Michor P.

# Banach-Semikategorien II

Von

**P. Michor**

Aus den
Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 185. Bd., 4. bis 7. Heft, 1976

**Wien 1976**

In Kommission bei Springer-Verlag, Wien-New York
Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien

# Banach-Semikategorien II

Von

**P. Michor**

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 18. März 1976 durch das w. M. E. Hlawka)

Dieser Artikel ist die Fortsetzung der gleichlautenden Arbeit [17]; die Numerierung der Abschnitte und des Literaturverzeichnisses werden weitergeführt.

## § 5 Koenden von Bifunktoren auf Semikategorien

Wir verallgemeinern hier den Begriff des Koendes von Bifunktoren (siehe MacLane [10], Kap. IX) auf Semikategorien. Dabei setzen wir nicht mehr an allgemeiner Kategorientheorie voraus als bisher. Der Klarheit willen verzichten wir darauf, die Konvention 3.1 zu verwenden.

Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie und $G$ ein kontra-kovarianter Bifunktor von $\mathbf{C}$ in Ban.

5.1. **Definition:** Eine ($\mathbf{C}$-)dinatürliche Transformation $\alpha$ von $G$ in einen Banachraum $Z$ ist eine Familie $(\alpha_X)_{X \in \mathbf{C}}$ von Morphismen $\alpha_X \in H(G(X, X), Z)$, so daß für alle $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ gilt:

$$\alpha_X \circ G(f, X) = \alpha_Y \circ G(Y, f) : G(Y, X) \to Z$$

und darüber hinaus $\|\alpha\| = \sup_X \|\alpha_X\| < \infty$ ist.

Der Raum Dinat $(G, Z)$ aller dinatürlichen Transformationen $G \to Z$ ist ein Banachraum mit der komponentenweisen linearen Struktur und obiger Norm.

5.2. **Definition:** Das (C-)Koende des Bifunktors $G : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ist ein Banachraum $U$ zusammen mit einer dinatürlichen Transformation $\pi : G \to U$, die folgendes erfüllt: für jede dinatürliche Transformation $\alpha : G \to Z$ existiert genau ein $\hat{\alpha} \in H(U, Z)$ mit $\hat{\alpha} \circ \pi = (\hat{\alpha} \circ \pi_X)_X = \alpha$ und $\|\hat{\alpha}\| = \|\alpha\|$. Wir bezeichnen das (C-)Koende $U$ von $G$ mit

$$\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X).$$

Die Eindeutigkeit der geforderten Faktorisierung über $\pi$ hat zur Folge, daß das Koende von $G$ bis auf isometrische Isomorphismen eindeutig bestimmt ist und $\|\pi\| \leqslant 1$ gilt (das letztere folgt aus der Faktorisierung von $\pi$ selbst: $\pi = 1_U \circ \pi = \hat{\pi} \circ \pi$, also $1_U = \hat{\pi}$, $\|\hat{\pi}\| = \|\pi\| = \|1_U\| \leqslant 1$). Der übliche Zusammenhang zwischen universellen Pfeilen und darstellbaren Funktoren ergibt, daß die universelle Eigenschaft des Koendes äquivalent ist zur isometrischen Gleichung

$$\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G, Z) = H\,\Big(\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X), Z\Big)$$

und deren Natürlichkeit in $G$ und $Z$, die durch die Zuordnung gegeben ist.

$$G \mapsto \int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$$

ist also sogar die Objektabbildung eines Funktors, dessen Wirkung auf Morphismen durch die universelle Eigenschaft gegeben ist.

5.3. **Proposition:** Wenn $\mathbf{C}$ klein ist bezüglich Ban, dann existieren die Koenden für alle Bifunktoren $G$, und es gilt $\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X) = \coprod_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)/N^G$, wobei $\coprod$ das Koprodukt in $\mathrm{Ban}_1$ bedeutet und $N^G$ der abgeschlossene lineare Teilraum ist, der von allen Elementen der Form $G(f, X)\, g_X{}^Y - G(Y, f)\, g_X{}^Y$, $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, $g_X{}^Y \in G(Y, X)$, erzeugt wird. Die Komponenten der dinatürlichen Transformation $\pi$ werden induziert durch die kanonischen Injektionen $i_X : G(X, X) \to \coprod_{X \in \mathbf{C}} G(Z, Z)$.

**Beweis:** $\pi : G \to \int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$ ist dinatürlich, da nach Definition $i_X\, G(f, X)\, g_X{}^Y - i_Y\, G(Y, f)\, g_X{}^Y \in N^G$ ist. Wenn $\psi : G \to Z$ dinatür-

lich ist, dann existiert $\coprod_{X\in\mathbf{C}} \psi_X : \coprod_{X\in\mathbf{C}} G(X,X) \to Z$ und $\|\coprod \psi_X\| \leqslant \|\psi\|$. Die Dinatürlichkeit von $\psi$ hat zur Folge, daß $\coprod_{X\in\mathbf{C}} \psi_X$ auf $N^G$ verschwindet, daher faktorisiert $\psi$ über $\pi$ zu $\hat{\psi} : \int G(X,X) \to Z$. Klarerweise gilt $\|\hat{\psi}\| = \|\coprod \psi_X\| = \|\psi\|$ und $\hat{\psi} \circ \pi = \psi$ und $\hat{\psi}$ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, da seine Konstruktion ja darauf beruht.
qed.

5.4. **Satz:** (a) $(\int^{X\in\mathbf{C}} G(X,X))' = \operatorname{Dinat}_{\mathbf{C}}(G,I)$; die dieser Dualität zugehörige Waelbroeck-Raum-Struktur auf Dinat $(G,I)$ ist die Spur des Tychonov-Produkts der $w^*$-Topologien von $\prod_{X\in\mathbf{C}} G(X,X)'$ auf die Einheitskugel von Dinat $(G,I)$.

