := \mathcal{F}^{-1}F(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(z) e^{i\langle x, z \rangle} dz.$$

Nach Voraussetzung konvergiert das Integral absolut und ebenso gilt für die Ableitungen

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(z) z^\alpha e^{i\langle x, z \rangle} dz.$$

Also ist  $f \in \mathcal{E}$ .

Da nach Voraussetzung  $F$  eine ganze Funktion ist, gilt

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} F(u + iv) e^{i\langle x, u+iv \rangle} du.$$

Setzen wir  $N = n + 1$  so erhalten wir

$$|f(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} C e^{-\langle x, v \rangle + A|v|} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{du}{(1 + |u|)^{n+1}}$$

also  $|f(x)| \leq C' e^{A|v| - \langle x, v \rangle}$  und wenn wir  $v = tx$  setzten:

$$|f(x)| \leq C' e^{-t(|x|^2 - A|x|)}.$$

Für  $t \rightarrow \infty$  folgt, daß  $f(x) = 0$  für alle  $|x| \geq A$ . Also ist  $f \in \mathcal{D}$ .

Sei schließlich  $F$  eine ganze Funktion, die die erste Bedingung erfüllt. Dann ist  $F$  langsam wachsend bei  $\infty$ , definiert also eine temperierte Distribution mit Inverser Fourier-Transformierten  $\varphi \in \mathcal{S}'$ . Es bleibt zu zeigen, daß  $\varphi \in \mathcal{E}'$ . Sei dazu  $f_\varepsilon$  eine approximierende Einheit. Es gilt  $\mathcal{F}(\varphi \star f_\varepsilon) = \mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(f_\varepsilon)$ , und wegen der Ungleichung für  $\mathcal{F}(\varphi) = F$  und der entsprechenden für  $\mathcal{F}(f_\varepsilon)$  erhalten wir, daß  $\mathcal{F}(\varphi) \cdot \mathcal{F}(f_\varepsilon)$  eine ganze Funktion ist, die eine Ungleichung vom zweiten Typ mit einer Konstanten  $A + \varepsilon$  anstelle von  $A$  erfüllt ist. Also ist  $\varphi \star f_\varepsilon \in \mathcal{D}$  und hat Träger in der Kugel vom Radius  $A + \varepsilon$ . Folglich hat auch der Grenzwert  $\varphi$  kompakten Träger.  $\square$

#### 8.4 Malgrange-Ehrenpreis-Theorem.

Es sei  $P(\partial)$  ein linearer partieller Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten am  $\mathbb{R}^n$ . Dann existiert eine Fundamentallösung  $\varepsilon \in \mathcal{D}'$ .

**Beweis.** Es sei  $D = P(\frac{1}{i}\partial)$  ein partieller linearer Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, d. h.  $P$  ist ein Polynom  $P(z) = \sum_{|k| \leq m} a_k z^k$  in  $(z_1, \dots, z_n) = z$  mit komplexen Koeffizienten  $a_k$ . Es sei  $P^t := \sum_{|k| \leq m} (-1)^{|k|} a_k z^k$ , dann gilt

$$\left(P\left(\frac{1}{i}\partial\right)\varphi\right)(f) = \varphi\left(P^t\left(\frac{1}{i}\partial\right)f\right) \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}', f \in \mathcal{D}.$$

Wir bezeichnen folglich mit  $D^t := P^t(\frac{1}{i}\partial)$ . Falls  $\varepsilon$  eine Fundamentallösung von  $D$  ist, so erhalten wir  $f(0) = \delta(f) = (P(\frac{1}{i}\partial)\varepsilon)(f) = \varepsilon(P^t(\frac{1}{i}\partial)f) = \varepsilon(D^t f)$  für alle  $f \in \mathcal{D}$ .

