

EINE THEORIE
GLATTER MANNIGFALTIGKEITEN
UND VEKTORBÜNDEL

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
an der
formal- und naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Universität Wien

eingereicht von

Andreas Kriegl

Wien 1980

PROLOG :

DER LATTENZAUN

Es war einmal ein Lattenzaun,
mit Zwischenraum, hindurchzuschauen.

Ein Architekt, der dieses sah,
stand eines Abends plötzlich da -

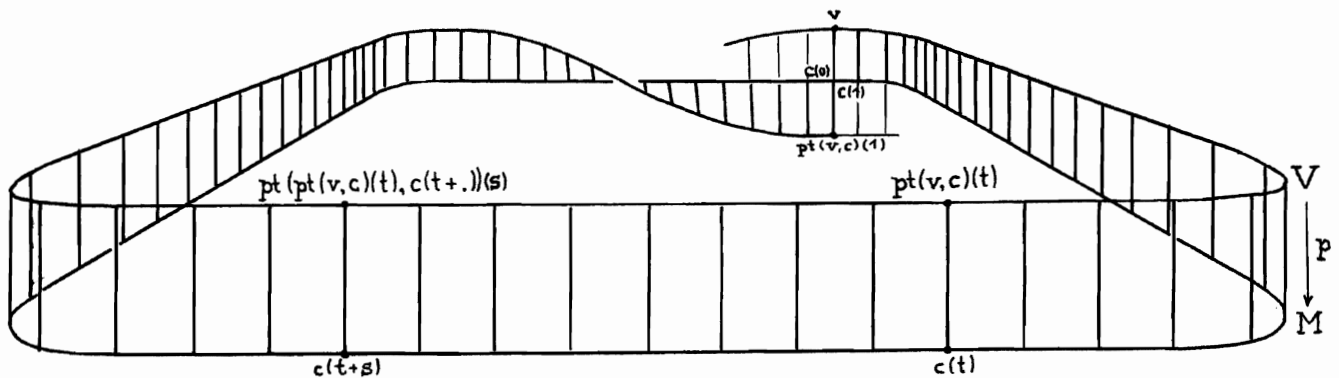
und nahm den Zwischenraum heraus
und baute draus ein großes Haus.

Der Zaun indessen stand ganz dumm,
mit Latten ohne was herum.

Ein Anblick gräßlich und gemein.
drum zog ihn der Senat auch ein.

Der Architekt jedoch entfloh
nach Afri- od- Ameriko.

Christian Morgenstern



Herrn Doz. Dr. Peter Michor möchte ich an dieser Stelle für seine überaus wertvollen Anregungen, Kritiken und Diskussionen, durch die er mich und diese Arbeit unterstützte, aufs herzlichste danken.

<u>INHALTSVERZEICHNIS</u> :	Seite:
<u>VORWORT</u> :	1
<u>KONVENTIONEN</u> :	4
<u>1. KURVEN-ERZEUGTE RÄUME</u> :	
1.1. Coreflexivität:	
1. Kurvifizierung als Funktor	5
2. Kurven-erzeugte Räume als Kategorie	6
1.2. Topologische Einordnung:	
1. Eigenschaften, die aus Kurv. erz. folgen	7
2. Eigenschaften, aus denen Kurv. erz. folgt	8
3. Kurven mit anderer Domäne	10
1.3. Produkte:	
1. Topologische Produkte Kurv. erz. Räume	11
2. Kompakt erz. Produkte	12
1.4. Funktionenräume:	
1. Homfunktor als Funktor	13
2. Zusammenhang zur kp.off.Topologie	13
1.5. Kartesische Abgeschlossenheit:	
1. Die Adjunktion	15
2. Folgerungen	16
1.6. Uniforme Räume:	
1. Homfunktor als Funktor	18
2. (Folgen-)Vollständigkeit	19
<u>2. LOKALKONVEXE TOPOLOGISCHE VEKTORRÄUME</u> :	
2.1. Kategorielle Eigenschaften:	
1. Lok.konv.top.Vektorr. als Kategorie	20
2. Beschränktheit und Vollständigkeit	21
2.2. Kurv. erz. lok.konv.topologische Vektorräume:	
1. Kurvifizierung eines lkv	22
2. Abgeschlossenheit	23
3. Kurv. erz. lkv als induktive Limiten	26
2.3. Differenzierbarkeit:	
1. Differenzierbare Kurven	27
2. Partielle Differenzierbarkeit	27
3. Glatte Kurven	28
2.4. C^∞ -Kurven-erzeugte lkv:	
1. C^∞ -Kurvifizierung	30
2. Abgeschlossenheit	32
2.5. Integrierbarkeit:	
1. Integral als Inverse zum Differential	34
2. Folgerungen	35

3. VEKTOR-MENGEN :

3.1. Tangentialfunktork T:	
1. Definitionen	36
2. Folgerungen	37
3. C^∞ -Abbildungen in Vektorräumen	40
4. Vollständigkeit	42
3.2. Homfunktork S:	
1. Topologie auf $C^\infty(N,E)$	44
2. T als natürl. Transformation	45
3. $S(N,.)$ kommutiert mit Π	46
3.3. Faserprodukt $T \Delta T$:	
1. $T \Delta T$ als Pullback	47
2. α^A als nat. Transf. und partielle Tangentiale	47
3.4. Kartesische Abgeschlossenheit:	
1. (Co-)Einheit ins, ev	49
2. τ als natürl. Transformation	50
3. S als Funktork	52
4. Folgerungen	53

4. VEKTOR-BÜNDEL :

4.1. Definitionen und Folgerungen:	
1. Pullback	54
2. Vektorfaserung	55
3. Definition von Vektorbündel	57
4. //-Transport	59
5. Zusammenhang	62
4.2. Induzierte Bündel:	
1. Pullback eines VB	63
2. Triviale Bündel	65
3. Pullback zweier VB	66
4.3. Homomorphismenbündel:	
1. $S(N,.)$ eines VB	67
2. $S(\mathbb{R},.)$ eines VB	68
3. Produkte von VB	70
4.4. Tangentialbündel:	
1. Vertikales Bündel	71
2. Horizontales Bündel	72
3. Konnektork	72
4. $T(.)$ eines VB	73

5. MANNIGFALTIGKEITEN :

5.1. Prämännigfaltigkeiten:	
1. Definitionen und Folgerungen	76
2. τ als Isomorphismus	79
3. Abgeschlossenheit	80
4. Differenzierbarkeit	84
5. Vektorbündel	85
5.2. Männigfaltigkeiten:	
1. Definition und Folgerungen	86
2. Abgeschlossenheit	87
3. Sprays	88
4. Vektorbündel	90
5.3. Beziehungen zur üblichen Theorie:	
1. MF mit endl. dim. umgebenden VR	91
2. Endl. dim. C^∞ -MF	93
3. C^∞ -MF, die auf Banachräumen modellieren	95

ANHANG :

Differentiale	98
Adjunktion	98
Einschränkungen Linearer	99
Kanonische Flips	100
Nicht-natürliche Abbildungen	101

SACHWORTVERZEICHNIS :

Symbole und Abkürzungen	102
Begriffsverzeichnis	103

LITERATUR :

104

VORWORT :

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, eine Theorie der ω -dimensionalen Mannigfaltigkeiten und Vektorbündeln zu entwickeln, die hauptsächlich zwei Forderungen erfüllen soll: (1) Die Kategorien der Mannigfaltigkeiten und

Vektorbündel sollen abgeschlossen sein unter den Funktoren der Produktbildung Π , dem Tangentialraum T und dem Funktionenraum S . Weiters soll das Exponentialgesetz gelten, d.h. $S(N \times M, P) \cong S(N, S(M, P))$ für Mannigfaltigkeiten N, M und P .

(2) Im endlich-dimensionalen Fall soll diese Theorie gerade die üblichen C^ω -Mannigfaltigkeiten und C^ω -Vektorbündel liefern.

U. Seip ist es gelungen, eine adäquate Theorie der Mannigfaltigkeiten zu entwickeln, die (1) erfüllt [Seip3]. Der entscheidende Gedanke dabei war, daß er Differenzierbarkeit über die Komposition mit C^ω -Kurven definierte. Unter prä-Mannigfaltigkeiten versteht er dann Teilmengen von folgendvollständigen lokalkonvexen Vektorräumen. Diese versieht er mit der Kelleyfizierung der Spurtopologie und bekommt damit die kartesische Abgeschlossenheit der zugehörigen Kategorie. Unter Mannigfaltigkeiten versteht er dann prä-Mannigfaltigkeiten, welche eine Art Exponentialabbildung besitzen. Für die zugehörige Kategorie kann er die Abgeschlossenheit unter den gewünschten Funktoren, und damit die kartesische Abgeschlossenheit beweisen.

Leider ist diese Theorie nicht angepaßt an (2). Denn Beispiele wie der Graph einer nirgends differenzierbaren Kurve sind Mannigfaltigkeiten in seinem Sinn, mit faserweise 0 -dim. Tangentialraum, aber keine klassischen C^ω -Mannigfaltigkeiten. Dies legt nun nahe, daß es daran liegt, daß Differenzierbarkeit und Topologie nicht genug zusammenpassen. Sozusagen wird die Topologie von den kompakten Mengen erzeugt und die Differenzierbarkeit von den Kurven.

Meine erste entscheidende Neuerung war nun, auch die Topologie mittels der Kurven zu erzeugen. Das liefert die von mir sogenannten Kurven-erzeugten Räume.

Kapitel 1 behandelt die dazugehörige topologische Theorie. Es wird gezeigt, daß die Kategorie der Kurven-erzeugten Räume bicoreflexiv (1.1.), Produkt-abgeschlossen (1.3.) und kartesisch abgeschlossen (1.5.) in der Kategorie der Kelley-Räume liegt. Wobei die Funktionenräume in Analogie zur kompakt-offenen-Topologie die Kurven-offene-Topologie tragen (1.4.). Es wird gezeigt, daß die Objekte Folgen-erzeugt und lokal-wegzusammenhängend sind (1.2.). Schließlich wird die entsprechende Uniformität auf den Funktionenräumen behandelt (1.6.)

Kapitel 2 stellt die nötige Theorie der lokal-konvexen Vektorräume bereit. In (2.1.) werden die gebrauchten bekannten Tatsachen der Theorie der topologischen Vektorräume aufgelistet. (2.2.) behandelt lokal-konvexe Vektorräume, die zugleich Kurven-erzeugt sind. In (2.3.) werden C^∞ -Kurven studiert, und das führt dazu, lokal-konvexe Vektorräume zu betrachten, deren Topologie von den C^∞ -Kurven erzeugt wird (2.4.). Schließlich werden noch Kurvenintegrale behandelt (2.5.).

In Kapitel 3 werden nun Teilmengen von folgendst. lokal-konvexen Vektorräumen betrachtet, von mir sogenannte Vektormengen, die das Analogon zu den Seip'schen prä-Mannigfaltigkeiten sind. Für diese läßt sich Differenzierbarkeit und Topologie über die C^∞ -Kurven definieren (analog zu [Seip3]) und damit der Tangentialfunktort T (3.1.). In (3.2.) werden die Funktionenräume mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in allen Ableitungen auf den C^∞ -Kurven versehen. (3.3.) führt die Whitney'sche Summe und partielle Tangentiale ein. Und in (3.4.) wird mit den zu [Seip3] analogen Beweisen die kartesische Abgeschlossenheit der Kategorie der Vektormengen gezeigt. Damit erhält man also eine Kategorie, die vollständig (3.1.) und abgeschl. unter den gewünschten Funktoren ist und für die das Exponentialgesetz gilt.

Das 4. Kapitel behandelt nun die zweite entscheidende Erweiterung der Seip'schen Theorie, nämlich Vektorbündel. Klassisch sind Vektorbündel durch lokale Trivialisierungen definiert. D.h. lokal über jeden Basispunkt ist das Vektorbündel trivial. Da in meinem Fall die offenen Mengen gerade von den Kurven erzeugt werden, liegt es nahe, Trivialisierungen längs Kurven zu fordern. Verlangt man noch gewisse kanonische Verträglichkeitsbedingungen, dann erhält man die hier betrachteten Vektorbündel (4.1.). In (4.2.) werden dann Pullbacks von Vektorbündel, sogenannte induzierte Bündel und Whitneysummen, betrachtet. (4.3.) enthält die Theorie der Homomorphismenbündel und gipfelt in einem Darstellungssatz für das Kurvenbündel eines Vektorbündels. In (4.4.) werden schließlich das Tangentialbündel und seine kanonischen Teilbündel - das vertikale Bündel und das horizontale Bündel - behandelt.

Kapitel 5 enthält nun die Theorie der Mannigfaltigkeiten. Und zwar wird in (5.1.) eine volle Teilkategorie der Vektormengen, nämlich die Kategorie der prä-Mannigfaltigkeiten, behandelt, die im wesentlichen das Analogon zu den Seip'schen Mannigfaltigkeiten sind, wobei ich noch eine gewisse Homogenitätseigenschaft fordere. Diese Kategorie ist dann abgeschl. unter den geforderten Funktoren, und diese kommutieren bis auf natürliche Isomorphismen. Außerdem werden Vektorbündel über solchen prä-Mannigfaltigkeiten studiert.

In (5.2.) sondere ich schließlich eine weitere Teilkategorie, die der Mannigfaltigkeiten, aus. Objekte sind prä-Mannigfaltigkeiten, deren Tangentialbündel ein Vektorbündel ist. Diese Kategorie ist ebenfalls abgeschlossen unter den Funktoren und Vektorbündelbildung. In (5.3) wird dann gezeigt, daß diese Kategorie auch (2) erfüllt, d.h. im endlich dimensionalen Fall liefert sie gerade die üblichen Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel. Außerdem werden noch Mannigfaltigkeiten über Banachräumen als Beispiele behandelt.

KONVENTIONEN :

Diese Arbeit ist in Kapitel, Subkapitel, Absätze und Punkte gegliedert. Die Punkte numerieren fortlaufend die Bemerkungen, Definitionen und Sätze eines Absatzes. Entsprechende Verweise erfolgen durch Angabe von 4 Zahlen in Klammern. Definitionen werden mit "DEF" angekündigt. Die in Klammern stehenden Ausdrücke in den Definitionen sind die entsprechenden Abkürzungen (z.B.: X heißt Kurven-erzeugter Raum (Kurv.erz.) : $\Leftrightarrow \dots$). Ausdrücke, die in Beweisen in Klammern stehen, sind nähere Erläuterungen der Schlußweise. Das Ende eines Beweises wird durch " \square " gekennzeichnet. "oBdA" heißt "ohne Beschränkung der Allgemeinheit". Eine Aussage gilt "immer wieder" (i.w.) genau dann, wenn zu jedem n ein größeres m existiert, für das sie gilt. Eine Aussage gilt "schließlich" (schl.) genau dann, wenn ein n existiert, so daß sie für alle größeren m gilt. Kategorien werden durch Unterstreichen des entsprechenden Prädikats bezeichnet (z.B.: $\underline{T_2R}$ ist die Kategorie der T_2 -Räume).

Π bezeichnet das kategorielle Produkt und μ das kategorielle Co-Produkt (Summe) und wird auch für 2-fache (Co-)Produkte verwendet ($X \pi Y, X \mu Y$). " $\#$ " heißt, daß das umgebende Polygon kommutiert. Ist ein Morphismus strichliert eingezeichnet, so bedeutet das, daß er existiert und das Diagramm kommutativ macht. \wedge steht für den Allquantor, und \vee für den Existenzquantor und \neg für die Negation.

1. KURVEN-ERZEUGTE RÄUME :

In diesem Kapitel möchte ich solche T_2 (d.h. Hausdorff)-Räume näher untersuchen, deren Topologie durch die Kurven in ihnen gegeben ist. Es seien im folgendem alle Räume T_2 .

1.1. COREFLEXIVITÄT :

1.1.1. Kurvifizierung als Funktor :

Analog zur Kelleyifizierung möchte ich nun folgende Modifikation der Topologie betrachten :

1.DEF: Sei X ein T_2 -Raum, dann bezeichne $\text{Kurv} X$ (die Kurvifizierung von X) die selbe Punktmenge wie von X versehen mit der final-Topologie bzgl. der stetigen Kurven von I nach X . Wobei I das Einheitsintervall ist.

Da die Topologie von $\text{Kurv} X$ feiner ist als die ursprüngliche, ist $\iota_X: \text{Kurv} X \rightarrow X, x \mapsto x$ stetig und somit ein Bimorphismus in der Kategorie $\underline{T}_2\mathbb{R}$ der T_2 -Räume.

Als Mitteilungszeichen für stetige Kurven von I nach X verwende ich in Zukunft immer den Buchstaben c .

Die $\text{Kurv} X$ -Topologie läßt sich wie folgt beschreiben:

2.LEMMA: O ist $\text{Kurv} X$ -offen $\Leftrightarrow \bigwedge_c c^{-1}(O)$ ist I -offen

A ist $\text{Kurv} X$ -abg. $\Leftrightarrow \bigwedge_c c^{-1}(A)$ ist I -abg.

$f: \text{Kurv} X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow \bigwedge_c f \circ c: I \rightarrow Y$ ist stetig

Diese Aussagen sind völlig evident, da dies gerade charakterisierende Eigenschaften der final-Topologie sind.

Das nächste Lemma besagt, daß I couniversell für Kurvifizierungen von T_2 -Räumen ist.

3.LEMMA: Sei $q: \coprod_{c \in C(I,X)} I \rightarrow \text{Kurv} X$ definiert durch $q(t_c) := c(t)$

dann ist q eine Quotientenabbildung.

\coprod bezeichne das Co-Produkt (Summe) in der Kategorie $\underline{T}_2\mathbb{R}$ und $C(X,Y) := \{f: X \rightarrow Y \text{ ist stetig}\}$.

BEWEIS: q ist surj.: $x \in X \Rightarrow \text{konst}_x: I \rightarrow X$ ist stetig und $q(\text{konst}_x) = x$.

q ist Quotientenabb.: O sei $\text{Kurv} X$ -off. \Rightarrow

$\bigwedge_c q^{-1}(O) \cap I_c = c^{-1}(O)$ ist I -off. $\Rightarrow q^{-1}(O)$ ist off.

D.h. $\text{Kurv} X = (\coprod_c I) / \sim$ wo $t_c \sim t'_c, :\Leftrightarrow c(t) = c'(t')$. \square

1.1.2. Kurven-erzeugte Räume als Kategorie :

Mittels Kurv können wir nun die gewünschten Räume definieren :

1.DEF: X heißt Kurven-erzeugter Raum (Kurv.erz.) $:\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow X = \text{Kurv } X$$

D.h. wegen 1.1.1.2.: 0 ist off. $\Leftrightarrow \bigwedge_c c^{-1}(0)$ ist off.

bzw. A ist abg. $\Leftrightarrow \bigwedge_c c^{-1}(A)$ ist abg.

bzw. $f: X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow \bigwedge_c f \circ c$ ist stetig

Das nächste Lemma liefert die Universalität von ι_X :

2.LEMMA: X sei Kurv.erz. \Rightarrow

$f: X \rightarrow Y$ ist stetig $\Leftrightarrow f: X \rightarrow \text{Kurv } Y$ ist stetig

BEWEIS: Sei vorerst $X:=I$. Wegen der Definition d.

Topologie von $\text{Kurv } Y$ als final-Top. bzgl. $C(I, Y)$ gilt:
 $C(I, Y) = C(I, \text{Kurv } Y)$ und somit gilt das Lemma für $X=I$.

Sei nun X beliebig Kurv.erz. (d.h. $X=\text{Kurv } X$) dann gilt:

$f: X=\text{Kurv } X \rightarrow Y$ stetig $\Leftrightarrow \bigwedge_c f \circ c: I \rightarrow Y$ stetig \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow \bigwedge_c f \circ c: I \rightarrow \text{Kurv } Y$ stetig $\Leftrightarrow f: X=\text{Kurv } X \rightarrow Y$ stetig \square

Somit erhalten wir folgenden

3.SATZ: (1) Kurv.erz. ist die bicoreflexive Hülle von I .
 $(\text{Kurv } X, \iota_X)$ ist die Coreflexion von X .

(2) Kurv.erz. ist Quotienten- und Colimiten-abgeschl. und somit covollständig.

(3) $\text{Kurv}: \underline{T}_2\mathbb{R} \rightarrow \text{Kurv.erz.}$ ist ein Funktor, der Limiten erhält. Somit ist Kurv.erz. vollst., und die Limiten in Kurv.erz. sind die Kurv-ifizierungen der Limiten in $\underline{T}_2\mathbb{R}$.

BEWEIS: (1) ι_X ist universeller Pfeil und Bimorphismus nach obigem und somit eine Bicoreflexion. Kurv.erz. ist die bicoreflexive Hülle von I , da nach 1.1.1.3. sich jeder Kurv.erz. Raum als Quotient einer Summe von I darstellen läßt. [Herrlich-Strecker:285]

(2) Als monocoreflexive Teilkategorie ist Kurv.erz. abgeschlossen bzgl. Quotienten und Colimiten. [Herrlich-Strecker:282]

(3) Kurv ist als Corefektor ein Funktor und erhält Limiten. [Herrlich-Strecker:280] \square

BEMERKUNG: Die Kategorie Kurv.erz. ist in gewisser Weise dual zur Kategorie $\underline{\text{kpT}}_2\mathbb{R}$ der kompakten T_2 -Räume, denn diese ist die epireflexive Hülle von I .

1.2. TOPOLOGISCHE EINORDNUNG :

In diesem Kapitel möchte ich die Zusammenhänge zwischen Kurvenerzeugtheit und anderen topologischen Eigenschaften studieren.

1.2.1. Eigenschaften, die aus Kurv. erz. folgen :

Als erstes einen Satz, der den Zusammenhang zu anderen Erzeugtheitsbegriffen herstellt.

1. SATZ: Kurv. erz. \subseteq Flg. erz. (\subseteq kp. erz.)

Wobei Flg. erz. heißt, daß die abg. Mengen gerade die Folgen-abgeschl. sind. (D.h. der Raum trägt die final-Top. bzgl. der konvergenten Folgen.)

Und kp. erz. heißt, daß die abg. Mengen gerade die kompakt-abg. (d.h. der Durchschnitt mit kp. Mengen ist abg.) sind. (D.h. der Raum trägt die final-Top. bzgl. der kp. Teilmengen.)

BEWEIS: A ist Flg-abg. $\stackrel{Z}{\Rightarrow}$ $Z \cdot A$ ist abg.: Angenommen A ist \neg abg. $\Rightarrow \bigvee_c c^{-1}(A)$ ist \neg abg. $\Rightarrow \bigvee_t \bigvee_n t_n \in c^{-1}(A), t \in c^{-1}(A) \Rightarrow c(t_n) \rightarrow c(t), c(t_n) \in A, c(t) \notin A \Rightarrow^n$ Widerspr. zu A Flg-abg. \square

2. Die ein wenig stärkere Eigenschaft F-Raum (d.h. der Flg-Abschluß stimmt mit dem Gewöhnlichen überein) wird aber nicht mehr impliziert.

Kurv. erz. $\not\subseteq$ F-Raum (\supseteq 1. Abz. A.)

Ein entsprechendes Gegenbeispiel bildet $\varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$. (S.2.2.1.4.)

Eine Beziehung zu den Zusammenhangseigenschaften stellt folgender Satz her :

3. SATZ: Kurv. erz. \subseteq lok. weg-zshg. (\subseteq lok. zshg.)

BEWEIS: Sei $x \in U$ offen, $B := \{ y : \bigvee_c c(I) = U, c(o) = x, c(1) = y \}$ die Weg-Komponente von x in U.

Sei $c: I \rightarrow X$ stetig, $t \in c^{-1}(B) \subseteq c^{-1}(U)$ offen $\Rightarrow c$ verbindet $c(t)$ mit $c(s)$ für s nahe t $\Rightarrow c(s)$ mit x über $c(t)$ verbindbar $\Rightarrow s \in c^{-1}(B)$ für s nahe t $\Rightarrow c^{-1}(B)$ ist offen $\Rightarrow B$ ist Kurven-off. $\Rightarrow B$ ist offen. \square

Als Folgerung ergibt sich, daß für Kurv. erz. Räume alle Unzusammenhangseigenschaften zusammenfallen.

4. FOLGERUNG: X sei Kurv. erz. \Rightarrow

X erbl. unzhg. \Leftrightarrow X total unzhg. \Leftrightarrow X 0-dim. \Leftrightarrow X diskret

Wobei X erbl.unzgh. heißt, wenn die einzigen zusammenhängenden Teilmengen die Punkte sind.

Er heißt total unzgh., wenn der Durchschnitt aller off-abg. Umgebungen eines Punktes trivial ist.

Und er heißt 0-dimensional, wenn eine Basis aus off-abg. Mengen existiert.

BEWEIS: Bekanntlich gilt für T_2 -Räume: diskret \Rightarrow 0.dim. \Rightarrow \Rightarrow total unzgh. \Rightarrow erbl.unzgh.. Es bleibt somit nur z.z.: erbl.unzgh. \Rightarrow diskret. Sei U eine offene, oBdA wegzhg. (da X als Kurv.erz.Raum lok.weg-zshg. ist) Umgebung von x . $\Rightarrow U$ zhg. $\Rightarrow U = \{x\}$ (da X erbl.unzgh.) $\Rightarrow \{x\}$ off. $\Rightarrow X$ diskret. \square

1.2.2. Eigenschaften, aus denen Kurv.erz. folgt :

Zuerst eine eher technische Charakterisierung der Kurv.erz. Räume :

1.SATZ: X ist Kurv.erz. \Leftrightarrow (1) X ist Flg.erz.

$$(2) x_n \rightarrow x \Rightarrow \bigvee_c c(o)=x \wedge c(2^{-n}) = x_n \text{ immer wieder.}$$

Die Bedingung (2) bedeutet, daß sich jede konvergente Folge "homöomorph" durch eine Kurve verbinden läßt, wobei unter Umständen eine Teilfolge zu wählen ist.

BEWEIS: (\Rightarrow) (1) s. 1.2.1.1.

$$(2) x_n \rightarrow x \text{ . Falls } x_n = x \text{ i.w., reicht } c := \text{konst}_x \text{ .}$$

Sonst gilt oBdA $x_n \neq x$ immer $\Rightarrow x_n$ -abg. $\Rightarrow x_n$ -Kurv-abg. $\Rightarrow \bigvee_{c, t_k \rightarrow t} c(t_k) \in \{x_n, \dots\}, c(t) \notin \{x_n, \dots\}, c(t_k) \rightarrow c(t) \Rightarrow \Rightarrow c(t_k) = x_{n_k}, n_k \rightarrow \infty, c(t) = x \Rightarrow$ oBdA $t_k \searrow 0, n_k \nearrow \infty \Rightarrow \Rightarrow$ oBdA $t_k \stackrel{k}{\cong} 2^{-k}$ (Parameterwechsel).

(\Leftarrow) Sei A Kurv-abg., $a_n \in A, a_n \rightarrow x \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \bigvee_c c(o)=x, c(2^{-n}) = a_n$ i.w. $\Rightarrow o \in c^{-1}(A)$ (A Kurv-abg.) $\Rightarrow x = c(o) \in A \Rightarrow A$ Flg-abg. $\Rightarrow A$ abg. (X Flg.erz.). \square

Verschärft man bei den in 1.2.1. hergeleiteten Eigenschaften die Flg.erz.heit zu 1.Abz.A. dann gilt die Umkehrung :

2.SATZ: 1.Abz.A. \cap lok.weg-zhg. \subseteq Kurv.erz.

BEWEIS: Z.z. ist nur (2) vom 1.SATZ. Sei $x_k \rightarrow x$, $\{U_k\}$ eine Umgebungsbasis von x , oBdA \downarrow , weg-zhg. \Rightarrow
 $\Rightarrow \bigwedge_k \bigvee_{n(k)} \bigwedge_{n=n(k)} x_n \in U_k \Rightarrow x_n$ läßt sich mit x_{n+1} in U_k durch eine stetige Kurve c_n verbinden. Sei nun

$$c(t) := \begin{cases} x & \text{für } t \leq 0 \\ c_k(2^{-k+1}t) & \text{für } 2^{-k-1} \leq t \leq 2^{-k} \end{cases}$$
, die Zusammensetzung der Kurven c_k , die immer mehr beschleunigt wird. c ist stetig, da c schließlich in U_k liegt, und $c(0)=x$, $c(2^{-n})=c_n(0)=x_n$. \square

3. Es ist mir nicht bekannt, ob sich das folgendermaßen verschärfen läßt: $\underbrace{F\text{-Raum} \cap \text{lok.weg-zhg.}}_{\cap} \subseteq \text{Kurv. erz.}$
 (Flg. erz.)

Allerdings gilt: $\underbrace{kp.\text{ erz.} \cap \text{lok.weg-zhg.}}_{\cap} \not\subseteq \text{Kurv. erz.}$
 Ein Beispiel liefert $X := \prod_{\mathbb{N}} I$. Denn X ist als $kp.T_2$ -Raum $kp.\text{ erz.}$ und als Produkt $zhg., \text{lok.weg-zhg.}$ Räume lok.weg-zhg. . Aber X ist nicht Flg. erz. und somit nicht Kurv. erz. : Sei nämlich $A := \{(x_i) : x_i = 1 \text{ bis auf höchstens abz. viele}\}$, dann sieht man leicht, daß A Flg-abg. ist. Andererseits ist A $\neg\text{abg.}$, denn $0 \in \bar{A} \setminus A$. \square

Hingegen läßt sich alternativ auch die Zusammenhangseigenschaft verschärfen, um die Umkehrung zu erreichen:

4.SATZ: $\text{Flg. erz.} \cap \text{lok.kontrahierbar} \subseteq \text{Kurv. erz.}$

BEWEIS: Es genügt wieder (2) vom 1.SATZ zu zeigen. Sei $x_k \rightarrow x$ und U eine offene kontrahierbare Umgebung von x , d.h. $H: U \times I \rightarrow U$ stetig, $H(\cdot, 0) = x$, $H(\cdot, 1) = \cdot$, $H(x, \cdot) = x$ existiert. \Rightarrow oBdA $x_k \in U$. Sei $l:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ wie folgt definiert: $l(2^{-n}) := 1$, $l(3 \cdot 2^{-n-1}) := 0$ und dazwischen linear. Und sei

$$c(t) := \begin{cases} x & \text{für } t \leq 0 \\ H(x_n, l(t)) & \text{für } 2^{-n-1} \leq t \leq 2^{-n} \end{cases} \Rightarrow c(2^{-n}) = x_n$$

c ist stetig in t : ($t \neq 0$) $H(x_n, \cdot), l$ sind stetig und passen.

($t = 0$) Sei U' eine off. Umgebung von x , oBdA $U' \subseteq U$. Da $H(x, \cdot) = x$ gilt $\{x\} \times I \subseteq H^{-1}(U') \Rightarrow \bigvee_W$

W off. Umgebung von x , $W \times I \subseteq H^{-1}(U')$ (weil I $kp.$) \Rightarrow

$\bigwedge_t H(x_n, t) \in U'$ für $x_n \in W$, und das ist schließlich der Fall.

$\Rightarrow c(t) \in U'$ schließlich. \square

5. Allerdings muß nicht jeder Kurv. erz. Raum lok. kontrahierb. sein. Kurv. erz. $\not\subseteq$ lok. einf. zshg. \supseteq lok. kontrahierbar

Ein Beispiel bildet $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n^{-1} \cdot X_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ wo $X_1 := \{x + (1, 0) : \|x\|_2 = 1\}$

Denn X ist als 1. Abz. A. und lok. weg-zshg. Raum Kurv. erz., aber wegen $n^{-1} \cdot X_1 \cong S^1 \neq 0$ ist er nicht lok. einf. zshg.. \square

6. Schließlich stellt sich die Frage, ob für Kurv. erz.

Räume irgendwelche Trennungseigenschaften zusammenfallen.

Daß dem nicht so ist, sieht man an Hand von Beispielen,

die 1. Abz. A., lok. weg-zshg und somit Kurv. erz. sind. Die

angegebenen Nummern beziehen sich auf [Steen/Seebach]

$T_2 \neq T_3$ Bsp. 74 ; $T_3 \neq T_4$ Bsp. 82 ; $kp T_4 \not\subseteq$ metrisch Bsp. 107.

1.2.3. Kurven mit anderer Domäne :

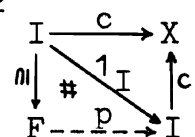
In diesem Absatz möchte ich die Frage behandeln, inwie= weit es bei der Kurv. erz. heit darauf ankommt, daß die Kurven I als Domäne haben. Der folgende Satz zeigt, daß man I durch sehr viel ersetzen kann.

1. SATZ: Sei F Kurv. erz., $T_{3\frac{1}{2}}$, \neg diskret \Rightarrow

\Rightarrow final-Top. bzgl. $C(F, X) = \text{Top. von Kurv } X$.

BEWEIS: (\Rightarrow) Sei A Kurv-abg., $f: F \rightarrow X$ stetig $\Rightarrow c^{-1}(f^{-1}(A)) = (f \circ c)^{-1}(A)$ ist abg. für $c: I \rightarrow F$ stetig $\Rightarrow f^{-1}(A)$ ist abg. (F ist Kurv. erz.) $\Rightarrow A$ ist final-Top. bzgl. $C(F, X)$ -abg..

(\Leftarrow) Sei A final-Top. bzgl. $C(F, X)$ -abg., $c: I \rightarrow X$ stetig. Weil F lok. weg-zshg und \neg diskret ist läßt sich I in F einbetten \Rightarrow oBdA $I \subseteq F$. Weil F ein $T_{3\frac{1}{2}}$ -Raum und I kp ist läßt sich 1_I auf F fortsetzen, d.h.:



$\Rightarrow \text{cop}: F \rightarrow X$ ist stetig \Rightarrow

$\Rightarrow (\text{cop})^{-1}(A)$ F-abg. $\Rightarrow c^{-1}(A) = I \cap (\text{cop})^{-1}(A)$ ist abg. \Rightarrow

$\Rightarrow A$ ist Kurv -abg.. \square

1.3. PRODUKTE :

In diesem Kapitel geht es darum eine genauere Vorstellung davon zu bekommen, wie das Produkt in der Kategorie Kurv. erz. aussieht, von dem wir ja wissen, daß es die Kurvifizierung des gewöhnlichen Produkts in \underline{T}_2R ist.

1.3.1. Topologische Produkt Kurv. erz. Räume :

1. Zuerst einmal ein Beispiel, daß man sich das Kurvifizieren beim Produkt nicht schenken kann. D.h.:

Seien X, Y Kurv. erz. $\nrightarrow X \times Y$ ist Kurv. erz..

Für $X := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$ und $Y := \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ wird diese Aussage in 2.2.2.3. bewiesen.

Daraus läßt sich nun leicht folgern, daß auch das Quadrat eines Kurv. erz. Raumes nicht Kurv. erz. sein muß. D.h.:

Sei X Kurv. erz. $\nrightarrow X \times X$ ist Kurv. erz.

Sei nämlich $Z := X \sqcup Y \Rightarrow Z^2 = X^2 \sqcup (X \times Y) \sqcup (Y \times X) \sqcup Y^2$ und Z ist als Summe Kurv. erz. Räume wieder Kurv. erz.. Wäre Z^2 Kurv. erz. dann auch der Summand $X \times Y$ und dies ist ein Widerspruch zu obigen. \square

Unter einer Kompaktheitsbedingung für einen Raum folgt aber doch die Entbehrlichkeit der Kurvifizierung:

2. SATZ: X, Y seien Kurv. erz., X sei lok. Flg.-kp. \Rightarrow
 $\Rightarrow X \times Y$ ist Kurv. erz..

BEWEIS: Es genügt die beiden Bedingungen in 1.2.2.1. zu verifizieren. (1) $X \times Y$ ist Flg. erz. weil X, Y Flg. erz. und X lok. Flg.-kp. [Engelking:271]

(2) $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Rightarrow x_n \rightarrow x \Rightarrow \bigvee_{c_x} c_x(o) = x$
und $c_x(2^{-n}) = x_n$ i.w.. Sei $y'_n := y_{k_n}$ wo $k_n :=$
 $:= \max \{ i \leq n : c(2^{-i}) = x_i \} \Rightarrow y'_n \rightarrow y \Rightarrow \bigvee_{c_y} c_y(o) = y$
und $c(2^{-n}) = y'_n$ i.w. \Rightarrow oBdA $c_y(2^{-k_n}) = y_{k_n}$ i.w. \Rightarrow
 $c := \langle c_x, c_y \rangle : I \rightarrow X \times Y$ ist stetig, $c(2^{-n}) = (x_n, y_n)$ i.w.
 $c(o) = (x, y)$. \square

3. Es wäre hier wohl noch zu erwähnen, daß für Flg. erz. Räume die lok. kp. heit die lok. Flg.-kp. heit impliziert. Denn sei K eine kp. Umgebung von $x \Rightarrow K$ ist abg $\Rightarrow K$ Flg. erz., abz. kp. $\Rightarrow K$ Flg. kp [Engelking:266] . \square

1.3.2. Kompakt erz. Produkte :

Obiges Gegenbeispiel und Satz waren nicht besonders überraschend, denn Ähnliches gilt ja auch für die Kategorie kp.erz.. Der folgende schöne Satz besagt nun, daß das Kelleyfizieren für das Produkt Kurv.erz. Räume schon ausreicht um seine Kurv.erz.heit zu gewährleisten. D.h.:
 X, Y seien Kurv.erz. $\Rightarrow k(X \times Y)$ ist Kurv.erz., oder da $k(X \times Y)$ ja gerade das Produkt in kp.erz. ist:

1.SATZ: Kurv.erz. ist endl.Produkt abgeschl. in kp.erz.

BEWEIS: Beim Kelleyfizieren k bleiben konvergente Folgen und stetige Kurven die gleichen, wegen der universellen Eigenschaft bzgl. $kp.(erz.)$ Räume und der $kp.$ heit von I und $\{1, 1/2, 1/3, \dots, 0\}$. Somit ist (2) von 1.2.2.1. erfüllt (s.auch 1.3.1.2.). Nun zu (1) von 1.2.2.1.:

Sei A in $k(X \times Y)$ Flg-abg. $\Rightarrow A$ ist $X \times Y$ -Flg-abg.. Angenommen $A \neg kp$ -abg. $\Rightarrow \bigvee_{K_X, K_Y \text{ kp.}} A \cap (K_X \times K_Y)$ ist \neg abg ^{1.3.1.2.}
 $K_X \times K_Y$ Flg.erz. $\Rightarrow \bigvee_{a_n} a_n \in A \cap (K_X \times K_Y), a_n \rightarrow a \notin A \Rightarrow$
 $\Rightarrow A \neg$ Flg-abg. \Rightarrow Widerspruch. \square

2. Dieser Satz läßt sich aber leider nicht auf ∞ viele Faktoren übertragen wie folgendes Beispiel zeigt.

$X := \prod \{0, 1\} \Rightarrow X$ ist $kp.$ $\Rightarrow kX = X$. Aber X ist \neg Kurv.erz.:
 $x_n := \overset{\mathbb{N}}{(0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots)} \Rightarrow x_n \rightarrow 0$. Angenommen: $\bigvee_c c(0) = 0$
 $c(2^{-n}) = x_n$ i.w. $\Rightarrow c_n := pr_n \circ c : I \rightarrow \{0, 1\}$ stetig, $c_n(0) = 0$
 $\Rightarrow c_n(\cdot) = 0 \Rightarrow c(\cdot) = 0 \Rightarrow$ Widerspruch zu $c(2^{-n}) \neq 0$ i.w.. \square

1.4. FUNKTIONENRÄUME :

1.4.1. Homfunktor als Funktor :

In diesem Kapitel geht es darum, auf $C(X,Y)$ eine geeignet schöne Topologie zu setzen, derart daß $C : \underline{T}_2\mathbb{R}^{op} \times \underline{T}_2\mathbb{R} \rightarrow \underline{T}_2\mathbb{R}$ ein Funktor wird.

1.DEF: $C_{Kurv}(X,Y) := (C(X,Y), \{N_{c,U}\}_{c,U} \text{ Y-off als Subbasis})$
 wo $N_{c,U} := \{f : f(c(I)) = U\}$.

Das definiert also sozusagen die Kurven-offene - Topologie, die zwischen Pkt-off- und kp-off- Topologie liegt.

2.SATZ: $C_{Kurv} : \underline{T}_2\mathbb{R}^{op} \times \underline{T}_2\mathbb{R} \rightarrow \underline{T}_2\mathbb{R}$ ist ein Funktor.

d.h.: $f: Y \rightarrow Y'$ stetig $\Rightarrow f_*: C_{Kurv}(X,Y) \rightarrow C_{Kurv}(X,Y')$ stetig
 wo $f_* = C_{Kurv}(X,f)$ durch $f_*(g) := fog$ definiert ist.

und $g: X' \rightarrow X$ stetig $\Rightarrow g^*: C_{Kurv}(X',Y) \rightarrow C_{Kurv}(X,Y)$ stetig
 wo $g^* = C_{Kurv}(g,Y)$ durch $g^*(f) := gof$ definiert ist.

BEWEIS: $(f_*)^{-1}N_{c,U'} = \{g: fog \in N_{c,U'}\} = N_{c,f^{-1}(U')} \text{ off.}$
 $(g^*)^{-1}N_{c,U} = \{f: fog \in N_{c,U}\} = N_{goc,U} \text{ off. } \square$

1.4.2. Zusammenhang zur kp-off-Topologie :

1.SATZ: X,Z seien Kurv.erz., $f: Z \rightarrow C(X,Y) \Rightarrow$

f ist stetig bzgl. der kp-off-Top. \Leftrightarrow

$\Leftrightarrow f$ ist stetig bzgl. der Kurv-off-Top.

BEWEIS: Sei vorerst $Z:=I$; f stetig bzgl. der Kurv-off-Top.

Angenommen: f nicht stetig bzgl. der kp-off-Top. $\Rightarrow \exists t_n \xrightarrow{\vee} t$
 $f(t_n) \not\rightarrow f(t) \Rightarrow \exists U' \text{ U'off-Umgebung von } f(t), f(t_n) \notin f(t_n) \text{ i.w.}$

$\Rightarrow \text{oBdA } U = N_{K,U}, f(t_n)K \not\subseteq U, f(t)K \subseteq U \Rightarrow \exists k_n \xrightarrow{\vee} k \in K$
 $f(t_n)(k_n) \notin U \Rightarrow \text{oBdA } k_n \rightarrow k \in K \text{ (K Flg-kp.)} \Rightarrow$

$\bigvee_c c(o)=k, c(2^{-n})=k_n \text{ i.w.} \Rightarrow f(t)oc: I \rightarrow Y \text{ (X Kurv.erz.)}$

$f(t)(c(o))=f(t)(k) \in U \Rightarrow \text{oBdA } (c \text{ Einschränken auf Teil-}$

intervall) $(f(t) \circ c)I \subseteq U \Rightarrow f(t) \in N_{c,U} \Rightarrow f(t_n) \in N_{c,U}$

schließlich (f stetig) $\Rightarrow f(t_n)(k_n) \in U \text{ i.w.} \Rightarrow$

Widerspr..Die Umkehrung gilt klarerweise, da die

kp-off-Top. feiner ist als die Kurv-off-Top..

Sei nun Z beliebig Kurv.erz.: \Rightarrow

f ist kp-off-Top.-stetig $\Leftrightarrow \bigwedge_c f \circ c$ ist bzgl. der

kp-off-Top. stetig $\Leftrightarrow \bigwedge_c f \circ c$ ist bzgl. der Kurv-off-

Top. stetig $\Leftrightarrow f$ ist bzgl. der Kurv-off-Top. stetig. \square

2.FOLGERUNG: X sei Kurv.erz. \Rightarrow

$$\text{Kurv}(C(X,Y), \text{kp-off-Top}) = \text{Kurv } C_{\text{Kurv}}(X,Y) =: K(X,Y)$$

BEWEIS: Nach obigen Satz besitzen $C_{\text{Kurv}}(X,Y)$ und $(C(X,Y), \text{kp-off-Top})$ die gleichen stetigen Kurven und somit stimmen die final-Topologien bzgl. der stetigen Kurven überein, und das ist ja gerade die Kurvifizierung. \square

Es zeigt sich also, daß, falls man sich auf Kurv.erz. Räume beschränkt, die kp-off-Top. und die Kurv-off-Top das gleiche liefern. Der Vorteil der Letzteren besteht allerdings darin, daß sie den Kurv.erz. Räumen eher angepaßt ist, dies wird sich in den Beweisen des nächsten Kapitels deutlich zeigen. Für die praktischen und theoretischen Fragen ist es besser, eine gröbere Topologie zu konstruieren, die dann universell zu einer schönen Topologie verfeinert wird.