(b) $\int^{X\in\mathbf{C}} G(X,X)$ ist der Norm-abgeschlossene lineare Teilraum von $(\operatorname{Dinat}(G,I))'$, der von allen Funktionalen der Form $\alpha \mapsto \alpha_X(g_X{}^X)$ für $g_X{}^X \in G(X,X)$ erzeugt wird.

**Beweis:** Zur Theorie der Waelbroeck-Räume siehe Buchwalter [1] oder die Zusammenfassung in Michor [12]. Der Waelbroeck-Dual werde mit * bezeichnet.

(a) Die natürliche isometrische Gleichung in 5.2 ergibt spezialisiert $H(\int^{X\in\mathbf{C}} G(X,X), I) = \operatorname{Dinat}(G,I)$. Um die Waelbroeck-Raum-Struktur zu bestimmen, bemerken wir, daß folgendes gilt:

$$(\int^{X\in\mathbf{C}} G(X,X))' = (\coprod_{X\in\mathbf{C}} G(X,X)/N^G)' = (N^G)^{\perp} \subseteq (\coprod_{X\in\mathbf{C}} G(X,X))' =$$
$$= \prod_{X\in\mathbf{C}} G(X,X)'.$$

(b) Es gilt $\int^{X\in\mathbf{C}} G(X,X) = (\operatorname{Dinat}(G,I))^*$, wobei der letztere Raum die kanonische Waelbroeck-Raum-Struktur von (a) trägt. Da alle Funktionale $\alpha \mapsto \alpha_X(g_X{}^X)$ in $(\operatorname{Dinat}(G,I))$ liegen, haben wir nur noch zu zeigen, daß ihre lineare Hülle dicht ist. Es sei $M$ die absolutkonvexe Hülle der Menge aller solchen Funktionale, die Elementen $\|g_X{}^X\| \leqslant 1$ entsprechen. Dann gilt für $\alpha \in \operatorname{Dinat}(G,I)$:

$$\|\alpha\| = \sup\{|\alpha_X(g_X{}^X)|,\ \|g_X{}^X\| \leqslant 1,\ g_X{}^X \in G(X,X),\ X \in \mathbf{C}\}$$
$$= \sup_{m\in M} |\langle \alpha, m\rangle|.$$

$M$ ist also schwach dicht in der Einheitskugel von $\int^{X\in\mathbf{C}} G(X, X)$ nach Hahn-Banach, also auch Norm-dicht, da der schwache und der Norm-Abschluß einer absolutkonvexen Menge übereinstimmen. qed.

5.5. **Bemerkung:** Wenn $\mathbf{C}$ eine Kategorie ist (mit $\|1_X\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1$), dann kann $\int^{X\in\mathbf{C}} G(X, X)$ als Kolimes in $\mathrm{Ban}_1$ des folgenden Funktors $T$ von der gedrehten Morphismen-Kategorie von $\mathbf{C}_1$ nach Ban dargestellt werden: $T(\lambda) = G(X, Y)$ für $\lambda \in \mathbf{C}(X, Y)$, $T(\alpha, \beta) = G(\beta, \alpha) : T(\lambda) \to T(\mu)$ für $(\alpha, \beta) : \lambda \to \mu$, d. h. $\lambda = \beta \circ \mu \circ \alpha$ (vgl. MacLane [10]).

5.6. **Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie mit beidseitig approximierenden Einheiten (1.4). Es sei $G$ ein $\mathbf{C}$-wesentlicher (4.1) Bifunktor $\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ und $G^s : \Delta\,\mathbf{C}^{op} \times \Delta\,\mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ seine Erweiterung (4.10). Dann gilt:

$$\int^{X\in\mathbf{C}} G(X, X) = \int^{X\in\Delta\mathbf{C}} G^s(X, X).$$

Für den Beweis benötigen wir ein Lemma.

**Lemma:** Ist $G: \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ $\mathbf{C}$-wesentlich, dann ist $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(G, Z) = \underset{\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(G^s, Z)$ für alle $Z \in \mathrm{Ban}$.

**Beweis des Lemmas:** Es sei $\hat{\ }: \mathbf{C} \to \Delta\,\mathbf{C}$ der isometrische Einbettungsfunktor von **3.4.** Da $G^s(\hat{\ }, \hat{\ }) = G$ ist, gilt $\underset{\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(G^s, Z) \subseteq \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(G, Z)$ isometrisch. Um die umgekehrte Ungleichung zu zeigen, haben wir nachzuweisen, daß für $\alpha \in \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(G, Z)$ und für alle $\varphi_Y{}^X \in \Delta\,\mathbf{C}(X, Y)$ folgendes gilt:

$$\alpha_Y \circ G^s(Y, \varphi_Y{}^X) = \alpha_X \circ G^s(\varphi_Y{}^X, X) : G(Y, X) \to Z.$$

Für $\varphi_Y{}^X = \hat{f}$, $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ gilt das nach Voraussetzung.

$\hat{\ }(\mathbf{C}(X, Y))$ ist strikt dicht in $\Delta\,\mathbf{C}(X, Y)$ (3.6), $G^s$ ist strikt (4.10), d. h. stetig in der strikten und der starken Operatortopologie, und die obige Bedingung kann durch „punktweise" Gleichungen

$$\alpha_X \circ G^s(\varphi_Y{}^X, X)\, g_X{}^Y = \alpha_Y \circ G^s(Y, \varphi_Y{}^X)\, g_Y{}^X$$

beschrieben werden, die daher strikt stetig in $\varphi_Y{}^X$ sind und somit auf ganz $\Delta\,\mathbf{C}(X, Y)$ gelten. qed.

