Internat. Math. Nachrichten
Nr. 185 (2000), 13–20

Sieben Millenniums-Probleme. II.

Michael Drmota, Peter Michor
Technische Universität Wien, Universität Wien

Wie bereits im ersten Teil dieses Artikels (siehe [2]) ausgeführt, wurden im Mai 2000 vom *Clay Mathematics Institute* sieben ausgewählte Probleme formuliert:

1. Das *P*-*NP*-Problem
2. Die Hodgesche Vermutung
3. Die Poincarésche Vermutung
4. Die Riemannsche Vermutung
5. Yang-Mills-Theorie
6. Existenz und Glattheit der Navier-Stokes-Gleichung
7. Die Birch- und Swinnerton-Dyer-Vermutung.

Jede Lösung eines der sieben Millenniums-Probleme ist mit einer Million Dollar dotiert.

In [2] wurden das 1., das 4. und 7. Problem, die man den Bereichen Zahlentheorie und Informatik zuordnen kann, kurz erläutert. In zweiten Teil dieses Artikels werden nun die restlichen vier Millenniums-Probleme beschrieben,[1] die im Gegensatz zu den ersten drei eher den Gebieten Analysis, Geometrie und Physik zuzuordnen sind.

[1]Die Beschreibungen der Hodgeschen Vermutung und der Yang-Mills-Theorie stammem von P. Michor, die der Poincaréschen Vermutung und der Navier-Stokes-Gleichungen von M. Drmota, vergl. auch mit den Problembeschreibungen von von *Pierre Deligne*, *John Milnor*, *Arthur Jaffe*, *Edward Witten* und *Charles L. Fefferman*: *http://www.claymath.org/prize_problems/*.

ISSN 0020-7926

1 Die Hodgesche Vermutung

Eine fastkomplexe Struktur auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X ist eine faserweise lineare Abbildung $J : TX \to TX$ mit $J^2 = -\mathrm{Id}$. Damit wirkt $\lambda \in \mathbb{C}^*$ auf TX durch $(a+ib).\xi = a.\xi + bJ(\xi)$. Die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^*$ wirkt dann auf allen äußeren Produkten $\bigwedge^n TX$ und auch auf deren komplexen Dual $\Omega^n = \Omega^n(X) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^n \mathrm{TX}, \mathbb{C})$. Für $p+q=n$ ist eine (p,q)-Form auf X ein Schnitt des Vektorbündels Ω^n, auf welchem $\lambda \in \mathbb{C}^*$ durch Multiplikation mit $\lambda^{-p}\bar{\lambda}^{-q}$ wirkt.

Ist X eine *komplexe* Mannigfaltigkeit, dann ist die fastkomplexe Struktur durch komplex-analytische Karten auf X induziert. Eine (p,q)-Form ist dann eine $\mathbb{C}$-wertige Differentialform, welche in lokal holomorphen Koordinaten $(z^1, \ldots z^m)$ als

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q} dz^{i_1} \wedge \ldots dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots d\bar{z}_{j_q}$$

geschrieben werden kann, und die Zerlegung $\Omega^n = \bigoplus_{p+q=n} \Omega^{p,q}$ wird vom äußeren Differential d respektiert, sodass $d = \partial + \bar{\partial}$ gilt mit $\partial\Omega^{p,q} \subset \Omega^{p+1,q}$ und $\bar{\partial}\Omega^{p,q} \subset \Omega^{p,q+1}$.

Wenn X kompakt ist und eine Kähler-Metrik besitzt g, dann definiert die Riemann-Metrik g den Laplace-Beltrami Operator $\Delta_g = dd^* + d^*d$. Die Differentialformen ω mit $\Delta_g \omega = 0$ heißen *harmonische Differentialformen*, und der Satz von Hodge für kompakte Riemann-Mannigfaltigkeiten besagt, dass in jeder Kohomologieklasse genau eine harmonische Form enthalten ist. Auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist der Laplace-Operator kompatibel mit der (p,q)-Zerlegung und daher gilt für die De Rhom-Kohomologie $H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$.