1.5. KARTESISCHE ABGESCHLOSSENHEIT :

In diesem Kapitel seien X, Y, Z als Kurv. erz. Räume vor-
ausgesetzt. Für solche will ich das Exponentialgesetz
 $X^{Z \times Y} \cong (X^Y)^Z$ beweisen, wobei X^Y synonym für $K(X, Y)$ steht.
Das besagt kategoriell ausgedrückt, daß $(\pi_Y, k(Y, \cdot))$
ein Paar adjungierter Funktoren ist.

1.5.1. Die Adjunktion :

Als erstes beweise ich, daß die Einheit ins_X der
Adjunktion stetig ist :

1.SATZ: $\text{ins}_X : X \rightarrow C_{\text{Kurv}}(Y, X \pi Y)$ ist stetig
wobei $\text{ins}(x)(y) := (x, y)$.

BEWEIS: ins ist sinnvoll, denn $\text{ins}(x) : Y \rightarrow X \times Y$ stetig \Rightarrow
 $\Rightarrow \text{ins}(x) : Y \rightarrow X \pi Y := \text{Kurv}(X \times Y)$ ist stetig.

Sei nun $X := I \Rightarrow \text{ins}_X$ ist stetig:

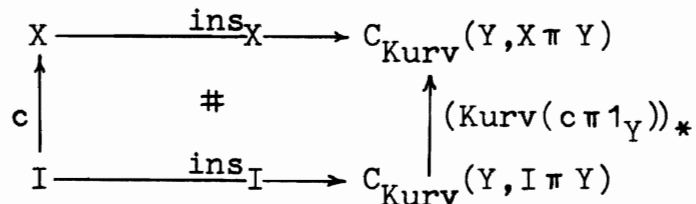
Es ist z.z. $\text{ins}_I : I \rightarrow C_{\text{Kurv}}(Y, I \times Y)$ ist stetig, denn
 I ist Kurv. erz., lok. Flg.-kp. $\Rightarrow I \times Y$ ist Kurv. erz. (1.3.1.2.).

Sei also $\text{ins}(t) \in N_{c, U}$, d.h.: $\bigwedge_s \text{ins}(t)(c(s)) = (t, c(s)) \in U$.

$\Rightarrow \bigvee_{U_s, V_s} (t, c(s)) \in U_s \times V_s \subseteq U$, off. $\Rightarrow (c(I) \text{kp}) \bigvee_{s'} U_{s'}$
 $\{U_{s'}\}$ ist endl. TeilüD $\Rightarrow t \in U' := \bigcap U_{s'}$, off.

und $t' \in U' \Rightarrow \bigwedge_s \text{ins}(t')(c(s)) = (t', c(s)) \in U' \times V_s \subseteq U$
 $\Rightarrow \text{ins}(t') \in N_{c, U} \Rightarrow \text{ins}^{-1}(N_{c, U}) \subseteq U' \ni t \Rightarrow \text{ins}$ stetig.

Sei schließlich X beliebig Kurv. erz. dann kommutiert
folgendes Diagramm:



$\Rightarrow \bigwedge_c \text{ins}_X \circ c$ stetig $\Rightarrow \text{ins}_X$ stetig.

Als nächstes beweise ich, daß die Coeinheit ev der
Adjunktion stetig ist.

2.SATZ: $\text{ev}_X : K(Y, X) \pi Y \rightarrow X$ ist stetig
wobei $\text{ev}(f, y) := f(y)$

BEWEIS: Sei wieder vorerst $Y := I$. $\Rightarrow \text{ev}$ ist stetig:

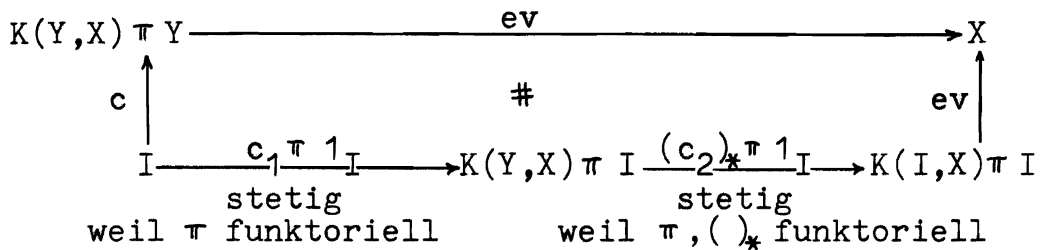
Sei $f(t) = \text{ev}(f, t) \in U$ off. $\Rightarrow t \in f^{-1}(U)$ off. $\Rightarrow \bigvee_J$

J ist off. Intervall, $t \in J \subseteq \bar{J} \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow$

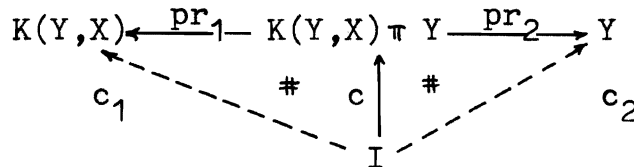
$\Rightarrow (f, t) \in N_{\bar{J}, U} \times J$ off. in $C_{\text{Kurv}}(I, X) \times I \Rightarrow$

$\Rightarrow N_{\bar{J}, U} \times J$ off. in $K(I, X) \pi I$ und $(f, t) \in N_{\bar{J}, U} \times J \subseteq \text{ev}^{-1}(U)$.

Sei nun wieder Y beliebig Kurv. erz., dann
kommutiert folgendes Diagramm:

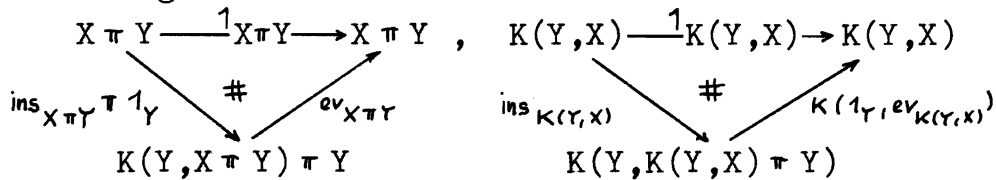


wobei c_1, c_2 durch folgendes universelle Diagramm definiert sind:



und somit ist $\hat{c} \text{ ev} \circ c \text{ stetig} \Rightarrow \text{ev}$ ist stetig. \square

Damit ist nun das folgende Theorem bewiesen, denn die Δ -Gleichungen



der Adjunktion gelten trivialerweise, da sie für Abbildungen gelten.

3. THEOREM: $(. \pi Y, K(Y, .), \text{ins}, \text{ev})$ ist eine Adjunktion, und somit ist Kurv.erz. kartesisch abgeschlossen.

1.5.2. Folgerungen :

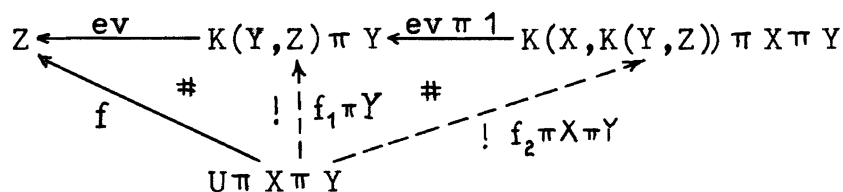
Die 1. kategorielle Folgerung ist, daß der Isomorphismus beim Exponentialgesetz nicht nur ein solcher in der Kategorie Meng. ist, sondern sogar in der Kategorie Kurv.erz. .

1. FOLGERUNG: $K(X \pi Y, Z) \cong K(X, K(Y, Z))$ wobei

$$f \mapsto \check{f} := K(1, f) \circ \text{ins}$$

$$\text{ev} \circ (f \pi 1) =: \hat{f} \leftarrow f$$

BEWEIS: Wie dem folgenden Diagramm zu entnehmen ist, erfüllt $K(X, K(Y, Z))$ die charakterisierende universelle Eigenschaft von $K(X \pi Y, Z)$.



Und somit ist $K(X, K(Y, Z)) \cong K(X \pi Y, Z)$, wobei der Isomorphismus $()^\wedge$ gegeben ist durch:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xleftarrow{\text{ev}} & K(X \pi Y, Z) \pi X \pi Y \\
 \text{ev} \circ (\text{ev} \pi 1) \swarrow & \# & \uparrow (\hat{}) \pi 1 \\
 & & K(X, K(Y, Z)) \pi X \pi Y
 \end{array}$$

, das ist $K(1, \cdot) \circ \text{ins}$,

denn $(\hat{}) = K(1, \text{ev} \circ (\text{ev} \pi 1)) \circ \text{ins}$ als assoziierter Pfeil zu $\text{ev} \circ (\text{ev} \pi 1)$, und somit ist $\hat{f} =$
 $= (K(1, \text{ev} \circ (\text{ev} \pi 1)) \circ \text{ins})(f) = K(1, \text{ev} \circ (\text{ev} \pi 1))(f, \cdot, \cdot) =$
 $= K(1, \text{ev})(f(\cdot), \cdot) = f(\cdot)(\cdot) = \text{ev}(f(\cdot), \cdot) = \text{ev} \circ (f \pi 1)$
 und analog für $(\check{})$. \square

2.FOLGERUNG: $\text{Komp}: K(Y, Z) \pi K(X, Y) \rightarrow K(X, Z)$ ist stetig
 wobei $(f, g) \mapsto f \circ g$

BEWEIS: Wegen der universellen Eigenschaft existiert ein eindeutiges F , das folgendes Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xleftarrow{\text{ev}} & K(X, Z) \pi X \\
 \text{ev} \uparrow & \# & \uparrow F \pi 1 \\
 K(Y, Z) \pi Y & \xleftarrow{1 \pi \text{ev}} & K(Y, Z) \pi K(X, Y) \pi X
 \end{array}$$

Und wie man leicht nachrechnet, ist $F = \text{Komp}$. \square

3. Die Adjungiertheit hätte sich auch aus einer Arbeit von [Vogt] ergeben. Dazu müßte man $\mathcal{Y} := \{I^n : n \in \mathbb{N}\}$ setzen und damit wäre sein $\mathcal{K} = \text{Kurv. erz.}$. Für die kartesische Abgeschlossenheit wäre nur noch sein Axiom 2 - $\text{ev}: (C(I^n, X), \text{kp-off}) \times I^n \rightarrow X$ ist stetig für $X T_2$ - zu verifizieren, und dies ist eine etwas stärkere Aussage als der wesentliche Teil meines Beweises, wobei man zusätzlich noch darauf achten müßte, daß wir verschiedene Funktionenraumtopologien verwenden.

Eine andere Möglichkeit wäre den klassischen Satz für kp. erz. Räume und der kp-off-Top. zu verwenden, denn das Kurv. erz.-Produkt stimmt mit den kp. erz.-Produkt nach 1.3.2.1 überein, und nach 1.4.2.2. ist es in diesem Fall egal welche der beiden Topologien man auf dem Funktionenraum betrachtet. Ich habe mich für meinen Beweis entschieden, da er mir kürzer erscheint als der klassische (man hat ja auch mehr Struktur) und weil ich ähnliche Techniken auch bei der kartesischen Abgeschlossenheit der Vektor-Mengen verwenden werde.

1.6. UNIFORME RÄUME :

Da ich mich im nächsten Kapitel mit topologischen Vektorräumen beschäftigen werde, und diese in kanonischer Weise eine uniforme Struktur tragen, möchte ich jetzt uniforme Räume und deren Funktionen-Räume mit der Kurv-off-Topologie behandeln.

1.6.1. Homfunktor als Funktor :

Zuerst möchte ich eine Uniformität der glm. Konvergenz auf stetigen Kurven für die Funktionenräume definieren :

1.DEF: Sei X ein T_2 -Raum und (Y, \mathcal{U}) ein UR (uniformer Raum)

$Cu(X, Y) := (C(X, Y), \{M_{c, U}\}_{c; u \in \mathcal{U}}$ als Subbasis d. Uniform.)

wobei $M_{c, U} := \{ (f, g) : \bigwedge_t (f(c(t)), g(c(t))) \in U \}$.

$Top(Y, \mathcal{U})$ sei der zu (Y, \mathcal{U}) gehörige topologische Raum.

2.SATZ: X sei ein T_2 -Raum, (Y, \mathcal{U}) ein UR \Rightarrow

$$\Rightarrow C_{Kurv}(X, Top Y) = Top Cu(X, Y)$$

Als kommutatives Diagramm h.d.:

$$\begin{array}{ccc} T_2R^{op} \times UR & \xrightarrow{Cu} & UR \\ \downarrow 1 \times Top & \# & \downarrow Top \\ T_2R^{op} \times T_2R & \xrightarrow{C_{Kurv}} & T_2R \end{array}$$

BEWEIS: Nach Def. stimmen die zugrundeliegenden Mengen überein, es verbleibt somit die Gleichheit der Top. z.z..

Sei also zuerst $f \in N_{c, U} \Rightarrow \bigvee_{W \in \mathcal{U}} \bigwedge_{t \in I} W_{f(ct)} \in U$ (I kp)
 wobei $W_x := \{ y : (x, y) \in W \} \Rightarrow f \in (M_{c, W})_f \in N_{c, U}$

Sei umgekehrt $f \in (M_{c, W})_f \Rightarrow \bigvee_{U^2 \in W}$

Da I kp $\Rightarrow f \circ c$ glm. stetig $\Rightarrow \bigvee_{\delta} / t-t' / < \delta \Rightarrow (f(ct), f(ct')) \in U$

Seien $t_i \uparrow, / t_{i+1} - t_i / < \delta, s_i : I \rightarrow [t_{i+1}, t_i]$ stetig,

$c_i := c \circ s_i \Rightarrow f \in \bigcap N_{c_i, U_{f(ct_i)}} \in (M_{c, W})_f$, denn

$f(c_i t) = f(ct')$ wo $t' = s_i t \Rightarrow / t' - t_i / < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(ct'), f(ct_i)) \in U$. Und $g \in \bigcap N_{c_i, U_{f(ct_i)}} \Rightarrow$

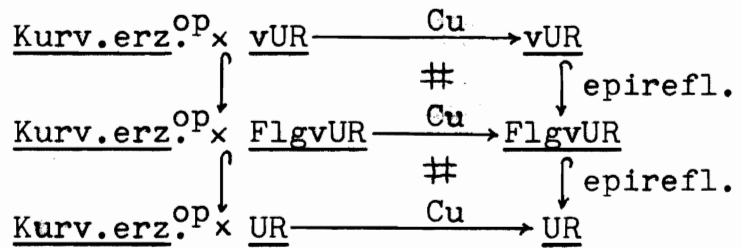
$\Rightarrow (g(ct'), f(ct_i)) \in U \Rightarrow (g(ct'), f(ct')) \stackrel{!}{=} (g(ct'), f(ct_i)) \circ (f(ct_i), f(ct')) \in U^2 \in W. \square$

1.6.2. (Folgen-)Vollständigkeit:

Um später Integration betreiben zu können, werden wir Vollständigkeit oder zumindest Folgen-Vollständigkeit benötigen. Sei also $(\text{Flg})\underline{vUR}$ die epi-reflexive Teilkategorie von \underline{UR} , die aus den (Flg-)vollständigen Räumen besteht.

1.SATZ: X sei Kurv.erz., Y (Flg-)vollst.UR \Rightarrow
 $\Rightarrow \text{Cu}(X,Y)$ ist (Flg-)vollst.UR

Als kommutatives Diagramm h.d.:



BEWEIS: Sei f_i ein Cauchy-Netz \Rightarrow

$\Rightarrow f_i(x)$ ist Cauchy-Netz in $Y \Rightarrow f_i(x) \rightarrow f(x)$ (Y vollst.)

$f_i \rightarrow f$, denn $\bigwedge_{c,U} W^2 \subseteq U \bigvee_{i_0} \bigvee_{i, i' \geq i_0} \bigwedge_{t \in I} (f_i(ct), f_{i'}(ct)) \in W$

$$\begin{aligned}
 & \bigwedge_{t \in I} \bigvee_{i_t = i_0} (f(ct), f_{i_t}(ct)) \in W \\
 \Rightarrow & \bigwedge_{t \in I} (f(ct), f_{i_t}(ct)) = \\
 & = \bigwedge_{t \in I} (f(ct), f_{i_t}(ct)) \circ (f_{i_t}(ct), f_{i_t}(ct)) \in W^2 \subseteq U
 \end{aligned}$$

und f stetig, denn $f \circ c$ ist stetig, da

$$\begin{aligned}
 & (f(ct), f(ct')) = \\
 & = (f(ct), f_{i_t}(ct)) \circ (f_{i_t}(ct), f_{i_t}(ct')) \circ (f_{i_t}(ct'), f(ct')) \in V^3 \subseteq U \\
 & \quad \bigwedge_V \text{ schl.} \quad \bigwedge_V t' \text{ nahe } t \quad \bigwedge_V \text{ schl.}
 \end{aligned}$$

$$f_i \rightarrow f \quad f_i \text{ glm.stetig} \quad f_i \rightarrow f \quad \square$$

3. Ein weiterer wichtiger Begriff ist der des strikten induktiven Limes: Ein induktiver Limes E der E_i heißt strikt ($E = \text{str.} \lim_{\rightarrow} E_i$) : $\Leftrightarrow E_i \xrightarrow{\text{UR}} E$, die i bilden eine gerichtete Menge, und $i < j \Rightarrow E_i \xrightarrow{\text{UR}} E_j$ (d.h. trägt Spurtop.). Es gilt dann: UR erhält str.induktive Lim. von Folgen [Schäfer:58].

2.1.2. Beschränktheit und Vollständigkeit :

1.DEF: $B \subseteq E \text{ lkv} \Rightarrow B$ heißt beschränkt : $\Leftrightarrow \bigwedge_{U \in \mathcal{U}} \bigvee_n B \subseteq nU$

wobei ich \mathcal{U} sowohl für die Uniformität als auch für den o -Umgebungs-Filter schreibe.

2.LEMMA: B ist $\prod E_i$ -beschränkt $\Leftrightarrow \bigwedge_i \text{pr}_i(B) \subseteq E_i$, beschränkt.
 B ist $\coprod E_i$ -beschränkt $\Leftrightarrow \bigvee_{F \text{ endl. } i \in F} B \subseteq \coprod_{i \in F} E_i$, beschränkt.
 B ist $\text{str.} \lim_{\rightarrow} E_i$ -beschr. $\Leftrightarrow \bigvee_n B \subseteq E_n$, beschränkt.

Für den Beweis s.[Schäfer:27,56,59].

3.DEF: E heißt (Flg-)v.lkv : $\Leftrightarrow E$ ist lkv, $\text{UR} E$ ist (Flg)vUR .

4.LEMMA: $\text{v.lkv} \xrightarrow{\text{epirefl.}} \text{Flg-v.lkv} \xrightarrow{\text{epirefl.}} \text{lkv}$
 und $(\text{Flg})\text{v.lkv}$ ist abgeschlossen unter Summen und str.induktiven Lim. von Folgen.

Zum Beweis s.[Schäfer:55,59].

Für später sind auch noch folgende Beispiele wichtig :

5.DEF: X sei ein $T_2R \Rightarrow C(X) := C(X, \mathbb{R})$
 $C_k(X) := \{f \in C(X) : \text{Trg } f \text{ ist kp.}\}$
 $\|f\|_{\infty} := \sup_x |f(x)|$
 $C_b(X) := \{f \in C(X) : \|f\|_{\infty} < \infty\}$
 $U_{\varepsilon}^{\infty} := \{f : \|f \cdot \varepsilon\|_{\infty} < 1\}$ wo $\varepsilon : X \rightarrow \mathbb{R}$

2.2. KURV.ERZ.LOK.KONV.TOPOLOG.VEKTORRÄUME :

2.2.1. Kurvifizierung eines lkv :

In diesem Absatz möchte ich mich damit beschäftigen, wie man einen lkv Kurv.erz. machen kann. Dazu gleich folgender Satz, der besagt, daß es genügt zu Flg-ifizieren.

1.SATZ: X sei lkv \Rightarrow FlgX (=Kurv X) ist Kurv.erz.

BEWEIS: $F : X \times I \rightarrow X, (x,t) \mapsto tx$ ist stetig \Rightarrow

$F : \text{Flg}X \times I = \text{Flg}(X \times I) \rightarrow \text{Flg}X$ ist stetig \Rightarrow FlgX ist lok.kontrahierbar, Flg.erz. ^{1.2.2.4.} \Rightarrow FlgX ist Kurv.erz.. \square

2. Leider muß die Folgifizierung und damit die Kurvifizierung eines lkv kein TVR mehr sein, wie folgendes Bsp. zeigt:

$X := \text{lkv-} \prod_{\mathbb{F}} \mathbb{R}$, dann gilt für $A \subseteq X$:

$$2^{\aleph_0} \quad A \text{ Flg}X\text{-abg.} \Leftrightarrow A \text{ Flg-abg.} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow A \cap \prod_{\mathbb{F} \text{ endl.}} \mathbb{R}$ ist $\prod_{\mathbb{F}} \mathbb{R}$ -abg., denn $x_n \rightarrow x \Rightarrow \{x_n\}$ beschr.

$\Rightarrow \bigvee_{\mathbb{F} \text{ endl.}} x_n \in \prod_{\mathbb{F}} \mathbb{R}$ (2.1.2.2.) $\Rightarrow x_n \rightarrow x$ in $\prod_{\mathbb{F}} \mathbb{R}$ und klarer-

weise auch umgekehrt. Das heißt nun, daß die Abg.heit auf konverg. Folgen sich mittels der Abg.heit auf endl.dim. Teilräumen austesten läßt.

Somit trägt also FlgX die von den endl.dim. Teilräumen induzierte Topologie, und das ist keine VR-Topologie:

Angenommen FlgX ist TVR, oBdA ist die Indexmenge $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cup \mathbb{N}$. e_i seien die Basisvektoren, $A := \{ f(n)^{-1} \cdot (e_n + e_f) : n \in \mathbb{N}, f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \}$

$\Rightarrow A$ Flg-abg., $0 \notin A$. Sei U eine 0-Umgebung \Rightarrow

$\Rightarrow \bigwedge_i r_i \bigvee_o \bigwedge_r \bigwedge_i r_i \quad r e_i \in U, f_o(n) := 1 + \max\{n, [1/r_n]\}$.

Sei n_o so gewählt, daß $r_f^{-1} < f_o(n_o)$, dann ist

$f_o(n_o)^{-1} \cdot e_f \in U$ und wegen $r_n^{-1} < f_o(n_o)$ gilt

$f_o(n_o)^{-1} \cdot e_{n_o} \in U \Rightarrow f_o(n_o)^{-1} \cdot (e_f + e_{n_o}) \in (U+U) \cap A \Rightarrow$

\Rightarrow Addition ist \neg stetig. Widerspruch. \square

Dieser letzte Teil findet sich in [Seip1:32].

Das besagt also: X sei v.lkv $\not\Leftarrow$ FlgX = KurvX ist TVR.

3. Auch genügt es nicht bloß zu Kelleyfizieren, um Kurv.erz.heit zu erlangen, wie das nächste Beispiel zeigt:

$X := \prod_{\aleph_1} \mathbb{R}$ ist ein v.lkv., $A := \{ (x_i) \in \prod \{0,1\} : x_i = 0 \text{ höchst.}$

abzählbar oft. ^{1.2.2.3.} $\Rightarrow A$ Flg-abg., \neg kp-abg. \Rightarrow

A ist Flg-abg in kX , \neg abg in $kX \Rightarrow kX \neg$ Flg.erz. und damit

\neg Kurv.erz.. \square D.h.: X ist v.lkv $\not\Leftarrow$ kX ist Kurv.erz. .

4. Auch müssen Kurv. erz. Räume, die lkv sind, noch nicht F-Räume (im topologischen Sinn) sein, wie das kommende Bsp. zeigt. $X := \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ ist v.lkv, Kurv. erz. (2.2.2.1.).

Aber X ist \neg F-Raum: Sei nämlich $A := \{(1/n, 0, \dots, 0, t, 0, \dots) : t > 0, n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt $0 \in \bar{A} \setminus A$.

Denn eine 0-Umgebungsbasis bilden die Mengen $U_\epsilon^1 := \{(x_n) : \sum |x_n| \epsilon_n < 1\}$ mit beliebigen ϵ . Wähle $n_0 < 1/2 \cdot \epsilon_{n_0}$, $t_0 < 1/2 \cdot \epsilon_{n_0}^{-1}$, dann ist

$$(1/n_0, 0, \dots, 0, t_0, 0, \dots) \in A \cap U_\epsilon^1.$$

Aber 0 ist nicht im Flg-Abschluß von A , denn sei $a^k := (1/n_k, 0, \dots, 0, t_k, 0, \dots) \rightarrow 0 \Rightarrow n_k^{-1} \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \in \text{Bd} A$ (Teilfolge) $1 \leq n_k \uparrow \infty$. $\epsilon_i := \begin{cases} 1/t_k & \text{für } i=n_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow \bigwedge_k a^k \notin U_\epsilon^1$ Widerspr. \square

D.h.: X sei v.lkv $\not\Rightarrow X$ ist F-Raum.

2.2.2. Abgeschlossenheit:

In diesem Absatz möchte ich die Erbllichkeitseigenschaften der Kurv. erz. lkv studieren, dazu folgendes

1. LEMMA: Kurv. erz. lkv ist abgeschlossen unter abg. Teilräumen, Quotienten nach abg. Teilräumen und strikten induktiven Limiten von Folgen.

BEWEIS: Weil in diesen Fällen die induzierte lkv-Topologie mit der üblichen induzierten Topologie übereinstimmt, die entsprechenden Abgeschlossenheitseigenschaften für Flg. erz. Räume gelten und Flg. erz. heit mit Kurv. erz. heit für lkv übereinstimmt, ist nichts mehr z.z..

2. Nun ein Beispiel, daß Teilräume Kurven. erz. lkv nicht Kurv. erz. zu sein brauchen. $X := (C_b(\mathbb{N}), \{U_\epsilon^\infty\}_{\epsilon \rightarrow 0})$
 $Y := C_k(\mathbb{N}) \xrightarrow{lkv} X$.

X Kurv. erz.: Dazu genügt es z.z., daß X Flg. erz. ist. Zu diesem Zweck möchte ich zuerst die konvergenten Folgen charakterisieren:

x^n konverg. $\Leftrightarrow x^n$ konverg. pkw., $\|x^n\|_\infty$ beschr. $\Leftrightarrow x^n$ Cauchyflg.:
 (3 \Rightarrow 2) x^n Cauchyflg. $\Rightarrow x_k^n$ Cauchyflg. $\Rightarrow x_k^n \rightarrow x_k$ (\mathbb{R} vollst.)
 Annahme: $\|x^n\|_\infty$ unbeschr. induktiv \Rightarrow
 $\bigwedge_N \bigvee_{n_N \uparrow \infty, k_N} |x_{k_N}^{n_{N+1}}| \geq \|x^{n_N}\|_\infty + N$

oBdA $k_N \rightarrow \infty$ (sonst wegen $x_{pkw}^n \rightarrow x$ beschränkt)

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &:= 1/N \text{ für } k_N \leq j < k_{N+1} \Rightarrow \varepsilon_j \rightarrow 0, \\ /x_{k_N}^{n_{N+1}} - x_{k_N}^{n_N}/ \cdot \varepsilon_{k_N} &\geq (/x_{k_N}^{n_{N+1}} / - /x_{k_N}^{n_N} /) \cdot \frac{1}{N} \geq \\ &\geq (//x^{n_N} // - /x_{k_N}^{n_N} / + N) \cdot \frac{1}{N} \geq N \cdot \frac{1}{N} = 1 \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow x_{k_N}^{n_{N+1}} - x_{k_N}^{n_N} \notin U_\varepsilon^\infty \Rightarrow x^n \rightarrow x$ Cauchy-Flge.

$$\begin{aligned} \infty \supset K \geq //x^n// \geq /x_{k_N}^{n_N}/ \rightarrow /x_{k_N}/ \Rightarrow /x_{k_N}/ \leq K \Rightarrow //x// \leq K \Rightarrow \\ \Rightarrow x \in C_b(\mathbb{N}) \end{aligned}$$

(2 \Rightarrow 1) $//x^n - x// \leq //x^n// + //x// \leq K \cdot 2$, $x^n - x_{pkw} \rightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \text{oBdA } x=0. \text{ Sei } \varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} \bigvee_{k \geq k_0} \bigwedge_{n \geq n_0} /x_k^n/ < 1/N \\ x_{pkw}^n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n \geq n_0} \bigwedge_{k \leq k_0} /x_k^n/ < \varepsilon_n^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \bigwedge_{n \geq n_0} /x_k^n/ \cdot \varepsilon_k / < 1 \Rightarrow x^n \in U_\varepsilon^\infty \Rightarrow x^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit läßt sich nun zeigen:

A Flg-abg. \Rightarrow A abg.: Angenommen $\bar{A} \setminus A \neq \emptyset \Rightarrow \bigvee_a a \in \bar{A} \setminus A$

\Rightarrow oBdA $a=0$, Sei $B_N := \{x: //x//_\infty \leq N\}$. Ich möchte nun

zeigen: $\bigvee_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon \cap A = \emptyset$, das wäre ein Widerspruch zu $0 \in \bar{A}$. Dazu behaupte ich Folgendes:

$$\bigvee_{k_N \nearrow \infty} \bigvee_{\varepsilon} U_\varepsilon \cap A \cap B_N = \emptyset, \bigwedge_{k \geq k_N} \varepsilon_k \cdot N < 1:$$

(vollst. Induktion) (N=0) $\varepsilon_k := 1/k, k_0 := 1$

(N>0) Nach Ind. Annahme gilt:

$$\bigvee_{k_0 \leq \dots \leq k_N} \bigvee_{\varepsilon \rightarrow 0} U_\varepsilon \cap A \cap B_N = \emptyset, \bigwedge_{k \geq k_N} \varepsilon_k \cdot N < 1$$

Annahme: $\bigvee_{\varepsilon' \rightarrow 0} \bigwedge_{k \leq k_N} \varepsilon'_k = \varepsilon_k \Rightarrow U_{\varepsilon'} \cap A \cap B_{N+1} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigwedge_{r \geq k_{N+1}} a^r \in A, \bigwedge_{k \leq k_N} /a_k^r/ \cdot \varepsilon_k / < 1, //a^r// \leq N+1, \bigwedge_{k \leq r} /a_k^r/ \leq N$

(z.B. durch Wahl von ε^r : $\varepsilon_k^r := \begin{cases} 1/N \text{ für } n_{N+1} < k \leq r \\ \varepsilon_k \text{ sonst.} \end{cases}$)

\Rightarrow oBdA (Diagonalfolge) $a^r \rightarrow a, //a^r// \leq N+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^r \rightarrow a \Rightarrow a \in A, B_N$ ($r \geq k \Rightarrow N \geq /a_k^r/ \rightarrow /a_k/$), U_ε

($k \leq k_N \Rightarrow 1 \geq /a_k^r/ \cdot \varepsilon_k / \rightarrow /a_k/ \cdot \varepsilon_k /$; $k \geq k_N \Rightarrow 1 \geq N \cdot \varepsilon_k \geq /a_k/ \cdot \varepsilon_k /$).

$\Rightarrow a \in U_\varepsilon \cap A \cap B_N = \emptyset$ Widerspr. $\Rightarrow \bigvee_{\varepsilon'} \varepsilon'$ w.o.

$k_{N+1} := \max\{k: \varepsilon'_k \geq (N+1)^{-1}\}$

$$\Rightarrow \emptyset = \bigcup_N U_\varepsilon \cap A \cap B_N = U_\varepsilon \cap A \cap \bigcup_N B_N = U_\varepsilon \cap A.$$

$(C_k(\mathbb{N}), \{U_\varepsilon^\infty\}_{\varepsilon \rightarrow 0})$ ist \neg Flg. erz.:

Sei $A := \{(1/n, \dots, 1/n, n, 0, \dots) : n \in \mathbb{N}\}$, dann gilt
 $0 \in \bar{A} \setminus A$: Sei $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \|\varepsilon\| \leq N \Rightarrow \bigvee_{k_0} \bigwedge_{k \geq k_0} \varepsilon_k < N^{-1} \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\frac{1}{N}, \dots, N, 0, \dots) \in A \cap U_\varepsilon^\infty$

A Flg-abg.: Sei $a^n = (\frac{1}{m_n}, \dots, \frac{1}{m_n}, 0, \dots) \in A, \rightarrow a \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|a^n\|$ beschr. $\Rightarrow m_n$ beschr. $\Rightarrow m_n = a_0^{-1}$ schl.
 $a \in C_k \Rightarrow \text{Trg } a \text{ endl.} \Rightarrow \bigvee_{k'_0} a_{k'_0} = 0 \Rightarrow$
 $a_{k'_0}^n \rightarrow 0 \Rightarrow k_n < k'_0$ schl. $\Rightarrow a^n = a$ schl. $\Rightarrow a \in A \square$

3. Ebenso müssen Summen und Produkte Kurv. erz. lkv nicht wieder Kurv. erz. sein. Als Beispiel dient:

$$X := l^\infty \cap c_k < l^\infty, Y := \bigsqcup_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

X ist als Teilraum eines metr. Raums (l^∞) wieder metrisch und damit Kurv. erz., und Y ist Kurv. erz. nach 1. LEMMA.

$X \oplus Y \neg$ Flg. erz. (und somit \neg Kurv. erz.): Sei

$A := \bigcup_{i, j \geq 1} \{f : \|f - g_{\frac{1}{j}}\|_\infty \leq \frac{1}{i}\} \times \{\frac{1}{i} \cdot 1_{\{j\}}\}$ und $g(k) := \frac{1}{k}$
 $0 \in \bar{A} \setminus A$: $\{U_{\varepsilon'} \times U_\varepsilon^1\}_{\varepsilon' \rightarrow 0, \varepsilon \text{ beliebig}}$ ist 0-Umgeb. basis
 $\Rightarrow \bigvee_{j_0} j_0^{-1} < \varepsilon' \Rightarrow \bigvee_{i_0} 1/\varepsilon(j_0) \cdot i_0^{-1} < 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (f, i_0^{-1} \cdot 1_{\{j_0\}}) \in A$ wo $f(k) := \begin{cases} 0 & \text{für } k \cdot j_0 \geq i_0 \\ (kj_0)^{-1} & \text{sonst} \end{cases}$
 $\|f - g_{\frac{1}{j_0}}\| \leq \frac{1}{i_0}, \|f\| < \frac{1}{j_0} < \varepsilon' \Rightarrow f \in U_{\varepsilon'},$
 $\frac{1}{i_0} \cdot 1_{\{j_0\}} \in U_{\varepsilon'}^1$, da $\sum_k 1/i_0 \cdot 1_{\{j_0\}}(k) \varepsilon_k = 1/i_0 \cdot 1/\varepsilon(j_0) < 1.$
 $\Rightarrow (f, \frac{1}{i_0} \cdot 1_{\{j_0\}}) \in A \cap (U_{\varepsilon'} \times U^1)$

A ist Flg-abg.: $(f_n, \frac{1}{i_n} \cdot 1_{\{j_n\}}) \rightarrow (f, h) \Rightarrow f_n \rightarrow f,$

$\frac{1}{i_n} \cdot 1_{\{j_n\}} \rightarrow h \Rightarrow j_n \rightarrow j_\infty \Rightarrow j_n = j_\infty$ oBdA (Teilfolge.)

(1. Fall) $i_n^{-1} \rightarrow 0 \Rightarrow \|f_n - g_{\frac{1}{j_\infty}}\| \leq i_n^{-1} \rightarrow 0 \Rightarrow f = g_{\frac{1}{j_\infty}} \notin C_k$

Widerspruch.

(2. Fall) $i_n \rightarrow i_\infty \Rightarrow$ oBdA $i_n = i_\infty \Rightarrow$
 $\Rightarrow \|f_n - g_{\frac{1}{j_\infty}}\| \leq \frac{1}{i_\infty} \Rightarrow \|f - g_{\frac{1}{j_\infty}}\| \leq \frac{1}{i_\infty},$

$h = \frac{1}{i_\infty} \cdot 1_{\{j_\infty\}} \Rightarrow (f, h) \in A \square$

2.2.3. Kurv.erz.lkv als induktive Limiten :

In diesem Absatz möchte ich eine Beschreibung geben, wie sich die Kurv.erz.lkv aus kleineren Räumen zusammensetzen lassen.

1.SATZ: X ist Kurv.erz. $\Leftrightarrow X = \varinjlim_{\mathbb{R}} Y_i$ und die Y_i sind separable Kurv.erz.Räume.

BEWEIS: $(\Leftarrow) Y_i$ Kurv.erz. $\Rightarrow Y_i$ Flg.erz. $\Rightarrow X$ Flg.erz. $\Rightarrow X$ Kurv.erz.

$(\Rightarrow) X = \varinjlim_{\mathbb{R}} Y \subset X, Y$ separabel, Flg.erz. (z.B. edim)

A abg in $\varinjlim_{\mathbb{R}} Y \Leftrightarrow A \cap Y$ abg in $Y \stackrel{\text{Beh.}}{\Rightarrow}$

A Flg-abg. $\Leftrightarrow A$ abg : $x_n \rightarrow x \Rightarrow \langle x_n \rangle^- =: Y$

$Y \subset X$, separabel, Flg.erz., da

$\langle x_n \rangle_{\mathbb{Q}\text{-VR}} \subseteq Y$ und Y abg. \square
dicht

2. Man kommt aber nicht mit Limiten von Folgen aus, denn dann wären alle Kurv.erz.lkv separabel, und das stimmt z.B. für Hilberträume offensichtlich nicht.

3. Auch muß nicht jeder abz.dimensionale lkv Kurv.erz. sein, wie das Beispiel $(C_K(\mathbb{N}), \{U_\varepsilon^{\infty}\}_{\varepsilon \rightarrow 0})$ zeigt (2.2.2.2.).

4. Summarisch kann man also folgende Beispiele für Kurv.erz.lkv aufzählen: metrisierbare lkv (z.B.: Banach-Räume, Frechet-Räume (im funktionalanalytischen Sinn), $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$, $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$), strikte induktive Limiten metrisierbarer lkv (Testfunktionen, $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$)

5. Gegenbeispiele bilden: $(\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}, \{U_\varepsilon^{\infty}\}_{\varepsilon \rightarrow 0})$, $(C_K, \|\cdot\|_{\infty}) \times \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$,

$\prod_{\mathbb{M}} \mathbb{R}$ für $/M/ \triangleright \aleph_0$: Es gilt $x^n \rightarrow 0 \Leftrightarrow x_{pkw}^n \rightarrow 0$, $\text{Trg } x^n$ beschr..

Sei $A := \{x^F : F \text{ endl.}\}$ $x_i^F := \begin{cases} 0 & \text{für } i \notin F \\ /F/-2 & \text{sonst.} \end{cases}$, dann

ist A Flg-abg aber $0 \in \bar{A} \setminus A$: Sei ε beliebig \Rightarrow

$M := \bigcup_n \{i : / \varepsilon_i / < n\} \Rightarrow \bigvee_{n_0} \{i : / \varepsilon_i / < n_0\} \ni \aleph_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigvee_{F \subseteq M_0} /F/=n_0 \Rightarrow \prod_{\mathbb{M}_0}$

$\Rightarrow x^F \in A \cap U_\varepsilon^1 \quad \square$

$\prod_{\mathbb{M}} \mathbb{R}$ für $/M/ \triangleright \aleph_0$: Sei $A := \{x \in \prod \{0,1\} : x_i = 0 \text{ höchst. abz.oft.}\} \Rightarrow$

A Flg-abg. aber $0 \in \bar{A} \setminus A$ (siehe 1.2.2.3.) \square

2.3. DIFFERENZIERBARKEIT :

E,F,G sollen im folgenden immer Flg-v.lkv sein.

2.3.1. Differenzierbare Kurven :

1.DEF: $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ heißt differenzierbar (diffb.) $:\Leftrightarrow$
 $:\Leftrightarrow \bigvee_{dc} dc : \mathbb{R} \rightarrow E, dc(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(t+s) - c(s)}{t}$
 c heißt stetig diffb. (C^1) $:\Leftrightarrow dc$ ist stetig

Die grundlegenden Eigenschaften der diffb. Kurven sammelt die

- 2.FOLGERUNG: (1) c diffb. $\Rightarrow c$ stetig, dc eindeutig
 (2) c konst. $\Rightarrow c$ diffb., $dc = 0$
 (3) c diffb., l stetig, lin. $\Rightarrow l \circ c$ diffb.,
 $d(l \circ c) = l \circ dc$
 (4) (Fundamentallemma) c diffb. \Rightarrow
 $\Rightarrow c(b) - c(a) \in (b-a) \cdot \langle dc(t) : a < t < b \rangle_{kv., abg.}$

BEWEIS: (1) $s_n \rightarrow s \Rightarrow t_n := s_n - s \rightarrow 0 \Rightarrow c(s_n) = c(s + t_n) \rightarrow c(s)$
 (da $dc(s)$ existiert) $\Rightarrow c$ stetig.
 $dc(s)$ ist als Limes in einem T_2R eindeutig.

(2) $dc(s) := 0 \Rightarrow c$ diffb., $dc = 0$

(3) $d(l \circ c)(s) := (l \circ dc)(s) = l(dc(s)) =$
 $= l(\lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(t+s) - c(s)}{t}) = \lim_{t \rightarrow 0} l(\frac{c(t+s) - c(s)}{t}) =$
 $= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(l \circ c)(t+s) - (l \circ c)(s)}{t} \Rightarrow l \circ c$ diffb., $d(l \circ c) =$
 $l \circ dc$

(4) $K := \langle dc(t) : a < t < b \rangle_{kv., abg.}$ oBdA $a < b$
 Angenommen $(c(b) - c(a)) / (b-a) \notin K$ Hahn-Banach \Rightarrow
 $\bigvee_{l \in E'} l((c(b) - c(a)) / (b-a)) \notin l(K) \Rightarrow$
 $\Rightarrow ((l \circ c)(b) - (l \circ c)(a)) / (b-a) \notin \langle l \circ dc(t) : a < t < b \rangle_{konv.}$
 $d(l \circ c)(t)$

Widerspruch zum Mittelwertsatz für $l \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2.3.2. Partielle Differenzierbarkeit :

1.DEF: $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ heißt partiell diffb. $:\Leftrightarrow \bigwedge_s f(s, \cdot), f(\cdot, s)$
 diffb.

$d_1 f(\cdot, s) := d(f(\cdot, s)), d_2 f(s, \cdot) := d(f(s, \cdot))$

f heißt stetig part.diffb. $:\Leftrightarrow d_1 f : \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ stetig.

Folgendes eher technisches Lemma wird später für den Beweis des Exponentialgesetzes benötigt:

2.LEMMA: $f: \mathbb{R} \times I \rightarrow E$ sei stetig, $d_1 f$ existiere und sei stetig
 $\Rightarrow (f(t+s, \cdot) - f(s, \cdot))/t \xrightarrow{\text{glm.}} d_1 f(s, \cdot)$

BEWEIS: Sei s fix, $F(t, r) := \begin{cases} \frac{f(t+s, r) - f(s, r)}{t} & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Um das Lemma zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß
 $F: \mathbb{R} \times I \rightarrow E$ stetig ist.