**Beweis des Satzes:** Es seien $\pi : G \to \int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$ und $\pi^{\Delta} : G^{s} \to \int^{X \in \Delta \mathbf{C}} G^{s}(X, X)$ die universellen dinatürlichen Transformationen. Dann ist $\pi^{\Delta} \in \mathrm{Dinat}\,(G, \int^{X \in \Delta \mathbf{C}} G^{s}(X, X))$, da $\hat{\ }: \mathbf{C} \to \Delta\, \mathbf{C}$ eine isometrische Einbettung ist. Wir haben also eine eindeutige Faktorisierung von $\pi^{\Delta}$ über $\pi$ zu $\tilde{\pi}^{\Delta} : \int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X) \to \int^{X \in \Delta \mathbf{C}} G^{s}(X, X)$, d. h. $\pi^{\Delta} = \tilde{\pi}^{\Delta} \circ \pi$. Wir behaupten, daß $\tilde{\pi}^{\Delta}$ ein isometrischer Isomorphismus ist; um das zu zeigen, untersuchen wir die Adjungierte $(\tilde{\pi}^{\Delta})' : \int^{X \in \Delta \mathbf{C}} (G^{s}(X, X))' \to (\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X))'$, d. h. $(\tilde{\pi}^{\Delta})' : \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G^{s}, I) \to \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G, I)$. Es sei $g_X{}^X \in G(X, X)$ und $\alpha \in \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G^{s}, I)$. Dann ist: $\langle \pi_X(g_X{}^X), (\tilde{\pi}^{\Delta})'(\alpha) \rangle = \langle \tilde{\pi}^{\Delta} \circ \pi_X(g_X{}^X), \alpha \rangle = \langle \pi_X{}^{\Delta}(g_X{}^X), \alpha \rangle = \alpha_X(g_X{}^X)$ wegen 5.4 (a). 5.4 (b) zeigt, daß die Elemente $\pi_X(g_X{}^X)$ und $\pi_X{}^{\Delta}(g_X{}^X)$ total sind (d. h. ihre linearen Hüllen sind dicht), daher zeigt die obige Gleichung, daß $(\tilde{\pi}^{\Delta})'$ mit dem kanonischen isometrischen Isomorphismus $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G^{s}, I) \to \underset{\Delta \mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(G, I)$ aus dem Lemma übereinstimmt. Also ist auch $\tilde{\pi}^{\Delta}$ selbst ein isometrischer Isomorphismus. qed.

5.7. Das wohl bedeutendste Beispiel eines Koendes ist das Tensorprodukt von Funktoren. Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie, $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, $\overline{F} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$ seien Funktoren. Wir betrachten den Bifunktor $\overline{F}(\cdot) \mathbin{\hat{\otimes}} F(\cdot\,\cdot) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, und sein Koende nennen wir das (projektive) Tensorprodukt von $\overline{F}$ mit $F$ und bezeichnen es mit $\overline{F} \mathbin{\underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}}} F$:

$$\overline{F} \mathbin{\underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}}} F = \int^{X \in \mathbf{C}} \overline{F}(X) \mathbin{\hat{\otimes}} F(X).$$

Für den Fall, daß $\mathbf{C}$ eine volle Teilkategorie von Ban ist, verweisen wir auf Cigler [3], wo das Tensorprodukt eingehend behandelt wird und verschiedene Anwendungen gegeben werden. Durch Spezialisieren erhalten wir: Ist $\mathbf{C}$ klein bezüglich Ban, dann ist $\overline{F} \mathbin{\underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}}} F = \coprod_{X \in \mathbf{C}} \overline{F}(X) \mathbin{\hat{\otimes}} F(X)/N$, wobei $N$ der abgeschlossene Teilraum ist, der von allen Elementen der Form $\overline{F}(h)\, \bar{f}^{Y} \otimes f_X - \bar{f}^{Y} \otimes F(h)\, f_X$, $h \in \mathbf{C}(X, Y)$, $\bar{f}^{Y} \in \overline{F}(Y)$, $f_X \in F(X)$ erzeugt wird (5.3).

**5.8. Proposition:** (a) $(\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F)' = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F, \bar{F}') = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(\bar{F}, F')$, und die dieser Dualität zugeordnete Waelbroeck-Raum-Struktur ist die vom Tychonov-Produkt der punktweisen $w^*$-Konvergenz von $\prod_{X\in\mathbf{C}} H\,(F\,(X), \bar{F}\,(X)')$ auf die Einheitskugel von $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F, \bar{F}')$ induzierte.

(b) $\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F$ ist der Norm-abgeschlossene lineare Teilraum von $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F, \bar{F}')'$, der von allen Funktionalen der Gestalt $\psi \mapsto \langle \bar{f}^X, \psi_X\,(f_X)\rangle$, $\bar{f}^X \in \bar{F}\,(X)$, $f_X \in F\,(X)$, erzeugt wird.

(c) Sind $\bar{F}$ und $F$ beide $\mathbf{C}$-wesentlich (4.1), und hat $\mathbf{C}$ beidseitig approximierende Einheiten, dann gilt

$$\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F = \int^{X\in\mathbf{C}} \bar{F}\,(X) \hat{\otimes} F\,(X) = \int^{X\in\Delta\mathbf{C}} (\bar{F} \hat{\otimes} F)^s\,(X, X) =$$
$$= \int^{X\in\Delta\mathbf{C}} \bar{F}_s\,(X) \hat{\otimes} F^s\,(X) = \bar{F}_s \underset{\Delta\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F^s.$$

**Beweis:** Nach 5.4 (a) gilt $(\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F)' = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(\bar{F}\,(\cdot) \hat{\otimes} F\,(\cdot\,\cdot), I)$, und der zweite Raum stimmt sowohl mit $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F, \bar{F}')$ als auch mit $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(\bar{F}, F')$ überein vermittels der Zuordnung $\alpha \leftrightarrow \varphi \leftrightarrow \psi$, wobei $\alpha_X\,(\bar{f}^X \otimes f_X) = \langle \bar{f}^X, \varphi_X\,(f_X)\rangle = \langle f_X, \psi_X\,(\bar{f}^X)\rangle$ ist. Die Aussage über die Waelbroeck-Raum-Struktur folgt aus dem Beweis von 5.4 (a), wenn man berücksichtigt, daß $(\bar{F}\,(X) \hat{\otimes} F\,(X))' = H\,(F\,(X), \bar{F}\,(X)')$ ist und die zugehörige Waelbroeck-Raum-Struktur gerade die Topologie der punktweisen $w^*$-Konvergenz in der Einheitskugel (vgl. Michor [12]). (b) folgt aus 5.4 (b). (c) folgt aus 5.6. qed.