Wenn die komplexe Struktur (und die Kähler-Struktur) auf X deformiert wird, d.h. wenn $X = X_t$ sich in einer holomorphen Familie für $t \in T$ bewegt, dann ist die Kähler-Hodge Zerlegung $H^n(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$ alles andere als stabil. Die Kähler-Hodge Filtrierung $F^p := \bigoplus_{a \geq p} H^{a,n-a} \subset H^n(X,\mathbb{C})$ benimmt sich besser: $H^n(X_t,\mathbb{C})$ ist lokal konstant in $t \in T$ und in erster Ordnung um $t_0 \in T$ bleibt F_t^p in $F_{t_0}^{p-1}$.

Ist Z ein abgeschlossener analytischer Teilraum von X von komplexer Kodimension p (lokal Nullstellenmenge von holomorphen Funktionen), dann sind die Singularitäten von Z von reeler Kodimension 2, also gilt das Theorem von Stokes. Daher ist $\omega \mapsto \int_Z \omega$ eine Linearform auf $H^{2n-2p}(X,\mathbb{C})$, welche nach Poincaré-Dualität durch ein Element $\mathrm{cl(Z)} \in \mathrm{H^{2p}(X,\mathbb{Z})}$ gegeben ist. Wenn man Differentialformen mit verallgemeinerten Funktionen als Koeffizienten verwendet (Ströme oder Currents), dann kann man $\mathrm{cl(Z)}$ direkt als Integrationsstrom in X darstellen. Die Klasse $\mathrm{cl(Z)}$ ist vom Typ (p,p) in dem Sinn, dass ihr Bild in $H^{2p}(X,\mathbb{C})$ in $H^{p,p}$ ist. Rationale (p,p)-Klassen heißen Hodge-Klassen und bilden die Kohomologiegruppe

$$H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(X) = H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap F^{p} \subset H^{2p}(X,\mathbb{C}).$$

Die Hodge-Vermutung lautet nun:

> Auf einer projektiven nicht-singulären algebraischen Varietät über $\mathbb{C}$ ist jede Hodge-Klasse eine rationale Linearkombination von Klassen $\mathrm{cl}(\mathrm{Z})$ von algebraischen Teilvarietäten.

Wir schließen mit einigen Bemerkungen: Aus österreichischer Sicht sollte man hier noch das Theorem von *Wirtinger* (1904) anführen, wonach für eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit X mit Kähler-2-Form ω gilt: Für jede komplexe Teilmannigfaltigkeit S der komplexen Dimension k in X gilt für die Volumsdichte der induzierten Riemann-Metrik auf S:

$$\mathrm{Vol(S)} = \frac{1}{k!}\int_{S}\omega^{k}.$$

Das Volumen ist also durch das Integral über S einer global definierten $2k$-Form $\omega^k = \omega\wedge\ldots\wedge\omega$ gegeben, die nur von der Dimension von S abhängt. Dies gilt auch für analytische Teilmengen. Es ist falsch im reellen Fall.

Nach dem Satz von Chow ist jeder abgeschlossene analytische Teilraum einer komplex-projektiven Varietät schon eine algebraische Varietät.

Auf einer komplexen projektiven nicht-singulären Varietät X ist die Gruppe der ganzzahligen Linearkombinationen der Klassen $\mathrm{cl}(\mathrm{Z})$ gleich der Gruppe der ganzzahligen Linearkombinationen von Produkten von Chern-Klassen von algebraischen (äquivalent: analytischen) Vektorbündeln. Dies sieht man mit Hilfe der Null- und Polstellenzyklen von meromorphen Schnitten solcher Vektorbündel. Ein Spezialfall ist, dass Divisoren (ganzzahlige Linearkombinationen von Hyperflächen) gerade die ersten Chern-Klassen von Linienbündeln sind.

2 Die Poincarésche Vermutung

Eine einfache Folgerung aus der Klassifikation kompakter Flächen[2] ist der Satz, daß jede einfach zusammenhängende kompakte Fläche zur 2-Sphäre homöomorph ist. Diese Eigenschaft wurde bereits von Poincaré entdeckt, und 1904 stellte er auch die Frage, ob jede einfach zusammenhängende kompakte 3-dimensionale Manngifaltigkeit zur 3-Sphäre homöomorph sei, konnte dafür aber keinen Beweis finden.