Sei $c_{t,r}(q) := \begin{cases} \frac{f(qt+s, r) - f(s, r)}{t} - q \cdot d_1 f(s, r) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow$

$c_{t,r}$ ist diffb., $dc_{t,r}(q) = d_1 f(qt+s, r) - d_1 f(s, r) =: C(t, r, q)$

$\Rightarrow C: \mathbb{R} \times I \times \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig $\Rightarrow \bigwedge_{K \text{ kv., abg., } o\text{-Umgebung } r \in I} \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{/t/, /q/, /r'-r/ < \varepsilon} \Rightarrow C(t', r', q') \in K$

falls also $/r'-r/ < \varepsilon, /q' - 1/ < 1, /t' - 1/ < \varepsilon^2 \Rightarrow C(t', r', q') =$

$= C(t'/\sqrt{|t'|}, r', q'/\sqrt{|t'|}) \in K$ Fundamentallemma \Rightarrow
 $= F(t', r') = c_{t', r'}(1) - c_{t', r'}(0) \in \langle dc_{t', r'}(q') : 0 < q' < 1 \rangle_{\text{kv.}}^-$

$C(t', r', q') \in K \quad \square$

3.LEMMA: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ stetig partiell diffb., $\Delta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f \circ \Delta$ stetig diffb., $d(f \circ \Delta) = (d_1 f + d_2 f) \circ \Delta$

BEWEIS: $o \xrightarrow{\text{z.z.}} (f(s+t, s+t) - f(s, s))/t - d_1 f(s, s) - d_2 f(s, s) =$
 $= (f(s+t, s+t) - f(s, s+t))/t - d_1 f(s, s) + \rightarrow 0 \quad (*)$

$+ (f(s, s+t) - f(s, s))/t - d_2 f(s, s) \rightarrow 0$ (Definition von $d_2 f$)

$(*)$ Aus 2.LEMMA folgt: $(f(s+t, \cdot) - f(s, \cdot))/t \xrightarrow{\text{glm.}} d_1 f(s, \cdot)$

und somit gilt $(*)$, da $s+t \rightarrow s$. \square

2.3.3. Glatte Kurven:

1.DEF: $c: \mathbb{R} \rightarrow E$ heißt glatt (C^∞): $\Leftrightarrow \bigvee_{d^n c \text{ diffb., } d(d^n c) = d^{n+1} c} d^0 c = c,$

$C^\infty(\mathbb{R}, E) := \{ c: \mathbb{R} \rightarrow E \text{ ist } C^\infty \}$

Die grundlegenden Eigenschaften glatter Kurven sind:

2.FOLGERUNG: (1) c sei $C^\infty \Rightarrow d^n c$ eind., C^∞ , stetig

(2) c konst $\Rightarrow c$ ist C^∞

(3) c sei C^∞, l stetig, lin. $\Rightarrow l \circ c$ ist $C^\infty,$
 $d^n(l \circ c) = l \circ d^n c$

(4) $C^\infty(\mathbb{R}, \prod E_i) \cong \prod C^\infty(\mathbb{R}, E_i)$ via

$c \mapsto (pr_i \circ c)_i$

$\langle c_i \rangle := (c_i) \circ \Delta \leftarrow (c_i)_i$

wobei $\Delta: \mathbb{R} \rightarrow \prod \mathbb{R}_i, t \mapsto (t)_i$

und $pr_i: \prod E_i \rightarrow E_i, (x_i)_i \mapsto x_i$

BEWEIS: (1),(2),(3) durch vollst. Induktion aus 2.3.1.2..

(4) $c \in C^\infty(\mathbb{R}, \prod E_i) \Rightarrow \text{pr}_i \circ c$ ist C^∞ , da pr_i stetig und linear.

Andererseits sei $c_i \in C^\infty(\mathbb{R}, E_i) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (d^n c_i) \circ \Delta : \mathbb{R} \rightarrow \prod E_i$ und $d^n((c_i) \circ \Delta) = (d^n c_i) \circ \Delta \Rightarrow$
 $\Rightarrow (c_i) \circ \Delta$ ist C^∞) :

Vollst. Ind.: (n=0) klar.

$$\begin{aligned} (n > 0) \quad & ((d^{n+1} c_i) \circ \Delta)(s) = (d^{n+1} c_i)(s) = (d(d^n c_i))(s) = \\ & = (\lim_{t \rightarrow 0} (d^n c_i(s+t) - d^n c_i(s)) / t) = \lim_{t \rightarrow 0} ((d^n c_i)(s+t) - (d^n c_i)(s)) / t = \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} (((d^n c_i) \circ \Delta)(s+t) - ((d^n c_i) \circ \Delta)(s)) / t = \quad (\text{Ind. Annahme}) \\ & = \lim_{t \rightarrow 0} (d^n((c_i) \circ \Delta)(s+t) - d^n((c_i) \circ \Delta)(s)) / t = d(d^n((c_i) \circ \Delta))(s) = \\ & = d^{n+1}((c_i) \circ \Delta)(s). \quad \square \end{aligned}$$

2.4. C[∞]-KURVEN-ERZEUGTE LKV :

In diesem Kapitel möchte ich also solche lkv studieren, deren Topologie durch die glatten Kurven in ihnen gegeben wird. Dazu seien alle auftretenden Räume Flg-v.lkv..

2.4.1. C[∞]-Kurvifizierung :

1.DEF: Kurv[∞] E := (E, final-Topologie bzgl. C[∞](R, E))
 Kurv[∞] heiße C[∞]-Kurvifizierung.

Das nächste Theorem charakterisiert jene Räume, bei denen das Folgifizieren und somit das Kurvifizieren das Gleiche liefert wie das C[∞]-Kurvifizieren.

2.THEOREM: Flg E (= Kurv E) = Kurv[∞] E ⇔
 ⇔ (x_n → o in E ⇒ $\bigvee_{k_n \rightarrow \infty} n \cdot x_{k_n} \rightarrow o$ in E).

Wie wir den Beweis entnehmen werden, besagt diese Bedingung, daß sich durch die Folge in geeigneter Weise eine C[∞]-Kurve legen läßt. Doch vorerst ein eher technisches

3.LEMMA: $\bigvee_f f: \mathbb{R} \rightarrow C^\infty, f, 2^{-n} \nmid \text{Trg } f', f(2^{-n})$ paarw. versch.,
 f ∞-platt in o .

BEWEIS: Sei g von folgender Gestalt:

d.h.: g: R → C[∞], ≠ 0, ≥ 0, Trg g ⊆] 2⁻¹, 1[

$$M_n := \sup_t |g^{(n)}(t)| < \infty$$



$$h(t) := \begin{cases} g(2^n t) \cdot e^{-2^{n+1}} & \text{für } 2^{-n-1} \leq t \leq 2^{-n} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

h ist C[∞] : Sei vorerst t ≠ 0.

Falls t = 2⁻ⁿ ⇒ h = 0 lok. um t, denn g = 0 lok. um 2⁻¹, 1 ⇒
 ⇒ h^(k)(t) = 0.

Falls t ≠ 2⁻ⁿ ⇒ 2⁻ⁿ⁻¹ ≤ t ≤ 2⁻ⁿ ⇒ h^(k)(t) = g^(k)(2ⁿt) · (2ⁿ)^k · e^{-2ⁿ⁺¹}

Sei nun t = 0. Mit vollst. Induktion beweise ich:

h^(k) ist stetig, h^(k)(0) = 0
 (k=0) /h(t)/ = /g(2ⁿt)/ · /e^{-2ⁿ⁺¹}/

$$(k+1) h^{(k+1)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (h^{(k)}(t) - h^{(k)}(0)) / t = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h^{(k)}(t)}{t} / \frac{h^{(k)}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h^{(k)}(t)}{t} / \frac{g^{(k)}(2^n t) \cdot 2^{nk} \cdot e^{-2^{n+1}}}{t} \leq M_k \cdot 2^{n+1} \cdot 2^{nk} \cdot e^{-2^{n+1}} \rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0$$

Somit ist $h: \mathbb{R} \rightarrow C^\infty$, platt in o , $\geq o$, $2^{-n} \notin \text{Trgh}$.

Sei nun $f(t) := \int_0^t h(s) ds$, dann gilt:

$f: \mathbb{R} \rightarrow C^\infty$, $f^{(n+1)} = h^{(n)}$, f ω -platt in o , $f' / (f' = h \geq 0)$,

$$2^{-n} \notin \text{Trgf}' = \text{Trgh}, f(2^{-n}) \text{ paarw. versch. } (f(2^{-n}) = f(2^{-n-1}) + \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} h(s) ds \geq f(2^{-n-1})). \square$$

Damit sind wir jetzt in der Lage das Theorem zu beweisen:

BEWEIS (des Theorems): (\Rightarrow) $x_n \rightarrow x$ in $E \Rightarrow o \text{BdA } \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

\neg abg. in $E \Rightarrow \bigvee_c c$ ist C^∞ , $c^{-1}\{x_n\} \neg$ abg. $\Rightarrow \bigvee_{s_n \rightarrow s}$

$c(s_n) \in \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, $c(s) \notin \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$

$o \text{BdA } s=o, c'(s)=o$ (Translation, x^3 als Parameterwechsel)

$$\Rightarrow o = c'(o) = \lim (c(s) - c(o)) / s = \lim (c(s_k) / s_k) =$$

$$= \lim x_{n_k} / s_k \cdot s_k \rightarrow o \Rightarrow \bigwedge_m \bigvee_{k_m} / s_{k_m} / < 1/m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_{n_{k_m}} \cdot s_{k_m}^{-1}) \cdot s_{k_m} \cdot m \rightarrow o \Rightarrow x_{n_{k_m}} \text{ ist die gewünschte Teilflg..}$$

(\Leftarrow) Sei A C^∞ -Kurven-abg. ^{z.z.}

$\Rightarrow A$ Flg-abg.: Sei also $a_n \in A$, $a_n \rightarrow x \Rightarrow o \text{BdA } x=o$ ^{Voraus.}

$\Rightarrow \bigvee_{n_k \rightarrow \infty} s_k \cdot 2^{2k+1} \cdot a_{n_k} \rightarrow o$, wobei f wie im 3. LEMMA und $1/s_k := \min\{|f(2^{-2k}) - f(2^{-2k+1})| / \}$

Sei nun $c(s) := \begin{cases} \frac{f(s) - f(2^{-2k+1})}{f(2^{-2k}) - f(2^{-2k+1})} \cdot a_{n_k} & \text{für } 2^{-2k} \leq s \leq 2^{-2k+1} \\ o & \text{sonst.} \end{cases} \Rightarrow$

$c^{(r)}(s) = \begin{cases} \frac{f^{(r)}(s)}{f(2^{-2k}) - f(2^{-2k+1})} \cdot a_{n_k} & \text{für } 2^{-2k} \leq s \leq 2^{-2k+1} \\ o & \text{sonst.} \end{cases}$

Falls $s \neq o$ ist dies klar, da $f^{(r)}$ lok. um 2^{-k} verschwindet.

Falls $s = o$: $|((f(2^{-2k}) - f(2^{-2k+1})) \cdot s)^{-1}| \leq s_k \cdot 2^{2k+1}$ und

$$f^{(r)}(s) \rightarrow f^{(r)}(o) = o \text{ für } s \rightarrow o \Rightarrow$$

$$(f^{(r)}(s) / (f(2^{-2k}) - f(2^{-2k+1})) \cdot s^{-1} \cdot a_{n_k} \rightarrow o$$

$$\parallel \frac{c^{(r)}(s) - c^{(r)}(o)}{s} \text{ und somit ist } c^{(r+1)}(o) = o$$

Somit ist also ein $c: \mathbb{R} \rightarrow E$ gefunden mit $c(0)=0$, $c(4^{-k}) = a_{n_k}$, $c \in C^\infty \Rightarrow 2^{-k} \in c^{-1}(A) \Rightarrow 0 \in c^{-1}(A) \Rightarrow 0 = c(0) \in A \Rightarrow A$ ist Flg.abg. \square

Wie man dem Beweis entnimmt, folgt die Bedingung aus der Existenz einer diffb. Kurve durch x_n , somit fällt also die C^1 -Kurvifizierung mit der C^∞ -Kurvifizierung zusammen.

4. Das andererseits die Bedingung nicht automatisch erfüllt ist - d.h.: (C^0) -Kurv $E \neq C^1$ -Kurv $E = C^\infty$ -Kurv E -, zeigt folgendes Beispiel: $E = (C_b(\mathbb{N}), \{U_\varepsilon\}_{\varepsilon \rightarrow 0})$ ist ein Flg.v. lkv, Kurv.erz.(2.2.2.2.), $1_{\{n\}} \rightarrow 0$ (da $1_{\{n\}} \not\rightarrow 0$, $\|1_{\{n\}}\|$ beschr.) $n \cdot 1_{\{n_k\}} \not\rightarrow 0$ (da $\|n \cdot 1_{\{n_k\}}\| = n$ unbeschr.).

2.4.2. Abgeschlossenheit:

1.DEF: E heißt (A1) : $\Leftrightarrow x_n \rightarrow 0 \Rightarrow \bigvee_{n_k \rightarrow \infty} n \cdot x_{n_k} \rightarrow 0$

2.LEMMA: E sei metrisierb.lkv (\Leftrightarrow E ist 1.Abz.A.) $\Rightarrow \Rightarrow$ E ist (A1) .

BEWEIS: Sei $\{U_n\}$ 0-Umgebungsbasis, oBdA $U_n \searrow$, Sei $x_n \rightarrow 0 \Rightarrow kx_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty \Rightarrow$ (induktiv) $\bigvee_{n_k \rightarrow \infty} kx_{n_k} \in U_k \Rightarrow k \cdot x_{n_k} \rightarrow 0 \quad \square$

3. Man sollte vielleicht noch bemerken, daß die Eigenschaft (A1) nicht die der Flg.erz.heit(=Kurv.erz.heit) impliziert. Dies sieht man an dem Beispiel $E := \prod_M \mathbb{R}$ mit $/M/ \triangleright \aleph_0$, denn E ist \neg Kurv.erz.(2.2.3.5.) und E ist (A1) (2.4.2.4.).

Nun möchte ich die Abgeschlossenheit der Kategorie (A1)-lkv studieren.

4.LEMMA: (A1)-lkv ist Summen-abgeschlossen.

BEWEIS: Sei $x^n \rightarrow 0$ in $\prod E_i \Rightarrow \text{Trg } x^n \subseteq F$ endl. $\Rightarrow F = \{i_1, \dots, i_N\} \Rightarrow \bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{i_1}^{n_k} \rightarrow 0$ (E_{i_1} ist (A1)) \Rightarrow (induktiv) $\bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{i_j}^{n_k} \rightarrow 0$ (E_{i_j} ist (A1)) $\Rightarrow \bigwedge_j k \cdot x_{i_j}^{n_k} \rightarrow 0 \Rightarrow k \cdot x^{n_k} \rightarrow 0 \quad \square$

5.LEMMA: (A1)-lkv ist abg. unter str. induktiven Limiten.

BEWEIS: $x^n \rightarrow o \Rightarrow x^n \rightarrow o$ in $E_{n_0} \Rightarrow \bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{n_k}^{n_k} \rightarrow o$ in $E_{n_0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow k \cdot x_{n_k}^{n_k} \rightarrow o$ in $\text{str.} \lim E_n . \square$

6.LEMMA: (A1)-lkv ist abg. unter abzählb. Produkten.

BEWEIS: $x^n \rightarrow o \Rightarrow (E_1 \text{ ist (A1)}) \bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{n_k}^{n_k} \rightarrow o =$
 \Rightarrow (induktiv) $\bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{n_k}^{i+1} \rightarrow o$, n_k^{i+1} ist Teilfolge
 von $n_k^i \Rightarrow k \cdot x_{n_k}^k \rightarrow o$ für $k \rightarrow \infty \Rightarrow k \cdot x_{n_k}^k \rightarrow o$. \square

7. Diese Aussage läßt sich aber nicht auf überabz. übertragen, wie folgendes Beispiel zeigt:

$X := \prod \mathbb{R}$. X ist nicht (A1): Sei nämlich $x_\varepsilon^n := \varepsilon(n)$

$$\varepsilon: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \quad \varepsilon \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(n) = x_\varepsilon^n \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad x^n \rightarrow 0 \text{ in } \prod \mathbb{R}$$

Angenommen: $\bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{n_k}^{n_k} \rightarrow o \Rightarrow \text{oBdA } n_k \uparrow \infty$

Sei $\varepsilon_i := \min \{1/k : n_k \leq i\} \rightarrow 0 \Rightarrow$
 $(kx_{n_k}^k)_\varepsilon = k \cdot \varepsilon_{n_k} = 1$ Widerspruch. \square

8.LEMMA: (A1)-lkv ist abg. unter Teilräumen.

BEWEIS: $x_n \rightarrow o$ in $X \subset Y \Rightarrow x_n \rightarrow o$ in $Y \Rightarrow$
 $\Rightarrow \bigvee_{n_k \rightarrow \infty} k \cdot x_{n_k} \rightarrow o$ in $Y \Rightarrow k \cdot x_{n_k} \rightarrow o$ in X . \square

9. Für später ist noch folgende Bemerkung wichtig.

Ein C^∞ -Kurv-abg. Teilraum eines Flgv.lkv muß nicht Flgv-abg. sein. D.h. $X \subset Y$, C^∞ -Kurv-abg, Y Flgv.lkv $\not\Rightarrow X$ Flgv-abg. in Y .

Sei nämlich $Y := (C_b(\mathbb{N}), \{U_\varepsilon^\infty\}_{\varepsilon \rightarrow 0})$ und $X := C_o \subset Y$, dann ist Y Flgv.lkv (2.2.2.2.) und $X \not\rightarrow$ Flgv-abg (denn $1_{\{1,2,\dots,n\}} \rightarrow 1_{\mathbb{N}}$).

Aber X ist C^∞ -Kurv-abg.: Angenommen $\bigvee_c c: \mathbb{R} \rightarrow Y \in C^\infty$
 $c^{-1}(X) \not\rightarrow$ abg. $\Rightarrow \bigvee_{t_n \rightarrow t} c(t_n) \in X, c(t) \notin X \Rightarrow \text{oBdA } t = o$.

$c \in C^\infty \Rightarrow dc(o) = \lim (c(t_n) - c(o)) / t_n \Rightarrow$
 $\Rightarrow \| (c(t_n) - c(o) - t_n dc(o)) / t_n \|_\infty$ ist beschränkt. Aber $c(o) \notin C_o$
 $= \bigvee_{\varepsilon > 0} \|c(o)_k / \geq \varepsilon$ immer wieder $\Rightarrow \| (c(t_n) - c(o) - t_n dc(o)) \| \rightarrow \varepsilon$,
 denn $c(t_n) \in C_o, dc(o) \in C_b, t_n \rightarrow t$. \Rightarrow
 $\| (c(t_n) - c(o) - t_n dc(o)) / t_n \| \rightarrow \infty$ Widerspruch. \square

2.5. INTEGRIERBARKEIT :2.5.1. Integral als Inverse zum Differential :

In diesem Kapitel möchte ich die Umkehrung zum Differenzieren von Kurven behandeln. Dazu vorerst einmal ein Lemma, welches die fast Injektivität von d ausdrückt.

1.LEMMA: $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ diffb. $\Rightarrow c$ ist konst. $\Leftrightarrow dc = 0$

BEWEIS: (\Rightarrow) (2.3.1.2.)

$$(\Leftarrow) \text{ Fundamentallemma } \Rightarrow c(t) - c(o) \in t \cdot \langle dc(s) \rangle_{\text{kv.}}^- = \{0\} \Rightarrow c(t) = c(o). \quad \square$$

Nun die Existenz und Eindeutigkeit der Integration :

2.SATZ: $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig $\Rightarrow \int_a^b c_1 : \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig diffb.
 $dc_1 = c, c_1(o) = o.$

BEWEIS: Sei vorerst $a < b$, und c ein Polygonzug, d.h.:

$$\begin{array}{l} \bigvee \\ t_i \end{array} / \quad t_0 = a, t_n = b, c|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ ist linear } \Rightarrow \\ \int_a^b c := \sum_i c((t_i + t_{i+1})/2)(t_{i+1} - t_i).$$

Falls c_1, c_2 Polygonzüge sind und $(c_1, c_2) \in M[a, b], U \Rightarrow$

$\Rightarrow (\int_a^b c_1, \int_a^b c_2) \in (b-a) \cdot U$. Somit ist \int_a^b glm. stetig auf

Polygonzügen ($\subseteq Cu([a, b], E)$), diese liegen aber dicht in $Cu([a, b], E)$ und somit läßt sich \int_a^b eindeutig und glm. stetig auf $Cu([a, b], E)$ fortsetzen.

$$\text{Definiere nun } c_1(s) := \begin{cases} \int_s^0 c & \text{für } s \geq 0 \\ -\int_0^s c & \text{für } s \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_1 \text{ ist diffb., } dc_1 = c, \text{ denn } c_1(t+s) - c_1(s) - tc(s) = \int_s^{s+t} c - \int_s^{s+t} c(s) = (*)$$

. Weil c stetig ist, gilt für

hinreichend kleines t : $c(s+t) - c(s) \in U$ und damit

$$(*) \in (s+t-s) \cdot U = t \cdot U. \text{ Somit } (c_1(t+s) - c_1(s))/t - c(s) \in U \Rightarrow$$

$$= \lim (c_1(t+s) - c_1(s))/t - c(s) = 0, \text{ d.h.: } dc_1 = c.$$

Und die Eindeutigkeit ergibt sich aus : $dc_1 = c = dc_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow d(c_1 - c_2) = 0 \Rightarrow c_1 - c_2 \text{ konst.}, c_1(o) = o = c_2(o) \Rightarrow c_1 = c_2. \quad \square$$

3.DEF: $\int_0^b c := c_1$ für $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig und c_1 die nach obigem Satz eindeutig assoziierte Kurve.

4.FOLGERUNG: $c : \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig diffb. $\Rightarrow \int_0^b dc = c - c(o)$

BEWEIS: dc ist eindeutig charakterisiert durch $d(\int_0^b dc) = dc$ und $(\int_0^b dc)(o) = c(o)$, $c - c(o)$ erfüllt dies, also gilt: $\int_0^b dc = c - c(o). \quad \square$

2.5.2. Folgerungen :

Für die Anwendungen benötige ich noch, daß für 2-dim. Flächen Differentiation nach einer Variable mit der Integration nach der anderen vertauscht.

1.SATZ: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ stetig, $d_1 f$ existiere und sei stetig \Rightarrow
 $\Rightarrow \int_{\circ} f(s, \cdot)$ ist stetig, $d_1 \int_{\circ} f(s, \cdot)$ exist. und ist stetig,
 $d_1 \int_{\circ} f(s, \cdot) = \int_{\circ} d_1 f(s, \cdot)$.

BEWEIS: $d_1 f$ stetig $\Rightarrow d_1 f(s, \cdot)$ stetig $\Rightarrow \int_{\circ} d_1 f(s, \cdot)$ exist.

$$\begin{aligned} 2.3.2.2 \Rightarrow (f(s+t, \cdot) - f(s, \cdot))/t &\xrightarrow{\text{glm.}} d_1 f(s, \cdot) \Rightarrow \\ \Rightarrow 1/t \cdot (\int_{\circ} f(s+t, \cdot) - \int_{\circ} f(s, \cdot)) &= \int_{\circ} (f(s+t, \cdot) - f(s, \cdot))/t \xrightarrow{\text{glm.}} \\ \rightarrow \int_{\circ} d_1 f(s, \cdot) \quad \text{aber} \quad 1/t \cdot (\int_{\circ} f(s+t, \cdot) - \int_{\circ} f(s, \cdot)) &= \\ = 1/t \cdot ((\int_{\circ} f(s+t, \cdot))(r) - (\int_{\circ} f(s, \cdot))(r)) &\rightarrow d_1((\int_{\circ} f(s, \cdot))(r)). \square \end{aligned}$$

Als nächstes möchte ich ein Faktorisierungslemma beweisen.

2.LEMMA: $c: \mathbb{R} \rightarrow E$ sei C^{∞} , $c_1(t) := \begin{cases} (c(t) - c(o))/t & \text{für } t \neq o \\ dc(o) & \text{sonst} \end{cases} \Rightarrow$
 $\Rightarrow c_1: \mathbb{R} \rightarrow E$ ist C^{∞} .

BEWEIS: $c(t) - c(o) = \int_{\circ}^t dc = \int_{\circ}^t t dc(t) = t \int_{\circ}^1 dc(t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow (c(t) - c(o))/t = \int_{\circ}^1 dc(t)$.

$d \int_{\circ}^1 dc(t) \stackrel{\text{Sa}}{=} \int_{\circ}^1 d_t dc(t) = \int_{\circ}^1 t dc(t) \stackrel{1.\text{Satz}}{\Rightarrow}$
 $d^n \int_{\circ}^1 dc(t) = d^n c_1$ existiert. \square

3.FOLGERUNG: (Taylorformel) $c: \mathbb{R} \rightarrow E$ sei $C^{\infty} \Rightarrow$
 $\Rightarrow c(t) = \sum_{i=0}^n \frac{t^i}{i!} d^i c(o) + \int_{\circ}^t \frac{(t-\cdot)^n}{n!} d^{n+1} c$

BEWEIS: (vollst. Induktion) $(n=0) \quad c(t) - c(o) = \int_{\circ}^t dc \quad (\text{s.o.})$
 $(n \geq 0) \quad \int_{\circ}^t (t-\cdot)^{n-1} / (n-1)! d^n c =$
 $= \int_{\circ}^t -((t-\cdot)^n)' / n! \cdot d^n c = \int_{\circ}^t -d((t-\cdot)^n d^n c / n!) + \frac{(t-\cdot)^n}{n!} d^{n+1} c =$
 $= - \int_{\circ}^t (t-\cdot)^n d^n c / n! + \int_{\circ}^t (t-\cdot)^n d^n c =$
 $= t^n d^n c(o) / n! + \int_{\circ}^t (t-\cdot)^n d^n c / n! \quad . \quad \square$

3. VEKTOR-MENGEN :

In diesem Kapitel geht es darum, eine Klasse von Objekten zu betrachten - den Vektormengen -, für die sich Differenzierbarkeit sinnvoll erklären läßt. Dazu benötigt man eine lineare Struktur auf den Räumen, und diese läßt sich im wesentlichen auf zwei Arten einführen. Üblicherweise geht man so vor, daß mittels Karten die lineare Struktur des \mathbb{R}^n auf die Mannigfaltigkeit hochgeschossen wird, wobei durch die Differenzierbarkeit der Kartenwechsel gewährleistet wird, daß sie hinreichend unabhängig von den Karten ist. Die zweite Möglichkeit besteht nun darin, den Raum als ganzen in einen umgebenden Vektorraum einzubetten, und somit eine globale lineare Struktur zu bekommen, die allerdings aus dem Raum herausführt. Der Einbettungssatz von Whitney besagt nun, daß sich die 1. Art auf die 2. zurückführen läßt. Ich werde hier von vornherein den 2. Weg gehen.

3.1. TANGENTIALFUNKTOR T :

3.1.1. Definitionen :

1.DEF: M_E heißt Vektor-Menge (VMg) : $\Leftrightarrow M \subseteq E$ Flgv.lkv .

M_E ist also eine Menge von Vektoren zusammen mit einem umgebenden Vektorraum E .

$$C^\infty(\mathbb{R}, M_E) := \{ c \in C^\infty(\mathbb{R}, E) : c(\mathbb{R}) \subseteq M \}.$$

D.h. die C^∞ -Kurven in M sollen gerade diejenigen C^∞ -Kurven in E sein, deren Bilder in M liegen.

$$K^\infty M := (M, \text{final-Top. bzgl. } C^\infty(\mathbb{R}, M))$$

D.h. K^∞ versieht die Menge M mit der feinsten Topologie, für die die C^∞ -Kurven gerade noch stetig sind.

2.FOLGERUNG : (1) $\text{Kurv } M \rightarrow \text{Kurv } E \rightarrow E$ sind stetig.

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \uparrow \\ & K^\infty M & \rightarrow K^\infty E = \text{Kurv}^\infty E \end{array}$$

(2) $K^\infty M$ ist Kurv-erz. (somit Flg-erz., kp-erz.)

(3) $K^\infty M$ ist lok. C^∞ -Kurven zshg.

BEWEIS: (1) klar.

(2) Sei A Kurv-abg. in $K^\infty M \Rightarrow A C^\infty$ -Kurv-abg. in M (da $C^\infty(\mathbb{R}, M) \subseteq C(\mathbb{R}, K^\infty M) \Rightarrow A$ abg. in $K^\infty M$ (nach Def. der Topologie auf $K^\infty M$). Damit ist $K^\infty M$ Kurv-erz..

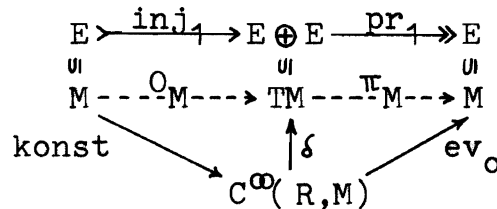
(3) Der Beweis ist völlig analog zu dem von (1.2.1.3.). Man muß nur beachten, daß die Relation "durch C^∞ -Kurve verbindbar" transitiv ist (An den Ecken ∞ stehen bleiben).

3.DEF: $\delta_E: C^\infty(\mathbb{R}, E) \rightarrow E \oplus E, c \mapsto (c(o), dc(o))$ ist jene Abb. die den Kurven ihre Tangentialvektoren in o zuordnet.

$TM := \delta_E(C^\infty(\mathbb{R}, M)) \subseteq TE = E \oplus E$ ist also der Tangentialraum von M. $T^0M := M, T^{n+1}M := T(T^n M)$.

0-Schnitt O_M und Projektion π_M sind nun als Einschränkungen linearer Abb.

durch folgendes Diagramm definiert:



Damit läßt sich nun die Glattheit von Abbildungen zwischen Vektormengen definieren:

$f: N \rightarrow M$ heißt glatt (C^∞) $:\Leftrightarrow \bigvee_{T^n f} T^0 f = f \wedge$

$$\begin{array}{ccc}
 C^\infty(\mathbb{R}, T^n N) & \xrightarrow{(T^n f)_*} & C^\infty(\mathbb{R}, T^n M) \\
 \delta_{T^n N} \downarrow & & \downarrow \delta_{T^n M} \\
 T^{n+1} N & \xrightarrow{T^{n+1} f} & T^{n+1} M
 \end{array} \text{ ist sinnvoll und kommutiert.}$$

Schließlich verstehe ich unter VMg die Kategorie (- daß es eine ist, ist erst zu zeigen -) der Vektormengen zusammen mit den C^∞ -Abbildungen.

3.1.2. Folgerungen:

Im folgenden seien E, F Flgv.lkv und M_E, N_F Vektor-Mengen.

1.FOLGERUNG: (1) f sei $C^\infty \Rightarrow T^n f$ ist eind., C^∞, K^∞ -stetig (d.h. zwischen den K^∞ -fizierungen stetig).

(2) $f: N \rightarrow M_E$ ist $C^\infty \Leftrightarrow f: N \rightarrow E$ ist $C^\infty \wedge f(N) \subseteq M$ (damit stimmen die beiden C^∞ -Begriffe für Kurven überein).

(3) VMg ist Kategorie, $T: \text{VMg} \rightarrow \text{VMg}$ ist Funktor.

(4) $f: F \rightarrow E, f$ konst. $\Rightarrow f$ ist $C^\infty, Tf = f \pi 0$

f K^∞ -stetig, lin. $\Rightarrow f$ ist $C^\infty, Tf = f \pi f$.

(5) $M_E \rightarrow E C^\infty; M \subseteq E_{\text{lkv}} \subset F \Rightarrow M_E \cong_{C^\infty} M_F$

(6) $\pi: T \rightarrow 1, 0: 1 \rightarrow T$ sind nat.Transf. .

BEWEIS: (1) $T^n f$ ist eindeutig wegen der Kommutativität des definierenden Diagramms und der Surjektivität von $\delta_{T^n N}$. $T^n f$ ist C^∞ , da $T^m(T^n f) = T^{m+n} f$. Und $T^n f$ ist K^∞ -stetig, weil $(T^n f)_*: C^\infty(\mathbb{R}, T^n N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, T^n M)$ sinnvoll ist, d.h. C^∞ -Kurven wieder in solche überführt. Damit ist aber $T^n f: K^\infty T^n N \rightarrow K^\infty T^n M$ stetig.

(2) (\Rightarrow) trivial, da $C^\infty(\mathbb{R}, T^n M) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, T^n E)$ und $T^{n+1} M \subseteq T^{n+1} E$.

(\Leftarrow) (vollst. Indukt.)

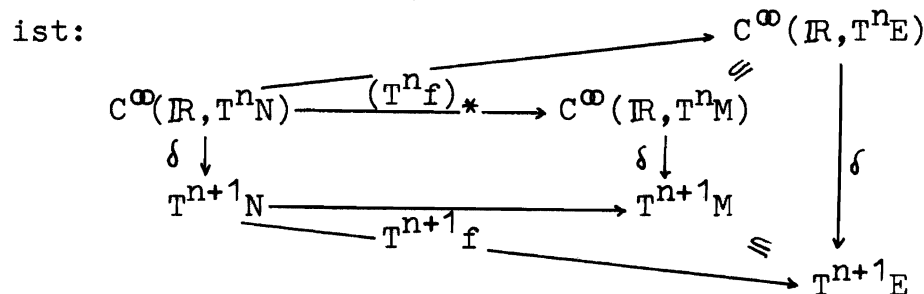
(n) $(T^n f)_*: C^\infty(\mathbb{R}, T^n N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, T^n E) \Rightarrow \bigwedge_c T^n f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, T^n E)$
 $\Rightarrow T^n f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, T^n M)$ ($\text{Im } T^n f \subseteq T^n M$) \Rightarrow
 $= (T^n f)_*: C^\infty(\mathbb{R}, T^n N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, T^n M)$ ist sinnvoll.

und $\delta_{T^n E} \circ (T^n f)_* = T^{n+1} f \circ \delta_{T^n N} \Rightarrow T^{n+1} f: T^{n+1} N \rightarrow T^{n+1} M$,

$\delta_{T^n M} \circ (T^n f)_* = T^{n+1} f \circ \delta_{T^n N}$, da $\text{Im } T^{n+1} f = \delta$ surj.

$= \text{Im}(T^{n+1} f \circ \delta_{T^n N}) = \text{Im}(\delta_{T^n M} \circ (T^n f)_*) \subseteq \text{Im}(\delta_{T^n M}) =$

$= T^{n+1} M$, wie dem folgenden Diagramm zu entnehmen



(3) VMg ist eine Kategorie, denn 1_M ist C^∞ , da $(1_M)_* = 1_{C^\infty(\mathbb{R}, M)}$ und $T1_M = 1_{TM}$, und $f, g \in C^\infty \Rightarrow f \circ g$ ist C^∞ , da $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $T(f \circ g) = Tf \circ Tg$. Dies zeigt auch:
 $T: \underline{VMg} \rightleftarrows$ ist Funktor.

(4) f konst. $\Rightarrow f_*(c)$ konst. $\Rightarrow f_*(c)$ ist C^∞ .
 $Tf(\delta c) = \delta(f_*(c)) = (fc(o), d(fc)(o)) = (f(c(o)), 0) =$
 $= (f\pi_0)(\delta c) \Rightarrow$ (induktiv) f ist C^∞ .

f K^∞ -stetig, lin. $\Rightarrow f_*(c) = f \circ c$ ist C^∞ und
 $Tf(\delta c) = (f_*(c)) = (fc(o), d(fc)(o)) = (f(c(o)), f(dc(o))) =$
 $= (f\pi f)(\delta c) \Rightarrow$ (induktiv) f ist C^∞ .

(5) $M_E \rightarrow E$ ist C^∞ $\stackrel{(2)}{\Leftarrow}$ $1_M: M \rightarrow M$ ist C^∞
 $1_M: M_E \rightarrow M_F$ ist C^∞ $\stackrel{(2)}{\Leftarrow}$ $1_M(M_E) \subseteq M_F$ und
 $1_M: M_E \rightarrow F$ ist C^∞ als Zusammensetzung $M_E \rightarrow E \hookrightarrow F$.
 $1_M: M_F \rightarrow M_E$ ist C^∞ , da $(1_M)_*: C^\infty(\mathbb{R}, M_F) \rightarrow$
 $\rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, M_E)$ sinnvoll ist, denn wenn $dc(s) =$
 $= \lim(c(s+t) - c(s))/t$ in F existiert so auch in E (E ist
als Flg-vollst Teilraum von F Flg-abg.).

(6) π_M, O_M sind C^∞ als Einschränkungen stetig, lin. Abb. nach (2), (4) und (5). Sie sind nat. Transf. - d.h.:

$$\begin{array}{ccc} TN & \xrightarrow{Tf} & TM \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} TN & \xrightarrow{Tf} & TM \\ 0 \downarrow & & \downarrow 0 \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \quad \text{kommutieren - , da}$$

$$\begin{aligned} \pi(Tf(\delta c)) &= \pi(\delta(f_*(c))) = f_*(c)(o) = f(c(o)) = f(\pi(\delta c)) \\ \text{und } Tf(O(n)) &= Tf(\delta(\text{konst}_n)) = \delta(f_*(\text{konst}_n)) = \\ &= \delta(\text{konst}_{f(n)}) = (f(n), o) = O(f(n)). \end{aligned}$$

2. Wichtig ist es hier zu bemerken, daß in (5) die Flg-vollständigkeit von E entscheidend war. Für nicht Flg-vollst.lkv muß nämlich nicht gelten: $c: \mathbb{R} \rightarrow E \in C^\infty, E \in \text{lkV} F \Rightarrow c: \mathbb{R} \rightarrow F \text{ ist } C^\infty$, wie das folgende Beispiel zeigt.
 $F := c_o := (\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x(k) \rightarrow 0\}, // //_\infty)$, $E := c_k \subset c_o$.
 Sei $x \in c_k, y \in c_o$ beliebig, $c(t) := x + (t_i f(t/t_i) y_i)_i$ wo $f: \mathbb{R} \rightarrow C^\infty, \text{Trg } f \subseteq [-1, 1], f(0)=0, f'(0)=1$ und $y_i/t_i^k \rightarrow 0$ (z.B.: $t_i := / \ln y_i /^{-1}$ für i hinreichend groß). \Rightarrow
 $\Rightarrow c: \mathbb{R} \rightarrow c_k$, denn $c(0) = x \in c_k$ und $t \neq 0 \Rightarrow t/t_i \rightarrow \infty \Rightarrow t/t_i \notin \text{Trg } f$ schl. $\Rightarrow t_i f(t/t_i) y_i = 0$ schl. $\Rightarrow c(t)_i = 0$ schl..
 c ist C^∞ mit $c^{(n)}(t) = (t_i^{1-n} f^{(n)}(t/t_i) y_i)$ wie man mit vollst. Induktion sieht:

$$\begin{aligned} &/ (t_i^{1-n} f^{(n)}((t+s)/t_i) - t_i^{1-n} f^{(n)}(t/t_i) - t_i^{-n} f^{(n+1)}(t/t_i)) y_i / = \\ &= / \frac{y_i}{t_i^n} / / \underbrace{\frac{f^{(n)}(t/t_i + s/t_i) - f^{(n)}(t/t_i)}{s/t_i} - f^{(n+1)}(t/t_i)}_{\text{beschränkt (Faktorisierungslemma)}} / \xrightarrow{\text{glm. in } i} 0 \\ &\Rightarrow // (d^n c(t+s) - d^n c(t)) / s - (t_i^{-n} f^{(n+1)}(t/t_i) y_i)_i //_\infty \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Natürlich gilt: $dc(0) = y, c(0) = x$, und somit ist $c: \mathbb{R} \rightarrow c_k$ nicht diffb..

Ich habe damit sogar gezeigt: $T(c_k)_{c_o} = c_k \oplus c_o$.

3.1.3. C^∞ -Abbildungen in Vektorräumen :

Für Abbildungen zwischen Vektormengen, von denen mindestens eine ein lkv ist, möchte ich die Glattheit näher bestimmen.

1.DEF: $Df := \text{pr}_2 \circ Tf : TF \rightarrow E$ für $f : F \rightarrow E \in C^\infty$

2.LEMMA: $f : F \rightarrow E \in C^\infty \Rightarrow Tf = \langle f \circ \pi, Df \rangle : TF \rightarrow E^2 = TE$

$$\text{und } Df(x,v) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x+tv) - f(x))/t$$

BEWEIS: $Tf = \langle \text{pr}_1 \circ Tf, \text{pr}_2 \circ Tf \rangle = \langle \pi \circ Tf, Df \rangle = \langle f \circ \pi, Df \rangle$

und $Tf(\delta c) = \delta(f_*(c))$ für $c : t \mapsto x+tv \in C^\infty$, $\delta c = (x,v) \Rightarrow$

$\Rightarrow Df(x,v) = \text{pr}_2(\delta(f_*(c))) = d(f \circ c)(0) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x+tv) - f(x))/t. \square$

Den Zusammenhang zwischen d und T für Kurven beschreibt das folgende

3.LEMMA: $c : \mathbb{R} \rightarrow E \in C^\infty \Rightarrow v \cdot dc(s) = Dc(s,v)$, $T^n c \circ x_n = d^{y_n} \circ c$

wobei $x_{n+1} := \langle x_n, x'_n \rangle : \mathbb{R} \rightarrow T^{n+1} \mathbb{R}$, $x_0 := 1_{\mathbb{R}}$

und $y_{n+1} := (y_n, y_{n+1}) \in N^{2^{n+1}}$, $y_0 := 0$, $1 := (1, \dots, 1)$.

BEWEIS: $Dc(s,v) = \lim_{t \rightarrow 0} (c(s+tv) - c(s))/t =$

$$= v \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (c(s+tv) - c(s))/tv = v \cdot dc(s)$$

(vollst. Induktion)

($n=0$) $T^0 c \circ x_0 = c = d^{y_0} c$

$$\begin{aligned} (n>0) \quad (T^{n+1} c \circ x_{n+1})(t) &= T^{n+1} c(x_{n+1}(t)) = T^{n+1} c(\langle x_n, x'_n \rangle(t)) = \\ &= T^{n+1} c(Tx_n(t,1)) = (T^{n+1} c \circ Tx_n)(t,1) = \\ &= T(T^n c \circ x_n)(t,1) = T(d^{y_n} c)(t,1) = (d^{y_n} c(t), d(d^{y_n} c)(t)) = \\ &= d^{y_{n+1}} c(t) \end{aligned}$$

4.LEMMA: $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E \in C^\infty \Rightarrow f$ stetig partiell diffb..

BEWEIS: $Df(x, e_i) = \lim_{t \rightarrow 0} (f(x+te_i) - f(x))/t =$

$$= d(f(x_1, \dots, x_i + \dots, x_n))(0) = d_i f(x) \text{ wo } e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0).$$

und $d_i f = \text{pr}_2 \circ Tf \circ (\cdot, e_i)$ ist C^∞ , und somit stetig, da der $\mathbb{R}^n \in C^\infty$ -Kurv-erz. ist.

Als Folgerung ergibt sich, daß oben definierte Glattheit für Funktionen mit endl.dim. Domäne mit dem üblichen Begriff " ∞ -oft diffb." übereinstimmt, da sich obiges Lemma sukzessive auf die partiellen Ableitungen anwenden läßt.

5.SATZ: $f : E \rightarrow M \Rightarrow f$ ist $C^\infty \Leftrightarrow \bigwedge_n g : \mathbb{R}^n \rightarrow E \in C^\infty \Rightarrow f \circ g$ ist C^∞

BEWEIS: (\Rightarrow) klar, denn $f \circ g \in C^\infty \Rightarrow f \circ g \in C^\infty$

(\Leftarrow) Gesucht ist ein Tf , $C^\infty(\mathbb{R}, E) \xrightarrow{f_*} C^\infty(\mathbb{R}, M)$

das folgendes Diagramm kommutativ

macht :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, E) & \xrightarrow{f_*} & C^\infty(\mathbb{R}, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ TE & \xrightarrow{Tf} & TM \end{array}$$

BEMERKUNG: Nach Boman genügt $n=1$ in diesem Satz !

Dazu ist zu zeigen, daß $\delta(f_*(c))$ für $c \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$ nur vom δc abhängt. Sei also $\delta c = (c(o), dc(o)) =: (x, v)$ und

$$g(t, s) := \begin{cases} x + tv + s(c(t) - x - tv)/t^2 & \text{für } t \neq 0 \\ x + d^2c(o) & \text{für } t = 0 \end{cases} \Rightarrow g: \mathbb{R}^2 \rightarrow E \text{ ist } C^\infty$$

(wegen des Faktorierungslemmas) \Rightarrow fog ist C^∞ (nach Voraussetzung) $\Rightarrow \delta(f_*(c)) = \delta(foc) = \delta(fogoc_1) = \delta((fog)_*(c_1)) = T(fog)(\delta c_1) = T(fog)(o, o; 1, o) = T(fog)(\delta inj_1) = \delta((fog)_*(inj_1)) = \delta(fogoinj_1) = \delta(fo(x+v))$ nur von δc abhängig. Wo $c_1(t) := (t, t^2)$.

Sei nun $h: \mathbb{R}^n \rightarrow TE \ C^\infty \Rightarrow h = \langle h_1, h_2 \rangle \Rightarrow h(x) = \delta(g(x, \cdot))$
 $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow E$, $g(x, t) := h_1(x) + t \cdot h_2(x) \Rightarrow (Tf)_*(h)(x) = (Tf_oh)(x) = Tf(h(x)) = Tf(\delta(g(x, \cdot))) = \delta(f_*(g(x, \cdot))) \Rightarrow (Tf)_*(h) = \langle (fog)(\cdot, o), d_2(fog)(\cdot, o) \rangle$ ist C^∞ nach Voraussetzung.