**5.9. Proposition:** Sind $\mathbf{C}$ und $\mathbf{D}$ Semikategorien, $F_1 : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, $F_2 : \mathbf{D} \to \mathrm{Ban}$, $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{D} \to \mathrm{Ban}$ Funktoren, dann gilt natürlich in $F_1$, $F_2$ und $G$:

$$\underset{\mathbf{D}}{\mathrm{Nat}}\,(G \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F_1, F_2) = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, \underset{\mathbf{D}}{\mathrm{Nat}}\,(G, F_2)).$$

**Bemerkung:** Diese Gleichung heißt das allgemeine Exponentialgesetz (vgl. Cigler [3]). In der allgemeinen Kategorientheorie findet man dieses Phänomen unter dem Namen Adjunktionen mit Parametern (vgl. MacLane [10]). Analoge Resultate gelten für andere geeignete Verteilungen der Varianzen, z. B.

$$\underset{\mathbf{D}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1 \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} G, F_2) = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, \underset{\mathbf{D}}{\mathrm{Nat}}\,(G, F_2)).$$

**Beweis:** Wegen der universellen Eigenschaften des Koendes ist $\underset{\mathbf{D}}{\mathrm{Nat}}\,(G \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F_1, F_2)$ gerade der Raum aller Familien $(\varphi_{XY})_{X \in \mathbf{C},\, Y \in \mathbf{D}}$ von Elementen $\varphi_{XY} : G(X, Y) \hat{\otimes} F_1(Y) \to F_2(Y)$, die bei festem $X$ natürlich in $Y$ und bei festem $Y$ dinatürlich in $X$ sind, und dieselbe Zuordnung wie im Beweis von 5.8 (a) zeigt, daß das wiederum gerade der Raum $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, \underset{\mathbf{D}}{\mathrm{Nat}}\,(G, F_2))$ ist. Die Isometrie aller Zuordnungen ist klar. qed.

5.10. **Proposition:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Operatoralgebra in Ban (1.1), die alle endlichdimensionalen Operatoren enthält, es seien $\bar{F} : \mathrm{Ban}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$, $F : \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ Funktoren. Dann gilt $\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F = \bar{F} \underset{\mathrm{Ban}}{\hat{\otimes}} F$, soferne mindestens einer der beiden Funktoren vom Typ $\Sigma$ ist.

**Beweis:** Da nach Definition immer $\|f\|_{\mathbf{C}} \geqslant \|f\|$ gilt, kann man $\bar{F}$ und $F$ auch als Funktoren auf $\mathbf{C}$ auffassen. Insbesondere ist $\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F$ definiert. Wir benötigen ein Lemma.

**Lemma:** Es sei $\mathbf{C}$ wie oben und $F_1 : \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ vom Typ $\Sigma$. Dann gilt für alle $F_2 : \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$

$$\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, F_2) = \underset{\mathrm{Ban}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, F_2).$$

**Beweis des Lemmas:** Klarerweise gilt isometrisch $\underset{\mathrm{Ban}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, F_2) \subseteq \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, F_2)$. Nun sei $\varphi \in \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}\,(F_1, F_2)$, $f \in H(X, Y)$, $\Sigma a_i \otimes x_i$ $F_1(I) \otimes X$. Dann ist $\varphi_Y \circ F_1(f)\,(\Sigma F_1(\hat{x}_i)\, a_i) = \Sigma \varphi_Y F_1(f) F_1(\hat{x}_i)\, a_i = \Sigma \varphi_Y F_1(\widehat{f(x_i)})\, a_i = \Sigma F_2(\widehat{f(x_i)})\, \varphi_I(a_i) = F_2(f)\,(\Sigma F_2(\hat{x}_i)\, \varphi_I(a_i)) = F_2(f)\, \varphi_X(\Sigma F_1(\hat{x}_i)\, a_i)$. Da Elemente der Form $\Sigma F_1(x_i)\, a_i$ dicht sind in $F_1(X)$, gilt $F_2(f)\, \varphi_X = \varphi_Y F_1(f)$. qed.

Wir setzen den Beweis der Proposition fort. Es seien $\pi : \bar{F}(\cdot) \hat{\otimes} F(\cdot\,\cdot) \to \bar{F} \underset{\text{Ban}}{\hat{\otimes}} F$ und $\pi^{\mathbf{C}} : \bar{F}(\cdot) \hat{\otimes} F(\cdot\,\cdot) \to \bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F$ die universellen dinatürlichen Transformationen. Da $\mathbf{C}$ eine Operatoralgebra ist, ist $\pi \in \underset{\mathbf{C}}{\text{Dinat}} (\bar{F}(\cdot) \hat{\otimes} F(\cdot\,\cdot), \bar{F} \underset{\text{Ban}}{\hat{\otimes}} F)$ und $\pi$ faktorisiert daher eindeutig über $\pi^{\mathbf{C}} : \pi = \tilde{\pi} \circ \pi^{\mathbf{C}}$ für $\tilde{\pi} : \bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F \to \bar{F} \underset{\text{Ban}}{\hat{\otimes}} F$. Wir behaupten, daß $\tilde{\pi}$ ein isometrischer Isomorphismus ist und zeigen das von

$$(\tilde{\pi})' : \underset{\text{Ban}}{\text{Nat}} (F, \bar{F}') \to \underset{\mathbf{C}}{\text{Nat}} (F, \bar{F}').$$