Der Operator  $D^t : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  ist injektiv, denn falls  $D^t f = 0$  ist, so erhalten wir mit (8.1) durch Anwenden der Fourier-Transformation  $0 = \mathcal{F}(D^t f)(z) = P^t(z) \cdot \mathcal{F}f(z)$  für alle  $z \in \mathbb{R}^n$ . Da  $P^t \neq 0$  ein Polynom ist, folgt  $\mathcal{F}f = 0$  und somit  $f = 0$  nach der Inversionsformel (8.1).

Jede Fundamentallösung  $\varepsilon$  ist also auf den Teilraum  $D^t(\mathcal{D})$  durch  $g = D^t(f) \mapsto f(0)$  gegeben.

Wenn wir umgekehrt zeigen können, daß diese Formel ein stetig lineares Funktional auf  $D^t(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$  definiert, so können wir dieses nach dem Satz von Hahn-Banach zu einem stetig linearen Funktional  $\varepsilon \in \mathcal{D}'$  erweitern, und dieses ist dann eine Fundamentallösung, denn  $D(\varepsilon)(f) = \varepsilon(D^t f) = f(0) = \delta(f)$ .

Indem wir die Koordinaten wechseln, dürfen wir annehmen, daß  $P^t(x_1, \dots, x_n) = x_n^m + \sum_{0 \leq k < m} P_k(x_1, \dots, x_{n-1}) x_n^k$  ist. Zur Abkürzung setzen wir  $x = (x', t)$ . Nach dem Paley-Wiener Theorem in (8.3) ist  $\mathcal{F}f$  eine ganze Funktion in  $\mathcal{S}$  für jedes  $f \in \mathcal{D}$ . Aus der Fourier'schen Inversionsformel (8.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} (2\pi)^n |f(0)| &= (2\pi)^n \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F}f(0) \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(x)| dx \\ &\leq M \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{1 + |x_1|^{n+1} + \dots + |x_{n-1}|^{n+1} + |x_n|^{n+1}} \end{aligned}$$

wobei

$$M := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| (1 + |x_1|^{n+1} + \dots + |x_{n-1}|^{n+1} + |x_n|^{n+1}) \mathcal{F}f(x) \right|.$$

Um  $M$  abzuschätzen benötigen wir folgendes

**8.5 Sublemma.**

Ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Funktion und  $p$  ein Polynom mit führenden Koeffizienten  $a$ . Dann gilt:

$$|a f(z)| \leq \sup \left\{ |f(w) p(w)| : |w - z| \leq 1 \right\}.$$

**Beweis.** Es sei  $m$  die Ordnung von  $p$ , und  $q(z) := z^m \bar{p}(\frac{1}{z})$ , wobei  $\bar{p}$  das Polynom mit den konjugierten Koeffizienten von  $p$  bezeichnet. Dann gilt  $q(0) = \bar{a}$  und  $|p(e^{it})| = |q(e^{it})|$ . Aus der Cauchy'schen Integralformel folgt nun

$$f(0) q(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z) q(z)}{z} dz$$

Wir wenden obiges auf  $w \mapsto f(z+w)$  und  $w \mapsto p(z+w)$  an und erhalten

$$|a f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + e^{it}) p(z + e^{it})| dt \leq \sup \{ |f(w) p(w)| : |w - z| = 1 \}. \quad \square$$

Nun wenden wir (8.5) im Punkte  $t \in \mathbb{R}$  auf das Polynom  $P^t(x', \cdot)$  und die holomorphen Funktionen  $\mathcal{F}f(x', \cdot)$ ,  $x_j^{n+1} \mathcal{F}f(x', \cdot)$  für  $1 \leq j < n$  sowie  $z \mapsto z^{n+1} \mathcal{F}f(x', z)$  an und erhalten folgende Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}f(x', t)| &\leq \sup_{|w-t| \leq 1} |P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| \\ |x_j^{n+1} \mathcal{F}f(x', t)| &\leq \sup_{|w-t| \leq 1} |x_j^{n+1} P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| \\ |t^{n+1} \mathcal{F}f(x', t)| &\leq \sup_{|w-t| \leq 1} |t^{n+1} P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)|. \end{aligned}$$