Induktiv folgt nun die Existenz der $T^n f$, die die geforderten Diagramme kommutativ machen. \square

$$\begin{array}{ccc} \text{6.SATZ: } f: M \rightarrow E & \Rightarrow f \text{ ist } C^\infty \Leftrightarrow & \bigvee_{T^n f} T^0 f = f \quad \wedge \\ & & \wedge \quad C^\infty(\mathbb{R}, T^n M) \xrightarrow{(T^n f)_*} D(\mathbb{R}, T^n E) \\ & & \downarrow \delta \qquad \qquad \qquad \downarrow \delta \\ & & T^{n+1} M \xrightarrow{T^{n+1} f} T^{n+1} E \end{array}$$

wo $D(\mathbb{R}, E) := \{c: \mathbb{R} \rightarrow E \text{ diffb.}\}$

BEWEIS: (\Rightarrow) Diese Richtung entnimmt man sofort folgendem Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, T^n M) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & D(\mathbb{R}, T^n E) \\ \downarrow \delta & \searrow (T^n f)_* & \downarrow \delta \\ T^{n+1} M & \xrightarrow{T^{n+1} f} & T^{n+1} E \end{array}$$

$C^\infty(\mathbb{R}, T^n E)$ (zwischen $(T^n f)_*$ und δ)

Wichtig dabei ist nur, daß $\delta: D(\mathbb{R}, T^n E) \rightarrow T^{n+1} E$ sinnvoll ist.

(\Leftarrow) $c \in C^\infty(\mathbb{R}, N) \xrightarrow{Z \rightarrow Z} f_*(c) \in C^\infty(\mathbb{R}, E)$: Nach Voraussetzung ist $f_*(c)$ diffb., $d(f_*(c))(o) = \text{pr}_2(\delta(foc)) = \text{pr}_2((Tf)_*(\delta c)) \Rightarrow$ (Translation) $d(f_*(c)) = \text{pr}_2((Tf)_*(\langle c, dc \rangle))$ diffb. (nach Voraussetzung) \Rightarrow (induktiv) $f_*(c)$ ist C^∞ .

Analog gilt für $T^n f: (T^n f)_*(c)$ ist C^∞ . \square

3.1.4. Vollständigkeit:

1.SATZ: (1) \underline{VMg} ist Produkt-vollst., $\prod M_i = \underline{\text{Meng}}\text{-}\prod M_i \subseteq \prod E_i$,
 $\omega: \prod TM_i \xrightarrow{C^\infty} T(\prod M_i)$.

(2) \underline{VMg} ist vollst., $\lim M_E = \underline{\text{Meng}}\text{-}\lim M \subseteq \prod E$.

(3) \underline{VMg} hat \mathbb{R} als Separator und Coseparator.

(4) \underline{VMg} ist covollst.

BEWEIS: (1) Zuerst der Fall $M_i = E_i$:

$\tau: \prod C^\infty(N, E_i) \xrightarrow{\cong} C^\infty(N, \prod E_i)$, $(f_i) \mapsto \langle f_i \rangle := (f_i) \circ \Delta$, da
 $(pr_i \circ f) \leftarrow f$

$f_* = \langle (pr_i \circ f)_* \rangle_i$ und $Tf = \omega^{-1} \circ \langle T(pr_i \circ f) \rangle_i$, wobei

$\omega: T(\prod E_i) \xrightarrow{\cong} \prod TE_i$, $((x_i)_i, (v_i)_i) \mapsto ((x_i, v_i))_i$.

" " "
 $(\prod E_i)^2 \xrightarrow{\cong} \prod E_i^2$

Somit hat also $\prod E_i$ die universelle Eigenschaft bzgl. C^∞ -Abbildungen, und ist damit das Produkt in \underline{VMg} .

Seien nun $M_i \subseteq E_i$ \underline{VMg} , dann

$\tau: \prod C^\infty(N, M_i) \xrightarrow{C^\infty} C^\infty(N, \prod M_i)$

$\{(f_i): f_i \in C^\infty(N, E_i) \wedge f_i(N) \subseteq M_i\} \xrightarrow{\cong} \{f: f \in C^\infty(N, \prod E_i) \wedge f(N) \subseteq \prod M_i\}$
 und das beweist (1).

(2) Sei $M_E: \mathbb{C} \rightarrow \underline{VMg}$ ein beliebiges Diagramm,

$M(\infty) := \underline{\text{Meng}}\text{-}\lim M$, dann gilt:

$M(\infty)$ ist ein Kegel für M_E :

pr_i ist C^∞ als Einschränkung einer stetig, lin. Abb..

$$\begin{array}{ccc} \prod E(i) & \xrightarrow{pr_i} & E(i) \\ \cup & & \cup \\ M(\infty) & \xrightarrow{pr_i} & M(i) \end{array}$$

$M(\infty)$ ist der Limes, denn sei (N, p_i) ein anderer Kegel \Rightarrow

$$\begin{array}{ccc} \prod E(i) & \xrightarrow{pr_i} & E(i) \\ \cup & & \cup \\ M(\infty) & \xrightarrow{pr_i} & M(i) \\ \swarrow f & & \nearrow p_i \\ & N & \end{array}$$

f existiert als Mengen-abb., wegen der Def. von $M(\infty)$, und ist C^∞ , da f in den umgebenden VR $\prod E(i)$ wegen $f = \langle p_i \rangle_i$ C^∞ ist nach (1).

(3) \mathbb{R} ist Separator: Sei nämlich $f \neq g$; $f, g: N \rightarrow M \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigvee_{x \in N} f(x) \neq g(x) \Rightarrow f \circ \text{konst}_x \neq g \circ \text{konst}_x$.

\mathbb{R} ist Coseparator: Sei nämlich $f \neq g$; $f, g: N \rightarrow M =$

$\Rightarrow \bigvee_{x \in N} f(x) \neq g(x) \Rightarrow \bigvee_{l \in E'} l(fx) \neq l(gx) \Rightarrow l/M$ ist C^∞ und $l/M \circ f \neq l/M \circ g$.

(4) \underline{VMg} ist covollst. [Herrlich-Strecker:163]

\underline{VMg} ist vollst., lok.klein und ein Coseparator existiert.
 Es verbleibt also nur noch zu zeigen: \underline{VMg} ist lok.klein:
 m ist mono. $\Rightarrow m$ ist injektiv (Man betrachte konst.Kurven).
 \Rightarrow oBdA $M = \text{dom } m \subseteq \text{cod } m$, $\langle M \rangle_{VR}^- =: E_o \Rightarrow M_E \cong M_E$. Es läßt
 sich aber nur eine Menge von VR erzeugen durch M^o und somit
 auch nur eine Menge von VR in denen das Erzeugnis von M
 dicht liegt. Auf diese wiederum läßt sich nur eine Menge
 von Topologien setzen. Und so erreicht man eine
 repräsentative Menge für die Monomorphismen. \square

3.2. HOMFUNKTOR S :

Ich möchte nun den Hom-Funktor $C^\infty: \underline{VMg}^{op} \times \underline{VMg} \rightarrow \underline{Meng}$ zu einem Funktor $S: \underline{VMg}^{op} \times \underline{VMg} \rightarrow \underline{VMg}$ liften.

3.2.1. Topologie auf $C^\infty(N,E)$:

1.DEF: $S(N, M_E) := C^\infty(N, M) \subseteq S(N, E)$ und $S(N, E)$ trage die von $\langle T^n \rangle: S(N, E) \rightarrow \prod \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$ induzierte Topologie.

2.LEMMA: $f, f_i \in S(N, E) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f_i \rightarrow f \Leftrightarrow \bigwedge_n \bigwedge c: \mathbb{R} \rightarrow K^\infty T^n N \text{ stetig } T^n f_i \circ c \xrightarrow{\text{kp-off}} T^n f \circ c.$$

BEWEIS: $f_i \rightarrow f \Leftrightarrow \bigwedge_n T^n f_i \rightarrow T^n f \text{ in } \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \bigwedge_n \bigwedge c: \mathbb{R} \rightarrow K^\infty T^n N \text{ stetig } T^n f_i \circ c \xrightarrow{\text{kp-off}} T^n f \circ c \quad \square$

3.LEMMA: $c_i: \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig diffb., $c_i \xrightarrow{\text{kp-off}} c$, $dc_i \xrightarrow{\text{kp-off}} c^1$
 $\Rightarrow c: \mathbb{R} \rightarrow E$ stetig diffb., $dc = c^1$.

BEWEIS: Sei $s \in \mathbb{R}$ fix, $\bar{c}_i(t) := \begin{cases} dc_i(s) & \text{für } t=s \text{ } c \text{ diffb.} \\ \frac{c_i(t) - c_i(s)}{t-s} & \text{sonst} \end{cases}$
 $\Rightarrow \bar{c}_i: \mathbb{R} \rightarrow E$ ist stetig.

$$\bar{c}_i(t) \rightarrow \begin{cases} c^1(s) & \text{für } t=s, \text{ da } c_i \xrightarrow{\text{pkw}} c, dc_i \xrightarrow{\text{pkw}} c^1 \\ \frac{c(t) - c(s)}{t-s} & \text{sonst} \end{cases}$$

\bar{c}_i ist kp-off-Cauchyfolge: Sei nämlich $s \in I$ kp-Intervall, K eine konv., abg. o-Umgebung in $E \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bigvee_{i_0} \bigwedge_{i, j \geq i_0} (dc_i - dc_j)(I) \subseteq K \quad (\text{weil } dc_i \rightarrow c^1)$$

Sei $t \in I \Rightarrow \bar{c}_i(t) - \bar{c}_j(t) = \begin{cases} dc_i(s) - dc_j(s) \in K & \text{für } s=t \\ (*) & \text{sonst} \end{cases}$

$$(*) = \frac{(c_i - c_j)(t) - (c_i - c_j)(s)}{t-s} \in \langle d(c_i - c_j)(I) \rangle_{\text{konv}}^- \subseteq K$$

nach dem Fundamentallemma.

$$\Rightarrow (\bar{c}_i - \bar{c}_j)(I) \subseteq K. \quad \bar{c}_i \text{ kp-off } \bar{c}, \quad \bar{c}(t) := \begin{cases} c^1(s) & \text{für } t=s \\ \frac{c(t) - c(s)}{t-s} & \text{sonst} \end{cases}, \text{ da } \text{Cu}(\mathbb{R}, E)$$

Flg-vollst.

und somit ist c diffb. in s , $dc(s) = c^1(s)$, da

$$\bar{c}_i \text{ stetig, } \bar{c}_i \text{ kp-off } \bar{c} \Rightarrow \bar{c} \text{ stetig} \Rightarrow \bar{c}(t) = \frac{c(t) - c(s)}{t-s} \xrightarrow{t \rightarrow s} c^1(s) \quad \square$$

Durch Induktion erhält man daraus:

$$c_i: \mathbb{R} \rightarrow E \text{ } C^\infty, d^n c_i \xrightarrow{\text{kp-off}} c^n \Rightarrow c^0: \mathbb{R} \rightarrow E \text{ ist } C^\infty, d^n c^0 = c^n$$

Wegen 1.6.2.1. ist $\text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$ Flgv.lkv und damit auch $\prod_n \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$ ein Flgv.lkv.

Es läßt sich nun zeigen, daß $S(N,E)$ selbst auch ein Flgv.lkv ist:

4.SATZ: $S(N,E) \xrightarrow[\text{Flgv.lkv}]{\langle T^n \rangle} \prod_n \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E) .$

BEWEIS: Klarerweise ist $S(N,E)$ ein Teilvektorraum. Es bleibt also zu zeigen, daß $S(N,E)$ Flg-abg. ist. Sei also $f_i \in S(N,E)$, $T^n f_i \rightarrow g^n$ in $\text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$ z.z. $\Rightarrow g^0 : N \rightarrow E$ ist C^∞ , $T^n g^0 = g^n$:

$$f_i \text{ ist } C^\infty \Rightarrow \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, N) & \xrightarrow{(f_i)_*} & C^\infty(\mathbb{R}, E) \\ \downarrow \delta & \text{\#} & \downarrow \delta \\ TN & \xrightarrow{Tf_i} & TE \end{array}$$

$$\begin{aligned} T^n f_i \rightarrow g^n &\Rightarrow d^n(f_i \circ c) = \text{pr} \circ T^n(f_i \circ c) \circ x_n = \\ &= \text{pr} \circ T^n f_i \circ T^n c \circ x_n : \mathbb{R} \rightarrow K^\infty T^n N \rightarrow E \Rightarrow \\ &\Rightarrow d^n(f_i \circ c) \xrightarrow{\text{kp-off}} \text{pr} \circ g^n \circ T^n c \circ x_n \quad \text{3. LEMMA} \\ &\Rightarrow g^0 \circ c \text{ ist } C^\infty, d^n(g^0 \circ c) = \text{pr} \circ g^n \circ T^n c \circ x_n \Rightarrow \\ &\Rightarrow (g^0)_* \text{ ist sinnvoll.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Tf_i(\delta c) &\rightarrow g^1(\delta c) && \delta(g^0 \circ c) \\ \text{"} & && \text{"} \\ \delta(f_i \circ c) &= ((f_i \circ c)(o), d(f_i \circ c)(o)) \rightarrow (g^0(c), d(g^0 \circ c)(o)) \\ &\Rightarrow g^1(\delta c) = \delta(g^0 \circ c) = \delta(g^0_*(c)) \Rightarrow Tg^0 = g^1. \end{aligned}$$

Das gilt alles genauso für g^n , d.h.: $(g^n)_*$ ist sinnvoll und $Tg^n = g^{n+1}$. $\Rightarrow g^0 : N \rightarrow E$ ist C^∞ und $T^n g^0 = g^n$. \square

3.2.2. T als natürl. Transformation :

Jetzt möchte ich zeigen, daß T eine nat.Transf. ist.

Dazu genügt es, die Glattheit von T zu beweisen.

1.SATZ: $T : S(N,M) \rightarrow S(TN, TM)$ ist C^∞ .

BEWEIS: Sei vorerst $M:=E$. \Rightarrow

$$\begin{array}{ccc} S(N,E) & \xrightarrow{\quad T \quad} & S(TN, TE) \\ \downarrow \langle T^n \rangle & \text{\#} & \langle T^n \rangle \downarrow \\ \prod \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E) & \xrightarrow{\text{pr}} & \prod \text{Cu}(K^\infty T^{n+1} N, T^{n+1} E) \end{array}$$

Wobei T als Mengen-Abb. nach Def. existiert. Weil $\text{pr} \circ \langle T^n \rangle$ nach

Def. von $S(N,E)$ stetig und linear und damit C^∞ ist, und T darüber faktorisiert, und $S(TN, TE)$ die von $\prod \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$ induzierte Topologie trägt, ist T auch stetig und linear und damit C^∞ .

Sei nun $M_E \subseteq E$ beliebig. $\Rightarrow S(N,E) \xrightarrow[C^\infty]{T} S(TN, TE)$
 Wobei T als Mengen-Abb. wieder U \# U
 nach Definition existiert, und $S(N,M) \xrightarrow{T} S(TN, TM)$
 somit als Einschränkung einer C^∞ -Abb. selbst C^∞ ist. \square

3.2.3. S(N,.) kommutiert mit Π :

Nun möchte ich zeigen, daß S(N,.) Produkte erhält.

1.SATZ: $\tau : \Pi S(N, M_i) \xrightarrow[\text{C}^\infty]{\cong} S(N, \Pi M_i)$ wobei $(f_i) \mapsto \langle f_i \rangle$

BEWEIS: $\tau : \Pi \text{Cu}(K^\infty N, E_i) \xrightarrow[\text{U}]{\cong} \text{Cu}(K^\infty N, \Pi E_i)$, denn Subbasen sind $..xM_c, U^x.. \leftrightarrow M_c, ..xU^x..$. Wobei die

Punkte bedeuten, daß dort der ganze Raum steht. \Rightarrow

$$\begin{array}{ccc} \tau : \prod_{i,n} \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E_i) & \xrightarrow[\text{lkv}^n]{\cong} & \prod \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n \prod_i E_i) \\ & \text{sl} \downarrow \text{lkv} & \text{lkv}^n \quad (\omega_*) \text{sl} \uparrow \text{lkv} \\ \prod_{n,i} \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E_i) & \xrightarrow[\text{lkv}^n]{\tau} & \prod \text{Cu}(K^\infty T^n N, \prod_i T^n E_i) \Rightarrow \end{array}$$

Wobei τ als Mengen-Abb. $S(N, \Pi E_i) \xleftarrow[\text{U}]{\cong} \prod S(N, E_i)$ existiert, weil der Hom-Funktor S(N,.) stetig $S(N, \Pi M_i) \xleftarrow[\text{U}]{\tau} \prod S(N, M_i)$

ist; und ist somit ein Diffeomorphismus als Einschränkung eines linearen Homöomorphismus. \square

2.FOLGERUNG: $\tau : TS(N, E) \xrightarrow[\text{C}^\infty]{\cong} S(N, TE)$

BEWEIS: $\tau : TS(N, E) = S(N, E)^2 \xrightarrow[\text{C}^\infty]{\cong} S(N, E^2) = S(N, TE) . \square$

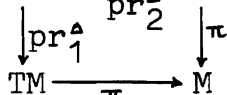
3.3. FASERPRODUKT $T \Delta T$:

In diesem Kapitel geht es darum, das Faserprodukt (die Whitney-Summe) des Tangentialraums zu behandeln.

3.3.1. $T \Delta T$ als Pullback :

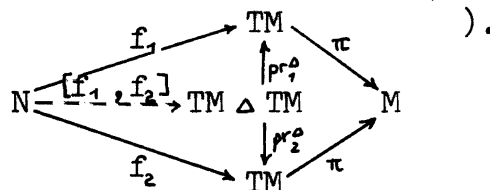
1.DEF: $TM \Delta TM := \{ (x,v,w) : (x,v), (x,w) \in TM \} \subseteq TE \Delta TE = E^3$
 $pr_1^\Delta : TM \Delta TM \rightarrow TM, (x,v,w) := (x,v) \Delta (x,w) \mapsto (x,v)$
 $pr_2^\Delta : TM \Delta TM \rightarrow TM, (x,v) \Delta (x,w) \mapsto (x,w) .$

2.SATZ: $TM \Delta TM \xrightarrow{pr_2^\Delta} TM$ ist ein Pullback.



BEWEIS: Klarerweise ist $TM \Delta TM$ das Meng-PB. Nach 3.1.4.1. ist der umgebende Vektorraum $TE \pi TE \pi E = E^5$. Aber $TM \Delta TM \subseteq E^3 \hookrightarrow E^5$, $(x,v) \Delta (x,w) \mapsto (x,v;x,w;x)$ und mit dieser Einbettung ist E^3 ein abg. Teilraum in E^5 und reicht nach 3.1.2.1.(5) als Umgebender VR.

3.DEF: $[f_1, f_2]$ bezeichne die wegen der PB-Eigenschaft eindeutig assoziierte Abbildung zu f_1 und f_2 . (d.h.:



3.3.2. $\hat{\alpha}$ als nat. Transf. und partielle Tangentiale :

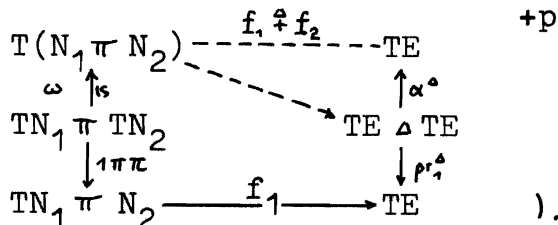
1.DEF: $\hat{\alpha} : TE \Delta TE \rightarrow TE$, $(x,v) \Delta (x,w) \mapsto (x, v+w)$ heißt die Faseraddition von TE.

$\delta_2 : S(\mathbb{R}^2, M) \rightarrow TM \Delta TM, \delta_2 := [\delta_0 \circ inj_1^*, \delta_0 \circ inj_2^*]$
 $inj_1^\Delta : TM \rightarrow TM \Delta TM, inj_1^\Delta := [1, 0 \circ \pi]$
 $inj_2^\Delta : TM \rightarrow TM \Delta TM, inj_2^\Delta := [0 \circ \pi, 1]$

Seien schließlich $f_1 : TN_1 \pi N_2 \rightarrow TE, f_2 : N_1 \pi TN_2 \rightarrow TE$ mit $\pi \circ f_1 \circ (1 \pi \pi) \circ \omega^{-1} = \pi \circ f_2 \circ (\pi \circ 1) \circ \omega^{-1}$

$f_1 \hat{+} f_2 := \hat{\alpha} \circ [f_1 \circ (1 \pi \pi) \circ \omega^{-1}, f_2 \circ (\pi \circ 1) \circ \omega^{-1}]$

(d.h.: $(f_1 \hat{+} f_2)(x_1, x_2; v_1, v_2) = (pr_1 f_1(x_1, x_2; v_1), pr_2 f_1(x_1, v_1; x_2) + pr_2 f_2(x_1; x_2, v_2))$)
 oder als Diagramm:



2.SATZ: $f_* : C^\infty(\mathbb{R}, N_1 \pi N_2) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, E)$ sei sinnvoll für

$$f : N_1 \pi N_2 \rightarrow E \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}, N_1 \pi N_2) & \xrightarrow{f_*} & C^\infty(\mathbb{R}, E) \\ \delta \downarrow & \# & \downarrow \delta \\ T(N_1 \pi N_2) & \xrightarrow{Tf} & TE \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccccc} C^\infty(\mathbb{R}, N_1) \pi N_2 & \xrightarrow{f_{*1}} & C^\infty(\mathbb{R}, E) & N_1 \pi C^\infty(\mathbb{R}, N_2) & \xrightarrow{f_{*2}} & C^\infty(\mathbb{R}, E) \\ \delta \pi 1 \downarrow & \# & \downarrow \delta & \wedge & \downarrow 1 \pi \delta & \# & \downarrow \delta \\ TN_1 \pi N_2 & \xrightarrow{T_1 f} & TE & & N_1 \pi TN_2 & \xrightarrow{T_2 f} & TE \end{array}$$

wobei $f_{*1} := f_* \circ \tau \circ (1, \text{konst})$, $f_{*2} := f_* \circ \tau \circ (\text{konst}, 1)$

$$Tf := T_1 f + T_2 f \quad \text{mit} \quad T_1 f := Tf \circ \omega \circ (1 \pi 0)$$

$$T_2 f := Tf \circ \omega \circ (0 \pi 1) .$$

BEWEIS: $(\Leftarrow) Tf(\delta \langle c_1, c_2 \rangle) \stackrel{Z \cong Z}{=} \delta (f_*(\langle c_1, c_2 \rangle)) =$

$$= \langle f \circ \langle c_1, c_2 \rangle, d(f \circ \langle c_1, c_2 \rangle) \rangle (0) =$$

$$= \hat{\alpha} (\langle f \circ (c_1, c_2), d_1(f \circ (c_1, c_2)) \rangle (0, 0), \dots) =$$

$$= \hat{\alpha} (\langle f \circ (c_1, c_2(0)), d(f \circ (c_1, c_2(0))) \rangle (0), \dots) =$$

$$= \hat{\alpha} (T_1 f(\delta c_1, c_2(0)), T_2 f(c_1(0), \delta c_2)) = Tf(\delta \langle c_1, c_2 \rangle) .$$

$$(\Rightarrow) T_1 f((\delta \pi 1)(c_1, n)) \stackrel{Z \cong Z}{=} \delta (f_{*1}(c_1, n)) =$$

$$= \delta (f_*(\tau(c_1, n))) = \delta (f_*(\langle c_1, n \rangle)) = Tf(\delta \langle c_1, n \rangle) =$$

$$= Tf(\omega(\delta c_1, \delta n)) = Tf(\omega(\delta c_1; n, 0)) =$$

$$= Tf(\omega(1 \pi 0(\delta c_1, n))) = Tf(\omega((1 \pi 0)((\delta \pi 1)(c_1, n)))) =$$

$$= T_1 f((\delta \pi 1)(c_1, n)). \quad \square$$

3.4. KARTESISCHE ABGESCHLOSSENHEIT :

Der Zweck dieses Kapitels ist, die kartesische Abgeschlossenheit der Kategorie \underline{VMg} zu zeigen.

3.4.1. (Co-)Einheit ins, ev :

1.LEMMA: $ins : N \rightarrow S(M, N \pi M)$ ist C^∞ .

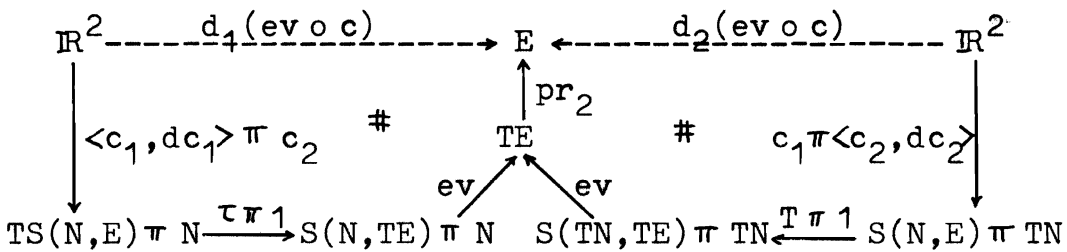
BEWEIS: Sei zuerst $N := E \Rightarrow ins(.) = \langle ., o \rangle + \langle o, 1_M \rangle : E \rightarrow S(M, E \pi F)$ ist C^∞ , da der erste Summand stetig, lin. und der 2. konstant und somit C^∞ ist. Außerdem ist $ins(n) : m \mapsto (n, m)$ als Einschränkung einer stetig, lin. Abb. C^∞ , und somit ist $ins : E \rightarrow S(M, E \pi M) C^\infty$.

Sei nun $N \subseteq E \Rightarrow ins : N \rightarrow S(M, N \pi M)$ ist C^∞ als sinnv. Einschränkung einer C^∞ Abb..

2.SATZ: $ev : S(N, M) \pi N \rightarrow M$ ist C^∞ .

BEWEIS: Sei wieder zuerst $M := E$, dann gilt:

$ev : K^\infty(S(N, E) \pi N) \rightarrow E$ ist stetig: $ev : K^\infty(S(N, E) \pi N) \rightarrow \text{Kurv}(K^\infty(S(N, E)) \pi K^\infty N) \rightarrow \text{Kurv}(\text{Kurv} S(N, E) \pi K^\infty N) \rightarrow \text{Kurv}(\text{Kurv} C_u(K^\infty N, E) \pi K^\infty N) \rightarrow E$ ist wegen 1.5.1.2. stetig.
 $ev_* : C^\infty(\mathbb{R}, S(N, E) \pi N) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, E)$ ist sinnvoll: Sei $c \in C^\infty(\mathbb{R}, S(N, E) \pi N) \Rightarrow c = \langle c_1, c_2 \rangle$. Ich definiere $d_i(ev \circ c)$ durch folgendes Diagramm :



$\Rightarrow d_i(evoc)$ ist stetig, denn alle Abb. bis auf ev sind C^∞ und somit K^∞ -stetig, und ev ist K^∞ -stetig. Weiters ist die Definition von $d_i(evoc)$ sinnvoll, denn

$$\begin{aligned}
 d_1(evoc)(s, t) &= (pr_2 \circ ev \circ (\tau \pi 1) \circ (\langle c_1, dc_1 \rangle \pi c_2))(t, s) = \\
 &= dc_1(s)(c_2(t)) = d(c_1(.))(s)(c_2(t)) = \\
 &= d(c_1(.)(c_2(t)))(s) = d((evoc)(., t))(s) \text{ und} \\
 d_2(evoc)(s, t) &= (pr_2 \circ ev \circ (T \pi 1) \circ (c_1 \pi \langle c_2, dc_2 \rangle))(s, t) = \\
 &= pr_2(T(c_1(s))(c_2(t), dc_2(t))) = pr_2(T(c_1(s))(Tc_2(t, 1))) = \\
 &= pr_2(T(c_1(s) \circ c_2)(t, 1)) = d(c_1(s) \circ c_2)(t) = \\
 &= d((evoc)(s, .))(t). \quad 2.3.2.3 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow ev \circ c$ ist stetig diffb., $d(evoc) = (d_1(evoc) + d_2(evoc)) \circ \Delta = pr_2 \circ (evoc^1 + evoc^2)$ wo $c^1 := \langle \tau \circ \langle c_1, dc_1 \rangle, c_2 \rangle$ und $c^2 := \langle T \circ c_1, \langle c_2, dc_2 \rangle \rangle$.
 \Rightarrow (Induktiv) $d^n(evoc)$ existiert $\Rightarrow evoc : \mathbb{R} \rightarrow E$ ist C^∞ .

T ev existiert: Sei nämlich $T_1 ev$ wie folgt definiert:

$$\begin{array}{ccccc}
 T(S(N,E) \pi N) & \xrightarrow{T_1 ev} & TE & \xleftarrow{T_2 ev} & T(S(N,E) \pi N) \\
 \downarrow \omega^{-1} & & \uparrow & & \downarrow \omega^{-1} \\
 TS(N,E) \pi TN & \# & ev & \# & TS(N,E) \pi TN \\
 1 \pi 0 & & \swarrow & \searrow & 0 \pi 1 \\
 TS(N,E) \pi N & \xrightarrow{\tau \pi 1} & S(N,TE) \pi N & & S(TN,TE) \pi TN \xleftarrow{T \pi 1} S(N,E) \pi TN
 \end{array}$$

Damit gilt dann:

$$\begin{aligned}
 T_1 ev(\delta c) &= ev(\tau \pi 1((1 \pi 0)(\delta c_1, \delta c_2))) = \\
 &= ev(\tau \pi 1)(\delta c_1; c_2(o), o) = \\
 &= (ev \circ (\tau \pi 1)) \circ \langle c_1, dc_1; c_2(o), o \rangle(o) = \\
 &= ((ev \circ c)(o), d_1(ev \circ c)(o, o)), \text{ analog } \} \\
 T_2 ev(\delta c) &= ((ev \circ c)(o), d_2(ev \circ c)(o, o)) \} \Rightarrow \\
 T ev &= \hat{\alpha} \circ [T_1 ev, T_2 ev], \text{ denn } (\hat{\alpha} \circ [T_1 ev, T_2 ev])(\delta c) = \\
 &= ((ev \circ c)(o), d_1(ev \circ c)(o, o) + d_2(ev \circ c)(o, o)) = \\
 &= ((ev \circ c)(o), d(ev \circ c)(o)) = \delta(ev \circ c) \Rightarrow \text{(Induktiv)}
 \end{aligned}$$

ev ist C^∞ .

Sei nun $M \subseteq E$. $S(N,E) \pi N \xrightarrow{ev} E$
 ev existiert klarerweise als Mengenabb., $S(N,M) \pi N \xrightarrow{ev} M$
 und ist somit als Einschränkung einer C^∞ -Abb. selbst C^∞ . \square

3.4.2. τ als natürl. Transformation:

1. FOLGERUNG: $TS(N,E) \xrightarrow{\tau} S(N,TE)$
 $TS(N,M) \xrightarrow{\tau} S(N,TM)$ existiert und ist C^∞ .

BEWEIS: Es ist nur zu zeigen, daß $\tau: TS(N,M) \rightarrow S(N,TM)$ als Mengenabb. existiert. Sei dazu $c \in C^\infty(\mathbb{R}, S(N,M)) \Rightarrow \delta c \in TS(N,M)$.

Z.z. ist: $\tau(\delta c): N \rightarrow TM$ ist C^∞

$$\begin{array}{ccc}
 N & \xrightarrow{\tau} & TE \\
 \parallel & & \parallel \\
 N & \xrightarrow{\tau} & TE \text{ (ist } C^\infty \text{ nach 3.2.3.2.)}
 \end{array}$$

bleibt z.z. $\tau(\delta c)(n) \in TM$. $\tau(\delta c)(n) =$

$$= \tau(c(o), dc(o))(n) = (c(o)(n), dc(o)(n)) \stackrel{\text{Beh.}}{=}$$

$$= (\hat{c}(o, n), d(\hat{c}(\cdot, n))(o)) = \delta(\hat{c} \circ \nu \circ \text{ins}(n)) \in TM$$

$$c: \mathbb{R} \rightarrow S(N,M) \text{ ist } C^\infty \Rightarrow \hat{c} = ev \circ (c \pi 1): \mathbb{R} \pi N \rightarrow M \text{ } C^\infty$$

$$\Rightarrow \hat{c} \circ \nu \circ \text{ins}(n): \mathbb{R} \rightarrow M \text{ } C^\infty. \quad dc(o)(n) =$$

$$= (\lim(c(t) - c(o))/t)(n) = ev(\lim(c(t) - c(o))/t, n) =$$

$$= \lim(ev((c(t) - c(o))/t, n)) = \lim(c(t)(n) - c(o)(n))/t =$$

$$= \lim(\hat{c}(t, n) - \hat{c}(o, n))/t = d(\hat{c}(\cdot, n))(o).$$

2. LEMMA: $(\checkmark): S(\mathbb{R} \pi N, M) \rightarrow S(\mathbb{R}, S(N, M))$ ist sinnvoll.

BEWEIS: Betrachten wie vorerst den vereinfachten Fall

$(\checkmark): S(\mathbb{R} \times N, E) \rightarrow S(\mathbb{R}, \text{Cu}(K^\infty N, E))$ ist sinnvoll, $d^n \checkmark = (d_1^n f)^\checkmark$:
 $\checkmark(s) = f \circ \text{ins}_s$ ist C^∞ und somit K^∞ stetig $\Rightarrow \checkmark(s)$ ist sinnv..

Sei $c: I \rightarrow N$ stetig, $g := f \circ (1 \times c): \mathbb{R} \times I \rightarrow E$ ist stetig,

$d_1 g = d_1 f \circ (1 \times c)$ existiert und ist stetig $2.3.2.2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (g(t+s, \cdot) - g(s, \cdot)) / t \xrightarrow{\text{glm.}} d_1 g(s, \cdot) \Rightarrow$

$\Rightarrow ((f(t+s) - f(s)) / t) \circ c \xrightarrow{\text{glm}} (d_1 f)(s) \circ c \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(t+s) - f(s)) / t \xrightarrow{\text{glm}} (d_1 f)(s) \text{ in } \text{Cu}(K^\infty N, E) \Rightarrow$

f ist diffb., $d\checkmark = (d_1 f)^\checkmark \Rightarrow$ (induktiv)

$(d_1^n f: \mathbb{R} \times N \rightarrow E \text{ } C^\infty \Rightarrow) (d_1^n f)^\checkmark: \mathbb{R} \rightarrow \text{Cu}(K^\infty N, E)$ existiert,

$d^{n+1}(\checkmark) = d(d_1^n f)^\checkmark = (d_1(d_1^n f))^\checkmark = (d_1^{n+1} f)^\checkmark$.

Nun der allgemeine Fall für $M := E$

$(\checkmark): S(\mathbb{R} \times N, E) \rightarrow S(\mathbb{R}, S(N, E))$ ist sinnvoll:

$\checkmark(s) = f \circ \text{ins}_s$ ist C^∞ und somit existiert f als Abb..

Ich betrachte nun $T^n \text{of} \checkmark: \mathbb{R} \rightarrow S(N, E) \rightarrow \text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$.

Dann gilt: $T^n \text{of} \checkmark = (T_2^n f)^\checkmark$ wo $T_2^n f: \mathbb{R} \times T^n N \rightarrow T^n E$ folgende

C^∞ -Abbildung ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times T^n N & \xrightarrow{T_2^n f} & T^n E \\ \text{O} \times 1 \downarrow & & \uparrow T^n f \\ \mathbb{R} \times T^n N & \xrightarrow{\omega} & T(\mathbb{R} \times N) \end{array}$$

(vollst. Induktion) ($n=1$) $(T \text{of} \checkmark)(s) = T(\checkmark(s)) =$

$= T(f(s, \cdot)) = T(f \circ \langle s, 1 \rangle) = T f \circ T \langle s, 1 \rangle = T f \circ \omega \circ \langle T s, T 1 \rangle =$

$= T f \circ \omega \circ \langle s, 0; 1 \rangle = T_2 f(s, \cdot) = (T_2 f)^\checkmark(s)$.

$(n+1)$ $(T^{n+1} \text{of} \checkmark)(s) = T^{n+1}(\checkmark(s)) =$

$= T(T^n(\checkmark(s))) = T((T_2^n f)^\checkmark(s)) = (T \circ (T_2^n f)^\checkmark)(s) =$

$= (T_2(T_2^n f))^\checkmark(s) = (T_2^{n+1} f)^\checkmark(s)$.

Somit ist $T^n \text{of} \checkmark \in C^\infty$ und damit auch \checkmark , da $S(N, E)$ in

$\text{Cu}(K^\infty T^n N, T^n E)$ via $\langle T^n \rangle$ Flg-abg. ist (3.2.1.4.).

Sei nun schließlich $M \subseteq E$, $f \in S(\mathbb{R} \times N, M) \Rightarrow$

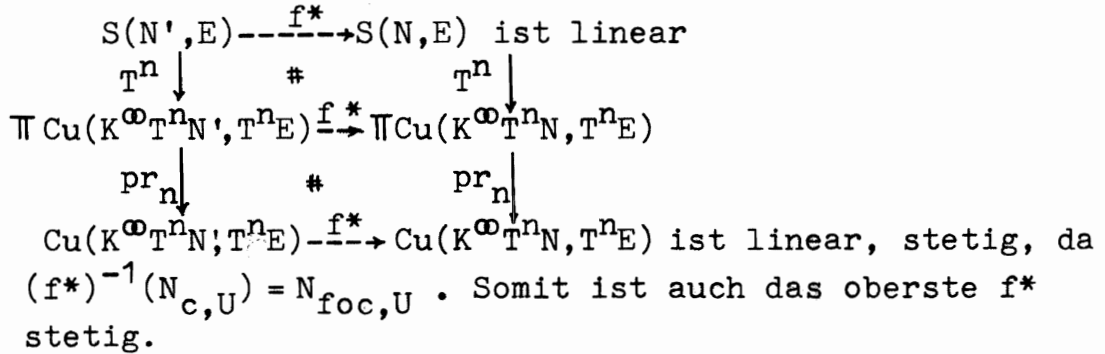
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\checkmark} & S(N, E) \text{ ist } C^\infty, \text{ und } \checkmark \text{ existiert als Mengen-Abb.,} \\ \parallel & & \cup & \text{da } \checkmark(s) = f \circ \text{ins}_s \in C^\infty, \text{ und ist} \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\checkmark} & S(N, M) & \text{somit } C^\infty. \quad \square \end{array}$$

3.4.3. S als Funktor :

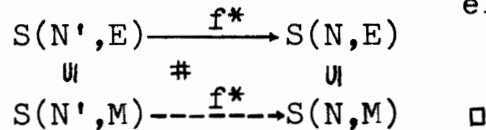
1.LEMMA: $f : N \rightarrow N' \in C^\infty \Rightarrow f^* : S(N', M) \rightarrow S(N, M) \in C^\infty$.

BEWEIS: f^* ist sinnvoll, denn $f^*(g) = fog$ ist C^∞ .

Sei nun wieder $M := E \Rightarrow$



Sei schließlich $M \subseteq E \Rightarrow f^*$ ist als Einschränkung einer stetig, linearen Abb. C^∞ .



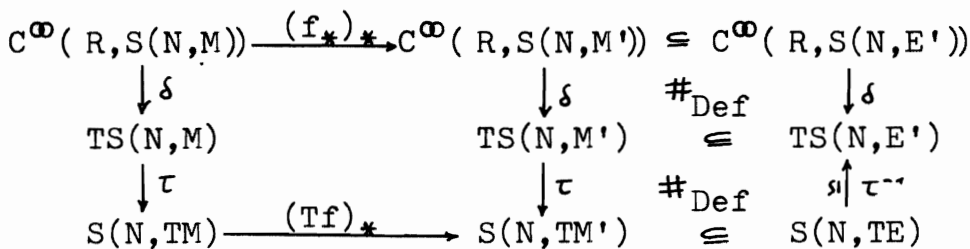
2.SATZ: $f : M \rightarrow M' \in C^\infty \Rightarrow f_* : S(N, M) \rightarrow S(N, M') \in C^\infty$.

BEWEIS: $(f_*)_*$ existiert weil $(f_*)_*(c) = (fo\hat{c})^\vee \in C^\infty$ nach 3.4.2.2.

$$\begin{aligned}
 (f_*)_*(c)(t)(n) &= (f_* \circ c)(t)(n) = f_*(c(t))(n) = f(c(t)(n)) = \\
 &= f(\hat{c}(t, n)) = (fo\hat{c})(t, n) = (fo\hat{c})^\vee(t)(n) \text{ . Und}
 \end{aligned}$$

$\hat{c} = ev \circ (c \pi 1) \in C^\infty$ nach 3.4.1.2. .

$T(f_*)$ existiert, $T(f_*) = \tau^{-1} \circ (Tf)_* \circ \tau$; wegen folgendem Diagramm:



Dieses kommutiert, da:

$$\begin{aligned}
 \tau(\delta(c))(n) &= \tau(c(o), dc(o))(n) = (c(o)(n), dc(o)(n)) \stackrel{Z \cong Z}{=} \cdot \\
 &= \langle c(\cdot)(n), d(c(\cdot)(n)) \rangle(o) = \delta(c(\cdot)(n)) :
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d(c(\cdot)(n))(o) &= \lim(c(t)(n) - c(o)(n))/t = \\
 &= (\lim(c(t) - c(o))/t)(n) = dc(o)(n) \text{ .}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{und } ((Tf)_* \circ \tau \circ \delta)(c)(n) &= (Tf)_*(\tau(\delta(c)))(n) = \\
 &= (Tf \circ \tau(\delta(c)))(n) = Tf(\tau(\delta(c))(n)) = \\
 &= Tf(\tau(c(\cdot)(n))) = \delta(f_*(c(\cdot)(n))) = \delta((f_*)_*(c)(n)) = \\
 &= \tau(\delta((f_*)_*(c)))(n) = (\tau \circ \delta \circ (f_*)_*)(c)(n) \text{ .}
 \end{aligned}$$

Es gilt somit: $\tau \circ T(f_*) \circ \delta = (Tf)_* \circ \tau \circ \delta = \tau \circ \delta \circ (f_*)_* \stackrel{\tau \text{ bij.}}{\Rightarrow}$
 $T(f_*) \circ \delta = \delta \circ (f_*)_*$ wo $T(f_*) : TS(N, M) \rightarrow TS(N, E')$, da aber
 $\text{Im}(\delta \circ (f_*)_*) \subseteq TS(N, M')$ gilt $T(f_*) : TS(N, M) \rightarrow TS(N, M')$. \square

3.4.4. Folgerungen:

1. FOLGERUNG: (1) VMg ist kartesisch abg. via der
 Adjunktion $(\cdot \pi N, S(N, \cdot), \text{ins}, \text{ev})$.
 (2) $S(M, S(N, P)) \cong S(M \pi N, P)$ via $(\cdot)^\wedge, (\cdot)^\vee$.
 (3) $\text{komp} : S(N, M) \pi S(P, N) \rightarrow S(P, M)$ ist C^∞ .
 (4) $\delta : S(\mathbb{R}, \cdot) \rightarrow T$ ist nat. Transf..
 (5) $\delta^2 : S(\mathbb{R}^2, \cdot) \rightarrow T^2$ ist nat. Transf.

wobei $\delta^2(f) := \langle f, d_1 f; d_2 f, d_2 d_1 f \rangle (o, o)$

BEWEIS: (1), (2), (3) folgen aus oben bewiesenen Sätzen rein
 kategoriell, und dieser Beweis ist in 1.5.1.3., 1.5.2.1, 2
 zu finden.

$$(4) \begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}, M) & \xrightarrow{\delta} & TM \\ \downarrow T & & \uparrow \text{ev}_o \\ S(T\mathbb{R}, TM) & \xrightarrow{(\nu \circ \text{ins}_1)^*} & S(\mathbb{R}, TM) \end{array} \text{ , somit ist } \delta \in C^\infty .$$

$$(5) \begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}^2, M) & \xrightarrow{\delta^2} & T^2 M \\ \downarrow (\cdot)^\vee & & \uparrow \delta \\ S(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}, M)) & \xrightarrow{\delta_*} & S(\mathbb{R}, TM) \end{array} \quad \square$$

4. VEKTORBÜNDEL :

In diesem Kapitel geht es darum, Vektorbündel - das sind spezielle Projektionen, deren Fasern Flgv.lkv sind - über Vektormengen behandeln. Dazu seien alle auftretenden Räume Vektormengen; E, F, G Flgv.lkv; und alle Abbildungen C^∞ .