Sei $\alpha \in \underset{\text{Ban}}{\text{Nat}} (F, F')$, $f_X \in F(X)$, $\bar{f}^X \in \bar{F}(X)$. Dann ist

$$\langle \pi^{\mathbf{C}}{}_X (\bar{f}^X \otimes f_X), (\tilde{\pi})'(\alpha) \rangle = \langle (\tilde{\pi} \circ \pi^{\mathbf{C}})_X (\bar{f}^X \otimes f_X), \alpha \rangle =$$
$$= \langle \pi_X (\bar{f}^X \otimes f_X), \alpha \rangle = \langle \bar{f}^X, \alpha_X (f_X) \rangle.$$

Also stimmt $(\tilde{\pi})'$ mit dem isometrischen Isomorphismus des Lemmas überein, wenn $F$ vom Typ $\Sigma$ ist. Ist $\bar{F}$ vom Typ $\Sigma$, dann transponiert man den obigen Beweis. qed.

5.11. Auf Ban gilt $H \underset{\text{Ban}}{\hat{\otimes}} F = F$ und $\bar{F} \underset{\text{Ban}}{\otimes} H = \bar{F}$ natürlich in $F$ und $\bar{F}$ (vgl. z. B. Cigler [3]). Analog dazu gilt der folgende Satz, der eine Verallgemeinerung von Cigler [3], 4.7 ist.

**Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie mit links-approximierenden Einheiten, $F : \mathbf{C} \to \text{Ban}$ ein Funktor. Dann gilt $\mathbf{C} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F = F_{\mathbf{C}-e}$ natürlich in $F$, wobei $F_{\mathbf{C}-e}$ den $\mathbf{C}$-wesentlichen Teil von $F$ bezeichnet und $\mathbf{C}$ auch für den Hom-Funktor von $\mathbf{C}$ steht. Hat $\mathbf{C}$ rechts-approximierende Einheiten, dann gilt $\bar{F} \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} \mathbf{C} = \bar{F}_{\mathbf{C}-e}$ natürlich in $\bar{F} : \mathbf{C}^{\text{op}} \to \text{Ban}$.

**Beweis:** $\alpha_X : \mathbf{C}(\cdot, X) \hat{\otimes} F(\cdot) \to F(X)$, definiert durch $\alpha_{XZ} (h_X{}^Z \otimes f_Z) = F(h_X{}^Z) f_Z$, ist eine kontraktive dinatürliche Transformation, wie man leicht nachprüft. Das Bild von $\alpha_X$ ist in $F_{\mathbf{C}-e}(X)$ enthalten. $\alpha_X$ faktorisiert über $\pi : \mathbf{C}(\cdot, X) \hat{\otimes} F(\cdot) \to \mathbf{C}^X \underset{\mathbf{C}}{\hat{\otimes}} F$ zu

$\hat{\alpha}_X : \mathbf{C}^X \mathbin{\hat{\otimes}_{\mathbf{C}}} F \to F_{\mathbf{C}-e}(X)$. Da $F_{\mathbf{C}-e}(X)$ ein wesentlicher linker Banach-$\mathbf{C}(X, X)$-Modul ist und $\mathbf{C}(X, X)$ eine links-approximierende Einheit besitzt, existiert nach dem Faktorierungssatz von Cohen-Hewitt für jedes $f_X \in F_{\mathbf{C}-e}(X)$ ein $h_X{}^X \in \mathbf{C}(X, X)$ und ein $f_X{}' \in F_{\mathbf{C}-e}(X)$ mit $\|h_X{}^X\|_{\mathbf{C}} \leqslant 1$, $\|f_X - f_X{}'\| \leqslant \varepsilon$, so daß $F_{\mathbf{C}-e}(h_X{}^X) f_X{}' = f_X$ ist. Das besagt aber gerade $\hat{\alpha}_X \pi_X (h_X{}^X \otimes f_X{}') = \alpha_X (h_X{}^X \otimes f_X{}') = F(h_X{}^X) f_X{}' = = f_X$ und $\|\pi_X (h_X{}^X \otimes f_X{}')\| \leqslant \|h_X{}^X\|_{\mathbf{C}} \|f_X{}'\| \leqslant \|f_X\| + \varepsilon$. Daher ist $\hat{\alpha}_X$ eine Isometrie. Es ist leicht einzusehen, daß $\hat{\alpha}_X$ natürlich in $X$ und $F$ ist. Die Aussage für $\bar{F}$ kann auf ähnliche Weise gezeigt werden. qed.

5.12. Es sei $\alpha$ eine bifunktorielle Tensornorm und es existiere ein Banachraum $X$, so daß das Spur-Funktional $\mathrm{Tr} : X' \otimes X \to I$, $\mathrm{Tr}(\Sigma x_i' \otimes x_i) = \Sigma \langle x_i, x_i' \rangle$, nicht stetig ist in der Norm $\alpha$. Dann ist $\int^{X \in \mathrm{Ban}} X' \mathbin{\overline{\otimes}_\alpha} X = (0)$. (Die induktive Tensornorm erfüllt das z. B.)