[2] Jede kompakte Fläche ist (im orientierbaren Fall) homöomorph zu einer 2-Sphäre mit *g Henkeln*, wobei $g \geq 0$ das sogenannte Geschlecht der Fläche ist, oder (im nicht-orientierbaren Fall) homöomorph zu einer 2-Sphäre mit *g Kreuzhauben*.

Seitdem heißt diese Problemstellung *Poincarésche Vermutung* und sie konnte bis jetzt nicht entschieden werden, obwohl große Anstrengungen unternommen wurden, eine Klärung herbeizuführen.

Ähnlich wie im zweidimensionalen Fall erwartet man auch im dreidimensionalen eine Klassifikation aller Mannigfaltikeiten. Die *Bausteine* sollen — nach dem sogenannten Thurston-Programm — acht spezifische dreidimensionale Geometrien sein, von denen bereits sechs ausreichend verstanden werden. Die letzten beiden sind Räume konstanter negativer bzw. positiver Krümmung. Bei den Geometrien konstanter negativer Krümmung gibt es bereits große Fortschritte, am kompliziertesten sind jedoch die Geometrien, wo es eine Metrik mit konstanter positiver Krümmung geben soll. Hier wurde von Thurston eine Verallgemeinerung der Poincaréschen Vermutung formuliert:

> Jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit endlicher Fundamentalgruppe besitzt eine Metrik mit konstanter positiver Krümmung und ist folglich homöomorph zu S^3/Γ, wobei Γ eine endliche Untergruppe der $SO(4)$ ist.

Die Poincarésche Vermutung entspricht dem Fall der trivialen Fundamentalgruppe.

Interessanterweise wurden entsprechende Verallgemeinerungen der Poincaréschen Vermutung für höherdimensionale Mannigfaltigkeiten bereits gelöst. Etwa 1960 zeigten Stephen Smale, John Wallace, John Stallings und E. C. Zeemann (teilweise unabhängig, teilweise ergänzend), daß für $n \geq 5$ (im wesentlichen) jede n-dimensionale Mannigfaltigkeit, die denselben Homotopietyp[3] wie die n-dimensionale Sphäre S^n hat, zu S^n homöomorph ist.

Erst etwa zwanzig Jahre später konnte Michael Freedman den vierdimensionalen Fall klären. Er löste dabei nicht nur die vierdimensionale Poincarésche Vermutung, sondern klassifizierte (bis auf Homöomorphie) alle vierdimensionalen einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten.

So bleibt tatsächlich der dreidimensionale Fall übrig. Kurioserweise scheint also der Raum, in dem wir leben — vermutlich eine 3-Sphäre — von allen der komplexeste zu sein.

3 Quanteneichfeldtheorie — Yang-Mills-Theorie

Das klassische Beispiel einer Eichtheorie ist der Elektromagnetismus. Die Eichgruppe ist die abelsche Gruppe $U(1) = S^1$. Ist A der $U(1)$-Eichzusammenhang,

[3] Zwei Mannigfaltigkeiten X, Y haben denselben Homotopietyp, wenn es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g$ und $g \circ f$ zur identischen Abbildung homotop sind, d.h. es gibt stetige Abbildungen $H_1 : X \times [0,1] \to X$ und $H_2 : Y \times [0,1] \to Y$ mit $H_1(x,0) = g(f(x))$ und $H_1(x,1) = x$ bzw. $H_2(y,0) = f(g(y))$ und $H_2(y,1) = y$.

welcher lokal als 1-Form am Raum-Zeit-Kontinuum $\mathbb{R}^4$ aufgefasst werden kann, dann ist die Krümmung oder das elektromagnetische Feld lokal durch $F = dA$ gegeben, und die Maxwell-Gleichungen lauten lokal $dF = 0$ und $d * F = 0$, wo $*$ der Hodge-Dualitäts-Operator für Differentialformen am $\mathbb{R}^4$ ist, der von der Minkowski-Metrik induziert wird.