4.1. DEFINITIONEN UND FOLGERUNGEN :

4.1.1. Pullback :

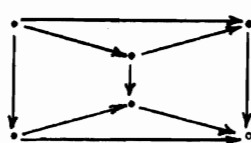
1. DEF: Seien $f_i : N_i \rightarrow M$, dann bezeichne $N_1 \pi_M N_2$, oder genauer $(N_1 \pi_M N_2, f_1^x, f_2^x)$, das Pullback (PB) von f_1, f_2 . D.h.:

$$\begin{array}{ccc}
 N_1 \pi_M N_2 & \xrightarrow{f_1^x} & N_2 \\
 f_2^x \downarrow & \text{PB} & \downarrow f_2 \\
 N_1 & \xrightarrow{f_1} & M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f_1^{-1}(f_2) := f_2^x \\
 f_2^{-1}(f_1) := f_1^x \\
 f_1^{-1}(N_2) := N_1 \pi_M N_2 \\
 f_2^{-1}(N_1) := N_1 \pi_M N_2
 \end{array}$$

2. Ein typisches Beispiel ist, das in 3.3. behandelte Faserprodukt $TM \Delta TM$. 3.3.1.2. besagt nämlich, daß

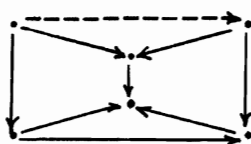
$$\begin{array}{ccc}
 TM \Delta TM & \xrightarrow{\text{pr}_2^A} & TM \\
 \text{pr}_1^A \downarrow & & \downarrow \pi \\
 TM & \xrightarrow{\pi} & M
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{ein PB ist. Somit gilt:} \\
 (TM \Delta TM, \text{pr}_1^A, \text{pr}_2^A) = (TM \pi TM, \pi^x, \pi^x) \\
 (\pi, M, \pi)
 \end{array}$$

3. LEMMA: (1) Sei



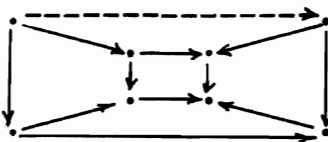
kommutativ, und die beiden Trapeze PB. \Rightarrow
 \Rightarrow Das Rechteck ist PB.

(2) Sei



kommutativ, und die beiden Trapeze PB. \Rightarrow
 \Rightarrow Der strichlierte Pfeil existiert eindeutig und macht das Rechteck zum PB.

(3) Sei



kommutativ, und die seitl. beiden Trapeze sowie das innere Rechteck PB. \Rightarrow

\Rightarrow Der strichlierte Pfeil existiert eindeutig und macht das äußere Rechteck zum PB.

BEWEIS: (1), (2) Eine einfache Diagrammjagd beweist dies.

(3) erhält man durch Anwendung von (1) und (2). \square

4.1.2. Vektorfaserung :

1.DEF: $V \xrightarrow{p} M$ heißt Vektorfaserung (VFas) : \Leftrightarrow

$$\begin{array}{ccc} E \oplus G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E \\ \cup & \# & \cup \\ V & \xrightarrow{p} & M \end{array} \wedge x \in M \Rightarrow V_x := \{g : (x,g) \in V\} \xrightarrow{\text{Flg v. lkv}} G.$$

Die 2. Bedingung bedeutet:

V_x ist Flg-abg in V \wedge

$$\begin{array}{ccc} (E \oplus G) & \xrightarrow{\pi} & (E \oplus G) \rightarrow E \oplus G \\ \cup & \# & \cup \\ V & \xrightarrow{\pi} & V \end{array} \xrightarrow{\alpha_p} V \quad \alpha_p = \alpha_M = + \text{ heißt Faseraddition.}$$

$$\begin{array}{ccc} (E \oplus G) & \xrightarrow{\pi} & (E \oplus G) \rightarrow E \oplus G \\ \cup & \# & \cup \\ V & \xrightarrow{\pi} & V \end{array} \xrightarrow{\mu_p} V \quad \mu_p = \mu_M = \cdot \text{ heißt Fasermultipl..}$$

Unter dem 0-Schnitt der VFas versteht man:

$$O_p : M \rightarrow V, m \mapsto (m, o)$$

2.LEMMA: $V \xrightarrow{p} M$ sei VFas $\Rightarrow S(N, V) \xrightarrow{p_*} S(N, M)$ ist VFas .

BEWEIS: $S(N, E) \oplus S(N, G) \xrightarrow{\text{pr}_1} S(N, E)$

$$\begin{array}{ccc} S(N, E) \oplus S(N, G) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & S(N, E) \\ \tau \downarrow \cup & \# & \cup \\ S(N, E \oplus G) & \xrightarrow{(\text{pr}_1)_*} & S(N, E) \\ \cup & \# & \cup \\ S(N, V) & \xrightarrow{p_*} & S(N, M) \end{array}$$

$$\begin{aligned} S(N, V)_f &= \{g \in S(N, G) : \langle f, g \rangle \in S(N, V)\} = \\ &= \{g \in S(N, G) : \bigwedge_{x \in N} g(x) \in V_{f(x)}\}, \text{ denn} \\ \langle f, g \rangle \in S(N, V) &\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in N} (f(x), g(x)) \in V \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \bigwedge_{x \in N} g(x) \in V_{f(x)}. \end{aligned}$$

Da die Vektorraumstruktur auf $S(N, G)$ pkw. definiert ist, gilt somit $S(N, V)_f \xrightarrow{\text{Flg v. lkv}} S(N, G)$. Das hätte man auch

kategorieller bekommen, wenn man beachtet hätte, daß

α_{p_*} (bzw. μ_{p_*}) bis auf nat. Isom. gleich $(\alpha_p)_*$ (bzw.

$(\mu_p)_*$ ist.

Schließlich ist $S(N, V)_f$ Flg-abg, denn sei $g_n \rightarrow g, g_n \in S(N, V)_f \Rightarrow g_n(x) \rightarrow g(x), g_n(x) \in V_{f(x)}$ und $V_{f(x)}$ ist Flg-abg in $G \Rightarrow g(x) \in V_{f(x)} \Rightarrow g \in S(N, V)_f. \quad \square$

3.DEF: Seien $V \xrightarrow{p} M, V' \xrightarrow{p'} M'$ VFas, $f: V \rightarrow V' \Rightarrow$
 f heißt fasererhaltend $:\Leftrightarrow f(V_x) \subseteq V'_{\bar{f}(x)}$ wobei

$$\bar{f} := p' \circ f \circ 0_p : M \rightarrow M'$$

$$f_x := f|_{V_x} : V_x \rightarrow V'_{\bar{f}(x)}$$

(Als kommutatives Diagramm bedeutet das: $V \xrightarrow{f} V'$)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ p \downarrow & \# & \downarrow p' \\ M & \xrightarrow{\bar{f}} & M' \end{array}$$

Falls zusätzlich $\bar{f} = 1_M, M = M'$ gilt, heißt f fasertreu.

Sei P eine Eigenschaft für Abbildungen zwischen lkv \Rightarrow
 f heißt faser- $P : \Leftrightarrow f$ ist fasererhaltend, f_x ist P .

4.LEMMA:

$$\begin{array}{ccc} N \xrightarrow{f} N' & \xrightarrow{1} & N \\ \downarrow \alpha_p & \# & \downarrow \alpha_{p'} \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \pi V & \xrightarrow{1 \pi f} & \mathbb{R} \pi V' \\ \downarrow \mu_p & \# & \downarrow \mu_{p'} \\ V & \xrightarrow{f} & V' \end{array}$$

f ist faserlin. $\Leftrightarrow f$ ist faseradd. $\Leftrightarrow f$ ist faserhomogen

BEWEIS: (\Rightarrow) f ist faseradd. $\Rightarrow f(\mu_p(t, v)) = \mu_{p'}(t, f(v))$ für $t \in \mathbb{Q}$, und weil $f \in C^\infty$ und somit K^∞ -stetig ist, und $t \mapsto \mu_p(t, v)$ eine C^∞ -Kurve ist, gilt es sogar für $t \in \mathbb{R}$.

(\Leftarrow) f ist faserhomogen. $\Rightarrow f(x, v) = (\bar{f}(x), f_x(v))$ mit $f_x: V_x \rightarrow V'_x \in C^\infty$ und homogen. $\Rightarrow f_x(v) = d(f_x(v))(o) = d(f_x(\cdot, v))(o) = Df_x(o, v)$ und $Df_x(o, \cdot)$ ist linear. \square

5.LEMMA: $V \xrightarrow{p} M$ sei VFas, $f: N \rightarrow M \Rightarrow N \xrightarrow{p^x} N$ ist VFas \wedge
 $N \xrightarrow{f^x} V$ ist faseriso.

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{c} & F \leftarrow \xrightarrow{\text{pr}_1} & F \oplus G \\ \uparrow p^x & & \# & \cup \\ N \xrightarrow{p^x} N & & & \end{array}$$

$N \xrightarrow{p^x} N = \{ (x; y, g) : x \in N, (y, g) \in V, f(x) = y \} \cong \{ (x, g) : x \in N, y \in V_{f(x)} \}$
 und $(N \xrightarrow{p^x} N)_x = \{ (y, g) : (x; y, g) \in N \xrightarrow{p^x} N \} \cong \{ g : (f(x), g) \in V \} = V_{f(x)}$.
 und f^x ist faseriso, da $f^x(x; y, g) = (y, g)$. \square

6.LEMMA: $V_i \xrightarrow{p_i} M$ seien VFas $\Rightarrow V_1 \xrightarrow{p} V_2 \xrightarrow{p} M$ ist VFas,
 wobei $p = p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1$.

$$\begin{array}{ccc} (E \oplus G_1) \xrightarrow{\text{pr}_1} (E \oplus G_2) & \xrightarrow{\text{pr}_1} & E \\ \cup & \# & \cup \\ V_1 \xrightarrow{p} V_2 & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

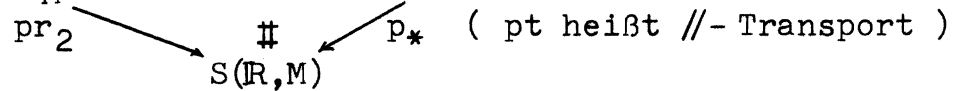
und $(V_1 \xrightarrow{p} V_2)_x = \{ (g_1, g_2) : (x, g_i) \in V_i \} = (V_1)_x \oplus (V_2)_x$. \square

4.1.3. Definition von Vektorbündel :

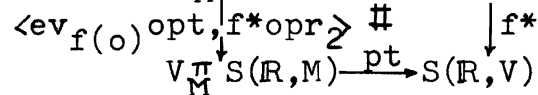
1.DEF: $V \xrightarrow{P} M$ heißt Vektorbündel (VB) : \Leftrightarrow

(VB1) $V \xrightarrow{P} M$ ist VFas.

(VB2) $V \xrightarrow{\pi} S(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{pt} S(\mathbb{R}, V)$ existiert als fasermono.

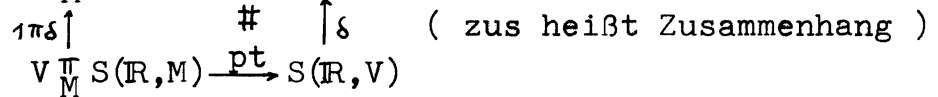


(VB3) $f : \mathbb{R} \Rightarrow \Rightarrow V \xrightarrow{\pi} S(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{pt} S(\mathbb{R}, V)$

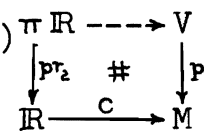


(D.h. der // - Transport hängt nicht von der Parametrisierung der Kurve ab)

(VB4) $V \xrightarrow{\pi} TM \xrightarrow{zus} TV$ existiert .



Üblicherweise werden Vektorbündel durch die Existenz eines Vektorbündelatlas definiert. Das sind Karten des Basisraums, über denen das Vektorbündel trivial ist. Hier stehen einem jedoch keine Karten zur Verfügung, und offene Mengen sind gerade die unter C^∞ -Kurven offenen Mengen. Somit erscheint es sinnvoll unter Vektorbündel solche Vektorfaserungen zu verstehen, die längs Kurven trivial sind, d.h. für $c \in C^\infty(\mathbb{R}, M)$ existiert

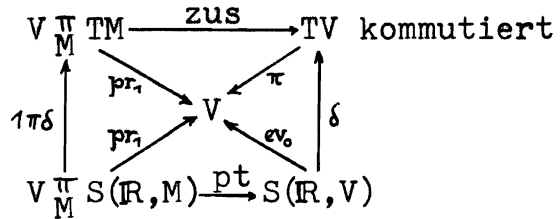


und ist ein Faserisomorphismus. Läßt man diese Bedingung noch C^∞ von der Kurve abhängen, dann bekommt man gerade den // - Transport pt und die Eigenschaft (VB2).

Die Verträglichkeitsbedingung (VB3) mit Parameterwechsel der Kurven ist dann eine naheliegende Verschärfung.

Schließlich möchte man noch, daß der // - Transport infinitesimal von den Tangenten der Kurven allein abhängt. Das besagt gerade die Existenz des Zusammenhangs zus mit der Eigenschaft (VB4).

2.LEMMA: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB \Rightarrow



(D.h. $pt(v,c)(o) = v$).

BEWEIS: $pt(v,c)(o) = pt(v,c)(o+o)$ (VB3)

$= pt(pt(v,c)(o), c(.+o))(o) = pt(pt(c,v)(o), c)(o) \Rightarrow$
 $v = pt(v,c)(o)$ weil pt fasermono. Damit kommutiert
das untere Dreieck und somit alle, da $1\pi\delta$ surj. ist.

3. Da jedes $f : \mathbb{R} \rightarrow V$ sich schreiben läßt als $f = (f-f(o))+f(o)$,
ist (VB3) äquivalent zu $(VB3') \wedge (VB3'')$. Wobei (VB3') (VB3)
ist, wenn man dort für f nur Additionen mit Konst. zuläßt.
D.h. $f = .+s$ und $pt(v,c)(t+s) = pt(pt(v,c)(s), c(.+s))(t)$. Das
ist also eine Flußeigenschaft längs Kurven. (VB3'') ist
(VB3), wobei man nur solche f zuläßt, für die $f(o) = o$.

Die Kommutativität des Diagramms bedeutet dann :

$$pt(v,c)(f(t)) = pt(\underbrace{pt(v,c)(f(o))}_o, cof)(t) = pt(v, cof)(t)$$

v nach obigen Lemma

$\Leftrightarrow pt(v,c) \circ f = pt(v, cof) \Leftrightarrow pt(v, .) : S(\mathbb{R}, M) \rightarrow S(\mathbb{R}, V)$ ist
 $\{f \in S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(o) = o\}$ - äquivariant, wobei diese Halbgruppe
auf $S(\mathbb{R}, N)$ durch $(.)^* = S(., N)$ wirkt. \square

4. Es wäre hier noch anzumerken, daß die vom // -Transport
 pt in (VB2) geforderte Eigenschaft ein Fasermono zu sein
ganz entscheidend ist. Würde man nämlich nur Faserlinearität
und nicht Injektivität verlangen, dann wären auch mit der
trivialen Abbildung $(O_p)_* \circ pr_2 : (v,c) \mapsto (c(.), o)$ alle
Eigenschaften erfüllt.

Anstatt der Fasermonomorphie kann man allerdings $pt(v,c)o = v$
verlangen (siehe Lemma 2)

5. (VB3'') besagt unter anderen, daß der Paralleltransport
durch $pt(v,c)1$ eindeutig bestimmt ist.

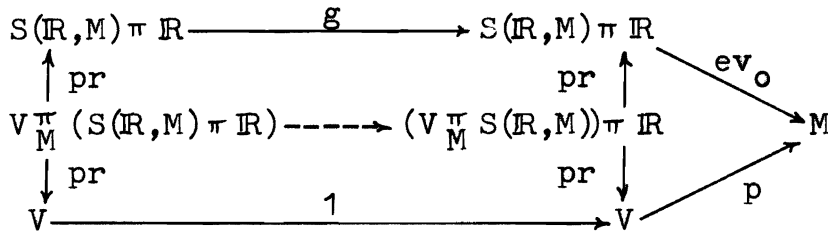
4.1.4. // - Transport :

$$1. \text{SATZ: } V \xrightarrow{p} M \text{ sei VB } \Rightarrow (V \prod_M S(\mathbb{R}, M)) \pi \mathbb{R} \xrightarrow{\hat{p}t} V \quad .$$

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \text{PB} \\ & & \downarrow p \\ & & M \\ \text{pr}_2 \pi 1 \downarrow & & \downarrow \text{ev} \\ S(\mathbb{R}, M) \pi \mathbb{R} & \xrightarrow{\quad} & M \end{array}$$

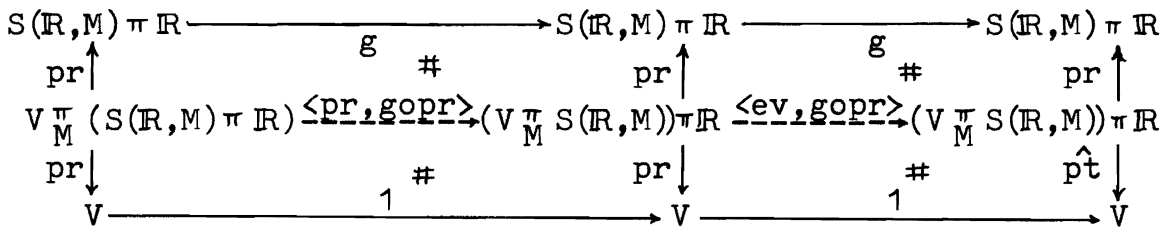
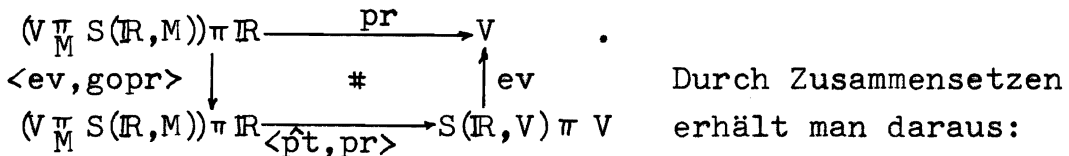
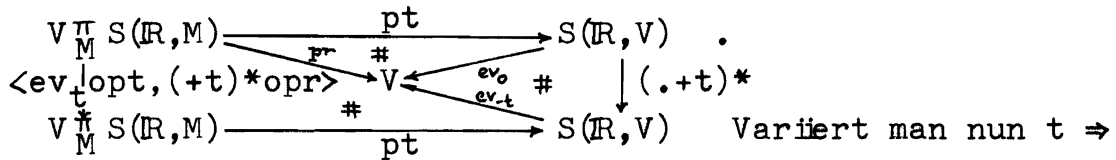
BEWEIS: Sei $g : S(\mathbb{R}, M) \pi \mathbb{R} \rightarrow S(\mathbb{R}, M) \pi S(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow S(\mathbb{R}, M) \pi \mathbb{R} .$
 $(c, t) \mapsto (c, .+t) \mapsto (c(.+t), -t)$

Wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms existiert eindeutig die strichlierte Abb.:



$$\begin{array}{ccc} (c, t) & \mapsto & (c(.+t), -t) \\ \uparrow & & \uparrow \\ (v, c, t) & \mapsto & (v, c(.+t), -t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ v & \mapsto & v \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} c(t) \\ " \\ p(v) \end{array}$$

Aus (VB3) und der Anfangsbedingung folgt: $(f := .+t)$



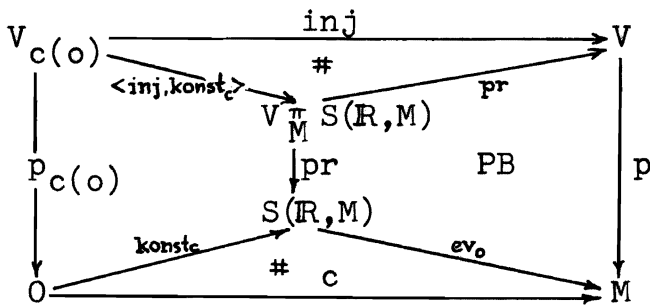
Und da $g^2 = 1$ ist, habe ich hiermit die Existenz des für die universelle Eigenschaft des PB geforderten Pfeils gezeigt. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, daß pr die beiden letzten Koordinaten festlegt und $\hat{p}t$ als Faser=mono die 1. Koordinate. \square

2.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB, $c \in C^\infty(\mathbb{R}, M) \Rightarrow$

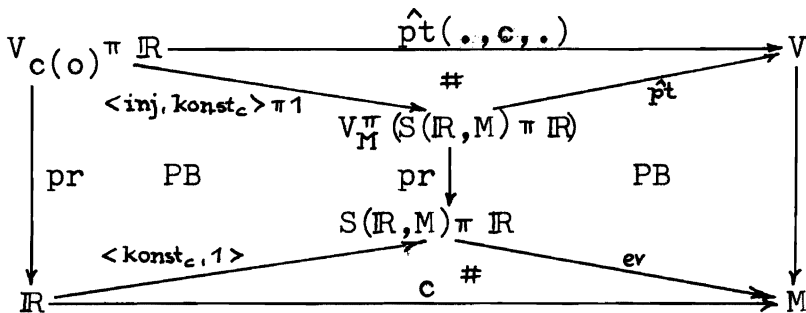
$$\Rightarrow V_{c(o)} \pi \mathbb{R} \xrightarrow{\hat{pt}(\cdot, c, \cdot)} V \text{ Faseriso.}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_2 \downarrow & \text{PB} & \downarrow p \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{c} & M \end{array}$$

BEWEIS: Wegen 4.1.2.5. ist nur die PB-Eigenschaft zu beweisen. Dazu betrachte ich folgendes Diagramm:



Weil das äußere Rechteck ein PB ist, ist auch das linke Trapez ein PB. Und somit das linke Trapez des nächsten Diagramms:



Und damit ist das äußere Rechteck ein PB. \square

3. Wie zu sehen war, hat die Flußeigenschaft eine entscheidende Rolle gespielt beim Beweis der PB-Eigenschaften. Man könnte andererseits statt der Flußeigenschaft die PB-Eigenschaft vom 1.SATZ fordern, und damit ließe sich dann ziemlich alles, was hier über VB bewiesen wird noch immer beweisen.

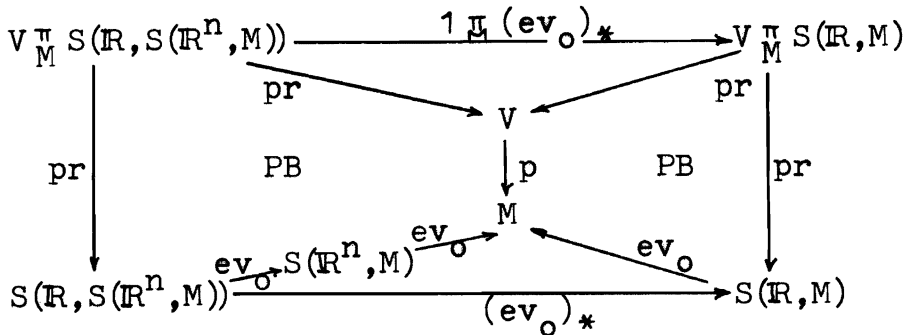
Schließlich läßt sich noch die Existenz eines // -Transports pt^n längs n-dimensionaler Flächen beweisen. Es ist hierbei jedoch darauf zu achten, daß dieser nicht unabhängig ist vom gewählten Weg in der Fläche. Das hätte ja zur Folge, daß das Vektorbündel trivial ist.

4.SATZ: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB $\Rightarrow (V \times_M S(\mathbb{R}^n, M)) \pi \mathbb{R}^n \xrightarrow{pt^n} V$ Faseriso.

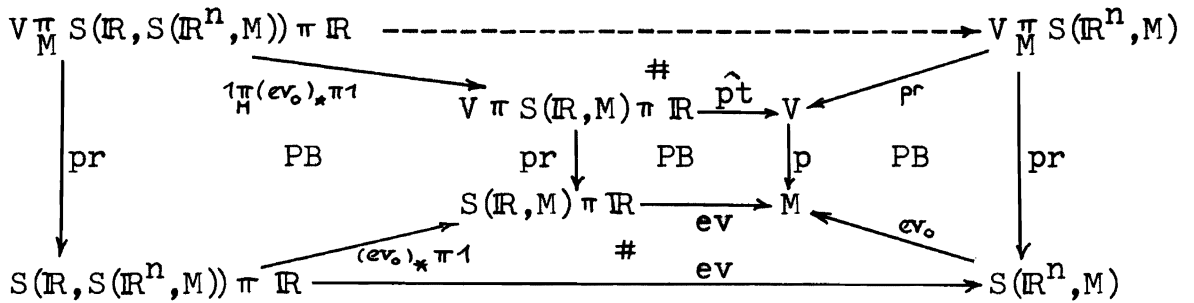
$$\begin{array}{ccc} \text{pr}_2 \pi 1 \downarrow & \text{PB} & \downarrow p \\ S(\mathbb{R}^n, M) \pi \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{ev}} & M \end{array}$$

BEWEIS: Vollst. Induktion: (n=0) trivial.

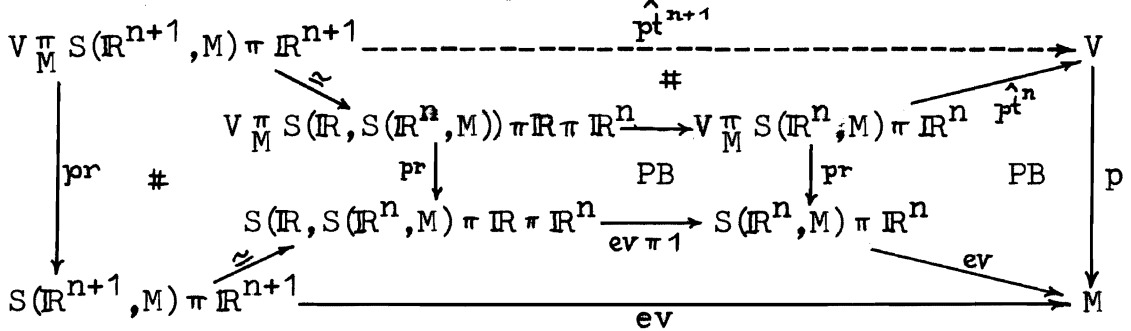
(n+1) Dazu betrachte ich vorerst folgendes kommutatives Diagramm:



⇒ Das äußere Rechteck ist ein PB ⇒ Das linke Trapez folgenden Diagramms ist ein PB:



⇒ Der strichlierte Pfeil existiert eindeutig und macht das äußere Rechteck zu einem PB. Damit ist das innere Rechteck des nächsten Diagramms ein PB:



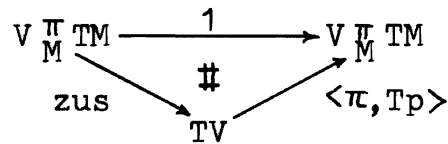
Wegen der Induktionsannahme ist das rechte Trapez ein PB, und somit existiert der strichlierte Pfeil eindeutig und macht das Rechteck zu einem PB. □

Natürlicher wäre es pt^n längs radialer Strahlen mittels pt zu definieren!

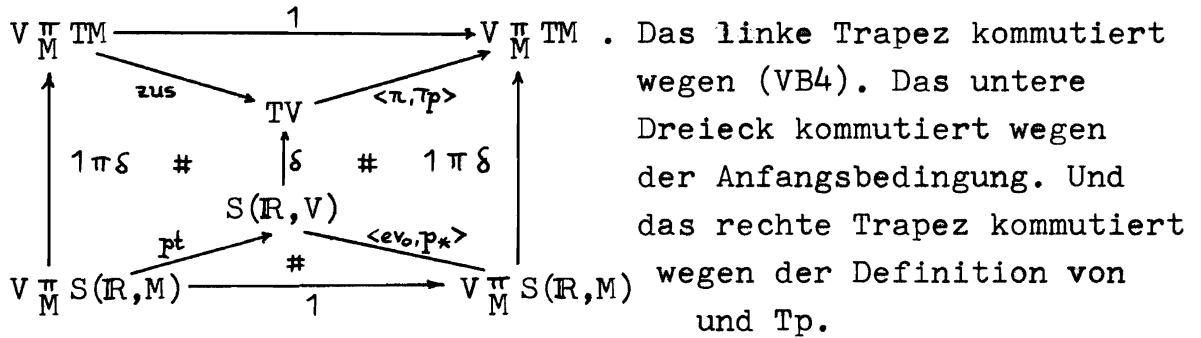
4.1.5. Zusammenhang :

Das folgende Lemma besagt, daß zus eine Rechtsinverse zu $\langle \pi, \text{Tp} \rangle$ ist und somit eine Einbettung.

1.LEMMA: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow

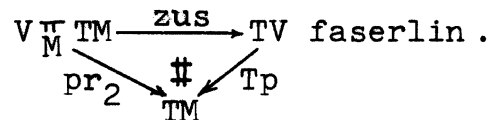


BEWEIS: Dazu betrachte ich folgendes Diagramm:

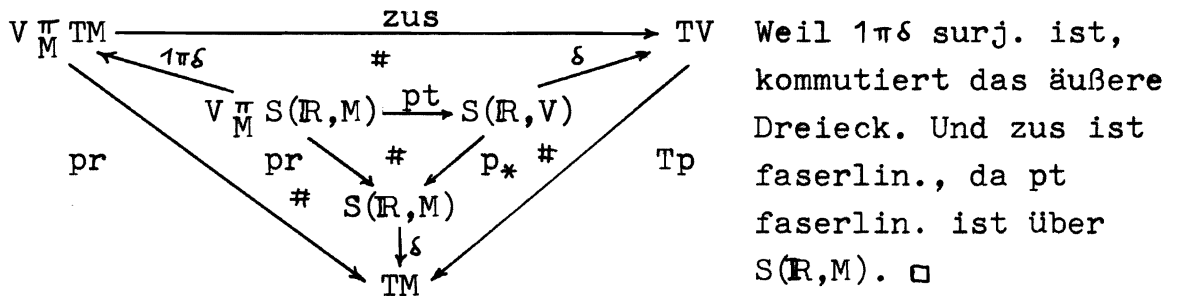


Da $1\pi\delta$ surjektiv ist, kommutiert somit das obere Dreieck. \square

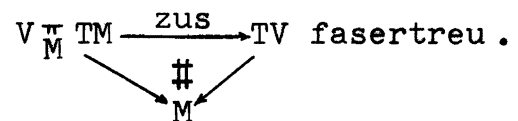
2.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow



BEWEIS: Ich betrachte folgendes Diagramm:



3.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow



BEWEIS: Das folgt sofort aus 2.FOLGERUNG durch Zusammensetzen mit $\pi_M : \text{TM} \rightarrow M$. \square

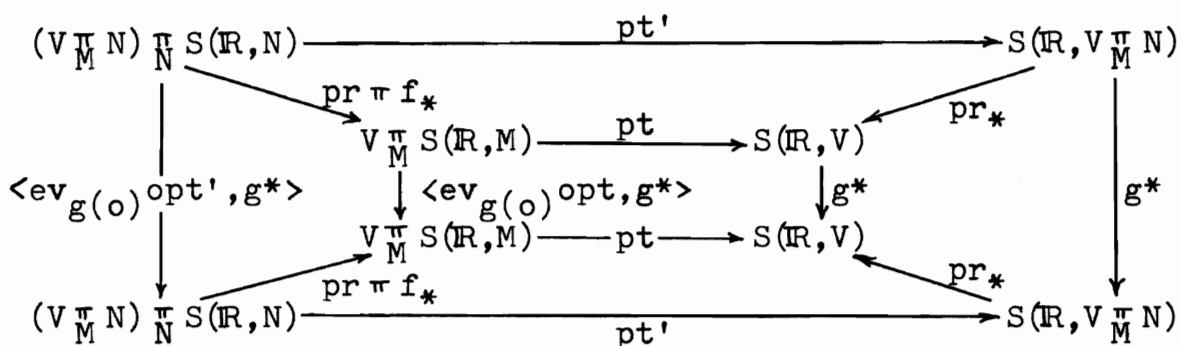
Im Kapitel 4.4. werde ich den Zusammenhang und das von ihm induzierte Teilbündel von TV weiter untersuchen.

Abschließend nur noch folgende

4.DEF: Da der Zusammenhang fasertreu ist über V und TM, läßt er sich wie folgt schreiben :

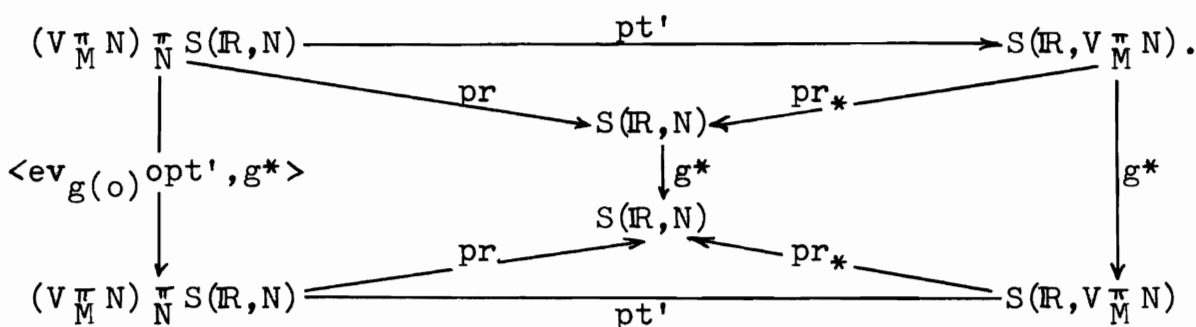
$$\text{zus}(x,v;x,w) =: (x,v,w, \Gamma_x(v,w)).$$

(VB3) Einerseits kommutiert folgendes Diagramm :



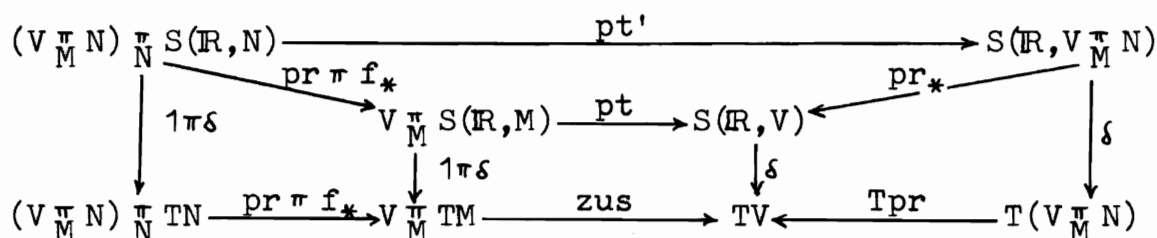
wobei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beliebig ist.

Andererseits kommutiert auch das Diagramm

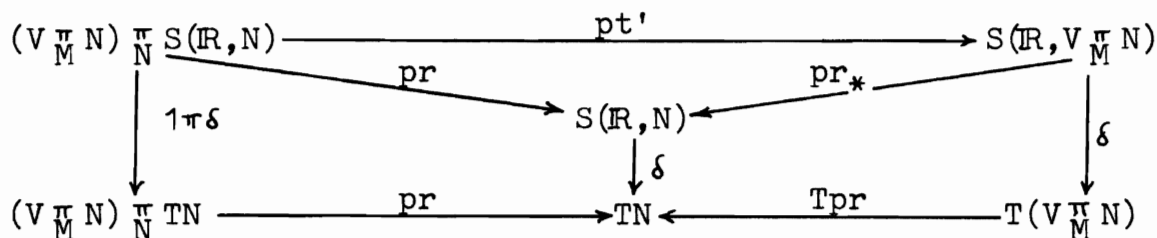


Und damit kommutiert auch das geforderte Diagramm, da $S(\mathbb{R}, V \overset{\pi}{M} N)$ das PB von $S(\mathbb{R}, V)$ mit $S(\mathbb{R}, N)$ über $S(\mathbb{R}, M)$ ist.

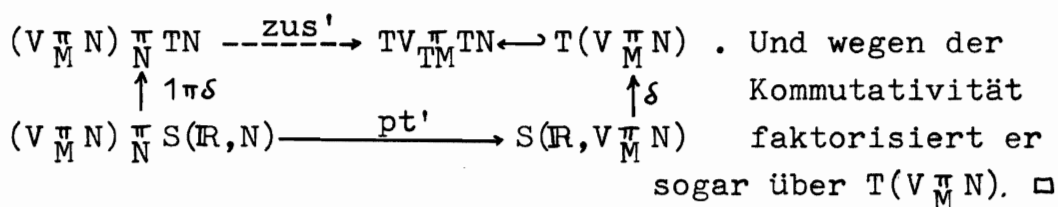
(VB4) Einerseits kommutiert folgendes Diagramm :



Andererseits kommutiert auch das Diagramm



Damit existiert der strichlierte Pfeil, der folgendes Diagramm kommutativ macht.



4.2.2. Triviale Bündel :

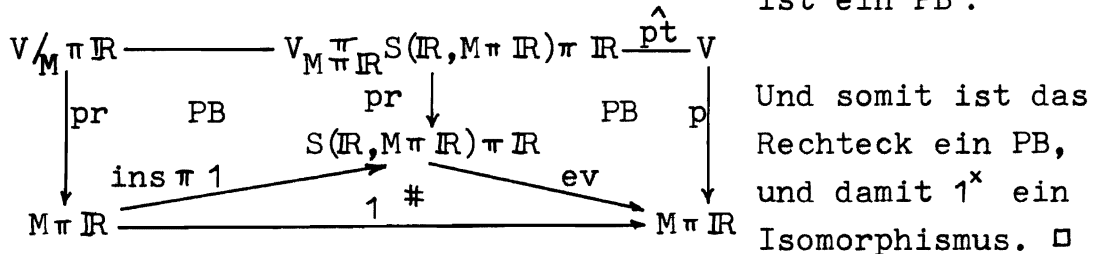
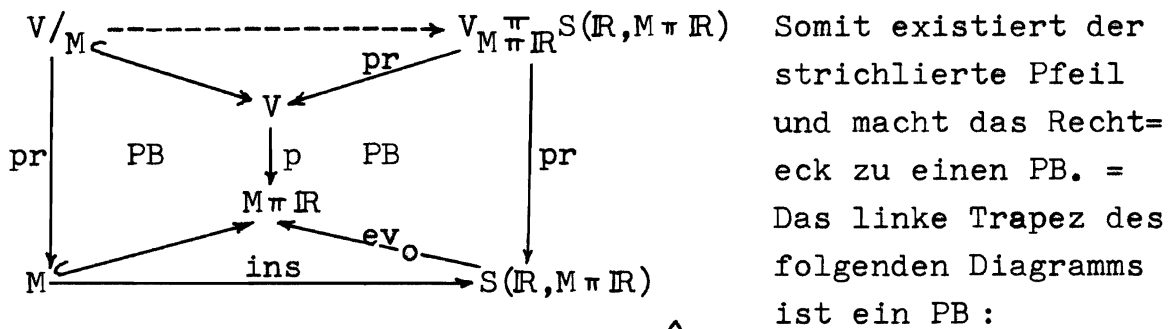
1.DEF: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB $\Rightarrow V \xrightarrow{p} M$ heißt trivial $:\Leftrightarrow$

$$:\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} V & \dashrightarrow & M \pi F \text{ Faseriso.} \\ p \swarrow & \# & \searrow \text{pr}_1 \\ & M & \end{array}$$

2.LEMMA: $V \xrightarrow{p} M \pi \mathbb{R}$ sei VB \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & V/M \pi \mathbb{R} \\ \downarrow p & \# & \downarrow \text{pr} \\ M \pi \mathbb{R} & \xrightarrow{1} & M \pi \mathbb{R} \end{array} \quad \text{wo} \quad \begin{array}{ccc} V/M & \xrightarrow{\quad} & V \\ \downarrow \text{PB} & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow{\quad} & M \pi \mathbb{R} \\ x \longmapsto & & (x, 0) \end{array}$$

BEWEIS: Folgendes Diagramm kommutiert :



3.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB, $f, g : N \rightarrow M$ seien C^∞ -homotop $\Rightarrow f^{-1}(p) \cong g^{-1}(p)$.

BEWEIS: f, g C^∞ -homotop $\Rightarrow \exists H : N \pi \mathbb{R} \rightarrow M C^\infty, H \circ \text{inj}^0 = f, H \circ \text{inj}^1 = g$ wobei $\text{inj}^t : N \rightarrow N \pi \mathbb{R}, x \mapsto (x, t) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f^{-1}(V) = (\text{inj}^0)^{-1}(H^{-1}(V)), g^{-1}(V) = (\text{inj}^1)^{-1}(H^{-1}(V))$. Aber wegen 2.LEMMA ist $(\text{inj}^t)^{-1}(H^{-1}(V)) \pi \mathbb{R} \cong H^{-1}(V)$, und somit $f^{-1}(V) \pi \mathbb{R} \cong g^{-1}(V) \pi \mathbb{R}$ über $N \pi \mathbb{R}$. Da aber dieser Isomorphismus die Fasern über \mathbb{R} erhält, ist $f^{-1}(V) \cong f^{-1}(V) \pi \{0\} \cong g^{-1}(V) \pi \{0\} \cong g^{-1}(V)$. \square

4.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB, M C^∞ -kontrahierbar $\Rightarrow V \xrightarrow{p} M$ trivial.

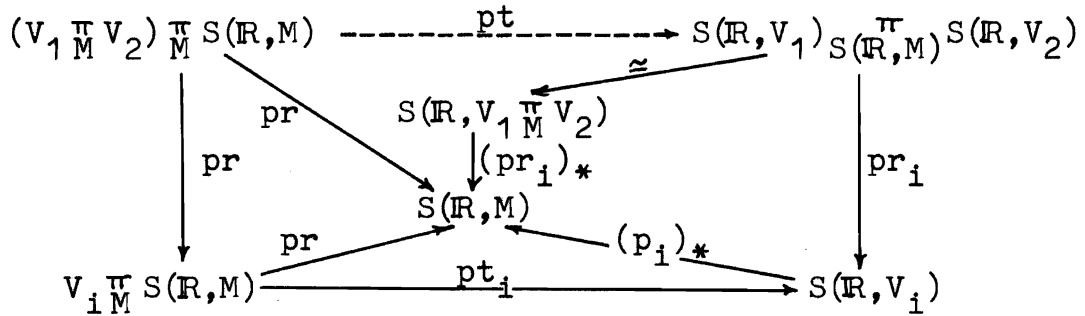
BEWEIS: M C^∞ -kontrahierbar $\Rightarrow 1_M, 0$ sind C^∞ -homotop $\Rightarrow V \cong 1_M^{-1}(V) \cong 0^{-1}(V) \cong M \pi V_0$. \square

4.2.3. Pullback zweier VB :

1.SATZ: $V_i \xrightarrow{P} M$ seien VB $\Rightarrow V_1 \xrightarrow{\pi} V_2 \rightarrow M$ ist VB.

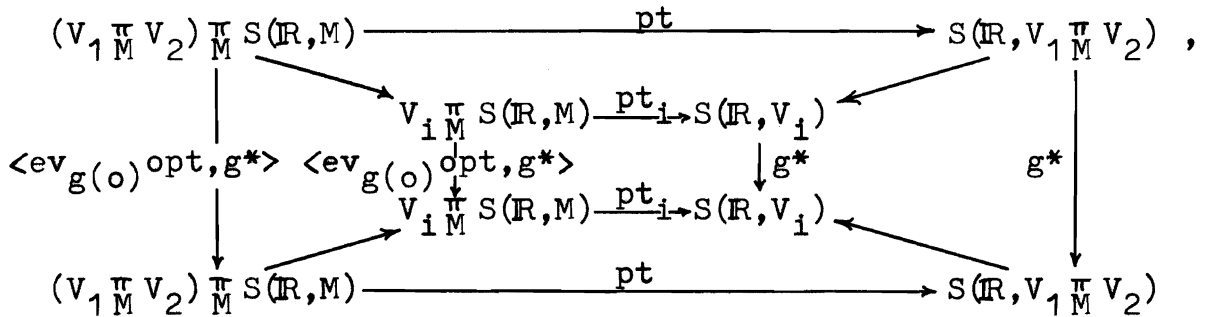
BEWEIS: (VB1) \Leftarrow 4.1.2.6.

(VB2) Da das folgende Diagramm kommutiert, existiert der strichlierte Pfeil eindeutig :



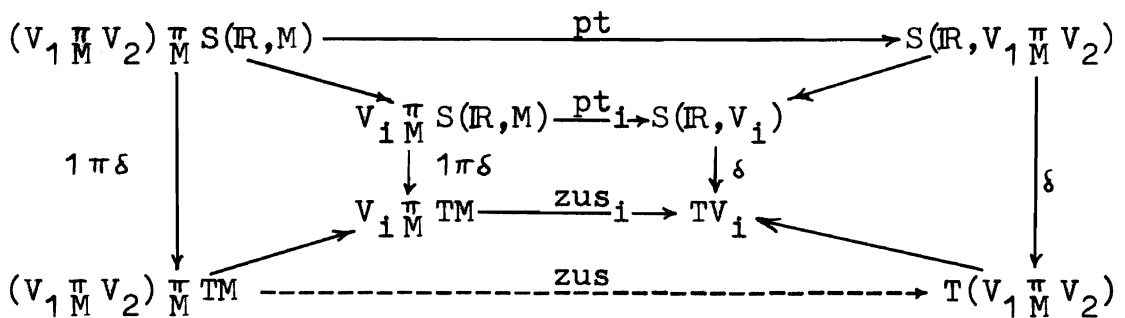
Und wegen der Faserlinearität von pt_i ist auch pt faserlin.