**Beweis:** $(\int^{X \in \mathrm{Ban}} X' \mathbin{\overline{\otimes}}_\alpha X)' = \mathrm{Dinat}_{\mathrm{Ban}}(\cdot' \mathbin{\overline{\otimes}_\alpha} \cdot, I)$ und wir behaupten, daß das der Nullraum ist. Sei also $\varphi$ ein Element dieses Raumes. Für alle $x \in X$ und $x' \in X'$ gilt dann:

$$\begin{aligned}\varphi_X(x' \otimes x) &= \varphi_X(X' \mathbin{\overline{\otimes}_\alpha} \hat{x})(x' \otimes 1) = \\ &= \varphi_I(\langle x, \cdot \rangle \mathbin{\overline{\otimes}_\alpha} I)(x' \otimes 1) = \langle x, x' \rangle \varphi_I(1).\end{aligned}$$

Da die $x' \otimes x$ total sind in $X' \mathbin{\overline{\otimes}_\alpha} X$, gilt $\varphi = \varphi_I(1) \cdot \mathrm{Tr}$, und da $\varphi$ stetig ist, muß nach Voraussetzung $\varphi = 0$ sein. qed.

## § 6 Enden von Bifunktoren auf Semikategorien

Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie und $G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein Bifunktor. Wir entwickeln hier die Theorie des Endes von $G$, meist ergeben sich Räume, die wir schon kennen.

6.1. **Definition:** Eine ($\mathbf{C}$-)dinatürliche Transformation $\alpha$ von einem Banachraum $Z$ nach $G$ ist eine Familie $(\alpha_X)_{X \in \mathbf{C}}$ von Morphismen $\alpha_X \in H(Z, G(X, X))$, so daß $\|\alpha\| = \sup_X \|\alpha_X\| < \infty$ ist und für alle

$f \in \mathbf{C}(X, Y)$ folgendes gilt:

$$G(X, f) \circ \alpha_X = G(f, Y) \circ \alpha_Y : Z \to G(X, Y).$$

Der Raum $\operatorname{Dinat}_{\mathbf{C}}(Z, G)$ aller dinatürlichen Transformationen $Z \to G$ ist ein Banachraum mit komponentenweisen linearen Operationen und obiger Norm.

6.2. **Definition:** Das (C-)Ende des Bifunktors $G$ ist ein Banachraum $U$ zusammen mit einer dinatürlichen Transformation $\pi : U \to G$, so daß für jede dinatürliche Transformation $\varphi : Z \to G$ genau ein Morphismus $\hat{\varphi} : Z \to U$ existiert mit $\varphi = \pi \circ \hat{\varphi}$ und dann auch noch $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$ gilt.

Wir bezeichnen das Ende $U$ mit $\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$. Die Eindeutigkeit der geforderten Faktorisierung über $\pi$ hat zur Folge, daß das Ende von $G$ bis auf einen isometrischen Isomorphismus eindeutig bestimmt ist und $\|\pi\| \leqslant 1$ gilt. Die universelle Eigenschaft ist klarerweise äquivalent zur isometrischen Gleichung $\operatorname{Dinat}_{\mathbf{C}}(Z, G) = H(Z, \int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X))$ und ihrer Natürlichkeit in $Z$ und $G$, die durch die Zuordnung $\varphi \leftrightarrow \varphi$ gegeben ist.

6.3. **Proposition:** Wenn C klein ist bezüglich Ban, dann existieren die Enden aller Bifunktoren $G$, und sie lassen sich beschreiben als die abgeschlossenen linearen Teilräume $\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X) \subseteq \prod_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$, die aus allen Familien $(g_X{}^X)_{X \in \mathbf{C}}$ bestehen, die für alle $f \in \mathbf{C}(X, Y)$ die Gleichung $G(f, Y)\, g_Y = G(X, f)\, g_X$ erfüllen. $\Pi$ steht dabei für das Produkt in $\mathrm{Ban}_1$. Die Komponenten der universellen dinatürlichen Transformation $\pi$ sind dabei die Einschränkungen der Projektionen $\prod_{X \in \mathbf{C}} G(X, X) \to G(Z, Z)$.

**Beweis:** Der beschriebene Teilraum ist klarerweise abgeschlossen, und $\pi$ ist dinatürlich. Ist nun $\varphi : Z \to G$ dinatürlich, dann existiert $\Pi\, \varphi_X : Z \to \prod_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$, hat dieselbe Norm wie $\varphi$, und wegen der Dinatürlichkeit von $\varphi$ führt $\Pi\, \varphi_X$ in den Teilraum $\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)$, wie man leicht sieht. Das liefert die Abbildung $\hat{\varphi}$, die alles Geforderte erfüllt. qed.

6.4. **Proposition:**

(a) $\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X) = H(I, \int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)) = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(I, G)$ natürlich in $G$.

(b) Es seien $F_1, F_2 : \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ Funktoren, $F_1$ sei linksadjungiert zu $F_2$ [d. h. $H(F_1(X), Y) = H(X, F_2(Y))$ gelte natürlich in $X$ und $Y$]. Dann gilt

$$F_2(\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)) = \int_{X \in \mathbf{C}} F_2(G(X, X))$$

$$F_1(\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X)) = \int^{X \in \mathbf{C}} F_1(G(X, X)).$$

Genauso führt ein Funktor $\mathrm{Ban}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$, der adjungiert zur Linken (Rechten) ist, Enden in Koenden (Koenden in Enden) über.

**Beweis:** (a) ist klar. (b) wird gezeigt, indem man die universellen Eigenschaften vermittels der Adjungiertheitsrelationen hin- und hertransportiert (vgl. MacLane [10]).

6.5. **Beispiele:**

(a) $(\int^{X \in \mathbf{C}} G(X, X))' = \int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X)'$ nach 6.4 (b).

(b) Es seien $F_1, F_2 : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ Funktoren. Dann gilt

$$\int_{X \in \mathbf{C}} H(F_1(X), F_2(X)) = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}(I, H(F_1(\cdot), F_2(\cdot))) = \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(F_1, F_2).$$

Dabei kommt die erste Gleichung von 6.4 (a), und die zweite ist gegeben durch $\alpha \leftrightarrow \hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}_X = \alpha_X(1)$; der Dinatürlichkeit von $\alpha$ entspricht dabei die Natürlichkeit von $\hat{\alpha}$, wie man leicht nachrechnet.