Es sei G eine nicht-abelsche Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Ein Eichpotential oder ein Eichzusammenhang ist dann lokal eine 1-Form A am $\mathbb{R}^4$ mit Werten in der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Die dazugehörige Krümmung oder das Eichfeld ist dann lokal gegeben als $F = dA + [A,A]$, während die Yang-Mills-Gleichungen lokal die Form $0 = d_A F = dF + [A \wedge F]$ und $0 = d_A * F = d * F + [A \wedge *F]$ annehmen. Diese sind die Bedingungen für kritische Werte des Yang-Mills-Lagrange-Potentials $L(A) = \int_{\mathbb{R}^4} B(F \wedge *F)$, wo B die Cartan-Killing-Form auf $\mathfrak{g}$ ist oder eine andere geeignete invariante Bilinearform.

Die Quantenversion der Maxwell-Gleichungen, die Quantenelektrodynamik, liefert eine sehr genaue Beschreibung des Quantenverhaltens elektromagnetischer Felder: Ein lokales Quantenfeld ist eine Operator-wertige verallgemeinerte Funktion auf dem Raum-Zeit-Kontinuum, welche gewissen Axiomen genügt, die von Wightman (am Minkowski-Raum) und Osterwalder-Schrader (am Euklidischen $\mathbb{R}^4$) angegeben wurden.

Nicht-abelsche Eichtheorien erlauben „klassische“ feldtheoretische Beschreibungen weiterer Kräfte: Mit der Eichgruppe $SU(2) \times U(1)$ beschreibt die Weinberg-Salam-Glashow-Eichtheorie die elektroschwachen Kräfte unter Zuhilfenahme des sogenannten Higgs-Feldes, um die Massefreiheit der Theorie zu überwinden. Nach den Higgs-Teilchen sucht man noch heute. Die starken Kernkräfte (in einer mit den elektroschwachen Kräften halbwegs vereinheitlichten Form) werden durch das Standard-Modell beschrieben mit Eichgruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, wobei die inhärente Massefreiheit der Eichtheorie für die starken Kräfte durch eine Eigenschaft der Yang-Mills-Theorie selbst überwunden werden kann, nämlich durch die „asymptotische Freiheit“. Diese Eichtheorie heißt Quantenchromodynamik: sie beschreibt die Experimente im klassischen Limes sehr genau, wenn man über 20 empirisch bestimmte Konstanten in ihr von Hand festlegt.

Um die starke Kraft erfolgreich zu beschreiben, muss die Quantenchromodynamik in der Quantisierung zumindest die folgenden drei Eigenschaften haben, die dramatisch vom Verhalten der klassischen Eichtheorie abweichen:

1. Es muss eine „Massenlücke“ geben, also eine Konstante $\Delta > 0$, sodass jeder angeregte Zustand des Vakuums Energie mindestens Δ hat.

2. Es muss ein “Quark-Confinement” geben: obwohl die Theorie durch Elementarteilchen, die Quarks, beschrieben ist, auf welche die Eichgruppe $SU(3)$ nichttrivial in der Darstellung wirkt, müssen die physikalisch beobachtbaren Zustände wie Protonen, Neutronen und Pionen alle $SU(3)$-invariant sein.

3. Es muss eine chirale Symmetriebrechung geben, sodass das Vakuum potentiell (im Limes, wo die Ruhemassen der Quarks verschwinden) nur unter einer Untergruppe der vollen Symmetriegruppe der Quarkfelder invariant ist.

Das Milleniums-Problem lautet nun:

> Man beweise, dass für jede kompakte einfache Gruppe G eine Quanten-Yang-Mills-Theorie mit lokalen Quantenfeldoperatoren am $\mathbb{R}^4$ existiert welche mindestens alle oben erwähnten Axiome erfüllt, und dass jede solche eine positive Massenlücke $\Delta > 0$ besitzt.

4 Existenz und Glattheit der Lösung der Navier-Stokes-Gleichung

Die Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Bewegung einer Flüssigkeit im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Beispielsweise wird die Geschwindigkeit $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ bzw. $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ und der Druck $p(x,t)$ des Punktes $x \in \mathbb{R}^2$ bzw. $x \in \mathbb{R}^3$ im Zeitpunkt $t \geq 0$ einer inkompressiblen Flüssigkeit, die den ganzen $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ ausfüllt, durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} u_j \frac{\partial u_i}{\partial t} = \nu \Delta u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i(x,t) \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{2}$$

beschrieben (hier und im Folgenden sei $n = 2$ oder $n = 3$). $f(x,t) = (f_i(x,t))_{1 \leq i \leq n}$ bezeichnet dabei eine extern gegebene Kraft (z.B. die Graviatation), ν einen positiven Koeffizienten (die Viskosität) und $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ den Laplace-Operator. Gesucht werden Lösungen von (1) und (2) unter der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3}$$

wobei für $u_0(x) = (u_{0,i}(x))_{1 \leq i \leq n}$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ ein unendlich oft differenzierbares divergenzfreies Vektorfeld, d.h. $\operatorname{div} u_0 = 0$, angenommen wird.[4] Grob gesprochen ist das Gleichungssystem (1) nichts anderes als das Newtonsche Gesetz $F = ma$, angewandt für ein Flüssigkeitselement. Die Gleichung (2) besagt, dass die Flüssigkeit inkompressibel ist.

[4] Für $\nu > 0$ heißt das System von Gleichungen (1), (2), (3) *Navier-Stokes-Gleichungen*, für $\nu = 0$ *Euler-Gleichungen*.

Aus physikalischen Gründen verlangt man, dass alle Ableitungen von u_0 und f genügend rasch gegen 0 konvergieren, also

$$\left|\frac{\partial^\alpha u_0(x)}{\partial x^\alpha}\right| \le C_{\alpha,K}\frac{1}{(1+|x|)^K} \tag{4}$$

und

$$\left|\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\frac{\partial^m}{\partial t}f(x,t)\right| \le C_{\alpha,m,K}\frac{1}{(1+|x|+t)^K} \tag{5}$$

für alle α, m und K. Weiters sollen nur unendlich oft differenzierbare Lösungen $p(x,t), u(x,t)$ mit beschränkter Energie

$$\sup_{t\ge 0}\int_{\mathbb{R}^n}|u(x,t)|^2\,dx < \infty \tag{6}$$

betrachtet werden.

Eine im allgemeinen noch ungelöste Fragestellung ist beispielsweise die folgende:

> Sei $\nu > 0$, $n = 3$, $f(x,t) \equiv 0$ und $u_0(x)$ ein divergenzfreies Vektorfeld, das (4) erfüllt. Gibt es dann unendlich oft differenzierbare Funktionen $p(x,u), u(x,t) = (u_i(x,t))_{1\le i\le n}$ (für $x \in \mathbb{R}^n$ und $t \ge 0$), die (1), (2), (3) und (6) erfüllen?

Während die entsprechende Fragestellung für den zweidimensionalen Fall $n = 2$ vollständig gelöst werden konnte (siehe [3]), kennt man hier nur eine positive Antwort unter zusätzlichen einschränkenden Bedingungen. Fordert man etwa, dass $u_0(x)$ *genügend klein* ist, so gibt es eine Lösung. Bei allgemeinem $u_0(x)$ kann man nur zeigen, dass es eine Lösung für ein endliches Zeitintervall $t \in [0,T)$ gibt, wobei T von $u_0(x)$ abhängt (siehe [1]). Ein anderer Weg wurde von Leray [4] beschritten, der zeigen konnte, dass (1), (2) und (3) unter geeigneten Wachstumsbedingungen eine *schwache Lösung* besitzen, die aber nicht eindeutig sein muss. Es ist aber noch nicht gelungen zu zeigen, dass es unter allen schwachen Lösungen auch eine glatte gibt.

Literatur

1. A. Bertozzi and A. Majda, *Vorticity and Incompressible Flows*, Cambridge U. Press, im Erscheinen.

2. M. Drmota, *Sieben Millenniums-Probleme. I.*, Internat. Math. Nachr. **184** (2000), 29–36.

3. O. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscoous Incompressible Flows (2nd edition)*, Gordon and Breach, 1969.

4. J. Leray, *Sur le Mouvement d'un Liquide Visquex Emplissent l'Espace*, Acta Math. J. **63** (1934), 193–248.