(VB3) Wegen der Kommutativität des Diagramms



und weil $S(\mathbb{R}, V_1 \xrightarrow{\pi} V_2)$ das PB von $S(\mathbb{R}, V_i)$ ist, macht pt das geforderte Diagramm kommutativ.

(VB4) Folgendes Diagramm kommutiert :



Somit existiert der strichlierte Pfeil eindeutig nach $TV_1 \xrightarrow{\pi} TV_2$ und wegen der Kommutativität des äußeren Rechtecks sogar nach $T(V_1 \xrightarrow{\pi} V_2) \hookrightarrow TV_1 \xrightarrow{\pi} TV_2$. \square

2. Beispiele sind $V \xrightarrow{\pi} V \rightarrow M$ für ein VB $V \xrightarrow{P} M$, und unter gewissen Zusatzvoraussetzungen $V \xrightarrow{\pi} TM \rightarrow M$, wie später gezeigt wird.

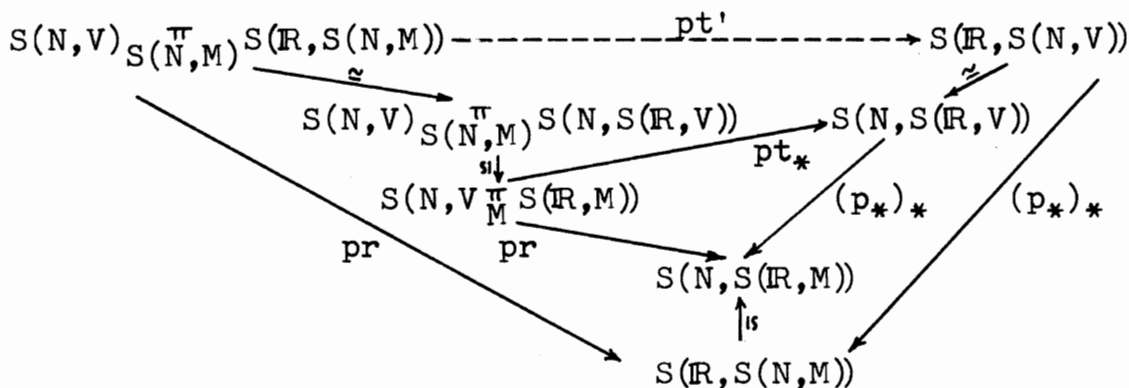
4.3. HOMOMORPHISMENBÜNDEL :

4.3.1. $S(N, \cdot)$ eines VB :

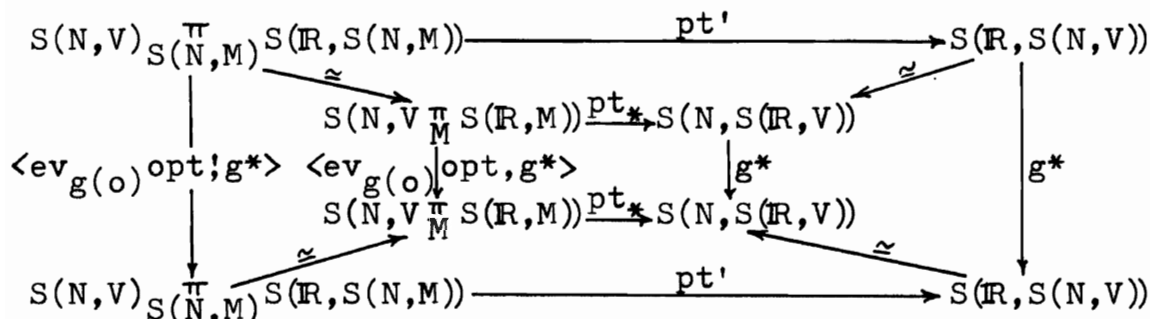
1. SATZ: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB $\Rightarrow S(N, V) \xrightarrow{p_*} S(N, M)$ ist VB

BEWEIS: (VB1) \Leftarrow 4.1.2.2.

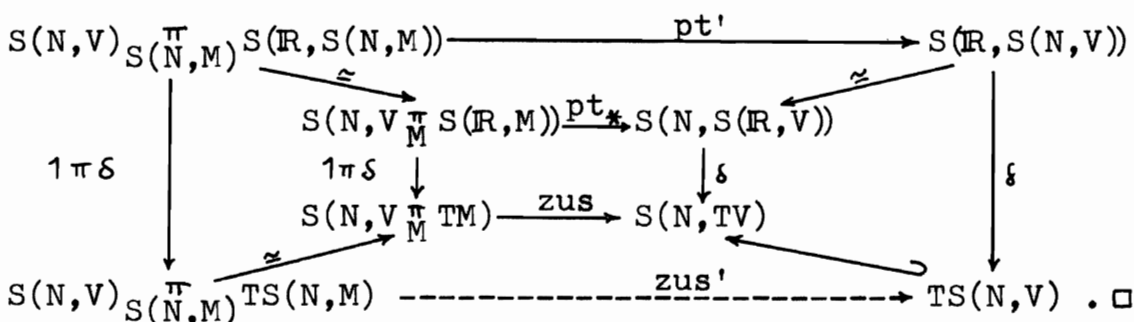
(VB2) Da das folgende Diagramm kommutiert, existiert eindeutig der strichlierte Pfeil als fasermono.



(VB3) Das folgt aus der Kommutativität von :



(VB4) Aus der Kommutativität des folgenden Diagramms folgt die Existenz des strichlierten Pfeils.



2. DEF: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB $\Rightarrow \Gamma(p) := \Gamma(V) := S(M, V)_1$ der Raum der Schnitte von p.

3. LEMMA: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB $\Rightarrow \Gamma(p) \xrightarrow{\text{Flgv.lkv}} S(M, G)$

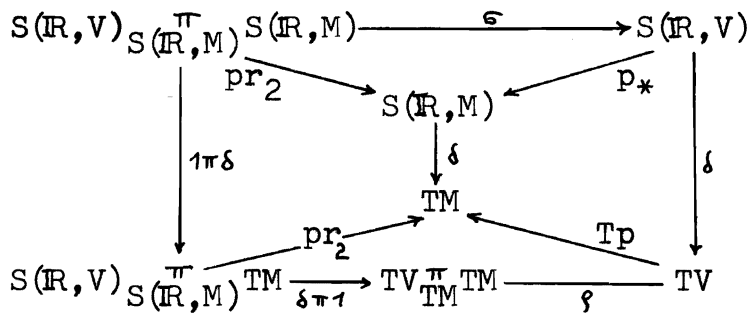
BEWEIS: (VB1) $\Rightarrow \Gamma(p) = S(M, V)_1 \xrightarrow{\text{Flgv.lkv}} S(M, G)$, da $S(M, V) \xrightarrow{p_*} S(M, M)$ VB. \square

Das Rechteck kommutiert, denn $\delta(\sigma(c_1, c_2)) = \delta(\text{pt}(c_1(\cdot), c_2)(\cdot)) = \delta(\text{pt}(c_1(o), c_2)(\cdot)) + \delta(\text{pt}(c_1(\cdot), c_2)(o)) = \text{zus}(c_1(o), \delta c_2) + \delta c_1 = \text{zus}(\pi(\delta c_1), \delta c_2) + \delta c_1 = \varphi(\delta c_1, \delta c_2)$, wobei die rechte untere Ecke vorerst durch den umfassenden Raum $V\pi(E \oplus G)$ zu ersetzen ist. Da aber das Diagramm nun kommutiert, im $\delta \subseteq TV$, und $\delta\pi\delta$ surjektiv ist, gilt $\text{Im } \varphi \subseteq TV$.

Schließlich ist φ auch surjektiv, da es σ und δ sind. \square

3. FOLGERUNG: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow $S(\mathbb{R}, V) \xrightarrow{\delta} TV$ ist fasersurj. $\begin{matrix} p_* \downarrow & \delta \downarrow Tp \\ S(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{\delta} TM \end{matrix}$

BEWEIS: Dazu betrachte ich folgendes kommutatives Diagramm.



Sei nun $(x, v, y, w) \in TV$ und $c_0 \in S(\mathbb{R}, M)$ mit $\delta c_0 = (x, y) = \text{Tp}(x, v, y, w) \Rightarrow (\delta, \sigma \text{ surj}) \begin{matrix} \delta(\sigma(c_1, c_2)) = (x, v, y, w), \\ \text{pr}(c_1, \delta c_2) = \delta c_2 = (x, y) = \delta c_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} c_1, c_2 \\ \delta \pi 1 \text{ fasersurj} \end{matrix}$
 $(c_1, c_0) \in S(\mathbb{R}, V) \xrightarrow{\pi} S(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{\sigma} S(\mathbb{R}, V) \Rightarrow \sigma(c_1, c_0) \in S(\mathbb{R}, V)$,
 $p_*(\sigma(c_1, c_0)) = \text{pr}_2(c_1, c_0) = c_0$, $\delta(\sigma(c_1, c_0)) = \varphi((\delta\pi 1)(c_1, \delta c_0)) = \varphi((\delta\pi 1)(c_1, \delta c_2)) = \delta(\sigma(c_1, c_2)) = (x, v, y, w)$. \square

4.3.3. Produkte von VB :

1.SATZ: $V_i \xrightarrow{P_i} M_i$ seien VB $\Rightarrow \prod V_i \xrightarrow{\prod P_i} \prod M_i$ ist VB .

$$\begin{array}{ccc} \text{BEWEIS: (VB1)} & \prod (E_i \oplus G_i) \cong \prod E_i \oplus \prod G_i & \xrightarrow{\text{pr}} \prod E_i \\ \text{U} & \text{U} & \text{U} \\ \prod V_i & \xrightarrow{\prod P_i \quad \#} & \prod M_i \end{array}$$

und weiters ist $(\prod V_i)_{(x_i)} \cong \prod (V_i)_{x_i}$.

(VB2) Der //-Transport pt läßt sich wie folgt definieren: $\text{pt}: \prod V_i \prod_{M_i} S(\mathbb{R}, \prod M_i) \xrightarrow{\cong} \prod V_i \prod_{M_i} \prod S(\mathbb{R}, M_i) \xrightarrow{\cong} \prod (V_i \prod_{M_i} S(\mathbb{R}, M_i)) \xrightarrow{\prod \text{pt}_i} \prod S(\mathbb{R}, V_i) \xrightarrow{\cong} S(\mathbb{R}, \prod V_i)$.

Es ist evident, daß pt das geforderte Diagramm kommutativ macht und ein Fasermono ist.

(VB3) Daß er mit Parameterwechsel verträglich ist, liegt genauso auf der Hand.

(VB4) Der Zusammenhang zus läßt sich dann so definieren: $\text{zus}: \prod V_i \prod_{M_i} T(\prod M_i) \xrightarrow{\cong} \prod V_i \prod_{M_i} \prod TM_i \xrightarrow{\cong} \prod (V_i \prod_{M_i} TM_i) \xrightarrow{\prod \text{zus}_i} \prod TV_i \xrightarrow{\cong} T(\prod V_i)$. Daß wieder das geforderte Diagramm kommutativ wird, folgt daraus, daß δ mit den verwendeten Isomorphismen kommutiert. \square

4.4. TANGENTIALBÜNDEL :

4.4.1. Vertikales Bündel :

$V \xrightarrow{P} M$ sei im folgenden immer ein VB.

1.DEF: $\text{Vert}(p) := \text{Im}(\text{pr}_1)$ das vertikale Bündel zu p , wobei

$$\text{pr}_1 : \begin{array}{c} TV \xrightarrow{\pi} M \\ \downarrow \text{pr}_1 \\ (T_p, TM, 0) \end{array} \rightarrow TV .$$

2.LEMMA: (1)
$$\begin{array}{ccc} TV \xrightarrow{\pi} M & \xrightarrow{\cong} & \text{Vert}(p) \\ \downarrow \text{pr}_2 & \# & \downarrow T_p \\ M & \xrightarrow{0} & TM \end{array}$$

(2) $\text{Vert}(p) = \{ (x, v, o, w) : (x, v, o, w) \in TV \} = \text{Ker } T_p$

(3)
$$\begin{array}{ccc} \text{Vert}(p) & \xrightarrow{1} & \text{Vert}(p) \\ \swarrow \# & & \searrow \text{pr} \\ TV & & (x, v, y, w) \end{array}$$

BEWEIS: $TV \xrightarrow{\pi} M = \{ (x, v, y, w; x') : (x, v, y, w) \in TV, x' \in M, (x', o) = (x, y) \}$
 $= \{ (x, v, o, w; x) : (x, v, o, w) \in TV \} \xrightarrow{\text{pr}_1} \text{Vert}(p)$

$\Rightarrow (1), (2), (3). \square$

3.DEF:
$$\begin{array}{ccc} V \xrightarrow{\pi} V & \xrightarrow{\quad} & TV \\ \downarrow \# & \nearrow \delta & \\ S(\mathbb{R}, V) & & (x, v, o, w) \\ & & \swarrow \downarrow \\ & & (x, v + \cdot w) \end{array}$$

heißt der vertikale Lift von p .

4.LEMMA:
$$\begin{array}{ccc} V \xrightarrow{\pi} V & \xrightarrow{\cong} & \text{Vert}(p) \\ \downarrow \text{pr}_1 & \searrow \text{pr} & \\ V & & \end{array}$$
 wobei $\text{pr} : \text{Vert}(p) \rightarrow V$
 $(x, v, o, w) \mapsto (x, w)$

BEWEIS: Es ist nur z.z., daß die vertikale Projektion pr sinnvoll ist, d.h. wirklich nach V geht. Denn man sieht ihr an, daß sie zusammen mit $\pi_V : (x, v, o, w) \mapsto (x, v)$ eine (die) Inverse zu pr ist.

Sei also $(x, v, o, w) \in TV. \Rightarrow T_p(x, v, o, w) = (x, o) = \delta(\text{konst}_x)$.
 Wegen der Fasersurjektivität von δ im folgenden Diagramm

(4.3.2.2.) existiert ein $c \in C^\infty(\mathbb{R}, V)$ mit $p \circ c = \text{konst}_x, \delta c = (x, v, o, w)$.

$\Rightarrow c(\cdot) = (x, \bar{c}(\cdot))$ mit

$\bar{c} : \mathbb{R} \rightarrow V_x, V_x \text{ Flg-abg in } V.$

$\Rightarrow d\bar{c} : \mathbb{R} \rightarrow V_x \Rightarrow d\bar{c}(o) \in V_x$

$\Rightarrow \delta c = (x, \bar{c}(o), o, d\bar{c}(o)) = (x, v, o, w) \Rightarrow w = d\bar{c}(o) \in V_x$

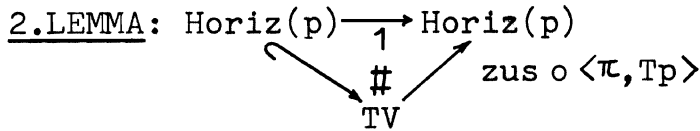
$\Rightarrow (x, w) \in V. \square$

$$\begin{array}{ccc} S(\mathbb{R}, V) & \xrightarrow{\delta} & TV \\ p_* \downarrow & \# & \downarrow T_p \\ S(\mathbb{R}, M) & \xrightarrow{\delta} & TM \end{array}$$

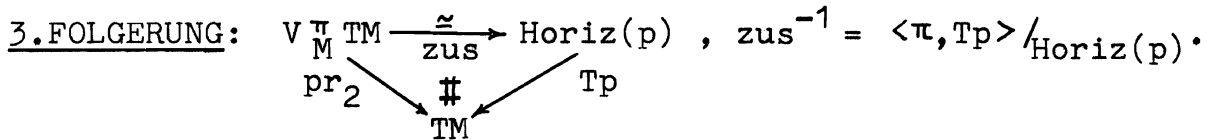
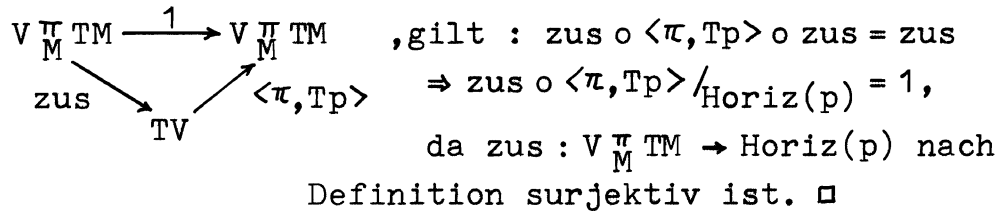
4.4.2. Horizontales Bündel :

Sei auch in diesem Abschnitt $V \xrightarrow{p} M$ ein VB.

1.DEF: $\text{Horiz}(p) := \text{Im}(\text{zus})$ heißt horizontales Bündel zu p .



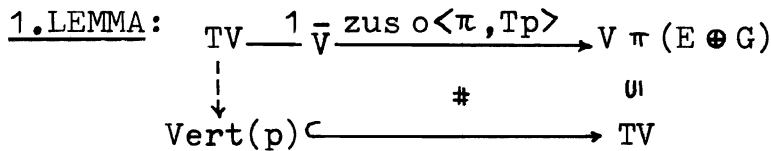
BEWEIS: Da nach 4.1.5.1. folgendes Diagramm kommutiert



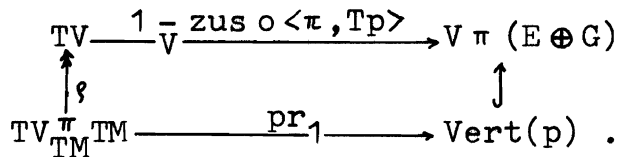
BEWEIS: Nach obigen Lemma gilt: $\text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle /_{\text{Horiz}(p)} = 1$.
Andererseits ist $\langle \pi, \text{Tp} \rangle \circ \text{zus} = 1$ nach 4.1.5.1.. \square

4.4.3. Konnektor :

Es sei wieder $V \xrightarrow{p} M$ als VB vorausgesetzt.



BEWEIS: Dazu betrachte ich das folgende Diagramm.



Dieses Rechteck kommutiert, denn

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{1}{V} \text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle) (\varphi(x, v, o, w; x, y)) = \\ & = (1 - \frac{1}{V} \text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle) (x, v, y, w + \Gamma_x(v, y)) = (x, v, y, w + \Gamma_x(v, y)) - \\ & - \frac{1}{V} \text{zus}(x, v; x, y) = (x, v, y - y, w + \Gamma_x(v, y) - \Gamma_x(v, y)) = (x, v, o, w) \end{aligned}$$

Und somit folgt aus der Surjektivität von φ , daß

$$\text{Im} (1 - \frac{1}{V} \text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle) \subseteq \text{Vert}(p) . \square$$

2.DEF: $\text{konn} := \text{pr}_1 \circ (1 - \frac{1}{V} \text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle) : \text{TV} \rightarrow V$
 $(x, v, y, w) \mapsto (x, w - \Gamma_x(v, y)) .$

konn heißt der Konnektor von p .

Auch in dieser Definition geht der umgebende Vektorraum ein !

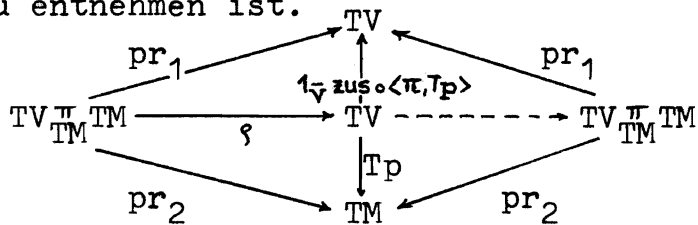
3.LEMMA:
$$\begin{array}{ccc} V \xrightarrow{\pi} \pi TM & \xrightarrow{\text{zus}} & TV \\ \downarrow \text{pr} & \# & \downarrow \text{konn} \\ M & \xrightarrow{0} & V \end{array}$$

BEWEIS:
$$\begin{aligned} \text{konn} \circ \text{zus} &= \underset{V}{\nu} \text{pr} \circ (1_{\bar{V}} \text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle) \circ \text{zus} = \\ &= \underset{V}{\nu} \text{pr} \circ (\text{zus} \underset{V}{\bar{\nu}} \text{zus} \circ \langle \pi, \text{Tp} \rangle \circ \text{zus}) = \underset{V}{\nu} \text{pr} \circ (\text{zus} \underset{V}{\bar{\nu}} \text{zus}) = \\ &= \underset{V}{\nu} \text{pr} \circ 0 \circ \pi \circ \text{zus} = \underset{V}{\nu} \text{pr} \circ 0 \circ \text{pr}_1 = 0 \circ \text{pr} . \square \end{aligned}$$

4.4.4. T(.) eines VB:

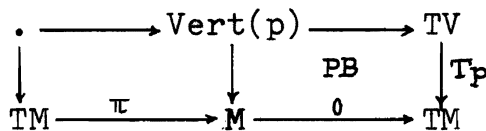
1.SATZ: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow
$$\begin{array}{ccc} TV & \xleftarrow{\xi} & TV \xrightarrow{\pi} \pi TM \\ \downarrow \text{Tp} & \# & \downarrow \text{pr}_2 \\ & TM & \end{array}$$

BEWEIS: ξ ist surj. und macht das Dreieck kommutativ. (4.3.2.2.). ξ besitzt eine Linksinverse, wie folgendem Diagramm zu entnehmen ist.



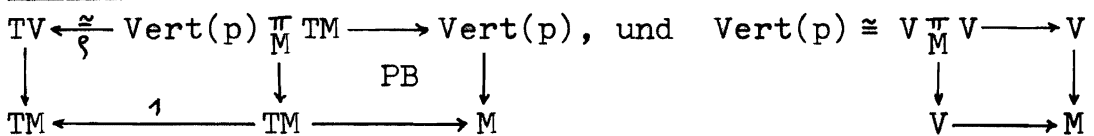
2.LEMMA: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow $TV \xrightarrow{\pi} \pi TM = \text{Vert}(p) \xrightarrow{\pi} \pi TM$

BEWEIS: Da im folgenden Diagramm das rechte Rechteck ein PB ist, machen beide Räume für den Punkt eingesetzt alle Rechtecke zu PB und sind somit gleich.



3.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB \Rightarrow $TV \xrightarrow{\text{Tp}} TM$ ist VB.

BEWEIS: Da nach obigem Satz folgendes Diagramm kommutiert,



ein PB ist, gilt nach 4.2.3.1. $\text{Vert}(p) \rightarrow M$ ist VB, und nach 4.2.1.1. $\text{Vert}(p) \xrightarrow{\pi} \pi TM \rightarrow TM$ ist VB. Somit ist aber auch $TV \xrightarrow{\text{Tp}} TM$ ein VB.

4.DEF: $c^* := \langle c, dc \rangle : \mathbb{R} \rightarrow TM$ für $c \in C^{\infty}(\mathbb{R}, M)$

$$c^*(t) = \delta(c(t+))$$

Sei nun $c \in C^{\infty}(\mathbb{R}, V)$, dann heißt c parallel ($//$) \Leftrightarrow

$$\Leftrightarrow c^* = \text{zus} \circ \langle c, (p \circ c)^* \rangle$$

Im folgenden sei wieder $V \xrightarrow{P} M$ ein VB.

5.LEMMA: $c \in C^{\infty}(\mathbb{R}, V) \Rightarrow c$ ist // \Leftrightarrow $\text{konn } c' = 0 \text{ op } c$.

BEWEIS: $\text{konn } c' = 0 \text{ op } c \Leftrightarrow$ (da φ bij)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow c' &= \varphi \circ \langle \underset{V}{\text{lift}} \circ \langle \pi \circ c', \text{konn } c' \rangle, \text{Tp } c' \rangle \\ &= \varphi \circ \langle \underset{V}{\text{lift}} \circ \langle c, 0 \text{ op } c \rangle, (p \circ c)' \rangle \\ &= \text{zus} \circ \langle c, (p \circ c)' \rangle + \underset{V}{\text{lift}} \circ \langle c, 0 \text{ op } c \rangle = \\ &= \text{zus} \circ \langle c, (p \circ c)' \rangle \quad (\quad 0 \ddot{=} c \quad) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow c \text{ ist // } . \quad \square \end{aligned}$$

6.FOLGERUNG: $\text{pt}(v, c)$ ist die eindeutige Lösung der Diff.glg.
 $\text{pt}(v, c)' = \text{zus} \circ \langle \text{pt}(v, c), c' \rangle, \text{pt}(v, c)(0) = v$.

BEWEIS: $\text{pt}(v, c)$ ist eine Lösung, denn $\text{pt}(v, c)'(t) =$
 $= \delta(\text{pt}(v, c)(t+)) = \delta(\text{pt}(\text{pt}(v, c)(t), c(t+))) =$
 $= \text{zus}(\text{pt}(v, c)(t), \delta(c(t+))) = (\text{zus} \circ \langle \text{pt}(v, c), c' \rangle)(t).$

Sei \bar{c} eine beliebige Lösung. $\Rightarrow \bar{c} \in S(\mathbb{R}, V)_c \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \bigvee_{c_1} c_1 \in S(\mathbb{R}, V)_{\text{konst}(c(0))} \quad \sigma(c_1, c) = \bar{c} \quad \Rightarrow \\ \text{pr}_V(d\bar{c}(t)) &= \text{pr}_V(d(\text{pt}(c_1, c)(t))) = \\ &= \text{pr}_V(d(\text{pt}(c_1, c)(t))) + \text{pr}_V(d(\text{pt}(c_1(t), c)(t))) = \\ &= \overline{\text{pt}}(dc_1(t), c)(t) + \text{pr}_V(\text{pr}_2(\text{zus}(\bar{c}(t), c'(t)))) = (\bar{c} \text{ ist Lösung}) \\ &= \overline{\text{pt}}(dc_1(t), c)(t) + \text{pr}_V(d\bar{c}(t)) \Rightarrow \overline{\text{pt}}(dc_1(t), c)(t) = 0 \\ \Rightarrow dc_1(t) &= 0 \quad (\text{pt}(\cdot, c)(t) \text{ ist fasermono}) \Rightarrow c_1 \text{ ist konstant} \Rightarrow \\ \Rightarrow c_1 &= \text{konst}_V \quad (c_1(0) = v) \Rightarrow \bar{c}(t) = \sigma(c_1, c)(t) = \\ &= \text{pt}(c_1(t), c)(t) = \text{pt}(v, c)(t). \quad \square \end{aligned}$$

Als Folgerung ergibt sich, daß für ein VB (VB3) nicht notwendig in dieser starken Fassung zu fordern ist.

7.FOLGERUNG: Sei $V \xrightarrow{P} M$ eine VFas, die (VB2), (VB3'), (VB4) erfüllt, und zus sei faserhomogen. $\Rightarrow V \xrightarrow{P} M$ ist VB.

BEWEIS: Es ist nur (VB3'') nachzuweisen. Sei also $f: \mathbb{R} \rightarrow C^{\infty}$,
 $f(0) = 0 \Rightarrow \text{konn } (\text{pt}(v, c) \circ f)' = \text{konn } ((\text{pt}(v, c)' \circ f) \cdot f') =$
 $= (\text{konn } (\text{pt}(v, c)' \circ f)) \cdot f' = (0 \text{ op } c \circ f) \cdot f' = 0 \text{ op } \underset{V}{\circ} c \circ f \Rightarrow$
 $\Rightarrow (\text{pt}(v, c) \circ f)' = \text{zus} \circ \langle \underset{M}{\text{pt}(v, c) \circ f}, (c \circ f)' \rangle^M \text{ und}$
 $(\text{pt}(v, c) \circ f)(0) = v \Rightarrow$ (Eindeutigkeit der Lösung) $\text{pt}(v, c) \circ f =$
 $= \text{pt}(v, c \circ f). \quad \square$

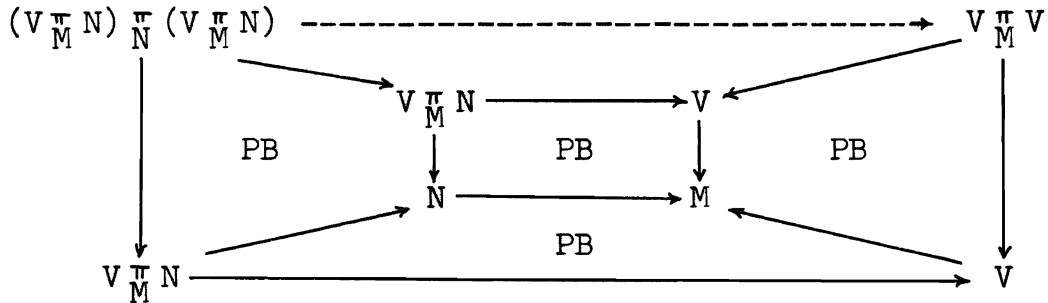
8. Umgekehrt folgt aus (VB3''), daß zus faserhomogen ist.

$$\begin{aligned} \text{Denn } \text{zus}(v; \underset{M}{\delta} c) &= \delta(\text{pt}(v, c(t+))) = \delta(\text{pt}(v, c)(t+)) = \\ &= \underset{V}{t} \cdot \text{zus}(v; \delta c). \end{aligned}$$

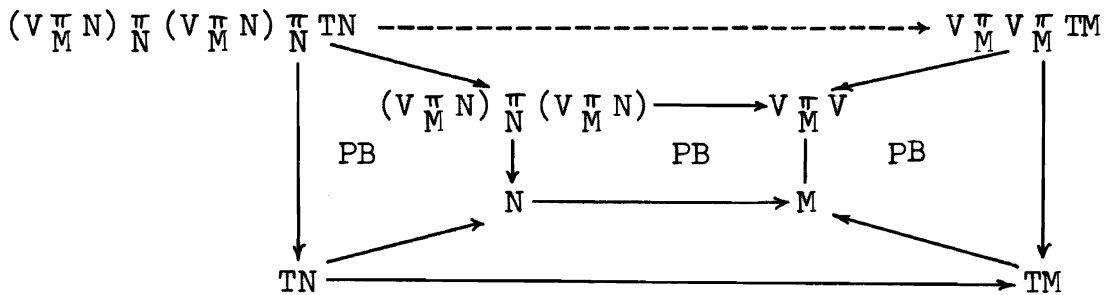
9.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB, $f: N \rightarrow M \in C^\infty \Rightarrow T(f^{-1}(p)) \cong (Tf)^{-1}(Tp)$
 oder anders ausgedrückt: $T(V_M^\pi N) \cong TV_{TM}^\pi TN$.

D.h. T erhält induzierte Bündel.

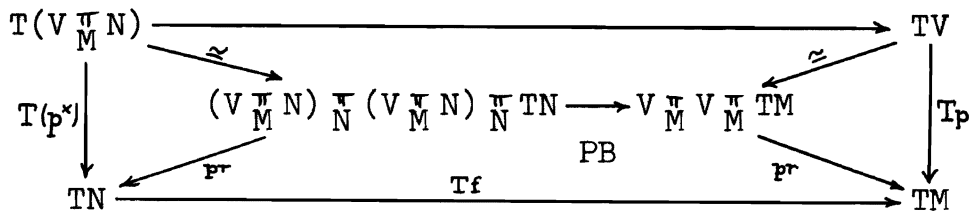
BEWEIS: Dazu betrachte ich folgendes kommutatives Diagramm:



Und somit existiert der strichlierte Pfeil eindeutig, der das äußere Rechteck zu einem PB macht, damit ist nun aber das innere Rechteck des nächsten kommutativen Diagramms ein PB:



Damit existiert also der strichlierte Pfeil eindeutig, der das äußere Rechteck zu einem PB macht. Es ist also das untere Trapez des folgenden Diagramms ein PB:



\Rightarrow Das äußere Rechteck ist ein PB, und d.h.

$$T(V_M^\pi N) \cong TV_{TM}^\pi TN. \quad \square$$

5. MANNIGFALTIGKEITEN :

In diesem Kapitel geht es nun darum, eine volle Teil-
 kategorie von \underline{VMg} auszusondern, die unter den Funktoren
 \mathbb{T} , S , T sowie unter VB-Bildung abgeschlossen ist. Und
 diejenigen ihrer Objekte, deren umgebender Vektorraum
 endlich dimensional ist, sollen gerade die üblichen
 endl. dimensionalen C^∞ -Mannigfaltigkeiten sein. Es seien
 also in diesem Kapitel alle Räume VMg und alle Abbildungen
 C^∞ . E, F, G stehen für umgebende Flgv.lkv.

5.1. PRÄMANNIGFALTIGKEITEN:

Im Folgenden möchte ich erst eine volle Teilkategorie
 von \underline{VMg} aussondern, die schon die erwünschten Abgeschlossen-
 heitsbedingungen aufweist und deren Objekte Tangentialräume
 besitzen, welche lkv als Fasern haben. Allerdings liefert
 diese Kategorie im endl. dimensionalen (wahrscheinlich)
 nicht die üblichen C^∞ -Mannigfaltigkeiten.

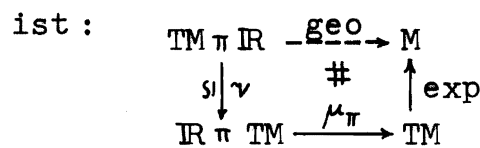
5.1.1. Definition und Folgerungen :

1.DEF: Sei M_E eine $VMg \Rightarrow$

M heißt prä-Mannigfaltigkeit (pMF) : \Leftrightarrow

- (1) $T_x M (:= (TM)_x) \underset{VR}{\subset} E$
- (2) $TM \xrightarrow{\text{exp}} M$, $TM \xrightarrow{1} TM$
 $\quad \quad \quad \searrow \text{geo} \quad \quad \quad \downarrow \# \quad \quad \quad \nearrow \delta$
 $\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad S(\mathbb{R}, M)$

wobei geo durch folgendes Diagramm definiert



(D.h. $geo(x,v)(t) := \exp(x, tv)$)

exp heißt Exponentialabb. der pMF.

geo heißt Geodätenabb. zu exp .

$geo(x,v)$ heißt Geodäte mit Anfangswert (x,v) .

pMF sind also im wesentlichen solche VMg , deren
 Tangentialraum nicht nur ein surj. Bild des Raumes
 der Kurven, sondern sogar ein Retrakt davon ist.

Als erstes möchte ich nun die beiden pMF definierenden Bedingungen ein wenig äquivalent umformen.

1.LEMMA: (1) $\Leftrightarrow T_x M$ ist abg. unter der Addition.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{1} & TM \wedge \mathbb{R} \pi TM \\ \text{geo} \searrow & \# & \nearrow \delta \\ & S(\mathbb{R}, M) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \pi TM & \xrightarrow{1 \pi \text{geo}} & \mathbb{R} \pi S(\mathbb{R}, M) \ni (t, c) \\ \mu \pi \downarrow & \# & \downarrow \\ TM & \xrightarrow{\text{geo}} & S(\mathbb{R}, M) \ni c(t.) \end{array}$$

(D.h. geo ist homogen).

BEWEIS: Für (1) $\Leftrightarrow \dots$ ist nur z.z. das $T_x M$ unter der Skalarmultiplikation automatisch abgeschlossen ist. Das entnimmt man aber sofort folgendem kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \pi TM & \xrightarrow{\mu \pi} & TM \\ \uparrow & \# & \uparrow \\ \mathbb{R} \pi S(\mathbb{R}, M) & \longrightarrow & S(\mathbb{R}, M) \end{array} \quad , \quad (t, c) \mapsto c(t.)$$

Nun zu (2) $\Rightarrow \dots$: $\text{geo}(x, tv)(s) = \exp(x, stv) = \text{geo}(x, v)(ts)$.

schließlich (2) $\Leftarrow \dots$: $\exp(x, v) := \text{geo}(x, v)(1) \Rightarrow \exp(x, tv) = \text{geo}(x, tv)(1) = \text{geo}(x, v)(t)$. \square

Die Homogenität von geo bedeutet also, daß die Geodäte zum t-fachen Tangentialvektor gerade die Geodäte zum gewöhnlichen Tangentialvektor ist, allerdings t-mal so schnell durchlaufen.

Und nun noch eine äquivalente Bedingung, die sogar die Vektorstruktur der Fasern impliziert.

$$\begin{array}{ccc} TM \Delta TM & \xrightarrow{1} & TM \Delta TM \wedge \\ \text{geo}_2 \searrow & \# & \nearrow \delta_2 \\ & S(\mathbb{R}^2, M) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \wedge \mathbb{R} \pi TM \Delta TM & \xrightarrow{1 \pi \text{geo}_2} & \mathbb{R} \pi S(\mathbb{R}^2, M) \ni (t, f) \\ \mu \pi \Delta 1 \downarrow & \# & \downarrow \\ TM \Delta TM & \xrightarrow{\text{geo}_2} & S(\mathbb{R}^2, M) \ni f(t., \dots) \end{array}$$

(D.h. geo_2 ist homogen)

BEWEIS: (\Rightarrow) $\text{geo}_2((x, v) \Delta (x, v'))(t, t') := \exp(x, tv + t'v') \Rightarrow \text{geo}_2((x, v) \Delta (x, v'))(st, t') = \exp(s, stv + t'v') = \text{geo}_2((x, sv) \Delta (x, v'))(t, t')$.

Und geo_2 macht das verlangte Diagramm kommutativ, denn

$$\delta(\text{geo}_2((x, v) \Delta (x, v'))(\cdot, o)) = \delta(\exp(x, \cdot v + o)) = \delta(\text{geo}(x, v)) = (x, v) .$$

(\Leftarrow) Es ist vorerst zu zeigen, daß $T_x M$ abgeschl. ist unter der Addition. Dazu behaupte ich die Kommutativität folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc}
 TM \Delta TM & \xrightarrow{\alpha^\wedge} & TM \\
 \text{geo}_2 \downarrow & & \uparrow \delta \\
 S(\mathbb{R}^2, M) & \xrightarrow{\Delta_*} & S(\mathbb{R}, M) \\
 (x, v) \Delta (x, v') & \xrightarrow{?} & (f(o, o), d(f \circ \Delta)(o)) \\
 \downarrow & & \uparrow \\
 \text{geo}_2((x, v) \Delta (x, v')) & =: f \mapsto & f \circ \Delta
 \end{array}$$

Nun ist aber $d(f \circ \Delta)(o) = (d_1 f + d_2 f)(o, o) = v + v'$, wegen der Kommutativität des 1. Diagramms für geo_2 . Und somit steht rechts oben wirklich $(x, v + v')$. Das heißt also, die Faseraddition $\alpha^\wedge: TM \Delta TM \rightarrow TM$ existiert.

Außerdem ist die Existenz einer Abbildung geo zu zeigen, die die beiden Diagramme des obigen Lemmas kommutativ macht. Sei also geo durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{\text{geo}} & S(\mathbb{R}, M), \text{ d.h.: } \text{geo}(x, v) = \\
 \text{inj}_1 \downarrow & \# & \uparrow \text{inj}_1^* \\
 TM \Delta TM & \xrightarrow{\text{geo}_2} & S(\mathbb{R}^2, M) \quad \text{Damit ist dann} \\
 \text{geo}(x, sv) & = \text{geo}_2((x, sv) \Delta (x, o))(\cdot, o) & = \text{geo}_2((x, v) \Delta (x, o))(s, o) = \\
 & = \text{geo}(x, v)(s), \text{ und} & \\
 \delta \text{ geo}(x, v) & = \delta(\text{geo}_2((x, v) \Delta (x, o))(\cdot, o)) & = \text{pr}_1(\delta_2(\text{geo}((x, v) \Delta (x, o)))) = \\
 & = \text{pr}_1((x, v) \Delta (x, o)) = (x, v). \quad \square
 \end{array}$$

3.FOLGERUNG: $E \text{ Flgv.lkv} \Rightarrow E$ ist pMF.

BEWEIS: $\text{geo}_2((x, v) \Delta (x, v'))(t, t') := x + tv + t'v'$ stetig, lin $\Rightarrow C^\infty$ (oder: $\exp(x, v) := x + v$, $\text{geo}(x, v)(t) := x + tv$).

4.FOLGERUNG: M sei pMF \Rightarrow (1) $S(N, \delta)$ ist Retraktion.

(2) $\delta^n: S(\mathbb{R}^n, M) \rightarrow T^n M$ ist Retrakt.

wobei δ^n durch folgendes Diagramm definiert ist:

$$\begin{array}{ccc}
 S(\mathbb{R}^{n+1}, M) & \xrightarrow{\delta^{n+1}} & T^{n+1} M \\
 (\cdot)^\vee \downarrow & \# & \uparrow \delta \\
 S(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n, M)) & \xrightarrow{(\delta^n)_*} & S(\mathbb{R}, T^n M)
 \end{array}$$

BEWEIS: (1) $S(N, \delta) \circ S(N, \text{geo}) = S(N, \delta \circ \text{geo}) = S(N, 1) = 1$.

(2) vollst. Ind.: (n=1) nach Definition.

(n+1) Sei geo^n eine Rechtsinv.

zu δ^n , dann gilt: $\delta^n \circ (\cdot)^\vee \circ (\text{geo}^n)_* \circ \text{geo} = \delta \circ (\delta^n)_* \circ (\cdot)^\vee$

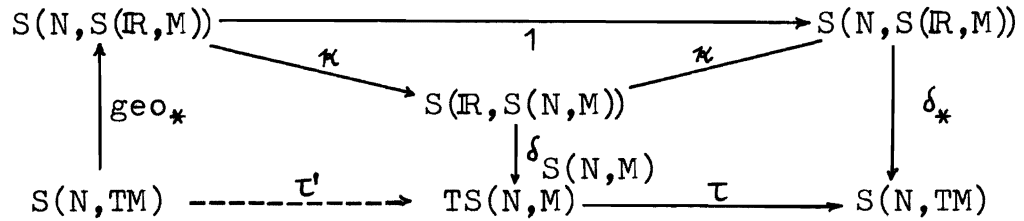
$\circ (\cdot)^\vee \circ (\text{geo}^n)_* \circ \text{geo} = 1$, wobei geo allerdings die Inverse zu $\delta_{T^n M}$ ist, deren Existenz erst in 5.1.3.5. bewiesen wird. \square

5.1.2. τ als Isomorphismus :

1.SATZ: M sei pMF $\Rightarrow \tau: TS(N,M) \xrightarrow{\cong} S(N, TM)$

BEWEIS: Sei $\kappa := (\gamma \circ \nu^* \circ \delta^2): S(N, S(\mathbb{R}, M)) \rightarrow S(\mathbb{R}, S(N, M))$. \Rightarrow

Das folgende Diagramm ist kommutativ :



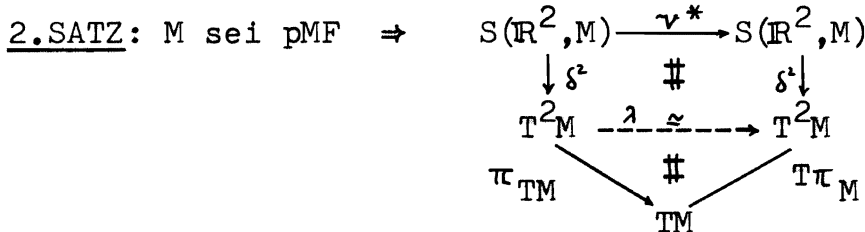
Wobei τ' so definiert wird, daß das linke Trapez kommutiert.

$\Rightarrow \tau \circ \tau' = \delta_* \circ 1 \circ \text{geo}_* = 1$ und somit ist τ Retraktion.

Andererseits ist τ als Einschränkung des Isomorphismuses

$\tau: TS(N, E) \xrightarrow{\cong} S(N, TE)$ ein mono, und somit Isomorphismus. \square

Als nächstes möchte ich die Existenz einer Flipabb. λ beweisen, die die beiden Faserstrukturen via π_{TM} und $T\pi_M$ auf T^2M ineinander überführt.

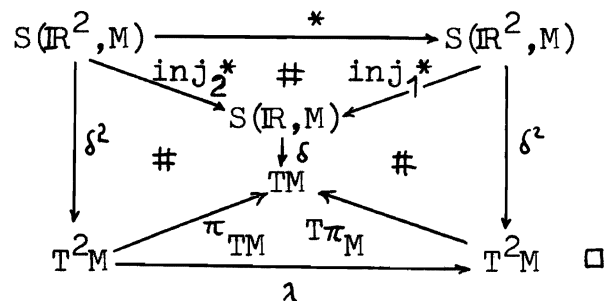
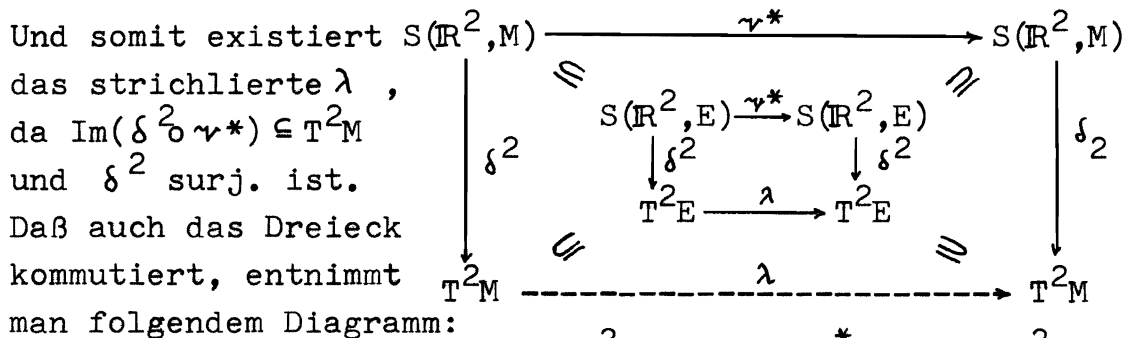


BEWEIS: Sei vorerst $M = E: \lambda(x, v, w, u) := (x, w, v, u) \Rightarrow$

λ macht das Rechteck kommutativ, weil $d_1 d_2 f = d_2 d_1 f$.