Aus

$$P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w) = \mathcal{F}(P^t(\frac{1}{i} \partial) \cdot f) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\langle x', y' \rangle + w s)} D^t(f)(y', s) d(y', s)$$

folgt weiters, daß

$$\sup_{|w-t| \leq 1} |P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| \leq \sup_{|u| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{|s u|} |D^t f(y', s)| d(y', s).$$

Und ähnlich folgen aus

$$\begin{aligned} |x_j^{n+1} P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\langle x', y' \rangle + w s)} \partial_j^{n+1} D^t(f)(y', s) d(y', s) \\ |w^{n+1} P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\langle x', y' \rangle + w s)} \partial_n^{n+1} D^t(f)(y', s) d(y', s) \end{aligned}$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sup_{|w-z| \leq 1} |x_j^{n+1} P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| &\leq \sup_{|u| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{|s u|} |\partial_j^{n+1} D^t(f)(y', s)| d(y', s). \\ \sup_{|w-z| \leq 1} |w^{n+1} P^t(x', w) \cdot \mathcal{F}f(x', w)| &\leq \sup_{|u| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{|s u|} |\partial_n^{n+1} D^t(f)(y', s)| d(y', s). \end{aligned}$$

So erhalten wir schließlich:

$$M \leq \sup_{|u| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{|s u|} \left( |D^t f| + \sum_{0 \leq j < n} |\partial_j^{n+1} D^t f| + |\partial_n^{n+1} D^t f| \right) (y) dy.$$

Es sei  $D^t f_j \rightarrow 0$  eine beschränkte Folge in  $\mathcal{D}$ , d.h. der Träger der  $D^t f_j$  ist enthalten in einer fixen kompakten Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  und alle (partiellen) Ableitungen von  $D^t f_j$  sind gleichmäßig beschränkt. Also ist nach obigen Ungleichungen auch  $M$

beschränkt und damit ebenso  $f_j(0)$ . D.h. das Funktional  $D^t f \mapsto f(0)$  ist stetig für die von  $\mathcal{D}$  induzierte Topologie.  $\square$

## Literaturverzeichnis

- [Alt85] Hans Wilhelm Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1985. Hochschultext. 120
- [Ber74] Sterling K. Berberian. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, volume 15. Springer, 1974. Graduate Texts in Mathematics.
- [BN73] José Barros-Neto. *An Introduction to the Theory of Distributions*. Marcel Dekker Inc., New York, 1973. Pure and Appl. Mathematics 14. 63, 65
- [Col85] Jean François Colombeau. *New Generalized Funktionen and Multiplication of Distributions*. North Holland Math. Stud. vol. 113, 1985. 70
- [Con78] John B. Conway. *Functions of One Complex Variable*. Springer, 1978.
- [Con85] John B. Conway. *A Course in Functional Analysis*, volume 96. Springer, 1985. Graduate Texts in Maths. 88, 119
- [CR78] Johann Cigler and Hans-Christian Reichel. *Topologie, eine Grundvorlesung*. Bibl. Inst. Mannheim, 1978. B.I.-Hochschultaschenbücher 121. 74, 103
- [Ehr54] L. Ehrenpreis. Solutions of some problems of division I. *Am.J.Math.* 76, pages 883–903, 1954. 132
- [Heu75] Harro Heuser. *Funktionalanalysis*. Teubner, 1975. Mathematische Leitfäden.
- [Heu80] Harro Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. Teubner, 1980. Mathematische Leitfäden. 119
- [Hör58] Lars Hörmander. On the division of distributions by polynomials. *Ark. Mat.* 3, pages 555–568, 1958. 132, 139
- [HR63] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*. Springer, 1963. Grundlehren.
- [HS71] Friedrich Hirzebruch and Winfried Scharlau. *Einführung in die Funktionalanalysis*. Bibliograph. Institut, 1971. Hochschultaschenbücher 296.
- [Jar81] Hans Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981. 39, 47, 53, 74, 76, 77, 79, 120
- [Kat50] Tosio Kato. Fundamental Properties of Hamilton Operators of Schrödinger Type. *Trans. Am. Math. Soc.*, 70:195–211, 1950.
- [Kri96] Andreas Kriegl. *Differentialgeometrie*. Skriptum, 1996. 51
- [Kri98] Andreas Kriegl. *Analysis 4*. Skriptum, 1998. 61
- [Lar73] Ronald Larsen. *Functional Analysis*. Marcel Dekker, 1973. 98
- [Lus15] Lusin. The Integral and Trigonometric Series. , 1915. 88
- [Mal55] Bernard Malgrange. Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées et des équations de convolution. *Ann. Inst. Fourier* 6, pages 271–355, 1955. 132
- [Maz33] S. Mazur. Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen. *Stud. Math.* 10, pages 70–84, 1933. 118
- [Tre71] François Trèves. *Linear Partial Differential Equations with Constant Coefficients*. Gordon and Breach, New York, 1971. 139
- [V+72] N. Ya. Vilenkin et al. *Functional Analysis*. Walters Noordhoff, 1972.
- [Yos80] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis*, volume 123. Springer, 1980. Grundlehren. 63, 135
- [Zem77] J. Zemánek. A simple proof of the Weierstrass-stone theorem. *Comment. Math.* 20, pages 495–497, 1977. 29