(c) Es sei $\Lambda$ ein Operatorideal über Ban, $F_1$ und $F_2$ seien Funktoren $\mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$. Dann ist

$$\int_{C \in \mathrm{Ban}} \Lambda(F_1(X), F_2(X)) = \underset{\mathrm{Ban}}{\mathrm{Dinat}}(I, \Lambda(F_1(\cdot), F_2(\cdot))),$$

und dieser zweite Raum wiederum entspricht dem Raum aller natürlichen Transformationen $\varphi : F_1 \to F_2$ mit $\varphi_X \in \Lambda(F_1(X), F_2(X))$ für alle $X$ und $\sup_X \|\varphi_X\|_\Lambda = \|\varphi\|_\Lambda < \infty$ mit ebendieser Norm. Diesen Raum könnte man mit $\mathrm{Nat}\,\Lambda(F_1, F_2)$ bezeichnen.

(d) 5.12 legt nahe, daß Nat $\Lambda$ $(F_1, F_2)$ sehr häufig der Nullraum sein wird (vgl. Michor [12], Satz 3, 4).

Ist etwa $J$ das Ideal der integralen Operatoren, dann ist

$$\int_{X \in \mathrm{Ban}} J(X, X'') = \int_{X \in \mathrm{Ban}} (X' \hat{\hat{\otimes}} X)' = \left(\int^{X \in \mathrm{Ban}} X' \hat{\hat{\otimes}} X\right)' = (0)$$

nach (a) und 5.12.

6.6. **Satz:** Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie mit beidseitig approximierenden Einheiten (1.4) und $G: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein $\mathbf{C}$-wesentlicher Bifunktor, $G^s: \Delta\, \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \Delta\, \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ seine strikte Erweiterung (4.10). Dann gilt für alle $Z \in \mathrm{Ban}$ $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, G) = \underset{\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, G^s)$ und insbesondere

$$\int_{X \in \mathbf{C}} G(X, X) = \int_{X \in \Delta\mathbf{C}} G^s(X, X).$$

**Beweis:** $\underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, G) = \underset{\Delta\mathbf{C}}{\mathrm{Dinat}}\,(Z, G^s)$ beweist man genauso wie das Lemma im Beweis von 5.6 und wendet dann 6.4 (a) an. qed.

## § 7 Vermischtes

7.1. Für einen Funktor $F: \mathrm{Ban} \to \mathrm{Ban}$ trennen die Abbildungen $F(f)$, $f \in H(X, Y)$, Punkte, da es ja schon $F(1_X)$ tut. Im Fall einer Semikategorie $\mathbf{C}$ wird es komplizierter:

**Definition:** Ein Funktor $F: \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ heißt $\mathbf{C}$-total, wenn die Abbildungen $F(f)$, $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, $Y \in \mathbf{C}$, Punkte trennen auf $F(X)$ für alle $X \in \mathbf{C}$. $F$ heißt $\mathbf{C}$-stark, wenn für jedes $f_X \in F(X)$ gilt: $\|f_X\|_{F(X)} = \sup\{\|F(f) f_X\|_{F(Y)}, f \in \mathbf{C}(X, Y), \|f\|_{\mathbf{C}} \leq 1, Y \in \mathbf{C}\}$. $F$ heißt $\mathbf{C}$-trivial, wenn $F(f) = 0$ ist für alle $\mathbf{C}$-Morphismen $f$. Analoge Begriffe seien für kontravariante Funktoren und Bifunktoren eingeführt.

7.2. **Proposition:** Ist $\mathbf{C}$ eine Operatoralgebra über Ban (1.1) und sind die endlichdimensionalen Operatoren dicht in $\mathbf{C}$, dann ist ein Funktor $F: \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ genau dann $\mathbf{C}$-total, wenn für alle $X \in \mathbf{C}$ die Abbildungen $F(x')$, $x' \in X'$, Punkte trennen auf $F(X)$. Für kontravariante Funktoren sind die Abbildungen $F(\hat{x})$, $x \in X$, relevant.

**Beweis:** Wenn alle $F(\hat{x})$ auf $f_X \in F(X)$ verschwinden, dann auch alle $F(f)$, $f$ beliebig endlichdimensional $X \to Y$ in $\mathbf{C}$, diese Abbildungen liegen dicht, daher verschwinden alle $F(f)$, $f$ in $\mathbf{C}$, darauf. Die Umkehrung ist noch trivialer. qed.

7.3. Ist $F: \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein Funktor, $\mathbf{C}$ dabei eine Semikategorie. Dann definieren wir eine Abbildung $\varphi^F{}_X : F(X) \to \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(\mathbf{C}_X, F)$ durch $(\varphi^F{}_X(f_X))_Y(h) = F(h) f_X$ für $f_X \in F(X)$ und $h \in \mathbf{C}(X, Y)$. Es ist leicht einzusehen, daß $\varphi^F{}_X$ kontraktiv und natürlich in $F$ und $X$ ist. Für $\overline{F}: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ban}$ ist $\varphi^{\overline{F}}{}_X : \overline{F}(X) \to \underset{\mathbf{C}}{\mathrm{Nat}}(\mathbf{C}^X, \overline{F})$ durch $(\varphi^{\overline{F}}{}_X(f^X))_Y(h) = F(h) f^X$ definiert.

**Proposition:** $F$ ist genau dann $\mathbf{C}$-total, wenn $\varphi^F{}_X$ injektiv ist für alle $X \in \mathbf{C}$. $F$ ist genau dann $\mathbf{C}$-stark, wenn $\varphi^F{}_X$ isometrisch ist für alle $X \in \mathbf{C}$. Die analogen Aussagen gelten für kontravariante Funktoren.