Außerdem ist λ ein Isomorphismus, denn $\lambda^2 = 1$.

Sein nun M eine pMF. \Rightarrow Das folgende Diagramm kommutiert :



5.1.3. Abgeschlossenheit :

In diesem Absatz möchte ich die Abgeschlossenheit der Kategorie $\underline{\text{pMF}}$ unter den Funktoren $S(N, \cdot), \Pi, T, T \Delta T$ beweisen. Eine Möglichkeit dies zu tun besteht darin, von der Faktorisierung von $1_{TM \Delta TM}$ über $(\delta_2)_M$ auszugehen, indem man den jeweiligen Funktor F darauf anwendet. Mittels kanonischer Flipabbildungen läßt sich dieses Dreieck dann umformen zu einer Faktorisierung von $1_{TFM \Delta TFM}$ über $(\delta_2)_{FM}$.

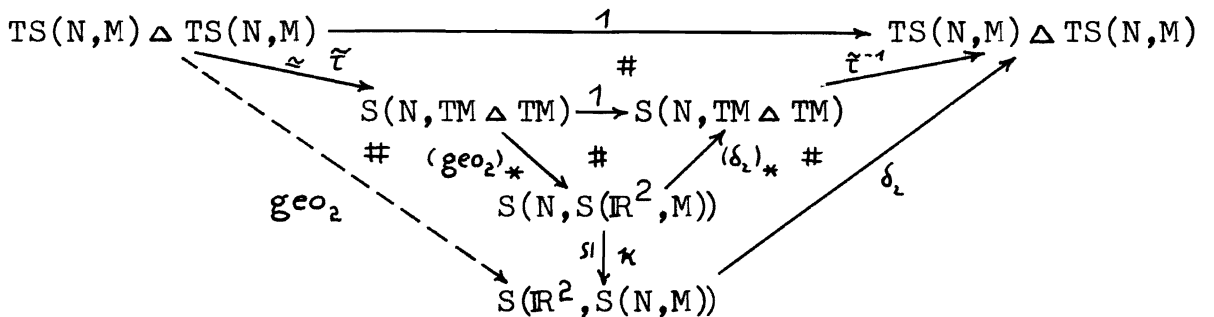
Bei den ersten beiden Funktoren werde ich diesen Weg gehen. Für die restlichen jedoch werde ich einen allgemeineren Satz beweisen, aus dem die Abgeschlossenheit von $\underline{\text{pMF}}$ unter ihnen folgt als auch die kanonischen Isomorphismen.

1.SATZ: M sei $\text{pMF} \Rightarrow S(N, M)$ ist pMF .

BEWEIS: M ist $\text{pMF} \Rightarrow TM \Delta TM \xrightarrow{1} TM \Delta TM$. Wendet man geo_2 an, so erhält man ein Dreieck:

$$\begin{array}{ccc} TM \Delta TM & \xrightarrow{1} & TM \Delta TM \\ \text{geo}_2 \searrow & \Downarrow \# & \nearrow \delta_2 \\ & S(\mathbb{R}^2, M) & \end{array}$$

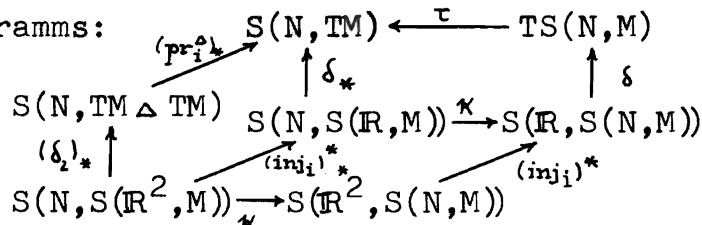
darauf $S(N, \cdot)$ an so folgt die Kommutativität des inneren Dreiecks des nächsten Diagramms.



Dabei ist $\tilde{\tau}$ der kanonische Isomorphismus

$\tilde{\tau} := [\tau^{-1} \text{opr}_1^*, \tau^{-1} \text{opr}_2^*]: S(N, TM \Delta TM) \rightarrow TS(N, M) \Delta TS(N, M)$, der wegen der kartesischen Abgeschlossenheit von $\underline{\text{VMg}}$ und somit Stetigkeit von $S(N, \cdot)$ existiert.

Das rechte Trapez kommutiert wegen der Kommutativität folgenden Diagramms:



Und die Homogenität von $(\text{geo}_2)_{S(N, M)}$ folgt klarerweise aus der von $(\text{geo}_2)_M$. \square

2.LEMMA: $\prod (TM_i \Delta TM_i) \xrightarrow{\tilde{\omega}} T(\prod M_i) \Delta T(\prod M_i)$
 $\begin{array}{ccc} \uparrow \pi \delta_2 & \# & \uparrow \delta_2 \\ \prod S(\mathbb{R}^2, M_i) & \xrightarrow{\tau} & S(\mathbb{R}^2, \prod M_i) \end{array}$
 $\tilde{\omega} = [\omega \circ \prod pr_1^\Delta, \omega \circ \prod pr_2^\Delta]$
 $\tilde{\omega} : ((x_i, v_i) \Delta (x_i, v_i'))_i \mapsto ((x_i)_i, (v_i)_i) \Delta ((x_i)_i, (v_i')_i)$
 (D.h. $\prod, T \Delta T$ kommutieren via $\tilde{\omega}$)

BEWEIS: Da bekanntlich Limiten kommutieren, und da ω ein Isomorphismus ist, sind die Pfeile in der oberen Reihe des folgenden Diagramms Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccccc} \prod (TM_i \Delta TM_i) & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & T(\prod M_i) \Delta T(\prod M_i) & \xrightarrow{\omega} & T \prod M_i \Delta T \prod M_i \\ \downarrow \pi pr_j^\Delta & \# & \downarrow pr_j^\Delta & \# & \downarrow pr_j^\Delta \\ \prod TM_i & \xrightarrow{1} & \prod TM_i & \xrightarrow{\omega} & T \prod M_i \end{array}$$

Sei also $\tilde{\omega} := [\omega \circ \prod pr_1^\Delta, \omega \circ \prod pr_2^\Delta]$. Da das äußere Rechteck des folgenden Diagramms kommutiert und weil $\pi \delta_2$ surj. ist, kommutiert auch das obere Trapez, und das war zu zeigen.

$$\begin{array}{ccc} \prod S(\mathbb{R}^2, M_i) & \xrightarrow{\tau} & S(\mathbb{R}^2, \prod M_i) \\ \downarrow \pi \delta \circ (inj_j)^* & \searrow \pi \delta_2 & \swarrow \delta_2 \\ \# & \prod TM_i \Delta TM_i & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & T \prod M_i \Delta T \prod M_i & \# \\ \swarrow \pi pr_j^\Delta & \# & \searrow pr_j^\Delta & \# & \downarrow \delta \circ (inj_j)^* \\ \prod TM_i & \xrightarrow{\omega} & T \prod M_i \end{array}$$

3.FOLGERUNG: M_i seien pMF $\Rightarrow \prod M_i$ ist pMF.

BEWEIS: M_i sind pMF $\Rightarrow TM_i \Delta TM_i \xrightarrow{1} TM_i \Delta TM_i$. Wendet geo_2 an, so folgt die Kommutativität des inneren Dreiecks des nächsten Diagramms.

man darauf \prod an, so folgt die Kommutativität des inneren Dreiecks des nächsten Diagramms.

$$\begin{array}{ccc} T \prod M_i \Delta T \prod M_i & \xrightarrow{1} & T \prod M_i \Delta T \prod M_i \\ \downarrow \tilde{\omega}^{-1} & \# & \downarrow \tilde{\omega} \\ \prod (TM_i \Delta TM_i) & \xrightarrow{1} & \prod (TM_i \Delta TM_i) \\ \downarrow \pi geo_2 & \# & \downarrow \pi \delta_2 \\ \prod S(\mathbb{R}^2, M_i) & \xrightarrow{\tau} & S(\mathbb{R}^2, \prod M_i) \end{array}$$

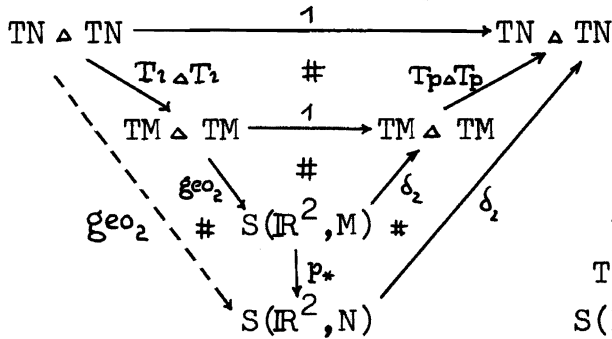
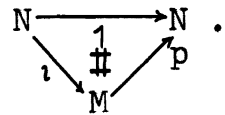
Und der Rest kommutiert nach obigen Lemma. Die Homogenität von $(geo_2)_{\prod M_i}$ folgt auch sofort wieder aus der von $(geo_2)_{M_i}$.

□

4.SATZ: M sei pMF, N ein Retrakt von M \Rightarrow M ist pMF .

BEWEIS: N ist ein Retrakt von M heißt: $N \xrightarrow{1} N$.

Nun betrachte ich folgendes Diagramm:



Wobei das innere Dreieck kommutiert, weil M pMF ist. Das obere Trapez kommutiert, weil $p \circ i = 1$, und das rechte Trapez kommutiert, da $\delta_2 : S(\mathbb{R}^2, \cdot) \rightarrow T \Delta T$ eine nat. Transf. ist.

$$\begin{aligned} \text{geo}_2 \text{ ist homogen, denn } & \text{geo}_2((x,v) \Delta (x,v'))(st,t') = \\ & = p(\text{geo}_2(T i (x,v) \Delta T i (x,v'))(st,t')) = (T i \text{ faserlin}) \\ & = p(\text{geo}_2(T i (x,sv) \Delta T i (x,v'))(t,t')) = \\ & = \text{geo}_2((x,sv) \Delta (x,v'))(t,t') . \square \end{aligned}$$

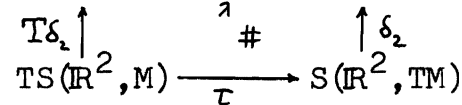
5.FOLGERUNG: M sei pMF \Rightarrow TM, TM Δ TM sind pMF .

BEWEIS: Da M pMF ist, sind $\delta : S(\mathbb{R}, M) \rightarrow TM$ und

$\delta_2 : S(\mathbb{R}^2, M) \rightarrow TM \Delta TM$ Retraktionen (Inverse sind geo, geo_2). Außerdem sind $S(\mathbb{R}, M)$ und $S(\mathbb{R}^2, M)$ pMF und damit nach obigen Satz auch TM und $TM \Delta TM$. \square

Und nun möchte ich noch die beiden ausständigen natürl. Isomorphismen behandeln.

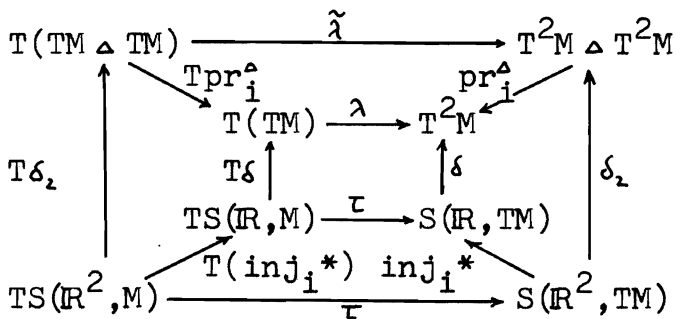
6.SATZ: $T(TM \Delta TM) \xrightarrow{\tilde{\lambda}} T^2M \Delta T^2M$ für jede pMF M .



$$\tilde{\lambda} = [\lambda \circ Tpr_1^{\Delta}, \lambda \circ Tpr_2^{\Delta}]$$

$$\lambda : ((x,v) \Delta (x,v'), (x,w) \Delta (x,w')) \mapsto (x, x!v, w) \Delta (x, x!v!w!)$$

BEWEIS: Die Kommutativität des obigen Rechtecks entnimmt man sofort folgendem kommutativen Diagramm wegen der PB-Eigenschaft von $T^2M \Delta T^2M$.



Eine Rechtsinverse zu $\tilde{\lambda}$ läßt sich durch folgendes kommutatives Diagramm definieren:

$$\begin{array}{ccccc}
 T(TM) \Delta T(TM) & \dashrightarrow & T(TM \Delta TM) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & T(TM) \Delta T(TM) \\
 \downarrow \text{geo}_2 & & \uparrow T\delta_2 & & \uparrow \delta_2 \\
 S(\mathbb{R}^2, TM) & \xrightarrow{\tau^{-1}} & TS(\mathbb{R}^2, M) & \xrightarrow{\tau} & S(\mathbb{R}^2, TM)
 \end{array}$$

Und da $\tilde{\lambda}$ klarerweise inj. ist, ist er ein Isomorphismus. \square

7. SATZ: M sei pMF \Rightarrow

$$\begin{array}{ccc}
 T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM) & \xrightarrow[\xi]{\cong} & T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM) \\
 \uparrow T\delta_2 \Delta T\delta_2 & & \uparrow \delta_2 \\
 TS(\mathbb{R}^2, M) \Delta TS(\mathbb{R}^2, M) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & S(\mathbb{R}^2, TM \Delta TM)
 \end{array}$$

$$\xi = [\tilde{\lambda}^{-1} \circ (Tpr_1^{\Delta} \Delta Tpr_1^{\Delta}), \tilde{\lambda}^{-1} \circ (Tpr_2^{\Delta} \Delta Tpr_2^{\Delta})]$$

$$\begin{aligned}
 \xi : ((x, x') \Delta (x, x''), (y, y') \Delta (y, y'')) \Delta ((x, x') \Delta (x, x''), (z, z') \Delta (z, z'')) \mapsto \\
 \mapsto ((x, y) \Delta (x, z), (x'; y') \Delta (x'; z')) \Delta ((x, y) \Delta (x, z), (x''; y'') \Delta (x''; z'')) .
 \end{aligned}$$

BEWEIS: Die Kommutativität des obigen Rechtecks entnimmt man sofort folgendem kommutativen Diagramm wegen der PB-Eigenschaft von $T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM)$.

$$\begin{array}{ccc}
 T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM) & \xrightarrow{\xi} & T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM) \\
 \uparrow T\delta_2 \Delta T\delta_2 & \swarrow Tpr_i^{\Delta} \Delta Tpr_i^{\Delta} & \searrow pr_i^{\Delta} \\
 TS(\mathbb{R}^2, M) \Delta TS(\mathbb{R}^2, M) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & S(\mathbb{R}^2, TM \Delta TM) \\
 \uparrow T\delta \Delta T\delta & \uparrow \tilde{\lambda}^{-1} & \uparrow \delta \\
 TS(\mathbb{R}, M) \Delta TS(\mathbb{R}, M) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & S(\mathbb{R}, TM \Delta TM) \\
 \uparrow Tinj_i^* \Delta Tinj_i^* & \uparrow inj_i^* & \uparrow inj_i^* \\
 TS(\mathbb{R}^2, M) \Delta TS(\mathbb{R}^2, M) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & S(\mathbb{R}^2, TM \Delta TM)
 \end{array}$$

Wobei das innere Rechteck wegen der Kommutativität des folgenden Diagramms kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc}
 T^2M & \xrightarrow{\lambda} & T^2M & & T^2M \\
 \uparrow T\delta & \swarrow pr_i^{\Delta} & \xrightarrow{\tilde{\lambda}^{-1}} & \searrow Tpr_i^{\Delta} & \uparrow \delta \\
 TS(\mathbb{R}, M) & T^2M \Delta T^2M & \xrightarrow{\tilde{\lambda}^{-1}} & T(TM \Delta TM) & S(\mathbb{R}, TM) \\
 \uparrow \delta & \swarrow pr_i^{\Delta} & \uparrow T\delta \Delta T\delta & \uparrow \delta & \uparrow \delta_* \\
 S(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}, M)) & TS(\mathbb{R}, M) \Delta TS(\mathbb{R}, M) & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & S(\mathbb{R}, TM \Delta TM) & S(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}, M)) \\
 \uparrow (inj_i)^* & \uparrow \delta_2 & \uparrow (\delta_2)_* & \uparrow (inj_i)^* & \uparrow (inj_i)^*
 \end{array}$$

Und da ξ selbstinvers ist, wie man sofort sieht, ist er ein Isomorphismus. \square

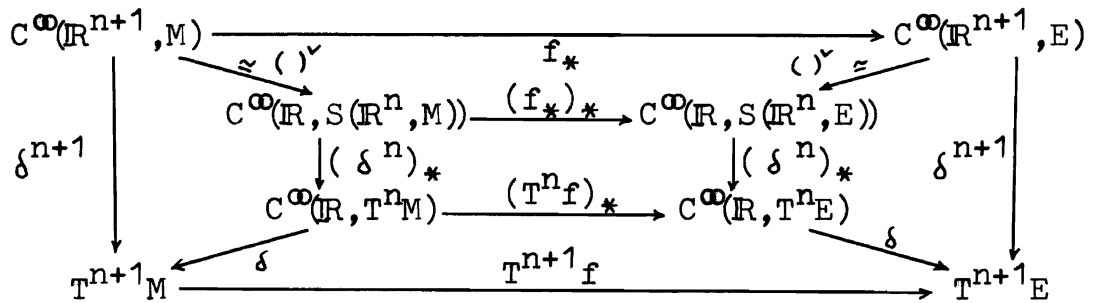
5.1.4. Differenzierbarkeit :

An dieser Stelle möchte ich für eine Abbildung von einer pMF irgendwohin eine äquivalente Bedingung dafür, daß sie C^∞ ist, angeben. Diese besagt in etwa, daß die Einschränkung auf alle endlich dim. Teilmannigfaltigkeiten C^∞ ist.

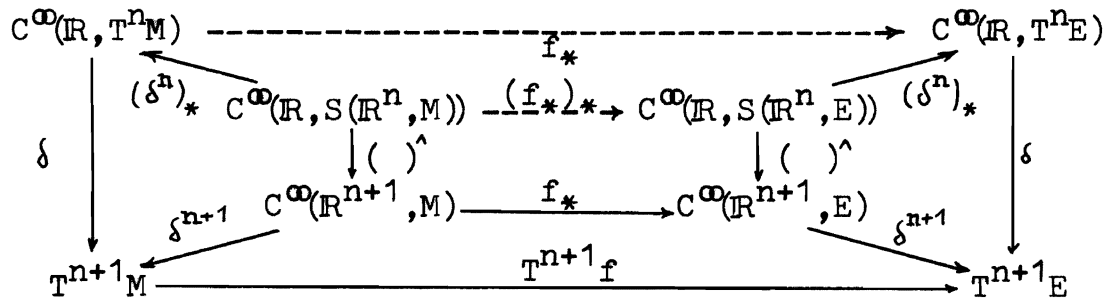
1.SATZ: M sei pMF, $f : M \rightarrow E$ eine Abbildung \Rightarrow

$$f \text{ ist } C^\infty \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} C^\infty(\mathbb{R}^n, M) & \xrightarrow{f_*} & C^\infty(\mathbb{R}^n, E) \\ \downarrow \delta^n & \Downarrow & \downarrow \delta^n \\ T^n M & \xrightarrow{T^n f} & T^n E \end{array}$$

BEWEIS: (\Rightarrow) Daß f_* existiert ist klar, da $f_*(g) = f \circ g$ C^∞ ist für C^∞ -Flächen g . Die Kommutativität entnimmt man induktiv folgendem kommutativen Diagramm.



(\Leftarrow) Dazu betrachte ich folgendes Diagramm, mit kommutativen Trapezen an den beiden Seiten.



Das untere Trapez kommutiert nach Voraussetzung. $(f_*)_*$ ist sinnvoll, da $(f_*)_*(c) = (f_*(\hat{c}))^\vee \in C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}^n, E))$ (denn $\hat{c} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, M)$). $(T^n f)_*$ ist sinnvoll, denn $T^n f \circ \delta^n = \delta^n \circ f_*$. Aus der Surjektivität von $(\delta^n)_*$ folgt somit schließlich die Kommutativität des äußeren Rechtecks. \square

2. Es wäre hier eine interessante Frage ob man den unteren Teil des Rechtecks wie bei Flgv.lkv weglassen kann.

5.2. MANNIGFALTIGKEITEN :

In diesem Kapitel geht es nun endlich darum eine volle Teilkategorie von PMF auszusondern, deren Objekte - die Mannigfaltigkeiten - im endlich dim. Fall gerade die gewöhnlichen klassischen C^∞ -MF sind.

5.2.1. Definition und Folgerungen :

1.DEF: M heißt Mannigfaltigkeit (MF) $:\Leftrightarrow$

$$:\Leftrightarrow M \text{ ist PMF } \wedge TM \xrightarrow{\pi} M \rightarrow M \text{ ist VB.}$$

2. Es ist hier wichtig anzumerken, daß $TM \rightarrow M$ für eine PMF M nicht einmal VFas sein muß. Denn $T_x M$ ist wohl C^∞ -Kurv-abg Teilraum von E, da $T_x M \cong \pi^{-1}(x)$ und π C^∞ -stetig ist. Aber $T_x M$ muß nicht Kurv-abg sein und damit nicht Flg-vollständig, wie man folgendem Beispiel entnimmt.
 $M := C_0 \subset (C_b(\mathbb{N}), \{U_\varepsilon^\infty\}_{\varepsilon \rightarrow 0}) =: E$ Flgv.lkv. Der Tangentialraum von M $TM = C_0 \oplus C_0$, denn sei $c: \mathbb{R} \rightarrow C_0$ C^∞ . \Rightarrow
 $c_1(\cdot) := (c(\cdot) - c(0)) / (\cdot)$ ist C^∞ (Faktorisierungslemma),
 $c_1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \subseteq C_0 \Rightarrow c_1(0) = dc(0) \in C_0$, da C_0 C^∞ -Kurv-abg ist (2.4.2.9.). Und somit ist C_0 eine PMF mit
 $\exp: C_0 \oplus C_0 \rightarrow C_0$, $(x,y) \mapsto x+y$. $T_x C_0 = C_0$ ist aber nicht Flg-abg. (2.4.2.9.) und somit nicht Flg-vollst und nicht Kurv-abg. in E.

3. Zusammenfassend verlangt man also die Existenz folgender C^∞ -Abbildungen für eine MF M :

Eine Exponentialabb. $\exp: TM \rightarrow M$, die
 eine Geodätenabb. $\text{geo}: TM \rightarrow S(\mathbb{R}, M)$ liefert.
 Einen //Transport $\text{pt}: TM \xrightarrow{\pi} S(\mathbb{R}, M) \rightarrow S(\mathbb{R}, TM) (\cong \tau TS(\mathbb{R}, M))$
 der über $\downarrow \pi \delta \quad \# \quad \downarrow \delta \quad \# \quad \downarrow T\delta$
 einen Zusammenhang $\text{zus}: TM \xrightarrow{\pi} TM \longrightarrow T^2 M (\cong \lambda T^2 M)$
 faktorisiert.

Man könnte für MF noch folgende verschärfende Verträglichkeitsbedingung zusätzlich fordern :

4.DEF: Der //Transport pt heißt verträglich mit der Exponentialabbildung \exp $:\Leftrightarrow \text{pt}(v, \text{geo}(v)) = \text{geo}(v)^\bullet$.

D.h. längs Geodäten wird der Tangentialvektor in den Tangentialvektor transportiert.

Daß diese Eigenschaft unter den diversen Konstruktionen erhalten bleibt, ist leicht einzusehen. Für weitergehende Aussagen siehe 5.2.3..

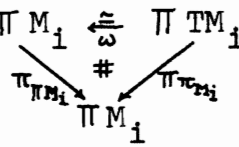
5.2.2. Abgeschlossenheit :

In diesem Absatz möchte ich als erstes zeigen, daß die Kategorie MF abgeschlossen ist unter den Funktoren Π , $S(N, \cdot)$ und T .

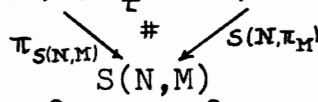
- 1.SATZ: M, M_1 seien MF \Rightarrow
- (1) ΠM_1 ist MF
 - (2) $S(N, M)$ ist MF
 - (3) TM ist MF.

BEWEIS: ΠM_1 pMF (5.1.3.3.), $S(N, M)$ pMF (5.1.3.1.) und TM ist pMF (5.1.3.5.). Es verbleibt also nur noch zu zeigen, daß die zugehörigen Tangentialbündel VB sind.

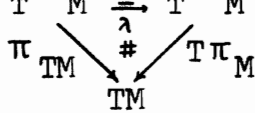
Nun ist aber $T \Pi M_1 \xrightarrow{\cong} \Pi TM_1$ und letzteres ein VB nach 5.1.5.3.(1).



Analog gilt $TS(N, M) \xrightarrow{\cong} S(N, TM)$ und letzteres ist ein VB nach 5.1.5.3.(2).



Schließlich ist $T^2 M \xrightarrow{\cong} T^2 M$ und letzteres nach 5.1.5.3.(3) ein VB. \square



Es wäre noch möglich folgende verschärfende Bedingung an Mannigfaltigkeiten zustellen :

- 2.DEF: M heißt MF_{T1} (MF mit Translationseigenschaft) \Leftrightarrow
- M ist MF \wedge

$$\wedge (T1) \text{ geo}(\delta(\text{geo}(x, v)(s+))) = \text{geo}(x, v)(s+)$$

D.h.:Die Geodäte an den Tangentialvektor einer Geodäte, liefert die gleiche Kurve nur verschoben.

3. Die klassischen endl.dim. C^∞ -MF haben die Eigenschaft (T1). Denn nach [Nomitzu-Ozeki] existiert eine vollständige Riemannsche Metrik auf der C^∞ -MF M . Sei $\text{geo} : TM \rightarrow S(\mathbb{R}, M)$ die Abbildung, die jedem Tangentialvektor die zugehörige ω -lange (da die Metrik vollst.) Geodäte zuordnet. Dann erfüllt geo (T1), da die Geodäten eindeutig sind.

- 4.SATZ: M, M_1 seien MF_{T1} \Rightarrow
- (1) ΠM_1 ist MF_{T1}
 - (2) $S(N, M)$ ist MF_{T1}
 - (3) TM ist MF_{T1} .

BEWEIS: Da die entsprechenden δ und geo auf natürliche Weise mit denen der ursprünglichen MF_{T1} M, M_1 zusammenhängen, ist es eine einfache Rechnung dieses "Distributiv"-Gesetz (T1) nachzuweisen. \square

5.2.3. Sprays :

In diesem Absatz möchte ich auf den Zusammenhang zwischen Paralleltransport und Exponentialabbildung näher eingehen.

1.DEF: Eine C^∞ -Abb. $\text{spr} : TM \rightarrow T^2M$ heißt Spray für $M : \Leftrightarrow$
 $: \Leftrightarrow \pi_{TM} \circ \text{spr} = 1, \lambda \circ \text{spr} = \text{spr}, \text{spr}(s \cdot v) = s \cdot T(s \cdot \cdot)(\text{spr}(v)).$
 D.h.: $\text{spr}(x,v) = (x,v,v, \Gamma_x(v))$ mit $\Gamma_x(sv) = s^2 \Gamma_x(v).$

2.LEMMA: M sei pMF $\Rightarrow \text{spr} := \text{geo}(\cdot)^{\bullet\bullet}(o)$ ist ein Spray (der geodätische Spray).

BEWEIS: $\text{geo}(v)^{\bullet\bullet}(o) = (\text{geo}(v)^\bullet(o), d(\text{geo}(v)^\bullet)(o)) =$
 $= (\text{geo}(v)(o), d(\text{geo}(v))(o), d(\text{geo}(v))(o), d^2(\text{geo}(v))(o)) =$
 $= (x,v,v, d^2(\text{geo}(v))(o)).$
 $\Gamma_x(sv) = d^2(\text{geo}(sv))(o) = d^2(\text{geo}(v)(s \cdot \cdot))(o) =$
 $= s^2 d^2(\text{geo}(v))(s \cdot o) = s^2 \Gamma_x(v). \quad \square$

3.FOLGERUNG: M sei MF_{T1} $\Rightarrow \text{geo}(v)^{\bullet\bullet} = \text{spr} \circ \text{geo}(v)^\bullet,$
 $\text{geo}(v)^\bullet(o) = v.$

BEWEIS: $\text{geo}(v)^{\bullet\bullet}(s) = (\text{geo}(v)^\bullet)^\bullet(s) = (\text{geo}(v)^\bullet(s \cdot \cdot))^\bullet(o) =$
 $= (\text{geo}(v)(s \cdot \cdot))^{\bullet\bullet}(o) \stackrel{T1}{=} \text{geo}(\text{geo}(v)^\bullet(s))^\bullet(o) = \text{spr}(\text{geo}(v)^\bullet(s)).$
 $\text{geo}(v)^\bullet(o) = \delta(\text{geo}(v)) = v. \quad \square$

4.DEF: Eine C^∞ -Abb. $\text{zus} : TM \Delta TM \rightarrow T^2M$ heißt Zusammenhang für $M : \Leftrightarrow$
 $: \Leftrightarrow \text{zus}$ ist Faser-linear bzgl. beider Bündelstrukturen über $TM.$
 zus heißt symmetrisch $: \Leftrightarrow \text{zus} \circ v = \lambda \circ \text{zus}.$
 zus heißt verträglich mit $\text{spr} : \Leftrightarrow \text{spr} = \text{zus} \circ \Delta.$

5.LEMMA: M sei MF_{T1} $\Rightarrow \text{pt}$ ist verträglich mit $\text{exp} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \text{zus}$ ist verträglich mit $\text{spr}.$

BEWEIS: $(\Rightarrow) (\text{zus} \circ \Delta)(v) = \text{zus}(v,v) = \delta(\text{pt}(v, \text{geo}(v))) =$
 $= \delta(\text{geo}(v)^\bullet) = \text{geo}(v)^{\bullet\bullet}(o) = \text{spr}(v).$
 $(\Leftarrow) \text{geo}(v)^{\bullet\bullet}(s) \stackrel{T1}{=} \text{spr}(\text{geo}(v)^\bullet(s)) = \text{zus}(\Delta(\text{geo}(v)^\bullet(s))) =$
 $= \text{zus}(\text{geo}(v)^\bullet(s), \text{geo}(v)^\bullet(s))$ und $\text{geo}(v)^\bullet(o) = \delta(\text{geo}(v)) = v \Rightarrow$
 $\Rightarrow \text{geo}(v)^\bullet = \text{pt}(v, \text{geo}(v)). \quad \square$

6.DEF: Eine C^∞ -Abb. $\text{tors} : TM \Delta TM \rightarrow TM$ heißt Torsion für $M : \Leftrightarrow$
 $: \Leftrightarrow \text{tors}$ ist Faser-treu, -bilinear, -schiefsymmetrisch über $TM.$

7.LEMMA: zus sei ein Zusammenhang für $TM \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{tors} := \underset{v}{\text{pr}} \circ (\lambda \circ \underset{\pi_{TM}}{\text{zus}} \circ v)$ ist eine Torsion für $M.$

BEWEIS: Da zus bilinear ist auf den Fasern, gilt das gleiche für $\text{tors}.$ Die Faser-Schiefsymmetrie sieht man auch sofort ein. \square

8.SATZ: Sei M eine pMF, spr der geodätische Spray, tors eine Torsion für M . \Rightarrow Es existiert ein eindeutiger mit spr verträglicher Zusammenhang mit Torsion tors. Er ist gegeben durch $\text{zus} = \delta^2 \circ \text{geo}_2 \circ \nu + \frac{1}{2} \nu \text{lift} \circ \langle \text{pr}_1, \text{tors} \rangle$.

BEWEIS: Sei vorerst $\text{tors}(x,v;x,w) = (x,o)$ und $\text{zus} = \delta^2 \circ \text{geo}_2$. \Rightarrow
 $\Rightarrow (\text{zus} \circ \Delta)(v) = \delta^2(\text{geo}_2(v,v)) = \delta^2(\text{geo}(v) \circ \alpha) = \text{geo}(v) \circ \alpha = \text{spr}(v)$, d.h. zus ist verträglich mit spr. $\delta^2(\text{geo}_2(v,w)) = \delta^2(\text{geo}_2(w,v) \circ \nu) = \lambda(\delta^2(\text{geo}_2(w,v)))$. \Rightarrow zus ist symmetrisch.
 \Rightarrow Die Torsion von zus ist tors. $\delta^2(\text{geo}_2(v,rw)) = \delta^2(\text{geo}_2(v,w)(\cdot, r\cdot)) = r \cdot \delta^2(\text{geo}_2(v,w))$. \Rightarrow zus ist faserhomogen und damit nach (4.1.2.4.) faserlinear.

Sei nun $\text{tors}(x,v;x,w) = (x, T_x(v,w))$ eine beliebige Torsion, und zus wie im Satz definiert. $\Rightarrow \text{zus}(x,v;x,w) = (x,v,w, \Gamma_x(v,w) + \frac{1}{2} T_x(v,w))$, wobei $\Gamma_x(v,w)$ die Koeffizienten des oben definierten symmetrischen Zusammenhangs sind. \Rightarrow
 \Rightarrow zus ist ein Zusammenhang, $\text{zus}(x,v;x,v) = (x,v,v, \Gamma_x(v) + 0)$ (d.h. zus ist verträglich), und die Torsion von zus ist $(x,v;x,w) \mapsto (x, \Gamma_x(v,w) + \frac{1}{2} T_x(v,w) - \Gamma_x(w,v) - \frac{1}{2} T_x(w,v)) = (x, T_x(v,w)) = \text{tors}(x,v;x,w)$.

Sei schließlich $\text{zus}(x,v;x,w) = (x,v,w, C_x(v,w))$ ein beliebiger Zusammenhang, der die im Satz geforderten Eigenschaften erfüllt. $\Rightarrow C_x - \frac{1}{2} T_x$ ist eine symmetrische Bilinearform und $C_x(v,v) - \frac{1}{2} T_x(v,v) = \Gamma_x(v)$. $\Rightarrow C_x - \frac{1}{2} T_x = \Gamma_x$. \square

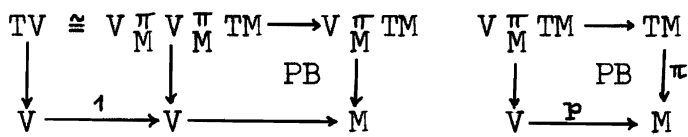
Nachtrag: Der so gewonnene Zusammenhang ist relativ uninteressant, da nicht klar ist ob // -Transport dazu existiert.

5.2.4. Vektorbündel :

1. Klarerweise gelten alle Aussagen für VB über MF, die für VB über pMF erfüllt sind, genauso. Im Speziellen ist das die Abgeschlossenheit unter den Konstruktionen Π , $S(N,.)$, T und PB , sowie die natürlichen Isomorphismen für $S(\mathbb{R},p)$, $Horiz(p)$, $Vert(p)$ und Tp .

2.SATZ: $V \xrightarrow{P} M$ sei VB, M sei MF $\Rightarrow V$ ist MF.

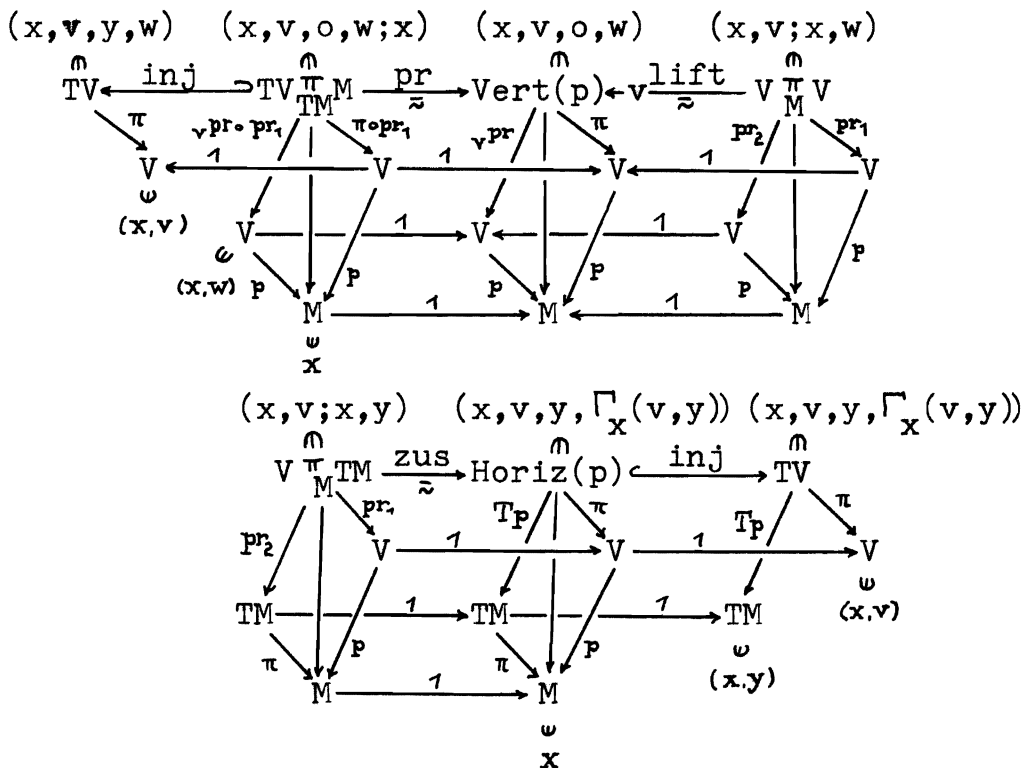
BEWEIS: V ist pMF nach 5.1.5.5. . Es bleibt also z.z., daß $TV \xrightarrow{\pi} V$ ein VB ist. Nun kommutieren aber die folgenden Diagramme.



Somit ist nach 5.1.5.3.(5) $V \xrightarrow{\pi} M$ ein VB, und nach 5.1.5.3.(4) $V \xrightarrow{\pi} V$ ein VB, und damit also auch $TV \rightarrow V$. \square

3. Außerdem entnimmt man dem obigen rechten PB, daß $(Horiz(p) \cong) V \xrightarrow{\pi} M$ für eine MF M ein VB über V ist.

Zusammenfassend liegen bei einem VB über einer MF M für das horizontale- und das vertikale Bündel folgende Bündelstrukturen und Bündelhomomorphismen vor :



5.3. BEZIEHUNGEN ZUR ÜBLICHEN THEORIE :

In diesem Kapitel geht es nun schließlich darum, die Verbindung zu der Theorie der C^∞ -Mannigfaltigkeiten, welche auf Banach-Räumen und noch spezieller am \mathbb{R}^n modellieren, herzustellen.

5.3.1. MF mit endl. dim. umgebenden VR :

Ziel dieses Absatzes ist es, MF und VB mit endl. dim. umgebenden Vektorraum als klassische C^∞ -MF und C^∞ -VB zu erweisen.

1. SATZ: M_E sei MF, $\dim E < \infty \Rightarrow M_E$ ist C^∞ -MF im klass. Sinn.

BEWEIS: Weil E endl. dim. lkv ist $\Rightarrow E \cong \mathbb{R}^n$, d.h. oBdA $E = \mathbb{R}^n$.

Es ist also die Existenz einer C^∞ -Struktur für M zu beweisen, d.h. einen C^∞ -Atlas. Dazu definiere ich für $x \in M$

Karten $f_x := \exp_x : T_x M \rightarrow M$. Für diese gilt:

f_x ist Immersion in O_x : Da $T_x M \xleftarrow{VR} E = \mathbb{R}^n \Rightarrow$ oBdA $T_x M = \mathbb{R}^k$.

$$\frac{\partial}{\partial v} / v = o \quad f_x = d(\exp(x, \cdot v))(o) = d(\text{geo}(x, v))(o) = v \Rightarrow$$

$$\bigvee_{V_x} V_x \text{ off., zshg., Umgebung von } x, f_x : V_x \rightarrow (M \subseteq) \mathbb{R}^n \text{ ist}$$

$$T_o f_x = 1_{T_x M} \Rightarrow f_x \text{ ist Immersion in } o_x. \Rightarrow$$

$$\text{Einbettung.}$$

$c(o) = x \Rightarrow c \in f_x(V_x)$ lok. um o : Sei dazu $F : T_x M \times \mathbb{R} \rightarrow M$,

$$F(v, t) := \exp(\text{pt}(v, c)(t)) \Rightarrow F(v, 0) = f_x(v),$$

$$F(o, t) = c(t). \text{ Da } f_x \text{ eine Immersion in } o \text{ ist.} \Rightarrow$$

Rang $F \cong k$ lok. um $(o, 0)$. Angenommen $\bigvee_{v, t} \text{ Rang } F \cong k+1$

in $(v, t) \Rightarrow \dim T_{(v, t)} M \times \mathbb{R} \cong k$. Da aber $F(\cdot, \cdot) x$

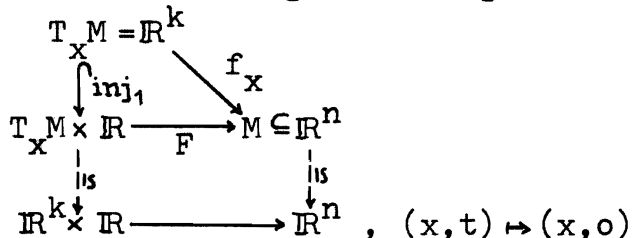
mit $F(v, t)$ verbindet und wegen pt die Dimension

des Tangentialraums längs Kurven konstant ist \Rightarrow Widerspruch.

\Rightarrow Rang $F = k$ lok. um $(o, 0) \Rightarrow$ (Rangsatz) Es existieren

Diffeomorphismen, derart daß folgendes Diagramm lokal um

$(o, 0)$ kommutiert.



Und somit ist $F(v, t) \in f_x(V_x)$ lok. um $(o, 0)$, da f_x lok.

eine Immersion ist. Damit ist auch $c = F(o, \cdot) \in f_x(V_x)$

lok. um o .

$y \in f_x(V_x) \Rightarrow f_y \in f_x(V_x)$ lok. um o : Angenommen, das ist nicht der Fall. $\Rightarrow (f_x$ ist immersiv) $\bigvee_{v_n \in V_x} v_n \rightarrow f_x^{-1}(y)$,
 $f_x(v_n) \notin f_y(V_y) \Rightarrow (2.4.1.2.)$

$\bigvee_{c, t_n} c : \mathbb{R} \rightarrow T_x M \in C^\infty, t_n \rightarrow o, c(t_n) = v_n, c(o) = f_x^{-1}(y)$
 (durch Wahl einer Teilfolge) \Rightarrow

$\Rightarrow f_x \circ c : \mathbb{R} \rightarrow M \in C^\infty, (f_x \circ c)(t_n) = f_x(v_n) \notin f_y(V_y),$
 $(f_x \circ c)(o) = y$. Widerspruch zu obiger Eigenschaft.

$c(o) \in f_x(V_x) \Rightarrow c \in f_x(V_x)$ lok. um o : $c(o) \in f_x(V_x) \Rightarrow$
 $\Rightarrow f_{c(o)} \in f_x(V_x)$ lok. um $o, c \in f_{c(o)}(V_{c(o)})$ lok. um $o \Rightarrow$
 $\Rightarrow c \in f_x(V_x)$ lok. um o .

$\Rightarrow f_x(V_x) \subseteq M, \text{off. } (c(t) \in f_x(V_x) \Rightarrow c \in f_x(V_x) \text{ lok. um } t \Rightarrow$
 $\Rightarrow c^{-1}(f_x(V_x)) \text{ off.} \Rightarrow f_x(V_x) \text{ ist } C^\infty\text{-Kurv-off.)}$

$\Rightarrow f_x : V_x \rightarrow f_x(V_x)$ ist Homöomorphismus auf offene Teilmenge von M . Und da wegen des Rangsatzes Diffeomorphismen φ, ψ existieren die folgendes Diagramm lok. kommutativ machen

$$\begin{array}{ccc} V_x & \xrightarrow{f_x} & f_x(V_x) \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^n \\ \varphi \downarrow \cong & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \mathbb{R}^n, x \mapsto (x, o) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ist } f_x^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi /_{f_x(V_x)} \text{ und} \\ \text{somit } C^\infty. \end{array}$$

Damit ist aber der Kartenwechsel C^∞ und deshalb $\{(f_x, V_x)\}$ ein C^∞ -Atlas. \square

2.FOLGERUNG: $V \xrightarrow{p} M$ sei VB, $\dim(E \oplus G) < \infty \Rightarrow$
 $V \xrightarrow{p} M$ ist C^∞ -VB im klassischen Sinn, zus ist Zusammenhang und pt der zugehörige $//$ -Transport im klass. Sinn.

BEWEIS: Folgendes Diagramm kommutiert nach Voraussetzung:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \cong V_x \times T_x M & \xrightarrow{\hat{\text{pt}}^n(\cdot, f_x, \cdot)} & V \text{ Faseriso.} \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathbb{R}^m \cong T_x M & \xrightarrow{f_x} & M \end{array}$$

$\Rightarrow \{(\hat{\text{pt}}^n(\cdot, f_x, \cdot), f_x(V_x))\}$ ist ein VB-Atlas, und somit ist $V \xrightarrow{p} M$ ein C^∞ -VB im klass. Sinn. Da zus ein Bündelhomo von $V_M^T M$ nach TV über V und TM ist, erfüllt er gerade die definierende Eigenschaft eines klass. Zusammenhangs. Schließlich ist der klassische $//$ -Transport zu zus durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

$\text{pt} : V_M^T S(\mathbb{R}, M) \rightarrow S(\mathbb{R}, V)$ ist faseriso über $S(\mathbb{R}, M)$,
 $\text{pt}(v, c)(o) = v, \text{pt}(v, c) //$ (d.h.: $\text{konn } o \text{pt}(v, c)^* = 0_{c(t)}$)

Es ist nur die 3. Eigenschaft z.z.:

Wegen (VB3') und (VB4) ist $\text{pt}(v, c)^*(t) = \text{zus}(\text{pt}(v, c)(t), \delta c(t+))$
 und damit wegen 4.4.3.3. ($\text{konn } o \text{pt}(v, c)^*(t) = 0_{c(t)}$). \square

5.3.2. Endl. dim. C^∞ -MF :

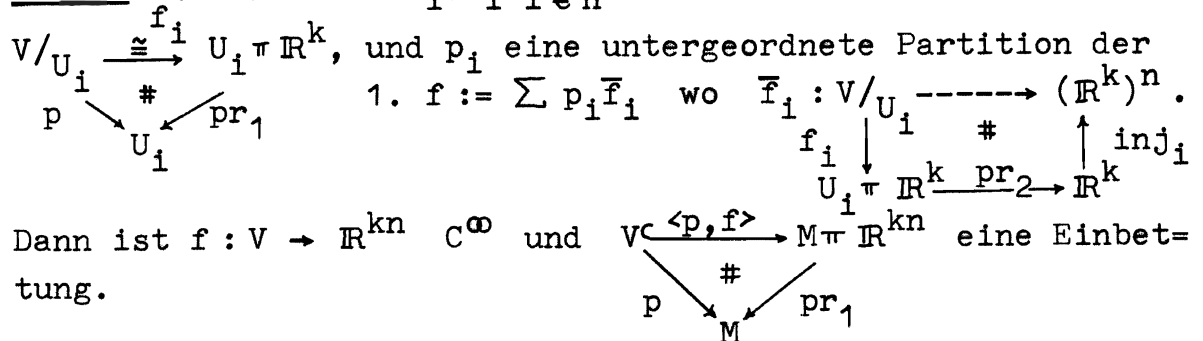
In diesem Absatz möchte ich die Umkehrung zu den beiden Sätzen des vorigen Absatzes beweisen, nämlich daß jede endl. dim C^∞ -MF (resp. C^∞ -VB) im klass. Sinn eine MF (resp. VB) im Sinne dieser Arbeit ist.

1.LEMMA: M sei C^∞ -MF im klass. Sinn \Rightarrow M ist pMF.

BEWEIS: M sei C^∞ -MF \Rightarrow (Einbettungssatz von Whitney)
 $\bigvee_n M \hookrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow M_{\mathbb{R}^n}$ ist VMg, $K^\infty M = M$ (da M lok. Diffeom. zu einem \mathbb{R}^k ist). Sei nun Γ ein Spray auf M und Exp die dazugehörige Exponentialabb. $\Rightarrow \text{Exp} : TM \ni U \rightarrow M \in C^\infty$, wobei U eine Umgebung des 0-Schnitts ist, $\text{Exp}(0_x) = x$, $\frac{d}{dt}/_{t=0} \text{Exp}(x, tv) = v$. Sei nun $F : TM \rightarrow U \in C^\infty$, $F=1$ lok. um 0_M , $\text{exp} := \text{Exp} \circ F : TM \rightarrow M$. $\Rightarrow \text{exp}$ ist die für pMF geforderte Exponentialabb., wie man leicht nachrechnet. \square

2.SATZ: $V \xrightarrow{p} M$ sei C^∞ -VB im klass. Sinn $\Rightarrow V \xrightarrow{p} M$ ist VB.

BEWEIS: (VB1) Sei $\{U_i, f_i\}_{i \in n}$ ein VB-Atlas, d.h.



Sei nun C ein Zusammenhang auf p und pt der dazugehörige //-Transport, d.h. $pt(\cdot, c)^\wedge : V_{c(o)} \times \mathbb{R} \rightarrow V$, $pt(v, c)(o) = v$, und $pt(v, c)$ ist //.

(VB3) Es ist z.z. $pt(v, c) \circ f = pt(pt(v, c)f(o), c \circ f)$. Es gilt:

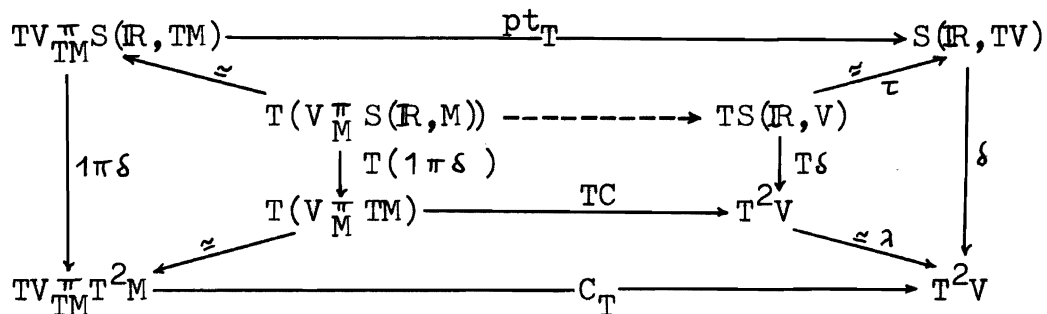
$$\begin{aligned} (pt(v, c) \circ f)(o) &= pt(v, c)f(o) \text{ und } (pt(v, c) \circ f)^\bullet(t) = \\ &= pt(v, c)^\bullet(f(t)) \cdot f'(t) = C(pt(v, c)f(t), c^\bullet(f(t))) \cdot f'(t) = \\ &= C(pt(v, c)f(t), c^\bullet(f(t))) \cdot f'(t) = C(pt(v, c)f(t), (c \circ f)^\bullet(t)). \end{aligned}$$

Somit erfüllt $pt(v, c) \circ f$ die $pt(pt(v, c)f(o), c \circ f)$ charakterisierende Differentialgleichung. D.h. sie stimmen überein.

(VB4) $\delta(pt(v, c)) = pt(v, c)^\bullet(o) = C(pt(v, c)(o), c^\bullet(o)) = C(v, \delta c)$.

(VB2) Es bleibt nur noch z.z., daß
 $pt : V_M^\pi S(\mathbb{R}, M) \rightarrow S(\mathbb{R}, V) \in C^\infty$ ist. Sei dazu $\langle c_1, c_2 \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}, V_M^\pi S(\mathbb{R}, M))$, dann gilt $pt(c_1(s), c_2(s))'(t) = C(pt(c_1(s), c_2(s))(t), c_2(s)'(t))$ und $pt(c_1(s), c_2(s))(0) = c_1(s)$. Sei nun $f : V \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TV$ definiert durch $f(y; s, t) := (p, M, \hat{c}_2) := C(y, \delta(c_2(s)(t+))$, und $y(s, t) := pt(c_1(s), c_2(s))(t) = (pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle)(s, t)$. Damit ist y eine Lösung der zeitabhängigen (t) und parameterabhängigen (s) Differentialgleichung $y(s, \cdot)'(t) = F(y, s, t)$ und $y(\cdot, 0) = c_1$, und als solche C^∞ . D.h. $pt_* : C^\infty(\mathbb{R}, V_M^\pi S(\mathbb{R}, M)) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}, V))$ ist sinnvoll.

Sei ein Zusammenhang auf T^2V definiert durch $C_T : TV_{TM}^\pi T^2M \xrightarrow{\cong} T(V_M^\pi TM) \xrightarrow{TC} T^2V \xrightarrow{\cong} T^2V$, und pt_T der zugehörige // - Transport. Dann kommutiert das folgende Diagramm:



Somit existiert die strichlierte Abbildung, von der ich behaupte, daß sie Tpt ist. D.h. die Kommutativität des nächsten Diagramms ist nachzuweisen.

$$\begin{array}{ccc}
 T(V_M^\pi S(\mathbb{R}, M)) & \xrightarrow{\quad} & TS(\mathbb{R}, V) \\
 \uparrow \delta & & \uparrow \delta \\
 C^\infty(\mathbb{R}, V_M^\pi S(\mathbb{R}, M)) & \xrightarrow{pt_*} & C^\infty(\mathbb{R}, S(\mathbb{R}, V))
 \end{array}$$

Sei dazu $\langle c_1, c_2 \rangle \in C^\infty(\mathbb{R}, V_M^\pi S(\mathbb{R}, M))$, dann ist z.z. $pt_T(\delta c_1, \tau \delta c_2) = \tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))$.

Es gilt $\tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))(0) = \delta(ev_0 \circ pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle) = \delta(c_1)$, sowie $\tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))'(0) = \delta(\tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))) = \lambda(T\delta(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))) = \lambda(\delta(\delta_*(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))) = C_T(\omega^1(\delta((1\pi\delta)_* \langle c_1, c_2 \rangle))) = C_T(1\pi\delta(\delta c_1, \tau \delta c_2)) = C_T(\tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))(0), (\tau \delta c_2)'(0))$, und schließlich $\tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))'(t) = \delta(\tau(\delta(pt_* \langle c_1, c_2 \rangle))(t+)) = \delta(\delta(ev_{t+} \circ pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle)) = (VB3')$
 $= \delta(\tau(\delta(pt \circ \langle ev_t \circ pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle, ev_{t+} \circ c_2 \rangle))) = (obigen)$
 $= C_T(\delta(ev_t \circ pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle), \delta(\tau \delta(ev_{t+} \circ c_2))) = C_T(\tau(\delta(pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle))(t), \delta(ev_{t+} \circ \tau \delta c_2)) = (C_T \circ \langle \tau(\delta(pt \circ \langle c_1, c_2 \rangle)), (\tau \delta c_2)' \rangle)(t).$

D.h. $\tau(\delta(\text{pt}_* \langle c_1, c_2 \rangle))$ erfüllt die $\text{pt}_T(\delta c_1, \tau \delta c_2)$ definierende Differentialgleichung, und somit stimmen diese beiden Kurven überein. Indem man diesen Schritt iteriert bekommt man also pt ist C^∞ . \square

3.FOLGERUNG: M sei C^∞ -MF im klass.Sinn $\Rightarrow M$ ist MF.

BEWEIS: Nach 1.LEMMA ist M eine pMF. Es verbleibt also z.z., daß $TM \rightarrow M$ ein VB ist. Dies ist aber nach 2.SATZ sichergestellt, denn $TM \rightarrow M$ ist natürlich ein C^∞ -VB im klass.Sinn. \square

5.3.3. C^∞ -MF, die auf Banachräumen modellieren :

1. LEMMA: E Flgv.lkv, $M \subseteq E$, off. $\Rightarrow TM \rightarrow M$ ist VB.

BEWEIS: Da M offen ist, sind die Geraden durch jeden Punkt aus M lok. in M , und somit ist $TM = M \oplus E$. D.h. $TM \rightarrow M$ ist ein triviales Bündel. Sei $V \rightarrow M$ irgend ein triviales Bündel, und definiert man $pt : V \times_M S(\mathbb{R}, M) \rightarrow S(\mathbb{R}, V)$ durch $pt(v, c) := \langle c, \text{konst}_v \rangle$ und $zus : V \times_M TM \rightarrow TV$ durch $zus(x, v; x, y) := (x, v, y, o)$ so wird $V \rightarrow M$ damit klarerweise zu einem VB. \square

2. SATZ: E sei BR, $o \in E$ sei C^∞ auf $E \setminus \{o\} \Rightarrow o \in E$ ist MF, wobei $o \in E := \{x : \|x\| < 1\}$.

BEWEIS: Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty$ mit $g(t) \geq t \wedge t \leq \frac{1}{2} \Rightarrow g(t) = 1$, und $h : \mathbb{R} \rightarrow C^\infty$ mit $h(t) < 1 - t \wedge t \leq \frac{1}{3} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{2} \wedge t < 1 \Rightarrow h(t) > 0$. Definiere ich $\exp : T(o \in E) \rightarrow E$ durch $\exp(x, v) := x + v/g(\|v\| \cdot h(\|x\|)^{-1})$. Dann ist $\exp C^\infty$, da $h \circ \| \cdot \| C^\infty$ ist (h ist um die kritische Stelle o konst.) und $\neq 0$ ($\|x\| < 1$) und somit $g(\| \cdot \| \cdot h(\| \cdot \|)^{-1}) C^\infty$ ist (g ist um die kritische Stelle ebenfalls konst.) und $\neq 0$. Im $\exp \subseteq o \in E$, denn $\|\exp(x, v)\| \leq \|x\| + \|v\| \cdot g(\|v\| \cdot h(\|x\|)^{-1})^{-1} < 1$. Es ist nämlich $g(\|v\| \cdot h(\|x\|)^{-1}) \geq \|v\| \cdot h(\|x\|)^{-1} > \|v\| \cdot (1 - \|x\|)^{-1}$. Und schließlich ist \exp eine geeignete Exponentialabb., denn für $\|v\| < h(\|x\|)^{-1}/2$ ist $g(\|v\| \cdot h(\|x\|)^{-1}) = 1$ und damit $\exp(x, v) = x + v$.

Ich habe also gezeigt, daß $o \in E$ eine pMF ist. Wegen dem obigen Lemma ist $o \in E$ nun aber sogar eine MF. \square

3. Es ist hier anzumerken, daß für Hilberträume diese Differenzierbarkeitsbedingung an die Norm klarerweise erfüllt ist.

4. SATZ: E sei ein Banachraum mit C^∞ -Zerlegungen der 1, $M \subseteq E$, offen $\Rightarrow M$ ist MF.

BEWEIS: Es ist wieder nur die Existenz einer Exponentialabbildung z.z.. Dazu konstruiere ich mir in Analogie zum Beweis obigen Satzes wieder zwei Funktionen g und h :

$g : E \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$, $g(v) \geq \|v\|$, $\|v\| \leq 1/2 \Rightarrow g(v) = 1$: Sei dazu $V_t := \{v : t/2 < \|v\| < t\}$ für $t \geq 1$ und $V_0 := \{v : \|v\| < 1\}$, dann bildet $\{V_t\}$ eine off. Überdeckung von E . Sei q_t die zugehörige C^∞ -Zerlegung der 1 und $g := q_0 + \sum_{t=1}^{\infty} t q_t$.

Somit gilt: $g = q_0 + \sum q_t \cdot t \leq q_0 + \sum q_t = 1$, und falls $\|v\| \leq 1/2 \Rightarrow v \notin V_t$ für $t \geq 1 \Rightarrow g(v) = q_0(v) = 1$, und für $\|v\| > 1$ ist $g(v) = \sum tq_t = \sum_{\|v\| < t} tq_t \geq \|v\| \cdot \sum q_t = \|v\|$.

$h : M \rightarrow \mathbb{R} \ C^\infty$, $h(x) < d(x) := \inf\{\|x-y\| : y \notin M\}$. Hierzu ist vorerst zu bemerken, daß M als offene Teilmenge von E selbst C^∞ -Zerlegungen der 1 besitzt [Vaisman:146].

Sei nun $U_t := \{x : t < d(x) < 2t\}$, dann bildet $\{U_t\}$ eine off. Überdeckung von M . Sei p_t die zugehörige C^∞ -

Zerlegung der 1 und $h := \sum tp_t > 0$, dann gilt

$h(x) = \sum_{x \in U_t} t \cdot p_t = \sum_{t < d(x) < 2t} t \cdot p_t < \sum_t d(x) \cdot p_t = d(x)$, da nicht alle $p_t = 0$ sind gilt ($<$).

\exp definiere ich nun als $\exp(x,v) := x + \frac{v}{g(v/h(x))}$. Der Rest geht nungenauso wie im obigen Satz. \square

5. Dieser Satz liefert eine große Menge von Beispielen, denn nach [Henderson] ist jede zusammenhängende C^∞ -MF mit Modell E offen in E einbettbar, falls E homöomorph zu $E^{\mathbb{N}}$ ist.

Den Zusammenhang zwischen den obigen beiden Sätzen bildet der Satz, daß, falls E separabel ist, die Glattheit der Norm auf $E \setminus \{0\}$ die Existenz von C^∞ -Zerlegungen der 1 impliziert [Vaisman:146].

Als Folgerung ergibt sich, daß alle C^∞ -MF, die auf einen separablen Hilbertraum modellieren, MF sind.

ANHANG (NATÜRLICHE TRANSFORMATIONEN) :

DIFFERENTIALE :

$$S(\mathbb{R}, \cdot) \xrightarrow{d} S(\mathbb{R}, \cdot) \quad dc(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c(s+t) - c(s)}{t} \quad (\text{nur für VR})$$

$$S(\mathbb{R}, \cdot) \xrightarrow{\delta} T \quad \delta c = \langle c, dc \rangle (o)$$

$$S(\mathbb{R}^n, \cdot) \xrightarrow{\delta^n} T^n$$

$$\delta^2 f = \langle f, d_2 f; d_1 f, d_1 d_2 f \rangle (o)$$

$$S(\mathbb{R}^2, \cdot) \xrightarrow{\delta_2} T \Delta T$$

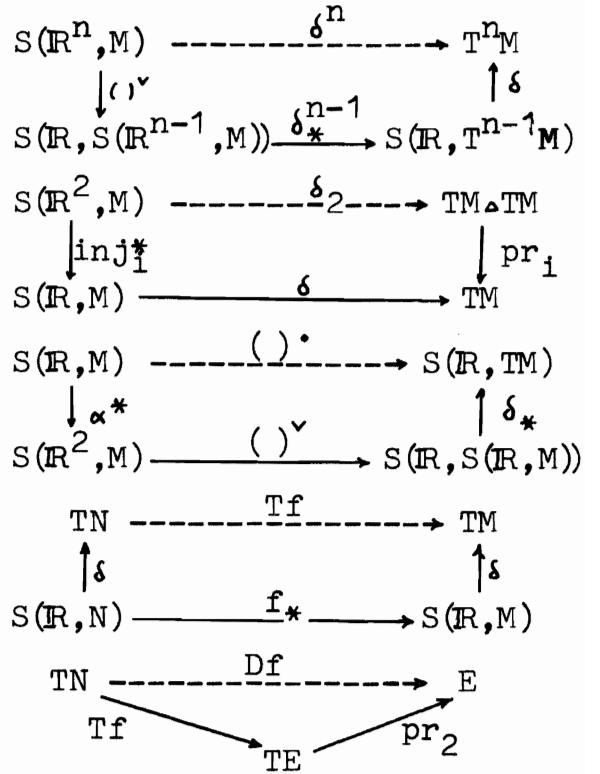
$$\delta_2 f = [f, d_1 f; f, d_2 f] (o, o)$$

$$S(\mathbb{R}, \cdot) \xrightarrow{(\cdot)^{\circ}} S(\mathbb{R}, T \cdot)$$

$$c^{\circ} = \langle c, dc \rangle$$

$$S(\cdot, \cdot) \xrightarrow{T} S(T \cdot, T \cdot)$$

$$S(N, \cdot) \xrightarrow{D} S(TN, \cdot) \quad (\text{nur für VR})$$

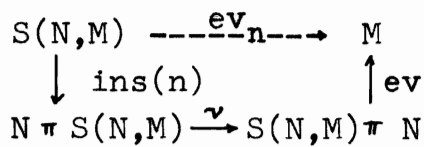


ADJUNKTION :

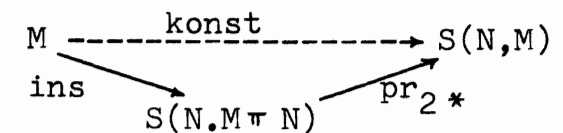
$$\cdot \xrightarrow{\text{ins}} S(N, \cdot \pi N) \quad \text{ins}(m)(n) = (m, n)$$

$$S(N, \cdot) \pi N \xrightarrow{\text{ev}} \cdot \quad \text{ev}(f, n) = f(n)$$

$$S(N, \cdot) \xrightarrow{\text{ev}_n} \cdot \quad \text{ev}_n(f) = f(n)$$

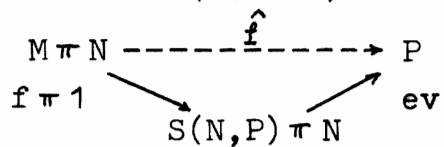


$$\cdot \xrightarrow{\text{konst}} S(N, \cdot) \quad \text{konst}(m)(n) = m$$



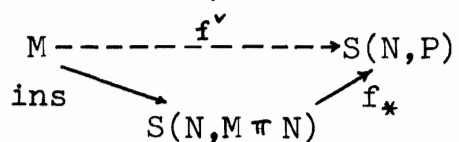
$$S(\cdot, S(N, \cdot)) \xrightarrow{(\cdot)^{\wedge}} S(\cdot \pi N, \cdot)$$

$$\hat{f}(m, n) = f(m)(n)$$



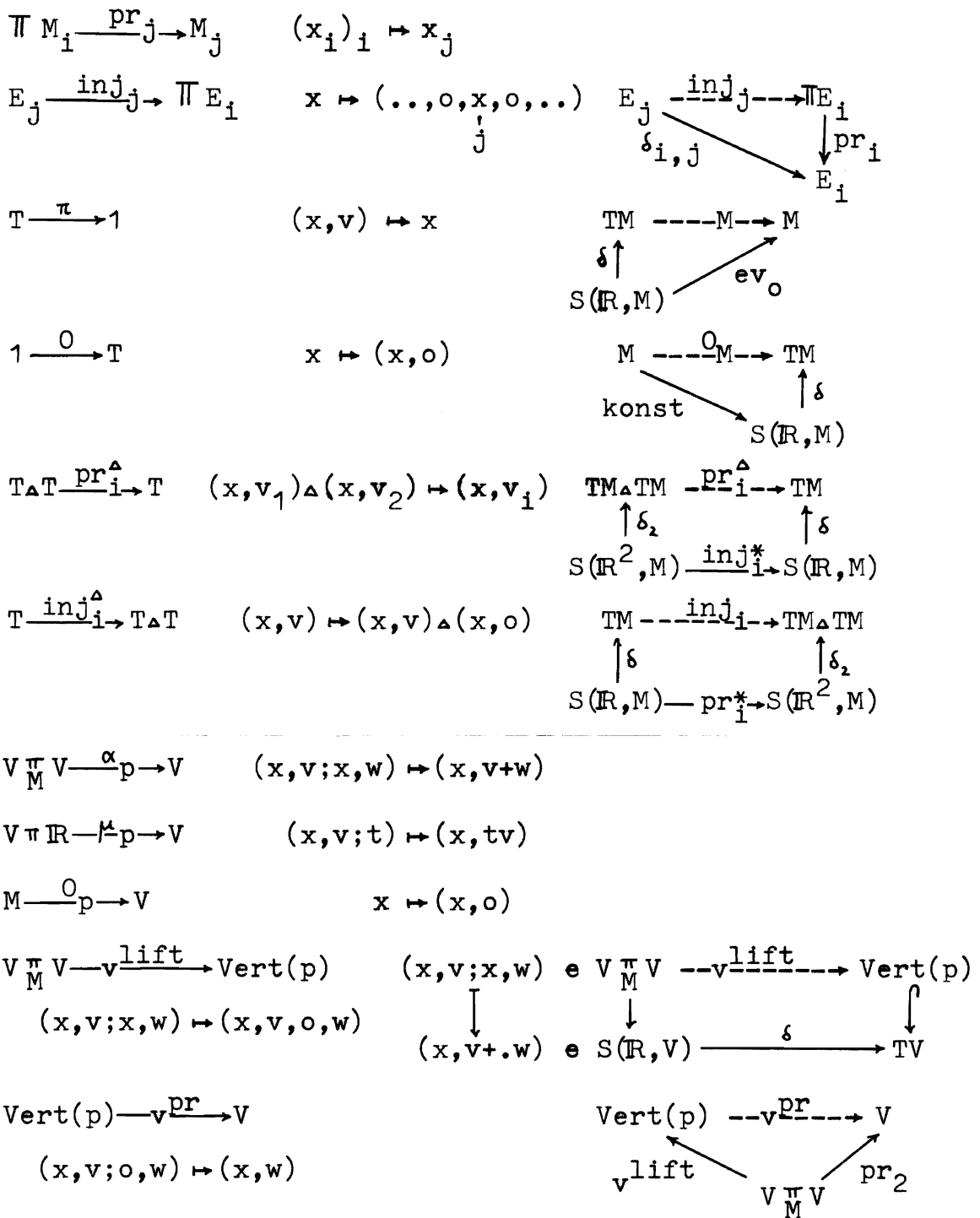
$$S(\cdot \pi N, \cdot) \xrightarrow{(\cdot)^{\vee}} S(\cdot, S(N, \cdot))$$

$$\check{f}(m)(n) = f(m, n)$$



$$S(N, P) \pi S(M, N) \xrightarrow{\text{komp}} S(M, P) \quad \text{komp}(f, g) = f \circ g$$

EINSCHRÄNKUNGEN LINEARER :



KANONISCHE FLIPS :

$$N \pi N' \xrightarrow{\nu} N' \pi N \quad (n, n') \mapsto (n', n)$$

$$\begin{array}{ccc} S(N, \Pi \cdot) \xleftarrow{\tau} \Pi S(N, \cdot) & & S(N, \Pi M_1) \xrightarrow{\tau^{-1}} \Pi S(N, M_1) \\ (f_i) \mapsto \langle f_i \rangle := (\Pi f_i) \circ \Delta & & \downarrow \text{pr}^* \quad \downarrow \text{pr} \\ S(N, M_1) \xrightarrow{1} S(N, M_1) & & S(N, M_1) \xrightarrow{1} S(N, M_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} S(N, S(N', \cdot)) \xleftarrow{\kappa} S(N', S(N, \cdot)) & & S(N', S(N, M)) \xrightarrow{\kappa} S(N, S(N', M)) \\ (\kappa f)(n')(n) = f(n)(n') & & \downarrow (\cdot)^\wedge \quad \uparrow (\cdot)^\vee \\ S(N' \pi N, M) \xrightarrow{\nu^*} S(N \pi N', M) & & S(N' \pi N, M) \xrightarrow{\nu^*} S(N \pi N', M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T \Pi \xleftarrow{\omega} \Pi T & & \Pi T M_1 \xrightarrow{\omega} T \Pi M_1 \\ ((x_i)_i, (v_i)_i) \leftarrow ((x_i, v_i))_i & & \uparrow \pi \delta \quad \uparrow \delta \\ \Pi S(R, M_1) \xrightarrow{\tau} S(R, \Pi M_1) & & \Pi S(R, M_1) \xrightarrow{\tau} S(R, \Pi M_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} TS(N, \cdot) \xrightarrow{\tau} S(N, T \cdot) & & S(N, TM) \xrightarrow{\tau^{-1}} TS(N, M) \\ (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle & & \uparrow S(N, \delta) \quad \uparrow \delta \\ S(N, S(R, M)) \xrightarrow{\kappa} S(R, S(N, M)) & & S(N, S(R, M)) \xrightarrow{\kappa} S(R, S(N, M)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} TT \xleftarrow{\lambda} TT & & TTM \xrightarrow{\lambda} TTM \\ (x, v, w, u) \leftarrow (x, w, v, u) & & \uparrow T\delta \quad \uparrow \delta \\ TS(R, M) \xrightarrow{\tau} S(R, M) & & TS(R, M) \xrightarrow{\tau} S(R, M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (T \Delta T) \Pi \xleftarrow{\tilde{\omega}} \Pi (T \Delta T) & & \Pi T M_1 \Delta T M_1 \xrightarrow{\tilde{\omega}} T \Pi M_1 \Delta T \Pi M_1 \\ ((x_i), (v_i)) \Delta ((x_i), (w_i)) \leftarrow ((x_i, v_i) \Delta (x_i, w_i)) & & \uparrow \pi \delta_2 \quad \uparrow \delta_2 \\ \Pi S(R^2, M_1) \xrightarrow{\tau} S(R^2, \Pi M_1) & & \Pi S(R^2, M_1) \xrightarrow{\tau} S(R^2, \Pi M_1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (T \Delta T) \circ S(N, \cdot) \xrightarrow{\tilde{\tau}} S(N, T \Delta T) & & S(N, TM \Delta TM) \xrightarrow{\tilde{\tau}^{-1}} TS(N, M) \Delta TS(N, M) \\ (f, g) \mapsto [\tau f, \tau g] & & \uparrow S(N, \delta_2) \quad \uparrow \delta_2 \\ S(N, S(R^2, M)) \xrightarrow{\kappa} S(R^2, S(N, M)) & & S(N, S(R^2, M)) \xrightarrow{\kappa} S(R^2, S(N, M)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (T \Delta T) T \xleftarrow{\tilde{\lambda}} T (T \Delta T) & & T(TM \Delta TM) \xrightarrow{\tilde{\lambda}} T(TM) \Delta T(TM) \\ (x, x', v, w) \Delta (x, x', v', w') \leftarrow ((x, v) \Delta (x, v'), (x', w) \Delta (x', w')) & & \uparrow T\delta_2 \quad \uparrow \delta_2 \\ TS(R^2, M) \xrightarrow{\tau} S(R^2, TM) & & TS(R^2, M) \xrightarrow{\tau} S(R^2, TM) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (T \Delta T) (T \Delta T) \xleftarrow{\xi} (T \Delta T) (T \Delta T) & & T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM) \xrightarrow{\xi} T(TM \Delta TM) \Delta T(TM \Delta TM) \\ \leftarrow ((x, x') \Delta (x, x''), (y, y') \Delta (y, y'')) \Delta \dots, (z, z') \Delta (z, z'') & & \uparrow T\delta_2 \Delta T\delta_2 \quad \uparrow \delta_2 \\ ((x, y) \Delta (x, z), (x', y') \Delta (x', z')) \Delta \dots, (x'', y'') \Delta (x'', z'') & & TS(R^2, M) \Delta TS(R^2, M) \xrightarrow{\tilde{\tau}} S(R^2, TM \Delta TM) \end{array}$$

Zusammenfassung:

$$GF \xrightarrow{\cong} FG$$

S	τ	κ		
T	ω	τ^{-1}	λ	
$T \Delta T$	$\tilde{\omega}$	$\tilde{\tau}^{-1}$	$\tilde{\lambda}$	ξ
F/G	Π	S	T	$T \Delta T$

NICHT-NATÜRLICHE ABBILDUNGEN :

$$V \underset{M}{\pi} S(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{pt} S(\mathbb{R}, V)$$

$$(v; c) \mapsto \langle c, \bar{pt}(v, c) \rangle$$

$$V \underset{M}{\pi} S(\mathbb{R}^n, M) \xrightarrow{pt^n} S(\mathbb{R}^n, V)$$

$$pt^{n+1}(v, f)(t, x) = pt^n(pt(v, f(\cdot, 0))(t), f(t, \cdot))(x)$$

$$V \underset{M}{\pi} TM \xrightarrow{zus} TV$$

$$(x, v; x, y) \mapsto (x, v, y, \Gamma_x(v, y))$$

$$S(\mathbb{R}, V) \underset{S(\mathbb{R}, M)}{\pi} S(\mathbb{R}, M) \xrightarrow{\sigma} S(\mathbb{R}, V)$$

$$(c_1, c_2) \mapsto pt(c_1(\cdot), c_2(\cdot))$$

$$TV \underset{TM}{\pi} TM \xrightarrow{\rho} TV$$

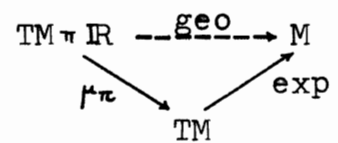
$$(x, v, o, w; x, y) \mapsto (x, v, y, w + \Gamma_x(v, y))$$

$$TV \xrightarrow{konn} V$$

$$(x, v, y, w) \mapsto (x, w - \Gamma_x(v, y))$$

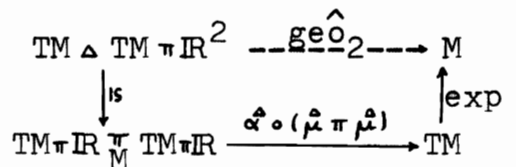
$$TM \xrightarrow{exp} M \quad (x, v) \mapsto geo(x, v)(1) \approx x+v$$

$$TM \xrightarrow{geo} S(\mathbb{R}, M) \quad geo(x, v)(t) = exp(x, tv)$$



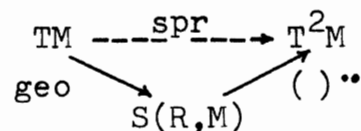
$$TM \Delta TM \xrightarrow{geo_2} S(\mathbb{R}^2, M)$$

$$geo_2(x, v; x, w)(t, s) = exp(x, tv+sw)$$

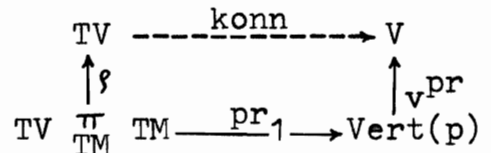
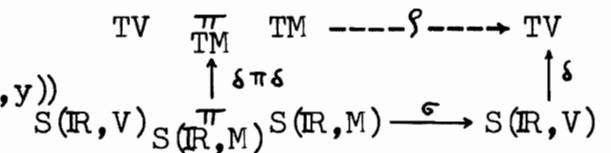
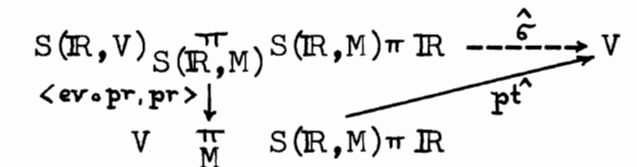
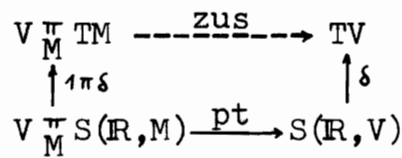
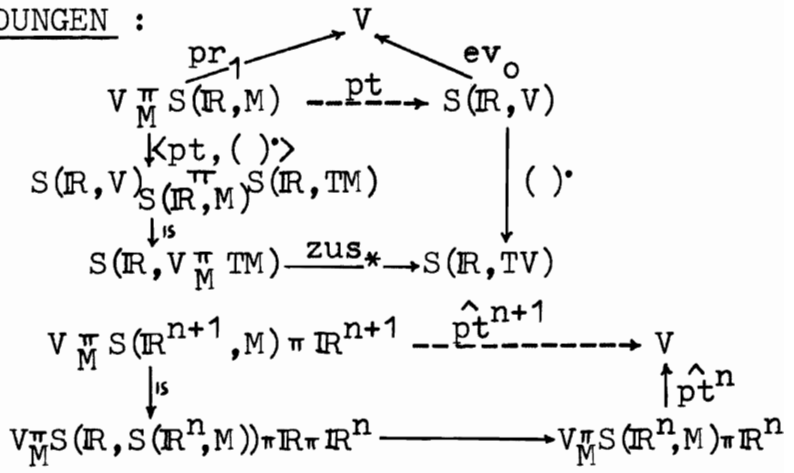


$$TM \xrightarrow{spr} T^2 M$$

$$(x, v) \mapsto (x, v, v, \Gamma_x(v))$$



$$TM \Delta TM \xrightarrow{tors} TM \quad (x, v; x, w) \mapsto (x, \Gamma_x(v, w) - \Gamma_x(w, v))$$



SACHWORTVERZEICHNIS :

SYMBOLS UND ABKÜRZUNGEN :

- DEF, \square , oBdA, i.w., schl., #, Π , \perp
- 1.1.1. T_2R , Kurv X, ι_X , I, C, q_X , konst
1.1.2. K \ddot{u} r \ddot{u} v.erz.
1.2.1. Flg.erz., kp.erz., F-Raum, lok.weg-zshg., lok.zshg.
1.2.2. erbl.unzshg., total unzshg, lok.kontrahierbar
1.2.3. lok.einf.zshg.
1.4.1. C_{Kurv} , $N_{c.v}$, Pkt-off-Top., kp-off-Top., Kurv-off-Top., f^* , f_*
1.4.2. $K(X,Y)$
1.5.1. ins, ev
1.5.2. $()^v$, $()^\wedge$, komp
1.6.1. UR, Top, $M_{c.v}$, $Cu(X,Y)$
1.6.2. $(Flg)^v$ UR
- 2.1.1. TVR, VR, lkv, VR, UR, E' , \oplus
2.1.2. str. \lim , $(Flg)^v$ -lkv, $C(X)$, $C_k(X)$, $// //_{\infty}$, $C_b(X)$, U_ϵ^{∞}
2.2.1. Flg
2.3.1. diffb., dc, $C^1(\mathbb{R},E)$
2.3.2. d_i^{Δ}
2.3.3. C^{∞} , d^n
2.4.1. Kurv $^{\infty}$
2.4.2. (A1)
2.5.1. \downarrow
- 3.1.1. VMg, $C^{\infty}(\mathbb{R},M)$, $K^{\infty}M$
3.1.2. δ , TM, o_M , π_M , C^{∞} , $T^n f$
3.1.3. D, x_n , y_n
3.1.4. ω , τ^n
3.2.1. S
3.2.3. τ
3.3.1. $T_{\Delta}T$, pr_i^{Δ} , [,]
3.3.2. inj i , \ddagger , T_i , $()_{*i}$, α^{Δ} , δ_2
3.4.1. ins, ev
3.4.2. τ , $()^v$
3.4.3. $()^*$
3.4.4. δ^2 , komp
- 4.1.1. π_M , f_1^x , $f_1^{-1}(f_2)$, PB
4.1.2. VFas, \check{v}_X , $\check{m} = \alpha_P$, $\check{m} = \mu_P$, O_p , f_x , \bar{f}
4.1.3. VB, $(VB\check{X})$, pt, zus
4.1.4. pt^n , $\Gamma_x(v,y)$
4.3.1. $\Gamma(p)$
4.3.2. σ , ξ
4.4.1. Vert(p), vlift, vpr
4.4.2. Horiz(p)
4.4.3. kann
4.4.4. $()^{\circ}$, //
- 5.1.1. pMF, exp, geo, geo2, δ^n
5.1.2. κ , τ , ν , λ
5.1.3. $\tilde{\omega}$, $\tilde{\tau}$, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\xi}$
5.2.1. MF
5.2.2. MFT1
5.2.3. spr, $\Gamma_x(v)$, tors

BEGRIFFSVERZEICHNIS :

- absolut konv. 20
- absorbierend 20
- additiv 20
- Adjunktion 4,16,53
- (A1) 32
- beschränkt 21
- Biprodukt \otimes 20
- C^∞ -Kurvifizierung Kurv $^\infty$ 30,36
- Diagonalabb. Δ 28
- differenzierbar diffb. 27,41
- Differentiale d, D 27,40
- Differentiale $\delta, (\)'$ 37,73
- Δ -Gleichungen 16
- Einheit 4,15
- erbl. unzshg. 8
- Evaluation ev 15
- Exponentialabb. exp 76
- Exponentialgesetz 15
- Faktorisierungslemma 35
- Faser V_x 55
 - additiv 56
 - Addition α^a, α_p 47,55
 - homogen 56
 - linear 56
 - Multiplikation μ_p 55
 - Produkt $T\Delta T, \pi_M$ 47,54
 - treu 56
- Flg-abg. 7
 - erz. 7
 - ifizierung Flg 22
 - vollständig 19
- F-Raum 7
- Fundamentallemma 27
- Geodäte(n-Abb.) geo 76
- glatt C^∞ 28,37
- glm.konvg. 18
- Hausdorff-Räume T_2R 5
- Homfunkt. C_{Kurv}^2, K, S 13,14,44
- horizont. Bündel $Horiz(p)$ 72
- Induziert. Bündel $f^{-1}(p)$ 54
- Insertion ins 15
- immer wieder $i.w.$ 4
- Kartesisch abg. 4,15,16,53
- Komposition $komp$ 17,53
- Konnektor $konn$ 72
- Konstante $konst$ 5
- kp-abg. 7
 - erz. 7
 - ifizierung k 5,12
 - off-Topologie 13
- Kurv-abg. 8
 - erz. 6
 - ifizierung Kurv 5
 - off-Topologie 13
- K^∞ -ifizierung (stetig) K^∞ 37
- lok-einf.zshg. 10
 - C^∞ -Kurv-zshg. 36
 - Flg-kp. 11
 - klein 43
 - kontrahierbar 9
 - konvexer TVR lkv 20
 - kp. 11
 - trivial 57
 - weg-zshg. 7
 - zshg. 7
- Mannigfaltigkeit MF 86
- ohne Beschr.d. Allgem. $oBdA$ 4
- o-dimensional 8
 - Schnitt O_p 37,55
- parallel // 73
 - Transport pt 57
- partiell diffb. 27
 - Differentiale d_i 27
 - Tangentiale T_i 48
- Pkt-off-Topologie 13^i
- prä-Mannigfaltigkeit pMF 76
- Produkt π 4
- Pullback PB 47,54
- Reflektor 6
- schließlich $schl.$ 4
- Schnitte $\Gamma(p)$ 67
- Separator 20
- Spray spr 88
- stetig diffb. C^1 27
- stetig partiell diffb. 27
- striker limes $str.\lim$ 21
- Tangentiale T^n 37
- Tangentialraum T 37
- Taylorformel 35
- Topologisierung Top 19
- top.Vektorr. TVR 20
- Torsion $tors$ 88
- total unzshg. 8
- Translationseigenschaft Tl 87
- triviales Bündel 65
- uniformer Raum UR 18
- Uniformisierung UR 18
- universeller Pfeil 5,6
- Vektorbündel VB 57
 - faserung $VFas$ 55
 - menge VMg 36
 - raumifizierung VR 20
- vertikales Bündel $Vert(p)$ 71
- vertikaler Lift $vlift$ 71
- vertikale Projektion vpr 71
- verträglich 86,88
- vollständig vollst., v 6
- Whitneysumme $T\Delta T, \pi_M$ 47,54
- Zusammenhang zus 57,88

L I T E R A T U R :

- BESSAGA C./PEŁCZYŃSKI A.:
Selected Topics in Infinite-dimensional Topology,
Warszawa 1975.
- ENGELKING R.:
General Topology, Warszawa 1977.
- HENDERSON D.W.:
Stable Classification of Infinite-dimensional Manifolds
by Homotopy Type, Inventiones Math. 12(1971),45-56.
- HERRLICH H./STRECKER G.:
Category Theory, Boston 1973.
- MICHOR P.W.:
[1] Manifolds of Differentiable Mappings, Orpington 1980.
[2] Globale Analysis, Vorlesungsmitschrift, Wien 1980.
- NOMIZU K./OZEKI H.:
The Existence of Complete Riemannian Metrics,
PAMS 12(1961),889-891.
- SCHÄFER H.:
Topological Vector Spaces, New York 1966.
- SEIP U.:
[1] Kompakt erzeugte Vektorräume und Analysis,
LN 273, Heidelberg 1972
[2] A Convenient Setting for Differential Calculus,
J.of Pure and Appl. Alg. 14(1979),73-100.
[3] A Convenient Setting for Smooth Manifolds, preprint.
- STEEN L.A./SEEBACH J.A.:
Counterexamples in Topology, New York 1970.
- VAISMAN I.:
Cohomology and Differential Forms, New York 1973.
- VOGT R.:
Convenient Categories of Topological Spaces for Homotopy
Theory, Archiv d. Math. 22(1971),545-555.