## Index

- $B_E$  ... Einheitsball im Banach-Raum  $E$ , 106
- $E'$  ... Raum aller beschränkten linearen Funktionale, 27
- $E^*$  ... Teilraum aller stetigen linearen Funktionale, 27
- $G_\delta$ -Menge, 71
- $L^+$ -Funktion, 59
- $\aleph_0$ -tönnelierter SNR, 76
- $\chi_A$  ... charakteristische Funktion, 57
- $\mathbb{R}^+$ -Homogenität, 9
- $\mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ , 52, 53
- $\mathcal{E} := C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ , 52
- $\mathcal{S}$  ... Raum der schnell fallenden Funktionen, 134
- $\sigma$ -Algebra, 63
- $\sigma$ -endlicher Maßraum, 65
- $n$ -mal stetig differenzierbare Abbildung, 28
- $p$ -Norm, 11
- $p_A$  ... Minkowski-Funktional, 14
- $p_{<c} := \{x : p(x) < c\}$ , 13
- $p_{\leq c} := \{x : p(x) \leq c\}$ , 13
- abgeschlossene  $p$ -Ball um 0 mit Radius  $c$ , 13
- abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums, 26
- Ableitung einer Abbildung, 28
- absolut-konvergente Reihe, 25
- absolut-konvexe Menge, 14
- absolut-stetige Funktion, 83
- absorbierende Menge, 13
- abzählbar kompakter topologischer Raum, 103
- abzählbar seminormierter Raum, 18
- adjungierter Operator  $f^*$ , 27
- affine Funktion, 31
- Annihilator einer Teilmenge, 123
- Annihilator einer Teilmenge des Dualraums, 123
- approximierende Einheit, 68
- Baire'schen  $\sigma$ -Algebra, 71
- Baire'scher Raum, 73
- Baire-Funktion, 71
- Baire-Maß, 71
- Baire-meßbare Funktion, 71
- Baire-Menge, 71
- balanzierte Menge, 14
- Banach-Algebra, 27
- Banach-Raum, 25
- Banach-Scheibe, 127
- barreled, 75
- barrelled, 75
- beschränkte Abbildung, 22
- beschränkte Teilmenge, 21
- beschränkte Variation, 13
- Borel'sche  $\sigma$ -Algebra, 71
- Borel'sche  $\sigma$ -Algebra im erweiterten Sinn, 71
- Borel-Maß, 71
- bornologischer SNR, 23
- Cauchy-Problem, 49
- Cauchy'sche Integralformel, 121
- Cauchy-Folge, 5
- Cauchy-Netz, 25
- charakteristische Funktion, 57
- die von Seminormen erzeugte Topologie, 16
- differenzierbare Abbildung, 28
- Dirac'sche Delta-Distribution, 51
- direkte Produkt von Distributionen, 69
- direkte Summe von SNR'en, 46
- Dirichlet-Kern, 82
- Dirichlet-Problem, 49
- Distribution, 51, 53
- Dreiecksungleichung:, 5
- duale Paarung, 124
- Eigenvektor, 110
- Eigenwert, 110
- elementare Funktion, 63
- elliptischer PDO, 49
- extremal-Punkt, 130
- extremale Teilmenge, 130
- Faß, 75
- Faltung von Distributionen, 67
- Faltung von steigen Funktionen, 51
- fast überall gültig, 58
- finale Struktur, 40
- Folgen-abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raums, 26
- Folgen-vollständiger SNR, 25
- formal adjungierter Operator, 54
- Fourier-Entwicklung, 100
- Fourier-Koeffizienten, 81
- Fourier-Reihe, 81
- Fourier-Transformation, 134
- Fourier-Transformierte einer Funktion, 133
- Fréchet-Raum, 25
- gefräßige Menge, 128
- gerichtete Menge, 20
- gespiegelte Funktion, 51
- gewöhnliche Differentialgleichung, 6
- glatte Abbildung, 28

- gleichmäßige Konvergenz, 125
- Graph einer Abbildung, 77
- Green-Funktion, 33
- Green-Funktion  $\varepsilon$ , 51
- Green-Operator, 49
- Grundkörper, 9
  
- Halbraum, 118
- harmonische Funktion, 49
- Heaviside-Distribution, 54
- Hermite'sche Form, 96
- homogene lineare Differentialgleichung 1.ter Ordnung, 30
- homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, 30
- homogene PDG, 49
- hyperbolischer PDO, 49
  
- infra-tonnelierter SNR, 129
- inhomogene lineare Differentialgleichung 1.ter Ordnung, 31
- inhomogene PDG, 49
- initiale Struktur, 36
- integrale Funktion, 64
- Integral einer Treppenfunktion, 57
- Integral-Kern, 50
- Integral-Kern eines Integral-Operators, 34
- Integral-Operator, 34
- Integralkern, 32
- Integraloperator, 32
  
- Keim einer Funktion, 122
- Kern, 50
- kompakter Operator, 106
- komplexer Hilbert-Raum, 96
- Komplexifizierung eines VR's, 93
- konjugiert-lineare Form, 96
- konjugiert-symmetrische Form, 96
- konvergente überabzählbare Reihen, 100
- konvergente Folge, 5, 19
- konvexe Funktion, 9
- konvexe Menge, 13
- Koprodukt von SNR'en, 46
  
- Laplace-Gleichung, 49
- Laplace-Operator, 49
- Lebesgue-integrierbare Funktion, 59
- lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten, 32
- lineare PDG, 49
- lineare Randwertaufgabe 2-ter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten, 32
- Lipschitz-Abbildung, 4, 24
- lokal kompakter topologischer Raum, 44
- lokal konvexer Vektorraum, 17
  
- Maß, 63
- maßkonvergent, 60
- Mackey-Topologie, 127
- Mackey-konvergente Folge, 23
- magere Teilmenge, 72
- meßbare Funktion, 59, 63
- meßbare Menge, 63
- Meßraum, 63
- Metrik, 5
  
- metrischer Raum, 5
- Minkowski-Funktional, 14
- mit dualer Paarung verträgliche Struktur, 124
- Montel-Raum, 106
- Moore-Smith-Folge, 20
  
- Netz, 20
- nirgends dichte Teilmenge, 72
- Norm, 10
- normierbarer SNR, 21
- normierte Algebra, 25
- normierter Raum, 10
- Nullmenge, 58
  
- offen in einen normierten Raum, 16
- offene  $p$ -Ball um 0 mit Radius  $c$ , 13
- offene Mengen einer Topologie, 16
- offene Teilmenge bezüglich einer Familie von Seminormen, 16
- Operatornorm, 24
- Orthonormalbasis, 100
- Orthonormalprojektion, 99
  
- parabolischer PDO, 49
- Parallelogrammformel, 97
- Parseval'sche Gleichung, 100
- partielle Ableitung einer Distribution, 54
- partielle Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, 48
- partieller Differential-Operator, 49
- PDG ... partielle Differentialgleichung, 48
- PDG mit konstanten Koeffizienten, 49
- PDO ... partieller Differential Operator, 49
- Polare einer Menge, 124
- positiv homogen, 10
- positiv-definite Bilinearform, 92
- Positivität, 5
- präkompakte Teilmenge, 44
- präkompakter Operator, 106
- Produkt von Distributionen, 69
- Produkt von SNR'en, 39
  
- quasi-tonnelierter SNR, 129
- Quotienten-Raum, 41
  
- Raum aller beschränkten linearen Funktionen, 27
- reeller Hilbert-Raum, 92
- reflexiver SNR, 100
- reguläres Borel-Maß, 120
- reguläres Maß, 120
- relativ-kompakt Teilmenge, 104
- Riemann-Stieltjes-integrierbar, 119
- Riemann-Stieltjes-Summe, 119
  
- schnell fallende  $C^\infty$ -Funktionen, 134
- schwache Topologie, 124
- schwingende Saite, 81
- selbstadjungierter Operator, 109
- semi-Montel-Raum, 106
- Seminorm, 10
- Seminormen des so erhalten seminormierten Raums, 18
- seminormierter Raum, 18

semireflexiver SNR, 100  
 separabler SNR, 101  
 separierter seminormierter Raum, 20  
 sesqui-lineare Form, 96  
 skalar-beschränkte Menge, 77  
 SN ... Seminorm, 10  
 SNR ... seminormierter Raum, 21  
 Sobolev-Raum, 63  
 stetig differenzierbare Abbildung, 28  
 stetige Abbildung, 17  
 strikt induktiver Limes, 52  
 Stufen eines induktiven Limes, 52  
 Subadditivität, 9  
 Subbasis einer Topologie, 16  
 Subbasis eines seminormierten Raumes, 18  
 sublineare Funktion, 9  
 Supremums-Norm, 10  
 Symmetrie, 10  
 Symmetrie:, 5  
  
 Teilraum aller stetigen linearen Funktionale,  
     27  
 temperierten Distribution, 137  
 Tonne, 75  
 tonnelierter SNR, 75  
 Topologie, 16  
 topologischer Raum, 16  
 topologischer Vektorraum, 17  
 totale Variation einer Funktion, 12  
 Träger einer Distribution, 66  
 Träger einer Funktion, 50  
 Translation, 67  
 Translations-invariante Metrik, 9  
 Treppenfunktion, 57  
 trigonometrisches Polynom, 30  
  
 ultra-bornologischer SNR, 130  
 Umgebung eines Punktes, 16  
 Umgebungs(sub)basis, 16  
 umgekehrte Dreiecksungleichung, 13  
 universelles Netz, 103  
  
 Variation der Konstanten, 32  
 Variationsnorm, 12  
 verallgemeinerte Folge, 20  
 versponnener SNR (engl. webbed), 78  
 vervollständigendes Gewebe (engl.: comple-  
     ting web), 78  
 Vervollständigung eines SNR'es, 55  
 vollständig bezüglich eines Maßes, 63  
 vollständig metrischer Raum, 5  
 vollständiger SNR, 25  
 Volterra-Integralgleichung, 32  
 Von Neumann Problem, 49  
  
 Wärmeleitungsgleichung, 49  
 Wellengleichung, 49  
 Wronski-Determinante, 33, 111