7.4. Ist $F: \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein Funktor, dann betrachten wir $\ker \varphi^F(X) = \ker \varphi^F{}_X \subseteq F(X)$; da $\varphi^F{}_X$ natürlich in $X$ ist, definiert das einen Funktor $\ker \varphi^F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$, einen isometrischen Teilfunktor von $F$, der klarerweise $\mathbf{C}$-trivial ist. Den Quotientenfunktor $F/\ker \varphi^F$ nennen wir den $\mathbf{C}$-totalen Quotienten $\mathbf{C}$-tot $F: \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$. Der Funktor $\mathbf{C}$-tot : $F \mapsto \mathbf{C}$-tot $F$ ist klarerweise linksadjungiert zur Einbettung $\mathbf{C}$-totaler Funktoren, und $F \mapsto \ker \varphi^F$ ist rechtsadjungiert zur Einbettung $\mathbf{C}$-trivialer Funktoren. Weiters gilt $\mathrm{tot}(\mathrm{tot}\, F) = \mathrm{tot}\, F$, $\ker \varphi^{\ker \varphi^F} = \ker \varphi^F$, $\ker \varphi^{\mathrm{tot}\, F} = (0)$, $\mathrm{tot} \ker \varphi^F = (0)$. Analoge Konstruktionen sind für kontravariante Funktoren möglich.

7.5. Derivationen und das semidirekte Produkt einer Semikategorie mit einem Bifunktor: Wir geben nur Konstruktionen und Resultate ohne Beweise an. Es sei $\mathbf{C}$ eine Semikategorie und $G: \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ ein Bifunktor.

**Definition:** Eine Derivation $d: \mathbf{C} \to G$ ist eine Familie $(d_{XY})_{X, Y \in \mathbf{C}}$ von Morphismen $d_{XY}\, H(\mathbf{C}(X, Y), G(X, Y))$, so daß für alle $f \in \mathbf{C}(X, Y)$, $g \in \mathbf{C}(Y, Z)$ gilt:

$$d_{XZ}(g\, f) = G(f, Z)\, d_{YZ}(g) + G(X, g)\, d_{XY}(f) \quad \text{in } G(X, Z),$$

weiters $\|d\| = \sup_{X, Y} \|d_{XY}\| < \infty$.

In der Notation von 3.1 sieht das so aus:

$$d\,(f_Z{}^Y f_Y{}^X) = f_Z{}^Y\, d\,(f_Y{}^X) + d\,(f_Z{}^Y)\, f_Y{}^X.$$

(a) Die Menge $\operatorname{Der}(\mathbf{C}, G)$ aller Derivationen von $\mathbf{C}$ nach $G$ ist ein Banachraum.

(b) Ist ein Funktor $F : \mathbf{C} \to \mathrm{Ban}$ gegeben, dann definiere die kontravariante Wirkung von $F$ trivial, d. h. $F(f, X) = 0$, und erhalte einen Bifunktor. $\operatorname{Der}(\mathbf{C}, F)$ besteht dann aus allen Familien $(d_X)_{X \in \mathbf{C}}$, $d_X \in \operatorname{Nat}(\mathbf{C}_X, F)$ mit $\sup \|d_X\| < \infty$.

(c) Ist $\mathbf{C} = A$, eine Banachalgebra, dann haben wir den üblichen Begriff von Derivationen wiedergewonnen.

(d) **Konstruktion des semidirekten Produktes.**

Das semidirekte Produkt $G \times \mathbf{C}$ ist die folgende Semikategorie, die dieselben Objekte wie $\mathbf{C}$ hat:

$G \times \mathbf{C}\,(X, Y) = G\,(X, Y) + \mathbf{C}\,(X, Y)$, die Summe in $\mathrm{Ban}_1$.

Die Komposition ist für $(g, f) \in G \times \mathbf{C}\,(X, Y)$, $(g', f') \in G \times \mathbf{C}\,(Z, X)$ gegeben durch:

$$(g, f) \circ (g', f') = (G\,(f', Y)\, g + G\,(Z, f)\, g', f \circ f').$$

Sie ist bilinear, kontraktiv, assoziativ, wenn definiert, und macht daher $G \times \mathbf{C}$ zu einer Semikategorie.

(e) $G \times \mathbf{C}$ ist genau dann eine Kategorie, wenn $\mathbf{C}$ es ist.

(f) Die Projektion $G \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist ein Funktor.

(g) Die Projektion $G \times \mathbf{C} \to G$ ist eine Derivation.

(h) Das semidirekte Produkt $G \times \mathbf{C}$ erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Ist eine Semikategorie $\mathbf{E}$ gegeben, ein Funktor $F : \mathbf{E} \to \mathbf{C}$ und eine Derivation $d : \mathbf{E} \to G\,(F\,(\cdot), F\,(\cdot))$, dann existiert genau ein Funktor $L : \mathbf{E} \to G \times \mathbf{C}$, der das folgende Diagramm kommutativ erfüllt:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{E} \arrow[dl, "d"'] \arrow[d, dotted, "L"] \arrow[dr, "F"] & \\
G & G \times \mathbf{C} \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

$L$ ist dabei beschränkt als Abbildung auf Morphismenräumen, muß aber nicht kontraktiv sein.

Das semidirekte Produkt $G \times \mathbf{C}$ ist durch diese universe le Eigenschaft bis auf Äquivalenz von Semikategorien eindeutig bestimmt.

(i) $\operatorname{Der}(\mathbf{C}, \cdot) : \mathrm{Ban}^{\mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}} \to \mathrm{Ban}$ ist ein Funktor. $\operatorname{Der}(\mathbf{C}, G)$ ist definiert, wenn $G$ ein Bifunktor auf $\mathbf{C}$ ist und $\operatorname{Der}(\cdot, \cdot\,\cdot)$, erfüllt, so definiert, alle Eigenschaften eines Bifunktors.

## Literatur

[17] Michor, P.: Banach-Semikategorien I. Sb. Österr. Akad. Wiss.

Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien