ESI **The Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics**

Boltzmanngasse 9
A-1090 Wien, Austria

Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs

Thierry Masson

Vienna, Preprint ESI 296 (1996) January 30, 1996

Supported by Federal Ministry of Science and Research, Austria
Available via anonymous ftp or gopher from FTP.ESI.AC.AT
or via WWW, URL: http://www.esi.ac.at

ORSAY

N° D'ORDRE : 3989

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THÈSE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

PAR

Thierry MASSON

SUJET : Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs

Soutenue le 13 décembre 1995 devant la Commission d'examen

MM.	Omnès	Roland	Président
	Comtet	Alain	
	Coquereaux	Robert	Rapporteur
	Dubois-Violette	Michel	
	Loday	Jean-Louis	
	Madore	John	
	Michor	Peter	Rapporteur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Michel DUBOIS-VIOLETTE pour avoir accepté de diriger ce travail. Je lui dois de m'avoir initié au vaste domaine de la géométrie non commutative et de m'avoir communiqué son goût de la rigueur, de la simplicité et de la clarté.

Je voudrais remercier Michel FONTANNAZ, Directeur du Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Énergies, de m'avoir accueilli dans son laboratoire, dont j'ai beaucoup apprécié l'ambiance de travail durant ces quelques années de thèse.

Ce travail n'aurait jamais pu voir le jour sans la contribution de nombreuses personnes.

J'ai eu grand plaisir à travailler et à nouer de fructueuses collaborations avec divers collègues : en premier lieu, John MADORE, dont un séminaire, un jour, m'a attiré vers la géométrie non commutative, Yvon GEORGELIN, Jean-Christophe WALLET, Jihad MOURAD, le Professeur Richard KERNER et beaucoup d'autres encore avec qui j'ai eu de nombreuses discussions enrichissantes...

Je remercie le Professeur Peter MICHOR de m'avoir reçu si chaleureusement à Vienne et Robert COQUEREAUX de m'avoir permis de participer à la Première École de Mathématiques et de Physique Théorique des Caraïbes dont il était un des organisateurs. Je leur suis très reconnaissant d'avoir accepté de juger cette thèse.

Le Professeur Roland OMNÈS a eu la gentillesse d'accepter de présider mon jury de thèse. Le Professeur Alain COMTET, dont j'ai énormément apprécié les cours de DEA, et Jean-Louis LODAY, dont j'ai suivi avec beaucoup de plaisir le cours donné aux Houches (1995), ont bien voulu être membres de ce jury. Je les en remercie tous les trois.

Cette thèse n'aurait jamais pu être écrite sous cette forme sans l'aide et l'assistance des LaTeX-isants et passionnés d'informatique du laboratoire : Patricia FLAD, qui, au delà de son aide inestimable de bibliothécaire, m'a appris LaTeX, Philippe BOUCAUD, Jean-Pierre LEROY et Olivier PÈNE pour leur dévouement et surtout leur patience face à mes problèmes informatiques si nombreux, et tous ceux qui un jour m'ont aidé dans ce domaine.

Je voudrais aussi remercier les secrétaires du laboratoire pour leur gentillesse, en particulier lorsque j'ai abusé de leurs ordinateurs durant la rédaction de ce travail.

Cette thèse ne s'est pas faite en un jour ni en trois ans. Je dois beaucoup à tous les enseignants passionnés qui m'ont un jour apporté un grand quelque chose, et en particulier le goût des mathématiques et de la physique. En faire une liste serait bien trop long, puisqu'elle devrait certainement remonter à mes plus jeunes années.

Je ne sais comment dire merci à mes parents pour avoir toujours été disponibles durant mes études, et avoir créé ainsi l'atmosphère dont j'avais besoin.

Enfin, la présence réconfortante d'Isabelle a été pour moi un soutien et un encouragement précieux durant tout ce travail.

Gif sur Yvette, le 13 décembre 1995.

Introduction

> *"La mathématique traite exclusivement des relations des concepts entre eux, sans considérer les relations avec l'expérience. En physique, ces concepts mathématiques acquièrent un contenu grâce à la détermination précise de leurs relations avec les objets de l'expérience."*
>
> Albert EINSTEIN

La géométrie non commutative est devenue en quelques années un sujet de recherche très actif, aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques. Cette dénomination couvre en réalité un vaste domaine de recherches motivées par la constatation mathématique suivante : certains types d'espaces (topologiques, mesurables, différentiables...) sont entièrement caractérisés par une de leurs algèbres de fonctions (fonctions continues, mesurables bornées, différentiables...). La géométrie non commutative se donne pour but de trouver une version non commutative de ces espaces en considérant des algèbres non commutatives ayant de bonnes propriétés, en remplacement de ces algèbres de fonctions. Les propriétés choisies sur ces algèbres non commutatives doivent caractériser complètement le type d'"espace non commutatif" qu'elles représentent. En particulier, dans le cas où une de ces algèbres est commutative, elle doit coïncider exactement avec la bonne algèbre de fonctions sur l'un des espaces du type considéré.

Il faut remarquer que l'idée de considérer des objets algébriques pour étudier certains ensembles n'est pas nouvelle. La géométrie algébrique [46] est le prototype de cette démarche, puisqu'elle considère les ensembles qu'elle étudie dans $\mathbb{C}^n$ comme des idéaux de l'algèbre des polynômes $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Les propriétés de ces ensembles sont alors écrites en termes purement algébriques. La richesse et la puissance de cette approche a depuis longtemps été reconnue en mathématiques et a permis de grands progrès. Cependant, les algèbres considérées dans ce cas restent commutatives, puisque ce sont des quotients d'algèbres de polynômes. La non commutativité s'est certainement imposée avec la mécanique quantique, formidable moteur de recherches en mathématiques, en particulier sur les algèbres d'opérateurs. Ces études ont conduit au théorème de Gel'fand et Naïmark (Théorème 1.26) sur les C^*-algèbres commutatives, qui dit que toute C^*-algèbre commutative est exactement une algèbre de fonctions continues sur un espace topologique localement compact. Ce résultat réalise donc un pont entre la théorie des espaces topologiques et la théorie des C^*-algèbres et permet de considérer les C^*-algèbres comme l'équivalent non commutatif de cette notion d'espace topologique localement compact. La seconde étude importante a porté sur les algèbres de von Neumann. Elle montre que nous avons là l'équivalent non commutatif de la théorie de la mesure. Je renvoie au Chapitre 1 pour plus de détails. Il faut cependant noter dès à présent que le dictionnaire reliant la géométrie ordinaire au langage algébrique est en grande partie commun à toutes ces théories. Ainsi, dans le cas commutatif, les points correspondent toujours aux caractères ou aux idéaux maximaux. Ceci suggère que ces théories forment un tout mathématique dont pour l'instant nous ne connaissons qu'une partie.

La géométrie ordinaire ne s'arrête cependant pas à la topologie et à la théorie de la mesure. En effet, nous ne pouvons ignorer une de ses branches les plus importantes, la géométrie différentielle et tout ce qu'elle introduit comme structures : variétés différentiables, groupes de Lie, fibrés différentiables, connexions, métriques... Aussi bien du point de vue des mathématiques que de la physique, ces structures sont d'une très grande utilité aujourd'hui. Il est donc naturel de vouloir considérer son équivalent non commutatif, qui devrait alors s'appeler plus correctement géométrie différentielle non commutative.

P.A.M. Dirac a été l'un des premiers à pressentir la nécessité d'introduire de tels concepts pour la mécanique quantique, lorsqu'il a fait l'analogie entre le crochet de Poisson en mécanique classique (qui fait usage de structures différentiables) et le commutateur en mécanique quantique. Nous traiterons de ce problème au Chapitre 5. Cependant, mathématiquement, il est souvent admis que la géométrie différentielle non commutative est née avec les travaux d'A. Connes sur la cohomologie cyclique. L'importance de cette théorie fait suite à son utilisation dans diverses constructions mathématiques, et en particulier dans une démonstration de la conjecture de Novikov [12]. Bien que dans le cas commutatif, c'est-à-dire le cas de l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété différentiable, la cohomologie cyclique continue soit reliée à l'homologie de de Rham (Théorème 3.53), cette notion n'introduit pas encore de structure différentiable qui généraliserait le complexe de de Rham des formes différentielles. Se donner une définition d'une telle généralisation non commutative est le premier pas vers la géométrie différentielle non commutative. Nous constaterons dans ce qui suit que cette généralisation est loin d'être unique. Cela est essentiellement dû au fait qu'il existe plusieurs “types” d'algèbres non commutatives.

Une façon naturelle pour introduire une algèbre non commutative est de déformer une algèbre (commutative) de fonctions. Les physiciens sont habitués à de tels exercices car ils disposent de paramètres “naturels” de déformation, comme par exemple $\hbar$. On peut ainsi considérer la quantification à la Moyal, qui déforme une algèbre de fonctions C^∞ munie d'une structure de Poisson [111]. Les mathématiques se sont depuis longtemps enrichies en considérant la notion de déformation ([96] en est une excellente illustration). Dans ce cadre, il est naturel de prendre pour complexe de de Rham non commutatif une déformation du complexe de de Rham habituel sur les fonctions C^∞. Nous verrons au Chapitre 7 de telles constructions. Certaines des algèbres non commutatives que nous y introduirons sont des déformations d'algèbres de fonctions sur des groupes de Lie. De telles déformations, reconnues maintenant comme des “groupes quantiques”, ont été obtenues par des physiciens lors de l'étude de modèles quantiques intégrables sur réseaux ([118, 119, 92] pour les articles originaux[1], et [120] pour un bref rappel historique). Dans ce cas, le paramètre de déformation est $q = e^\hbar$. On peut dire que l'une des branches de la géométrie non commutative est apparue en physique dans ce contexte.

De façon plus générale, l'introduction de groupes quantiques en physique est motivé par l'ambition de construire de nouvelles symétries (“quantiques”) que ces groupes génèreraient. En particulier, cela motive l'introduction d'“espaces quantiques” comme espaces de (co-)représentations. Le plan quantique est un tel objet (Chapitre 7). Ces “espaces quantiques” sont entièrement définis par une algèbre non commutative qui joue le rôle d'une algèbre de fonctions.

Il existe des algèbres non commutatives qui ne sont pas des déformations d'algèbres de fonctions, comme par exemple l'algèbre des matrices. Pour de telles algèbres, il n'existe pas toujours une procédure plus naturelle qu'une autre pour introduire une généralisation du complexe de de Rham. Dans ce qui suit, je m'intéresserai surtout à deux telles généralisations dans ce cadre général. En particulier, je laisse de côté d'autres approches, comme par exemple celle de M. Karoubi [28], dont l'objectif principal est de faire le lien entre l'homologie de de Rham non commutative, l'homologie cyclique et la K-théorie. Les deux approches retenues sont celles qui ont connu le plus de développements ces dernières années au regard surtout des applications possibles en physique théorique. Elles diffèrent dans leur façon de considérer l'algèbre : soit intrinsèquement (calcul différentiel basé sur les dérivations), soit comme algèbre d'opérateurs sur un espace de Hilbert (calcul différentiel

[1] dont deux en russe !

basé sur un opérateur de Dirac). On comprendra qu'elles ne se donnent pas les mêmes buts, et que leurs domaines d'utilité diffèrent. Nous constaterons que la première approche que j'exposerai, due à M. DUBOIS-VIOLETTE, permet de considérer la mécanique quantique comme une "mécanique classique non commutative", ce qui permet entre autres d'expliquer l'analogie entre le crochet de Poisson et le commutateur. Cette approche a été récemment enrichie par plusieurs considérations généralisant dans le cadre non commutatif des aspects de la géométrie différentielle ordinaire. La seconde approche, développée par A. CONNES, se place dans la continuité de travaux mathématiques sur les algèbres d'opérateurs, la K-théorie (et la K-homologie), l'homologie cyclique, les théorèmes de l'indice... Son succès tient en grande partie à sa souplesse et par conséquent à la possibilité de l'utiliser dans des situations très diverses, dans des problèmes mathématiques où jusque là les structures différentiables étaient peu introduites. Je renvoie à l'ouvrage de revue d'A. CONNES [12] pour plus de détails. Dans ce travail, je n'introduis de cette approche que le minimum requis pour des développements ultérieurs. Ainsi, je ne m'intéresse que très peu à ses développements les plus récents.

Il existe, comme nous l'avons déjà évoqué, des algèbres non commutatives qui généralisent la notion de groupe de Lie. Ces algèbres sont en particulier des algèbres de Hopf. Dans ce cas, il est naturel d'introduire un complexe de de Rham qui fasse appel à cette structure supplémentaire. Ce type de complexe de de Rham non commutatif a été introduit par S.L. WORONOWICZ sous le nom de calcul différentiel bicovariant. J'expose les résultats principaux de ce travail, qui constitue une des branches les plus actives de la géométrie différentielle non commutative aujourd'hui.

Cette thèse se présente de la façon suivante. Dans le Chapitre 1, je rappelle l'essentiel de la théorie des C^*-algèbres et des algèbres de von Neumann, en mettant en avant les propriétés qui permettent de considérer ces algèbres comme des généralisations non commutatives respectivement d'espaces topologiques localement compacts et d'espaces mesurables. Ce chapitre constitue une motivation mathématique à l'élaboration de la géométrie différentielle non commutative. Cependant, il introduit aussi certains objets mathématiques qui seront utilisés par la suite.

Le Chapitre 2 doit être considéré comme une motivation à la géométrie différentielle non commutative du point de vue du physicien. J'y fais un bilan très sommaire des mathématiques aujourd'hui utilisées en physique théorique, et en particulier en mécanique quantique, dans la théorie relativiste de la gravitation d'Einstein et en théorie classique des champs. J'essaie d'y montrer que les structures mathématiques utilisées sont de deux types bien distincts : structures algébriques (algèbres d'opérateurs) pour la mécanique quantique, et structures différentiables pour la théorie relativiste de la gravitation et la théorie classique des champs. De mon point de vue, unifier ces théories n'est possible que dans un cadre mathématique cohérent, dans lequel les structures algébriques et les structures différentiables seraient rassemblées. La géométrie différentielle non commutative pourrait constituer ce cadre cohérent. Ce chapitre est assez bref car les considérations qui y sont développées sont bien connues des physiciens.

Le Chapitre 3 constitue notre premier contact avec les structures différentielles algébriques. Y sont exposés des résultats classiques sur la cohomologie de Hochschild, utiles pour la suite, le calcul différentiel universel, essentiel en géométrie différentielle non commutative, la cohomologie cyclique, incontournable dans ce domaine, et enfin un calcul de cohomologie que j'ai réalisé en collaboration avec M. DUBOIS-VIOLETTE. On remarquera que le calcul différentiel universel est introduit comme sous-algèbre différentielle graduée d'une algèbre différentielle graduée $\mathfrak{T}\mathcal{A}$. Ceci a l'avantage de permettre d'établir un lien entre cette dernière algèbre (et donc le calcul différentiel universel) et le complexe de Hochschild à valeurs dans l'algèbre. Je montre que pour l'algèbre des matrices, nous avons un isomorphisme (Théorème 3.37), qui met le calcul différentiel universel des matrices sous une forme utile pour la suite.

Le Chapitre 4 est un bref rappel de K-théorie. La K-théorie des espaces topologiques localement compacts est une théorie de classification aujourd'hui indispensable de la géométrie ordinaire. En réalité, comme nous le constaterons, cette théorie est entièrement algébrique et motive l'introduction de modules comme généralisations non commutatives des fibrés vectoriels, si l'on considère les C^*-algèbres comme les généralisations non commutatives des espaces topologiques localement compacts.

Au Chapitre 5, j'introduis la première généralisation non commutative du complexe de de Rham, *a priori* valable pour tout type d'algèbres. Dans ce contexte, il est possible de définir aussi d'autres structures non commutatives, que j'illustre par des exemples. L'un des exemples les plus intéressants me semble celui de l'algèbre des matrices, dont le calcul différentiel est d'une richesse extraordinaire. Cette algèbre des matrices est le prototype de l'algèbre non commutative, et constitue de ce fait une algèbre de choix pour "tester" certaines structures. C'est pourquoi nous la retrouverons souvent tout au long de ce travail.

Le Chapitre 6 constitue une introduction rapide au calcul différentiel à la Connes. J'introduis ce calcul différentiel d'une part pour montrer une autre approche, et d'autre part, pour pouvoir illustrer des considérations du Chapitre 8. Les deux calculs différentiels que l'on peut introduire en considérant les constructions de ces deux chapitres peuvent parfois coïncider, comme le montre l'exemple de l'algèbre de matrices traité dans ce chapitre.

Au Chapitre 7, j'expose une approche très répandue parmi les physiciens de la géométrie non commutative, celle des groupes quantiques. J'y rappelle la notion d'algèbre de Hopf, en insistant sur le fait que c'est dans ce contexte que se trouve l'équivalent non commutatif des groupes ordinaires. Je m'aide pour cela de résultats bien connus sur certaines algèbres de fonctions sur les groupes. La notion de calcul différentiel bicovariant, qui se veut la généralisation non commutative du calcul différentiel usuel sur les groupes de Lie y est exposée. Je termine ce chapitre par des exemples qui illustrent les structures introduites. Certains de ces exemples servent de modèles pour le Chapitre 8.

Après avoir introduit ces divers calculs différentiels, je montre au Chapitre 8 – le plus long de ce travail – comment les utiliser en physique et en mathématiques. Pour cela, il faut introduire la notion de connexion sur des modules. De telles connexions sont données sur des exemples connus bien choisis, qui ont l'avantage de montrer l'utilité de telles structures en physique théorique, et en particulier d'avoir un regard nouveau sur les champs de Higgs. Cependant, la notion de module se révèle être insuffisante, en particulier en ce qui concerne des problèmes d'hermiticité. La structure de bimodule est préférable, et je rappelle des définitions récentes de connexions sur de tels bimodules, pour divers types de calculs différentiels. Le calcul différentiel basé sur les dérivations se prête très bien à ces considérations pour une classe de bimodules généralisant correctement celle de modules sur une algèbre commutative. Puis je présente une définition très récente de connexion linéaire (c'est-à-dire de connexion sur le bimodule des 1-formes différentielles non commutatives) valable pour tout type de généralisation non commutative des formes différentielles. De nombreux exemples sont donnés de telles connexions linéaires, pour les divers calculs différentiels introduits. La notion d'opérateurs différentiels du premier ordre est alors étudiée. Cette étude conduit à une définition raisonnable de connexion sur des bimodules quelconques pour tout type de calcul différentiel, qui généralise en un certain sens la définition précédente de connexion linéaire. Une petite étude révèle que cette définition de connexion de bimodule est reliée à celle de connexion (d'un seul côté) pour une structure de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{op}}$-module.

Dans le dernier chapitre, qui clot ce travail, sont présentées diverses perspectives de recherches, problèmes ouverts ou non encore abordés. Ce chapitre constitue donc un point de départ plutôt qu'une ligne d'arrivée.

L'Annexe A rassemble des définitions algébriques usuelles sur l'homologie et la cohomologie, la notion d'opération de Cartan, et celle de groupe de Grothendieck. Il est certain que cette annexe aurait dû être beaucoup plus longue, pour définir d'autres notions algébriques qui ne sont pas toujours connues des physiciens.

J'ai écrit cette thèse dans un esprit de *syn*thèse (et en particulier de mise en ordre) de mes propres connaissances sur le sujet. Ce travail est loin de couvrir tout le domaine ! Il constitue une sélection, en fonction de mes goûts et de mes intérêts. En particulier, il me semble que ce travail est très personnel, et n'a pas vocation à être une introduction au sujet. Il est tout au plus une invitation à *traverser le miroir et à voyager au pays du non commutatif*. J'ai préféré une approche et une écriture mathématique qui, j'en suis sûr, ne conviendra pas à tous les lecteurs. Que ces derniers acceptent d'avance mes excuses. Il m'a fallu faire ce choix difficile, car, à mon avis, le sujet se prête malheureusement mal à une écriture moins structurée. On pourra reprocher aussi le peu d'applications en physique théorique dans ce texte. Je justifie cela en précisant que mon point de vue n'a jamais été de forcer un modèle de physique à entrer dans une structure mathématique donnée. Il me semble néfaste pour la physique, mais aussi pour les mathématiques, que le physicien théoricien s'approprie trop vite le dernier développement mathématique "à la mode" pour fabriquer un modèle. La géométrie non commutative ne me semble pas encore assez mûre pour que nous puissions réaliser le rêve de modéliser la gravitation quantique. De plus, et c'est un point qui me semble très important, il semble clair aujourd'hui que de nouvelles idées physiques nous manquent pour progresser dans ce domaine. C'est à la physique de guider nos constructions mathématiques, et non l'inverse ! Les petits modèles qu'il est d'ores et déjà possible de réaliser dans ce cadre apportent certainement de précieuses indications sur les voies nouvelles à considérer. C'est pourquoi je n'ai retenu de ces modèles que les plus pertinents et les plus simples, ayant un message nouveau à délivrer aux physiciens. La plus belle illustration en est le modèle proposé par M. Dubois-Violette, R. Kerner et J. Madore avec l'algèbre $C^\infty(V) \otimes M(n, \mathbb{C})$ que je commente au Chapitre 8. Ce modèle a permis pour la première fois de comprendre que les champs de Higgs et les champs de jauge pouvaient être rassemblés dans un même objet non commutatif, et de considérer le groupe de jauge comme l'ensemble des éléments unitaires d'une $*$-algèbre. Ce modèle a été à la base de développements ultérieurs, et en particulier du modèle standard d'A. Connes. Ce dernier modèle étant exposé en détail dans de nombreuses publications, il ne m'a pas semblé indispensable d'en donner une description dans ce travail.

Enfin, je voudrais terminer cette introduction en faisant remarquer que la bibliographie contient des références auxquelles il n'est fait nulle part appel dans le texte. Il faut considérer cette bibliographie comme un sous-ensemble des textes auxquels j'ai eu accès un jour ou l'autre, et dont la lecture m'a servi de près ou de loin dans mon travail. Je suis parfaitement conscient qu'il y manque de nombreux travaux sur le sujet. Que les auteurs non cités veuillent bien m'excuser.

Je souhaite donc bonne lecture à toute personne, initiée ou non, qui aura le courage de se lancer dans les 8 chapitres qui suivent...

Chapitre 1

Algèbres d'opérateurs

"... by the very nature of the mathematical sciences, any true progress brings with it the discovery of more incisive tools and simpler methods which at the same time facilitate the understanding of the earlier theories and eliminate older more awkward developments. "

David HILBERT[1]

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. On peut considérer sur cet espace différentes algèbres d'opérateurs, sous-algèbres de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs bornés. Ces algèbres sont obtenues en ajoutant des contraintes du type fermeture pour une certaine topologie, compacité, etc... Certaines de ces algèbres ont des propriétés si spécifiques que l'on peut oublier l'espace de Hilbert sous-jacent, et les considérer de façon purement abstraites.

Nous allons voir que certaines de ces algèbres généralisent dans un cadre non commutatif la notion d'espaces topologiques, ou la notion d'espaces mesurables.

1.1 Algèbres de Banach

1.1.1 Définitions

DÉFINITION 1.1 *Une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est une algèbre associative sur $\mathbb{C}$ munie d'une norme $\| \ \|$ telle que l'espace vectoriel sous-jacent soit un espace de Banach, et*

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$$

Le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est donc continu dans les deux variables.

[1]repris de [3, p. 103]

EXEMPLE 1.2 Le premier exemple d'une telle algèbre est l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ des opérateurs bornés sur un espace de Banach $\mathcal{E}$. En particulier, l'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est de Banach pour $\mathcal{H}$ espace de Hilbert. $\diamondsuit$

DÉFINITION 1.3 *Une algèbre de Banach involutive est une algèbre de Banach munie d'une involution $*$ telle que $\|x^*\| = \|x\|$*

On peut montrer que si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach unifère, alors il existe une nouvelle norme équivalente à l'ancienne pour laquelle $\|\mathbb{1}\| = 1$. On supposera dans la suite être dans cette situation. Si $\mathcal{A}$ n'est pas unifère, on peut la plonger dans une algèbre de Banach $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ pour la norme $\|x + \lambda\| = \|x\| + |\lambda|$.

1.1.2 Calcul fonctionnel

Comme nous allons le constater, le calcul fonctionnel sur ces algèbres joue un rôle considérable pour leur étude.

DÉFINITION 1.4 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre unifère sur $\mathbb{C}$. Pour tout $x \in \mathcal{A}$, on définit le spectre de x dans $\mathcal{A}$ comme le sous-ensemble de $\mathbb{C}$*

$$\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \ / \ (x - \lambda\mathbb{1}) \ \textit{n'est pas inversible} \ \}$$

Le complément de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$ dans $\mathbb{C}$ est appelé le résolvant de x. Le rayon spectral de x est défini par

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \sup\{|\lambda| \ / \ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)\}$$

Proposition 1.5 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach, alors le spectre de tout élément de $\mathcal{A}$ est un compact, donc son rayon spectral est fini.*

En règle générale, on a $\|x\|_{\mathrm{Sp}} \leq \|x\|$, et on peut montrer que dans une algèbre de Banach,

$$\|x\|_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

On peut aussi montrer que le spectre d'un élément d'une algèbre de Banach est non vide. Comme $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$ est un compact, on peut considérer une courbe γ dans $\mathbb{C}$, fermée et régulière enfermant $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$, sur laquelle on place l'orientation positive habituelle sur $\mathbb{C}$. Soit alors f une fonction holomorphe sur un voisinage de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$ contenant cette courbe.

Proposition 1.6

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda)(\lambda - x)^{-1} d\lambda$$

est parfaitement défini comme élément de $\mathcal{A}$. L'application $f \mapsto f(x)$ est un homomorphisme de l'algèbre des fonctions holomorphes sur un voisinage de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$ dans $\mathcal{A}$, qui envoie 1 sur $\mathbb{1}$ et la fonction $\lambda \mapsto \lambda$ sur x.

Il est de plus possible de montrer que $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(f(x)) = f(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x))$.

Démonstration : On la trouvera dans [57]. □

En particulier, on peut toujours considérer sur une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ l'exponentielle d'un élément $x \in \mathcal{A}$; mais aussi, pour certains éléments, selon leur spectre, la racine carrée, le logarithme...

1.1.3 Représentation de Gel'fand des algèbres de Banach commutatives

Dans ce qui suit, $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative.

DÉFINITION 1.7 *Un idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ est régulier s'il existe un élément e de $\mathcal{A}$ tel que $ex - x \in \mathcal{I}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$.*

e est une unité modulo $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$, c'est-à-dire se projette sur une unité dans $\mathcal{A}/\mathcal{I}$. On peut montrer que si $\mathcal{I}$ est un idéal maximal régulier, alors $\mathcal{A}/\mathcal{I} \simeq \mathbb{C}$.

Proposition 1.8 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach commutative, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ l'ensemble des homomorphismes non nuls de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{C}$. Alors l'application $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{A})$ qui à $\mathcal{I} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe $\mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{I} = \mathbb{C}$ est une bijection, d'inverse $\omega \in \mathcal{P}(\mathcal{A}) \mapsto \mathrm{Ker}\,\omega$.*

On peut munir $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ (l'espace des caractères sur $\mathcal{A}$) de la topologie faible.

Proposition 1.9 *$\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est localement compact pour la topologie faible et compact si $\mathcal{A}$ est unifère.*

Pour tout $x \in \mathcal{A}$ on définit $\hat{x} : \mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ en posant $\hat{x}(\omega) = \omega(x)$. Alors par définition même, $\hat{x}$ est une fonction continue sur l'espace topologique $\mathcal{P}(\mathcal{A})$. On peut montrer que cette fonction est nulle à l'infini.

Si X est un espace topologique localement compact, on note $C_0(X)$ l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini sur X. On munit cette algèbre de la norme uniforme. Cette norme fait de $C_0(\mathcal{A})$ une C^*-algèbre (voir plus bas), donc en particulier une algèbre de Banach.

Théorème 1.10 *Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach commutative, l'application $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to C_0(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$, $x \mapsto \hat{x}$ est un homomorphisme d'algèbres. On a de plus*

$$\|\hat{x}\| = \|x\|_{\mathrm{Sp}}$$

$\mathcal{F}$ est la transformée de Gel'fand de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ est appelé le spectre de $\mathcal{A}$. Le spectre de $\mathcal{A}$ est donc aussi l'ensemble des idéaux maximaux réguliers sur $\mathcal{A}$ par la Proposition 1.8.

1.1.4 L'algèbre de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

L'exemple le plus connu d'algèbre de Banach est certainement $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Nous voudrions ici explorer certaines propriétés de cette algèbre, dont nous aurons besoin par la suite.

Topologies sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$

Les topologies que l'on peut introduire sur cette algèbre, en plus de la topologie de la norme uniforme, sont des topologies localement convexes définies par des familles de semi-normes, qui utilisent l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Définition 1.11 *La topologie forte sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est induite par les semi-normes $a \mapsto \|a\xi\|$ indexées par $\xi \in \mathcal{H}$.*

La topologie ultraforte sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est induite par les semi-normes

$$a \mapsto \sqrt{\sum_n \|a\xi_n\|^2}$$

indexées par une famille (ξ_n) de $\mathcal{H}$ avec $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$.

La topologie faible sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est induite par les semi-normes $a \mapsto |(\xi|a\eta)|$ indexées par deux éléments ξ, η de $\mathcal{H}$.

La topologie ultrafaible sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est induite par les semi-normes

$$a \mapsto \sum_n |(\xi_n|a\eta_n)|$$

indexées par deux familles (ξ_n) et (η_n) de $\mathcal{H}$ telles que $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$ et $\sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$.

On a les résultats classiques de comparaison de ces différentes topologies :

Théorème 1.12 *Notons $<$ "plus fine que", alors*

$$\begin{array}{ccccc} \textit{uniforme} & < & \textit{ultraforte} & < & \textit{ultrafaible} \\ & & \wedge & & \wedge \\ & & \textit{forte} & < & \textit{faible} \end{array}$$

Dualités

Le dual d'un espace de Banach est l'espace vectoriel des formes linéaires continues pour la topologie uniforme. Il est possible de considérer cependant des formes linéaires continues pour une des topologies définies ci-dessus.

Définition 1.13 *Soit (ℓ) l'espace vectoriel des suite $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ de nombres complexes. On pose (c_0) l'ensemble des suites de (ℓ) qui convergent vers 0 à l'infini, muni de la norme*

$$\|(\lambda_n)\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |\lambda_n|$$

On pose (ℓ^1) l'ensemble des suites de (ℓ) sommables, muni de la norme

$$\|(\lambda_n)\|_1 = \sum_{n\geq 0} |\lambda_n|$$

Enfin, on pose (ℓ^∞) l'ensemble des suites de (ℓ) bornées, muni de la norme

$$\|(\lambda_n)\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |\lambda_n|$$

Ces trois espaces sont des espaces de Banach. Notons * le passage au dual.

Proposition 1.14 *On a $(c_0)^* = (\ell^1)$ et $(\ell^1)^* = (\ell^\infty)$.*

Entre ces espaces de Banach, on peut considérer les espaces habituels (ℓ^p) pour p réel positif, des suites de (ℓ) telles que

$$\|(\lambda_n)\|_p = \left(\sum_{n\geq 0} |\lambda_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Il est alors bien connu que (ℓ^2) est un espace de Hilbert.

Revenons à l'algèbre de Banach $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Notons $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'idéal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ des opérateurs compacts sur $\mathcal{H}$. Pour tout ξ et tout η dans $\mathcal{H}$, notons $t_{\xi,\eta} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'opérateur de rang 1 défini par

$$t_{\xi,\eta}(\zeta) = (\zeta|\eta)\xi$$

Proposition 1.15 *Soit $a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Alors il existe deux suites orthonormales (ξ_n) et (η_n) dans $\mathcal{H}$, et une suite positive (α_n) dans (c_0) telle que*

$$a = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \alpha_n t_{\xi_n, \eta_n} \tag{1.1}$$

avec $\|a\| = \sup \alpha_n$.

Si a est de plus hermitien, alors

$$a = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \alpha_n t_{\xi_n, \xi_n}$$

où (α_n) est maintenant une suite de nombres réels dans (c_0) et $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(a) = \{\alpha_n\} \cup \{0\}$. C'est la décomposition de a sur ces valeurs propres.

Réciproquement, tout élément de la forme (1.1) est un opérateur compact sur $\mathcal{H}$.

Si $a \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ est écrit sous cette forme (1.1), alors on a

$$a^* a = \sum_{n} |\alpha_n|^2 t_{\eta_n, \eta_n}$$

Donc la suite $(\alpha_n) \in (c_0)$ peut se caractériser comme la suite des racines carrées des valeurs propres de $a^* a$.

Cette écriture permet de caractériser le dual de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Pour cela, on associe à tout $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ la forme linéaire $\omega_{\xi,\eta}(a) = (a\xi|\eta)$ pour tout $a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Théorème 1.16 *Toute forme linéaire $\omega \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$ s'écrit sous la forme*

$$\omega = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \omega_{\xi_n, \eta_n}$$

avec $\|\omega\| = \sum_{n \geq 1} \alpha_n$ pour deux suites orthonormales (ξ_n) et (η_n) de $\mathcal{H}$ et une suite positive $(\alpha_n) \in (\ell^1)$

Réciproquement, toute donnée de (α_n), (ξ_n) et (η_n) comme ci-dessus définit un élément de $\mathcal{K}(\mathcal{H})^*$.

Posons maintenant, pour $\omega \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^*$, écrit sous la forme $\omega = \sum_{n \geq 1} \alpha_n \omega_{\xi_n, \eta_n}$,

$$t(\omega) = \sum_{n \geq 1} \alpha_n t_{\eta_n, \xi_n}$$

En particulier, $t(\omega)$ est un opérateur compact puisque $(\ell^1) \subset (c_0)$.

Proposition 1.17 *Le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = t(\mathcal{K}(\mathcal{H})^*)$ de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est l'espace vectoriel des opérateurs à trace sur $\mathcal{H}$.*

Ainsi, le dual de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ s'identifie aux opérateurs à trace sur $\mathcal{H}$. On peut appliquer la dualité une fois de plus, et on obtient :

Théorème 1.18 *$\mathcal{K}(\mathcal{H})^{**} \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ en identifiant $f \in \mathcal{K}(\mathcal{H})^{**}$ à $a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ par la relation*

$$\langle \omega_{\xi,\eta}, f \rangle = (a\xi|\eta)$$

et on a $\|f\| = \|a\|$.

Le corollaire de ce théorème est que si Tr désigne la trace habituelle sur $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est le dual de $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ pour le couplage

$$\langle \rho, a \rangle = \mathrm{Tr}(\rho a)$$

où $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ et $a \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Remarque 1.19 Il faut noter la similitude entre la dualité des espaces (c_0), (ℓ^1) et (ℓ^∞), et celle des espaces $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ et $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. On note parfois $\mathcal{L}_*(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H})$ le prédual de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

1.2 C^*-algèbres

1.2.1 Définitions et premières propriétés

Parmi les algèbres de Banach, les C^*-algèbres jouent un rôle considérable, comme nous allons le voir.

Définition 1.20 *Une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach involutive pour laquelle*

$$\|x^*x\| = \|x^*\|\|x\|$$

pour tout $x \in \mathcal{A}$.

Nous avons vu que l'on peut toujours ajouter une unité à une algèbre de Banach. Il y a un résultat équivalent pour les C^*-algèbres :

Proposition 1.21 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre sans unité. Alors il existe sur l'algèbre $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ une unique norme qui en fasse une C^*-algèbre. $\mathcal{A}$ est alors identifiable à une sous C^*-algèbre de $\tilde{\mathcal{A}}$.*

Démonstration : La norme que l'on introduit sur $\tilde{\mathcal{A}}$ pour en faire une algèbre de Banach ne peut faire l'affaire, car elle ne satisfait pas la relation de définition d'une norme sur une C^*-algèbre. On définit sur cette algèbre une nouvelle norme, en posant

$$\|a+\lambda\| = \sup\{\|ab+\lambda b\| \ / \ b \in \mathcal{A},\ \|b\| = 1\}$$

qui définit bien une norme de C^*-algèbre sur $\tilde{\mathcal{A}}$. □

Exemple 1.22 Soit X un espace topologique localement compact. L'algèbre $C_0(X)$ des fonctions continues sur X s'annulant à l'infini est une C^*-algèbre commutative pour la norme

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

L'algèbre $C_0(X)$ est unifère si et seulement si X est compact. Si elle n'est pas unifère, alors $\widetilde{C_0(X)}$ est l'algèbre des fonctions continues sur le compactifié de Stone-Čech de X. ♢

Exemple 1.23 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. L'algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une C^*-algèbre pour la norme usuelle. Toute sous $*$-algèbre autoadjointe uniformément fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est une C^*-algèbre. En particulier, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ en est une. ♢

Définition 1.24 *Un élément x d'une algèbre de Banach involutive est hermitien (ou autoadjoint) si $x^* = x$, normal si $x^*x = xx^*$, unitaire si $xx^* = x^*x = \mathbb{1}$ (si l'algèbre est unifère), une projection si $x^2 = x$ et $x^* = x$.*

On peut toujours décomposer un élément x de $\mathcal{A}$ comme $x_1 + ix_2$ avec x_1 et x_2 hermitiens. On note $\mathcal{A}_h$ le sous-espace vectoriel réel des éléments hermitiens de $\mathcal{A}$. C'est un espace de Banach et une algèbre de Jordan.

Proposition 1.25 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre. Si x est normal, on a $\|x\| = \|x\|_{\mathrm{Sp}}$; si x est unitaire, $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x) \subset \mathbb{S}^1$; si x est hermitien, $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x) \subset \mathbb{R}$.*

L'intérêt des C^*-algèbres pour le “géomètre non commutatif” réside dans le théorème suivant, dû à Gel'fand et Naïmark :

Théorème 1.26 *Si $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre commutative, alors la transformée de Gel'fand réalise un isomorphisme isométrique de $\mathcal{A}$ sur $C_0(\mathcal{P}(\mathcal{A}))$, préservant l'involution.*

La catégorie des C^*-algèbres commutatives est donc équivalente à la catégorie des algèbres de fonctions continues nulles à l'infini sur des espaces localement compacts. Le géomètre non commutatif peut donc considérer avoir à sa disposition une catégorie d'algèbres normées généralisant la catégorie des espaces topologiques localement compacts. Dans ce qui suit, nous allons voir que les propriétés des C^*-algèbres confirment ce point de vue.

1.2.2 Calcul fonctionnel

Si E est un sous-ensemble d'une C^*-algèbre $\mathcal{A}$, on peut considérer la plus petite sous C^*-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ contenant E. C'est la sous C^*-algèbre engendrée par E dans $\mathcal{A}$. En particulier, si x est un élément normal de $\mathcal{A}$, alors il engendre une C^*-algèbre commutative, $\mathcal{B}(x)$.

Proposition 1.27 *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe un unique isomorphisme $\phi : C(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)) \to \mathcal{B}(x)$ tel que $\phi(1) = \mathbb{1}$ et $\phi(\iota) = x$ où $1(\lambda) = 1$ et $\iota(\lambda) = \lambda$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$ où $C(\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x))$ est l'algèbre des fonctions continues de $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$ dans $\mathbb{C}$.*

En particulier, on constate que si $\lambda \notin \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$, alors $x - \lambda\mathbb{1}$ est inversible dans $\mathcal{B}(x)$.

Si f est une fonction continue sur $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)$, on notera $f(x) = \phi(f)$. On a alors les règles habituelles $(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\overline{f}(x) = f(x)^*$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(f(x)) &= \{f(\lambda) \ / \ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)\} \\ \|f\| &= \sup\{|f(\lambda)| \ / \ \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x)\} \end{aligned}$$

Si $x \in \mathcal{A}$, on introduit $|x| = \sqrt{x^*x}$, la valeur absolue de x, grâce à la fonction continue sur $\mathbb{R}^+$, $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda}$ puisque comme nous le verrons, $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x^*x) \subset \mathbb{R}^+$.

Proposition 1.28 *Si $\mathcal{A}$ est une C^*-algèbre unifère, alors tout élément $x \in \mathcal{A}$ est une combinaison linéaire de 4 éléments unitaires.*

1.2.3 Quotients

Proposition 1.29 *Si $\mathcal{I}$ est un idéal bilatère fermé d'une C^*-algèbre $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{I}$ est autoadjoint et l'algèbre quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ est une C^*-algèbre pour la norme*

$$\|[a]\| = \inf\{\|a + i\| \ / \ i \in \mathcal{I}\}$$

pour tout $[a] \in \mathcal{A}/\mathcal{I}$ de représentant $a \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.30 Soit $C_0(X)$ la C^*-algèbre définie dans l'Exemple 1.22. Soit $Y \subset X$ un sous-ensemble fermé et $\mathcal{I}$ l'idéal des fonctions de $C_0(X)$ nulles sur Y. Alors $C_0(X)/\mathcal{I}$ s'identifie à $C_0(Y)$. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, on peut montrer que tout idéal fermé de $C_0(X)$ est de cette forme. $\diamondsuit$

Une C^*-algèbre est dite simple lorsqu'elle ne contient aucun idéal bilatère fermé autre que $\{0\}$ et lui-même. En prolongeant la dualité "espace localement compact" $\leftrightarrow$ "algèbre des fonctions continues nulles à l'infini" à une dualité (fictive) du type "espace topologique non commutatif" $\leftrightarrow$ C^*-algèbre, l'exemple précédent suggère de considérer les C^*-algèbres simples comme les objets duaux des espaces topologiques non commutatifs "ponctuels".

1.2.4 Éléments positifs

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive.

Définition 1.31 *Un élément x de $\mathcal{A}$ est positif s'il existe $y \in \mathcal{A}$ tel que $x = y^*y$.*

En particulier, tout élément positif est hermitien. On note $\mathcal{A}_+$ l'ensemble des éléments positifs de $\mathcal{A}$.

Théorème 1.32 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre unifère et $x \in \mathcal{A}$ un élément hermitien. Alors il y a équivalence entre les énoncés :*

1. $\mathrm{Sp}_{\mathcal{A}}(x) \subset [0, \infty[$;
2. $x = y^*y$ *pour un* $y \in \mathcal{A}$;
3. $x = h^2$ *pour un* $h \in \mathcal{A}_h$.

L'ensemble des éléments positifs est un cône convexe de $\mathcal{A}$, avec $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$.

Ce résultat induit une structure d'ordre sur l'espace de Banach réel $\mathcal{A}_h$, notée $x \geq y$.

1.2.5 Les espaces $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$

Plaçons-nous dans la C^*-algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Grâce au calcul fonctionnel sur les C^*-algèbres, il est possible d'introduire des sous-espaces de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Nous rencontrerons de nouveau ces sous-espaces dans un chapitre ultérieur.

DÉFINITION 1.33 *Pour $p \in [1, \infty[$, on note $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ des opérateurs a tels que $|a|^p \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.*

Dans cette définition, $|a|^p$ est obtenu de a par calcul fonctionnel sur les fonctions continues sur la C^*-algèbre $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.

On peut munir l'espace $\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ de la norme

$$\|a\|_p = (\mathrm{Tr}(|a|^p))^{\frac{1}{p}}$$

En particulier, $\mathcal{L}^1(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Lemme 1.34 *$\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ est un idéal dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.*

Ces espaces sont les idéaux de Schatten-von Neumann. L'inégalité de Hölder conduit à

$$\mathcal{L}^{p_1}(\mathcal{H}) \cdot \cdots \cdot \mathcal{L}^{p_k}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \tag{1.2}$$

pour $\frac{1}{p} = \sum_i \frac{1}{p_i}$.

1.2.6 Représentations et formes positives

La théorie des représentations des C^*-algèbres est très importante pour l'étude de ces algèbres. Nous verrons quelles conséquences elle a pour le physicien.

DÉFINITION 1.35 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach involutive. Une représentation de $\mathcal{A}$ est un $*$-homomorphisme π de $\mathcal{A}$ dans la C^*-algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

Proposition 1.36 *Soit $(\mathcal{H}, \pi)$ une représentation d'une algèbre de Banach involutive $\mathcal{A}$. Alors il y a équivalence entre les énoncés :*

1. *le sous-espace fermé $[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]$ engendré par les $\pi(a)\xi$ pour $a \in \mathcal{A}$ et $\xi \in \mathcal{H}$ est l'espace $\mathcal{H}$ tout entier ;*
2. *pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ non nul, il existe un élément $a \in \mathcal{A}$ tel que $\pi(a)\xi \neq 0$.*

Ce résultat permet de poser :

DÉFINITION 1.37 *Une représentation $(\mathcal{H}, \pi)$ est non dégénérée si l'une des conditions de la proposition précédente est vérifiée.*

Dans le cas où la représentation est dégénérée, il suffit de s'intéresser uniquement à $[\pi(\mathcal{A})\mathcal{H}]$, qui donne la partie non triviale de la représentation.

Comme nous allons le voir, les formes linéaires jouent un rôle important dans la théorie des représentations de ces algèbres.

DÉFINITION 1.38 *Une forme linéaire ω sur une algèbre de Banach involutive $\mathcal{A}$ est positive si $\omega(x^*x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$. Une forme ω positive de norme 1 est un état sur $\mathcal{A}$. Si $\omega(x^*x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ non nul, ω est dite non dégénérée.*

On peut définir une relation d'ordre sur les formes positives : $\omega \geq \eta$ si $\omega - \eta$ est positive.

Si $(\mathcal{H}, \pi)$ est une représentation de $\mathcal{A}$, on définit les fonctionnelles

$$\omega^{\pi}_{\xi,\eta}(a) = (\pi(a)\xi|\eta)$$

En particulier, $\omega^{\pi}_{\xi,\xi}$ est une forme positive. Si de plus $\|\xi\| = 1$, alors c'est un état. Nous allons voir que toute forme positive sur une C^*-algèbre est de ce type. Pour cela, on associe canoniquement à une forme positive une représentation.

Théorème 1.39 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach involutive unifère. À toute forme linéaire positive continue ω, on peut faire correspondre de façon unique (à équivalence près) une représentation $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ de $\mathcal{A}$ et un vecteur ξ_ω tel que*

1. $[\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega] = \mathcal{H}_\omega$;
2. $\omega(a) = (\pi_\omega(a)\xi_\omega|\xi_\omega)$ *pour tout* $a \in \mathcal{A}$.

Démonstration : Nous voudrions seulement donner une idée de la construction de cette représentation, connue sous le nom de construction de Gel'fand-Naïmark-Segal (GNS).

Soit $N_\omega = \{a \in \mathcal{A} \;/\; \omega(a^*a) = 0\}$. Alors N_ω est un idéal à gauche dans $\mathcal{A}$. Notons $[a] \in \mathcal{A}/N_\omega$ l'image de $a \in \mathcal{A}$ dans le quotient de modules à gauche sur $\mathcal{A}$. On munit l'espace $\mathcal{A}/N_\omega$ du produit scalaire

$$([a]|[b]) = \omega(b^*a)$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$. On peut facilement vérifier qu'une telle expression définit bien un produit scalaire, en utilisant le fait que ω soit positive. On note $\mathcal{H}_\omega$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{A}/N_\omega$ pour ce produit scalaire. Alors pour tout $a \in \mathcal{A}$, l'opérateur $\pi_\omega(a)[b] = [ab]$ peut être étendu en un opérateur borné sur $\mathcal{H}_\omega$. ω est bien définie sur $\mathcal{A}/N_\omega$ et peut être prolongée en une forme sur $\mathcal{H}_\omega$. Par le théorème de Riesz, il existe $\xi_\omega \in \mathcal{H}_\omega$ tel que $\omega(a) = ([a]|\xi_\omega)$. On peut montrer que ceci implique $\omega(a) = (\pi_\omega(a)\xi_\omega|\xi_\omega)$. □

DÉFINITION 1.40 *Une représentation $(\mathcal{H}, \pi)$ qui admet un vecteur ξ tel que $[\pi(\mathcal{A})\xi] = \mathcal{H}$ est dite cyclique, de vecteur cyclique ξ.*

On peut montrer que toute forme positive sur une C^*-algèbre est continue. Donc la construction GNS associe à toute forme positive sur une C^*-algèbre une représentation cyclique. Une conséquence immédiate de ce résultat est la caractérisation suivante des C^*-algèbres :

Théorème 1.41 *Toute C^*-algèbre admet une représentation injective. Toute C^*-algèbre est donc isomorphe isométriquement à une algèbre autoadjointe fermée d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.*

Ce résultat montre que la définition abstraite des C^*-algèbres équivaut complètement à la définition suivante : sous-algèbre autoadjointe fermée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ pour un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

EXEMPLE 1.42 Soit X un espace topologique localement compact. On peut réaliser $C_0(X)$ comme une sous-algèbre des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$ pour une mesure μ sur X, en représentant les éléments de $C_0(X)$ par des opérateurs de multiplication. $\diamondsuit$

On peut aller un peu plus loin dans la relation entre formes positives et représentations de C^*-algèbres :

DÉFINITION 1.43 *Une forme positive ω sur une algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est pure si toute forme positive η sur $\mathcal{A}$ majorée par ω est un multiple de ω. On note $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ l'espace des états purs sur $\mathcal{A}$.*

En d'autres termes, $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(\mathcal{A})$ est l'ensemble des points extrémaux de l'ensemble convexe des états sur $\mathcal{A}$.

Théorème 1.44 *Soit ω un état sur une C^*-algèbre $\mathcal{A}$, et $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \xi_\omega)$ sa représentation canoniquement associée. Alors il y a équivalence entre les énoncés :*

1. *ω est pur ;*
2. *$(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega)$ est irréductible.*

1.3 Algèbres de von Neumann

Nous venons de voir que toute C^*-algèbre est une sous-algèbre autoadjointe fermée pour la topologie uniforme d'une algèbre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Il est intéressant de regarder une C^*-algèbre dans une réalisation concrète car comme nous l'avons vu, l'espace de Hilbert apporte d'autres topologies que celle définie par la norme. On peut ainsi sortir de la C^*-algèbre au sein de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ en considérant d'autres convergences (donc considérer d'autres fermetures), ou encore approximer des éléments de la C^*-algèbre dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ autrement que par la norme. Les résultats que l'on peut établir par ces procédés dépendront bien sûr du choix de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et de ses propriétés.

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Soit donc $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $\mathcal{M}$ un sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

DÉFINITION 1.45 *Le commutant $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathcal{M}$.*

Il est évident que le commutant d'un ensemble quelconque est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. En fait, c'est même une sous-algèbre de Banach unifère. Si $\mathcal{M}$ est invariant par l'involution, alors $\mathcal{M}'$ est une C^*-algèbre, fermée pour toutes les topologies localement convexes sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ introduites en 1.1.4.

On peut considérer le commutant du commutant... et ainsi de suite. On a alors

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{M} & \subset & \mathcal{M}'' = \mathcal{M}^{(4)} = \dots \\ \mathcal{M}' & = & \mathcal{M}^{(3)} = \dots \end{array}$$

DÉFINITION 1.46 *Une algèbre de von Neumann sur $\mathcal{H}$ est une sous-algèbre $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ autoadjointe telle que*

$$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$$

Un facteur est une algèbre de von Neumann de centre trivial : $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \mathbb{C}\mathbb{1}$.

Toute algèbre de von Neumann est une C^*-algèbre.

Si $\mathcal{S}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $\mathcal{S}''$ est la plus petite algèbre de von Neumann engendrée par $\mathcal{S}$.

La définition précédente est purement algébrique. Elle est cependant relié aux topologies de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par le théorème du bicommutant de von Neumann. Pour l'énoncer, nous dirons qu'une sous-algèbre $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est non dégénérée si $[\mathcal{M}\mathcal{H}] = \mathcal{H}$.

Théorème 1.47 *Soit $\mathcal{M}$ une sous-algèbre autoadjointe non-dégénérée de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Alors il y a équivalence entre les énoncés :*

1. *$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$;*

2. *$\mathcal{M}$ est faiblement fermée ;*

3. *$\mathcal{M}$ est fortement fermée ;*

4. *$\mathcal{M}$ est ultrafaiblement fermée ;*

5. *$\mathcal{M}$ est ultrafortement fermée.*

En particulier, une algèbre de von Neumann est fermée dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ pour les 4 topologies localement convexes définies auparavant.

EXEMPLE 1.48 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est elle-même une algèbre de von Neumann. ♢

EXEMPLE 1.49 Passons à un exemple utile pour la suite. Soit (Ω, μ) un espace mesurable. Alors l'algèbre $L^\infty(\Omega, \mu)$ est une algèbre de von Neumann commutative. ♢

1.3.2 Prédual

La notion de dualité est très utile dans l'étude des algèbres d'opérateurs, et nous a permis dans le cas des C^*-algèbres commutatives de les considérer comme des fonctions continues sur un espace topologique qui est inclus dans le dual de l'algèbre. Dans le cas des algèbres de von Neumann, c'est la notion de prédual qui est essentielle.

DÉFINITION 1.50 *Si $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann, on note $\mathcal{M}_* \subset \mathcal{M}^*$ le prédual de $\mathcal{M}$, qui est l'ensemble des formes linéaires ultrafaiblement continues.*

On peut montrer que tout $\omega \in \mathcal{M}_*$ est de la forme

$$\omega(a) = \sum_n (\xi_n | a\eta_n)$$

pour deux suites (ξ_n) et (η_n) de $\mathcal{H}$ telles que $\sum_n \|\xi_n\|^2 < \infty$ et $\sum_n \|\eta_n\|^2 < \infty$.

Proposition 1.51 *Le prédual $\mathcal{M}_*$ d'une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$ est un espace de Banach pour la norme de $\mathcal{M}^*$, et $\mathcal{M}$ est le dual de $\mathcal{M}_*$.*

Ainsi, toute algèbre de von Neumann est le dual d'un espace de Banach. S. SAKAI a montré un résultat qui va dans l'autre sens :

Théorème 1.52 *[50] Une C^*-algèbre $\mathcal{M}$ est $*$-isomorphe à une algèbre de von Neumann si et seulement si $\mathcal{M}$ est duale d'un espace de Banach.*

Ce résultat sert à définir de façon abstraite les algèbres de von Neumann, que l'on nomme alors W^*-algèbres (voir [50]).

Exemple 1.53 Le prédual de l'algèbre de von Neumann $L^\infty(\Omega, \mu)$ est l'espace de Banach $L^1(\Omega, \mu)$. $\diamondsuit$

1.3.3 Algèbres de von Neumann commutatives

Comme pour les C^*-algèbres, le cas commutatif est très intéressant, et permet de savoir à quoi correspondent les algèbres de von Neumann non commutatives, et de savoir comment les étudier.

Proposition 1.54 *Soit $\mathcal{M}$ une algèbre de von Neumann commutative. Alors $\mathcal{M}$ est $*$-isomorphe à une algèbre $L^\infty(\Omega, \mu)$ où Ω est un espace mesurable localisable (= somme directe d'espaces mesurables finis).*

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [57] par exemple.

Ce résultat montre que les algèbres de von Neumann sont la généralisation non commutative des espaces mesurables.

Une algèbre de von Neumann commutative est en particulier une C^*-algèbre commutative. Donc $\mathcal{M}$ s'identifie à une algèbre de fonctions $C_0(X)$ sur un espace topologique localement compact X. Les deux identifications de $\mathcal{M}$ ainsi obtenues ne sont bien sûr pas de même nature. L'identification $L^\infty(\Omega, \mu)$ utilise le prédual $L^1(\Omega, \mu)$, qui caractérise en quelque sorte cet espace mesurable, alors que $C_0(X)$ utilise le dual de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire l'espace des caractères sur $\mathcal{M}$, identifiable à X. En ce sens, il est évident que la première identification utilise plus la structure topologique de l'algèbre de von Neumann que la seconde. En particulier, toute algèbre $C_0(X)$ n'est pas une algèbre de von Neumann !

D'autres constructions et d'autres résultats sur les algèbres de von Neumann confirment cette étroite relation entre ces algèbres et la théorie de la mesure. Notons au passage qu'il est possible de définir un calcul fonctionnel sur les éléments hermitiens en utilisant les fonctions mesurables bornées sur la droite réelle. De plus, d'un point de vue structurel, ces algèbres se décomposent (sous certaines hypothèses sur leur taille) sur les facteurs en utilisant une généralisation de la somme directe en une sorte d'intégrale. Cette théorie de la réduction utilise intensément la théorie de la mesure. Citons enfin la généralisation non commutative du théorème de Radon-Nikodým par A. Connes.

1.3.4 Idéaux et projections

Dans $L^\infty(\Omega, \mu)$, une projection est une classe d'équivalence de fonctions mesurables (presque partout égales) qui ne peuvent valoir que 0 ou 1. Cette classe d'équivalence représente donc, à un ensemble de mesure nulle près, un sous-ensemble mesurable de Ω. D'un autre côté, les projections d'une algèbre de von Neumann jouent un rôle considérable dans leur étude. En utilisant la dualité "espace" $\leftrightarrow$ "fonctions", on peut considérer qu'un idéal d'une algèbre de von Neumann $\mathcal{M}$, fermé pour une des topologies de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, doit être l'équivalent d'un "sous-ensemble mesurable" de l'espace non commutatif considéré. Comme dans le cas commutatif une projection représente bien un tel sous-ensemble, on s'attend à un lien entre projections et idéaux.

Proposition 1.55 *Si $\mathcal{M}$ est une algèbre de von Neumann dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors tout idéal à gauche (resp. à droite) $\mathfrak{m}$ ultrafaiblement fermé contient une unique projection e telle que $\mathfrak{m} = \mathcal{M}e$ (resp. $\mathfrak{m} = e\mathcal{M}$). Si $\mathfrak{m}$ est un idéal bilatère, alors e est dans le centre de $\mathcal{M}$.*

En particulier, si $\mathcal{M}$ est un facteur, alors $\mathcal{M}$ ne contient aucun idéal bilatère ultrafaiblement fermé autre que $\{0\}$ et lui-même. On peut donc considérer que ces algèbres de von Neumann sont l'équivalent non commutatif des "points mesurables" dans les espaces mesurables.

1.4 Conclusion...

Muni de la théorie des algèbres de von Neumann et des C^*-algèbres, il est possible d'étendre au domaine non commutatif des objets de la théorie de la mesure et de la topologie. Nous renvoyons à [12] pour des exemples d'utilisation concrète de ces structures.

Nous voudrions maintenant revenir, en guise de conclusion de ce bref chapitre, sur le lien entre les C^*-algèbres et les algèbres de von Neumann, sous la forme du résultat synthétique suivant :

Théorème 1.56 *Soit X un espace localement compact et μ une mesure positive bornée sur X. Alors μ définit une forme positive sur la C^*-algèbre commutative $C_0(X)$*

$$f \mapsto \int_X f(x)d\mu(x)$$

On a alors :

1. *la représentation cyclique $(\mathcal{H}_\mu, \pi_\mu, \xi_\mu)$ associée à cette forme linéaire positive (construction GNS) est réalisée sur l'espace de Hilbert $L^2(X,\mu)$ par les opérateurs de multiplication par les fonctions ; le vecteur cyclique ξ_μ est la fonction qui vaut 1 sur X ;*

2. *l'algèbre de von Neumann commutative engendrée par* $\pi_\mu(C_0(X))$ *est l'algèbre des opérateurs de multiplication par les fonctions de* $L^\infty(X, \mu)$.

C'est ce genre de résultat qu'il faut avoir à l'esprit lorsqu'on travaille dans le cadre de la géométrie non commutative. En effet, comme il caractérise algébriquement (en utilisant néanmoins des normes) les algèbres $C_0(X)$ et $L^\infty(X, \mu)$, il permet de comprendre à quoi correspondent dans le cadre non commutatif l'algèbre des fonctions continues (nulles à l'infini) et l'algèbre des fonctions bornées et mesurables. Si maintenant X est une variété différentiable, on peut considérer l'algèbre des fonctions C^∞. C'est à la recherche de son équivalent non commutatif qu'est consacrée la géométrie différentielle non commutative.

Chapitre 2

À propos de la physique

> *"One ought to proceed ... by following the methods introduced by Heisenberg in 1925, which have already met with such great success for non-relativistic quantum mechanics. Heisenberg put forward the principle that one should confine one's attention to observable quantities, and set up an algebraic scheme in which only these observable quantities appear. "*
>
> Paul Adrien Maurice DIRAC[1]

Nous savons que toute théorie physique se formule mathématiquement. Nous voudrions dans ce chapitre faire un état des lieux des théories mathématiques utilisées actuellement en physique théorique. Ce petit catalogue est très utile pour essayer de comprendre ce que pourrait être une théorie unifiant mécanique quantique et théorie relativiste de la gravitation. Nous allons constater que les mathématiques utilisées dans ces théories sont complètement différentes, et qu'il semble donc nécessaire aujourd'hui, avant de vouloir unifier certaines théories physiques, de construire de nouveaux outils mathématiques qui conduiraient à un langage commun.

2.1 La théorie quantique non relativiste

2.1.1 Rappels sur la mécanique classique

En mécanique classique, un système physique est modélisé par son état à un instant donné et son équation d'évolution. En général, l'espace des états s'identifie à l'espace des phases, qui mathématiquement est une sous-variété de $\mathbb{R}^{2n}$ si le système a n degrés de liberté. La moitié des dimensions sert à

[1]repris de [53, p. 46]

caractériser les positions (éventuellement généralisées) et l'autre moitié les impulsions (de même éventuellement généralisées). Dans ce cadre, la donnée des impulsions est souvent équivalente à la donnée des vitesses. Un état est un point de cet espace. L'évolution est modélisée par une équation différentielle du premier ordre (systèmes Hamiltoniens) qui est par exemple l'équation associée au champ de vecteurs Hamiltonien sur la variété des états.

Une observable, par exemple l'énergie, est une fonction réelle sur cette variété. La valeur de cette fonction en un point de l'espace des états est la valeur de l'observable sur l'état du système correspondant.

Une variante de cette description, utile en particulier en physique statistique, se donne pour espace des états les mesures de probabilité (positives) sur l'espace des phases. Avec une mesure de probabilité ponctuelle (donnée par une distribution de Dirac), on retrouve l'approche précédente. Pour une mesure μ quelconque, la valeur d'une observable (qui est encore une fonction) f est donnée par l'intégrale $\int f d\mu$ sur l'espace des phases. Grâce au théorème de représentation de Riesz, on peut considérer que toute forme linéaire positive sur l'algèbre des observables (en prenant les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$...) est un état du système. Ces mesures peuvent en fait se voir comme des états (au sens du Chapitre 1) sur l'algèbre des fonctions (continues) à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les états purs correspondent alors aux mesures de Dirac.

2.1.2 La mécanique quantique

On peut considérer que la mécanique quantique non relativiste ne change pas fondamentalement cette approche. On dispose toujours d'un espace des états et d'une équation d'évolution.

Dans la représentation de Schrödinger, l'espace des états est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ (l'ensemble des fonctions d'onde, et en réalité les droites de cet espace de Hilbert, puisqu'il semble que la norme elle-même ne joue aucun rôle en physique) et l'équation d'évolution est une équation différentielle associée à un opérateur hermitien (le Hamiltonien). Une observable est un opérateur hermitien A et la valeur qu'elle peut prendre est l'une de ses valeurs propres. On peut définir la valeur moyenne de cet observable sur un état $|\psi\rangle$ normalisé en posant $\langle\psi|A|\psi\rangle$. L'hermiticité assure que les valeurs prises par cet observable sont réelles, et que cette valeur moyenne est réelle elle-aussi. Comme les observables sont des opérateurs sur un espace de Hilbert, la commutativité est perdue. La signification physique de ce phénomène est qu'il est impossible d'assigner à deux observables (qui ne commutent pas) des valeurs parfaitement définies sur un état du système (problème de diagonalisation simultanée d'opérateurs). Dans le langage du physicien, on retrouve cela sous la forme des inégalités de Heisenberg. Les observables ne forment plus une algèbre associative, mais seulement une algèbre réelle de Jordan. On peut les considérer comme les éléments hermitiens d'une algèbre associative plus grande, dont la signification physique n'est quant à elle pas immédiate. Enfin, dans cette description, l'espace des états change de structure, puisqu'il devient un espace vectoriel (en réalité, seules les combinaisons linéaires laissant la norme à la valeur 1 sont possibles, puisque ce sont les vecteurs normés à 1 de l'espace vectoriel qu'il faut considérer). Au problème de normalisation près, additionner deux états est donc possible. Cette structure linéaire est confirmée expérimentalement dans les expériences d'interférences.

Dans la représentation de Heisenberg, apparue historiquement à la même période, on considère que l'état du système à un instant donné est déterminé par les valeurs de toutes les observables sur cet état à cet instant. L'état lui-même n'a donc plus une aussi grande importance, c'est l'algèbre des observables qui devient l'élément central. L'équation d'évolution se fait dans cette algèbre, et une observable dépend du temps à travers l'équation de Heisenberg :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

Comme l'a remarqué P.A.M. Dirac, cette équation est du même type que l'équation de Poisson sur les observables en mécanique classique. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous considérerons les structures symplectiques non commutatives.

Cette algèbre d'observable est bien sûr aussi une algèbre de Jordan, sous-algèbre de l'algèbre de Heisenberg. Pour un système à 1 degré de liberté, cette dernière algèbre est engendrée par deux éléments p, q et la relation $qp - pq = i\hbar$. Cette relation est incompatible avec le fait que les opérateurs p et q soient des matrices de taille finie. La bonne approche pour considérer cette algèbre a été trouvée par J. von Neumann. Il faut se placer dans le cadre des algèbres d'opérateurs sur des espaces de Hilbert de dimension infinie, et en particulier les C^*-algèbres et les algèbres de von Neumann. Comme les opérateurs p et q ne peuvent être bornés, à la place de l'algèbre de Heisenberg, on peut considérer l'algèbre de Weyl, engendrée par les éléments e^{ip} et e^{iq} et la relation $e^{i\alpha q}e^{i\beta p} = e^{-i\alpha\beta}e^{i\beta p}e^{i\alpha q}$ (où l'on pose $\hbar = 1$).

Comme dans le cas de la mécanique classique, on s'attend à ce que l'espace des états soit les formes linéaires positives sur l'algèbre des observables. Si on plonge cette algèbre dans une bonne algèbre (algèbre de Banach par exemple), par la construction GNS, nous pouvons associer à toute forme linéaire continue positive une représentation cyclique de cette algèbre. Or, J. von Neumann a montré que toutes les représentations irréductibles continues de l'algèbre de Heisenberg sont unitairement équivalentes. Aussi, en changeant d'état pur, on peut considérer qu'on ne change pas l'espace de Hilbert sur lequel on représente l'algèbre, alors que l'on change les valeurs moyennes des observables. Ceci justifie donc de travailler dans la représentation de Schrödinger, ce qui ne constitue pas un choix arbitraire. Pour une étude poussée des représentations de l'algèbre de Heisenberg, nous renvoyons à [22] par exemple.

Après un examen approfondi, il peut être considéré qu'un système quantique est décrit par une C^*-algèbre dans laquelle l'algèbre de Jordan des éléments hermitiens constitue l'algèbre des observables, et sur lequel les états (mathématiques) sont les états physiques. Les valeurs possibles d'une observable a sont dans $\mathrm{Sp}(a)$, et leur distribution de probabilité sur un état donné est la mesure de probabilité sur $\mathrm{Sp}(a)$ induite par cet état. Les états purs correspondent alors aux systèmes indécomposables, contrairement aux autres états qui représentent des systèmes constitués de plusieurs sous-systèmes couplés. Cela est bien sûr une conséquence du Théorème 1.44.

Remarque 2.1 Nous n'avons pas évoqué l'approche la plus tardive de la mécanique quantique, celle des intégrales de chemins introduite par R. Feynman en 1947 [93], suite à des idées de P.A.M Dirac. Cette approche est la plus intuitive physiquement et met en avant le rôle de l'action en mécanique quantique. Malheureusement, cette approche est encore mal comprise mathématiquement.

2.1.3 Mécanique quantique à grand nombre de particules

Dans le cas où le nombre de particules n devient très grand (étude de la limite thermodynamique par exemple), l'espace de Hilbert des états est très grand. Par exemple, dans la représentation de Fock, cet espace est construit comme sous-espace de Hilbert de $\otimes_{i=1}^n \mathcal{H}_i$, où $\mathcal{H}_i$ est l'espace de Hilbert de la particule i. Si les particules sont toutes identiques et sont des fermions, il faut considérer l'espace de Hilbert $\bigwedge_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ (produit antisymétrisé) et si les particules sont toutes identiques et sont des bosons, il faut prendre $\bigvee_{i=1}^n \mathcal{H}_i$ (produit symétrisé). Les opérateurs, et donc les observables, sont alors des éléments de $\otimes_{i=1}^n \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$. Lorsque $n \to \infty$, la limite d'un tel opérateur doit être prise avec beaucoup de précautions. Il faut considérer la fermeture forte (ou faible) de cette algèbre dans les opérateurs sur $\mathcal{H}$. On obtient alors tout naturellement une algèbre de von Neumann. Aussi, la théorie des algèbres de von Neumann est le réceptacle naturel de la mécanique quantique à grand nombre de particules.

Nous renvoyons à W. Thirring [58] par exemple pour une analyse plus détaillée de ces considérations.

2.1.4 Conclusion

Bien que la mécanique quantique non relativiste ne soit pas encore comprise entièrement, il semble maintenant clair que les mathématiques qui la modélisent font largement appel à la théorie des algèbres d'opérateurs. En effet, d'une part les valeurs des observables sont quantifiées, ce qui force actuellement à interpréter ces valeurs comme les valeurs propres d'opérateurs. D'autre part, une caractéristique essentielle des systèmes de la mécanique quantique est l'impossibilité de donner des valeurs exactes simultanées à certains ensembles d'observables (comme par exemple la position et l'impulsion). C'est une très forte motivation pour introduire des observables qui ne commutent pas.

2.2 Mécanique relativiste

2.2.1 La relativité générale

Contrairement à la mécanique quantique, les fondements mathématiques de la relativité générale sont clairement identifiés, et ce depuis son introduction en 1917 par A. Einstein. Cette théorie se place dans la cadre de la géométrie différentielle pseudo-riemannienne. Nous devons à H. Minkowski d'avoir vu que l'espace et le temps devaient se fondre dans une structure commune. L'espace-temps M^4 (espace de Minkowski) était né, en tant que variété différentiable (dans ce cas, cette variété est identifiable à $\mathbb{R}^4$). Y reconnaître le tenseur

$$(\eta_{\mu\nu}) = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme une métrique a été fondamental pour le développement de la relativité générale.

Concrètement, la relativité générale s'appuie sur les objets suivants :

1. une variété de dimension 4, représentant l'espace-temps ;
2. une métrique pseudo-riemannienne (de signature lorentzienne) sur cette variété, pour laquelle les géodésiques sont les trajectoires des particules libres ;
3. la connexion de Levi-Civita associée à cette métrique et ses courbures (tenseur de courbure, courbure de Ricci, courbure scalaire) qui relient la métrique à la distribution de matière par les équations d'Einstein.

2.2.2 Les théories des champs

Dans un premier temps, considérons les théories des champs associées aux champs de jauge. La première théorie de jauge connue mais non reconnue comme telle est l'électromagnétisme, introduite par J.C. Maxwell à la fin du siècle dernier. Les 4 célèbres équations qu'il a proposées pour relier les champs électrique et magnétique à la distribution de matière chargée, ont été peu à peu transformées au cours de ce siècle. La première modification fait de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ les composantes d'un tenseur antisymétrique $F_{\mu\nu}$ et de la densité de courant et la densité de charge les composantes d'un quadrivecteur j_μ. Il n'y a alors plus que 2 équations. C'est une conséquence de la relativité restreinte, que ces mêmes équations ont motivée. La seconde idée a consisté à "faire disparaître" les indices si peu élégants. Le tenseur F est désormais une 2-forme différentielle, et le quadrivecteur une 1-forme. Enfin, cette 2-forme a été reconnue comme la courbure d'une connexion sur un fibré différentiable, de groupe de structure $U(1)$, ce qui permet de quantifier la charge (au sens où les mêmes représentations de $U(1)$ portent la même charge). Dans cette dernière étape, l'une des 2 équations est une conséquence du fait que F soit une courbure. C'est la situation actuelle. Dans ce petit jeu mathématique, apparaît clairement la nature du potentiel de jauge A_μ et des transformations de jauge.

Bien qu'historiquement cela ne se soit pas passé ainsi, il est naturel de considérer un autre groupe de structure que $U(1)$ (pourquoi pas $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ par exemple ?). Les connexions introduites sur de tels fibrés fournissent des théories des champs qui semblent actuellement bien modéliser les interactions fondamentales. Il semble que la relativité générale elle aussi puisse être interprétée comme une théorie de jauge, en prenant pour groupe de jauge soit le groupe de Poincaré, soit le groupe de Lorentz. Il y a cependant de grandes différences structurelles entre les interactions de jauge actuellement identifiées, et la théorie de la relativité générale. En particulier, dans un cas les groupes sont compacts (jusqu'à présent), dans l'autre cas le groupe de l'est pas. De plus l'espace-temps joue un rôle beaucoup plus "actif" dans la relativité générale que dans les théories de jauges.

Parallèlement (ou presque) à ces bouleversement, est apparue la théorie des champs de matières, en particulier le champ de Dirac et son équation.

Du point de vue de la mécanique quantique (telle que nous l'avons évoquée jusqu'à présent), cette théorie est considérée comme l'unification de la mécanique quantique à la Schrödinger et de la relativité restreinte. Cependant, du point de vue de la théorie quantique des champs, c'est une théorie des champs classique au même titre que celle de Maxwell. Qu'en est-il en réalité ? Tout simplement, l'équation de Schrödinger pour une seule fonction d'onde, ne décrit qu'une seule particule. En considérant la limite $c \to \infty$, il est facile de constater que l'équation de Dirac ne décrit elle aussi qu'une seule particule dans un cadre quantique et relativiste. Pour simplifier, cette particule est soit l'électron, soit son antiparticule le positron, selon le signe de l'énergie. Appliquée à un électron dans le champ électromagnétique créé par un proton, cette théorie décrit plus finement l'atome d'hydrogène que la théorie de Schrödinger.

Il y a cependant un problème de taille : la cinématique relativiste (et l'expérience) nous enseigne qu'à haute énergie, il est possible de créer des paires particule-antiparticules. Dans ce cadre, il est donc nécessaire d'oublier qu'un système physique admet un nombre fixé de particules. En ne considérant que les particules libres, on ne rencontre pas ce problème (mais la physique y est bien pauvre). En couplant une particule de Dirac à un champ électromagnétique, le système considéré peut évoluer en modifiant son nombre de particules. Le modèle mathématique d'un tel système est donc obligé de tenir compte de ce phénomène, et de considérer des états à un nombre arbitraire de particules. C'est l'ambition de la théorie quantique des champs. Le passage de la théorie de Dirac à la théorie quantique des champs est appelée "seconde quantification" (dénomination assez impropre). Cette construction a pour but de prendre en compte les phénomènes de création et d'annihilation de particules.

Avant de considérer cette théorie quantique des champs, il est utile de s'intéresser aux mathématiques de la théorie de Dirac. L'équation de Dirac $\not{D}\psi = 0$ est composée de deux éléments importants. $\not{D} = \gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu)$ est l'opérateur de Dirac, opérateur différentiel du premier ordre (hyperbolique dans le cadre lorentzien). Il se décompose lui-même en deux facteurs. $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$ est une connexion, la connexion qui modélise le champ électromagnétique A_μ. Le second facteur est γ^μ, c'est une représentation d'une algèbre de Clifford pour la métrique de Minskowski $\eta_{\mu\nu}$. Le second élément important est le spineur ψ, fonction à valeurs vectorielles, dans l'espace vectoriel sur lequel γ^μ se représente. Cette façon de coupler les champs ψ et A_μ est souvent appelée couplage minimale par les physiciens. Pour les mathématiciens, c'est aussi la plus simple qui puisse être.

Les mathématiciens ont généralisé ces constructions [36]. Au lieu de se placer au-dessus de l'espace de Minkowski (M^4, η), il est possible de considérer une variété (pseudo-)riemannienne (M, g) plus générale. On lui associe son algèbre de Clifford $\mathrm{C}\ell(M)$. L'espace des spineurs est un module sur $\mathrm{C}\ell(M)$, sur lequel on fait agir la connexion D_μ dépendant de la théorie de jauge choisie. L'opérateur de Dirac $\not{D}$ est l'objet qui prend en compte à la fois cette structure de module (sur C$\ell(M)$) et cette structure différentielle (connexion).

2.2.3 Conclusion

Il est maintenant bien établi que les théories classiques relativistes sont fortement structurées par la théorie mathématique des variétés différentiables et de tout ce qui s'y rattache. Ceci est confirmé par les progrès importants du modèle standard, construit en utilisant intensément les structures de groupes de Lie et les connexions (bien que dans ce modèle, la variété d'espace-temps soit assez simple, M^4, et les fibrés généralement triviaux). En ce qui concerne la relativité générale, entièrement écrite sur des bases de géométrie (pseudo-)riemannienne, jusqu'à présent toutes les expériences la confirment. Son caractère géométrique est même fortement contraint par des observations du type déviation de rayons lumineux par des objets très massifs (observations réalisées dès 1919). Mathématiquement, on constate ainsi qu'il existe de grandes affinités entre la relativité générale et la théorie de Dirac (bien qu'elles aient été motivées par des problèmes de physique assez différents). Bien sûr, les mathématiciens ne se sont pas privés de les utiliser. Pour le physicien, c'est une forte indication que les théories classiques relativistes forment un tout.

2.3 La théorie quantique des champs

La théorie quantique des champs (sous-entendu relativiste dans ce qui suit) est un grand chapitre de la physique actuelle. Comme nous l'avons vu, elle se place au carrefour de deux grandes théories, la mécanique quantique et la relativité restreinte. Aujourd'hui encore, il n'est pas certain que nous ayons la bonne approche sur le sujet, ce qu'il faut toujours avoir à l'esprit.

Le premier pas difficile à franchir, en partant de la théorie de Dirac ou de Maxwell, est de considérer un nombre quelconque de particules, pouvant évoluer au cours du temps. Au niveau le plus fondamental connu actuellement, il semble que seuls deux types de champs doivent être pris en compte : les champs de matière sont des spineurs de Dirac (éventuellement tensorialisés avec d'autres structures pour les regrouper dans des familles...) et les champs d'interaction sont des champs de jauge, connexions sur des fibrés.

Le paradoxe de la théorie quantique des champs telle qu'on peut l'utiliser aujourd'hui est qu'elle est en accord excellent avec l'expérience (une dizaine de chiffres significatifs pour certaines quantités), mais que ses fondements mathématiques ne sont pas encore bien compris. Essentiellement deux approches ont été proposées jusqu'à présent. La plus récente généralise l'intégrale des chemins de Feynman à la théorie (classique) des champs. Nous ne l'évoquerons guère ici. Les mathématiques sous-jacentes sont loin d'être comprises. La seconde approche conserve le langage algébrique de la mécanique quantique, en l'adaptant à des systèmes à une infinité de degrés de liberté. Ces deux approches se rejoignent dans leurs prédictions expérimentales car elles conduisent toutes les deux à l'étape intermédiaire aujourd'hui incontournable de la théorie perturbative utilisant les diagrammes de Feynman, et de son corollaire, la renormalisation. Bien que déduites différemment, les règles de calcul sont les mêmes.

L'approche algébrique considère les champs comme les degrés de liberté. Ces champs deviennent des opérateurs, sujets à des relations de commutation. De façon plus abstraite, ces champs peuvent être des éléments d'une algèbre non commutative. Les relations de commutation choisies généralisent les relations liant p et q dans l'algèbre de Heisenberg. Il est facile de voir que ces relations complètent les relations de symétries que l'on impose habituellement en mécanique quantique, selon qu'il s'agisse de fermions ou de bosons. Par exemple, pour des fermions modélisés par un spineur de Dirac ψ, ces relations s'écrivent

$$\begin{aligned}
\{\psi_a(x), \psi_b(y)\} &= 0 \\
\{\psi_a^\dagger(x), \psi_b^\dagger(y)\} &= 0 \\
\{\psi_a(x), \psi_b^\dagger(y)\} &= \delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ab} \text{ pour } x_0 = y_0
\end{aligned}$$

où $\{\ ,\ \}$ est l'anticommutateur. À la limite $c \to \infty$, la première relation exprime le fait bien connu que la fonction d'onde d'un système de deux fermions identiques est antisymétrique. En quelque sorte, ces relations d'anticommutation sont les extensions relativistes de cette antisymétrie.

Une fois posés ces axiomes sur les champs de la théorie, un problème de taille se présente, non encore résolu de façon satisfaisante aujourd'hui. Contrairement à l'algèbre de Heisenberg (ou l'algèbre de Weyl), ces relations de commutation admettent plusieurs (souvent en nombre infini) représentations irréductibles unitairement non équivalentes [22, 49]. Laquelle choisir ? Sachant que chacune de ces représentations donne un cadre différent pour la cinématique, ce choix n'est pas innocent. Pour résoudre ce problème, deux points de vue sont possibles.

Dans une première approche, on peut considérer que l'espace de Hilbert est fixé une fois pour toute, en supposant qu'il contient un vecteur Ω appelé vide. Le groupe de Poincaré se représente unitairement dans cet espace de Hilbert en laissant invariant le vide. Les champs sont alors considérés comme des distributions tempérées à valeurs opérateurs, satisfaisant des axiomes de localité. D'autres axiomes sont requis, en particulier sur les champs asymptotiques. Dans ce contexte, A.S. Wightman a montré que toute la théorie est contenue dans les valeurs moyennes sur le vide $(\Omega|\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\Omega)$. Ce sont donc ces quantités que la théorie cherche à étudier et à calculer. Nous renvoyons à [56] pour de plus amples développements.

Dans une autre approche, il a été suggéré que le cadre de la théorie quantique des champs est purement algébrique, sans référence explicite à un espace de Hilbert. C'est par exemple la théorie des observables locales, développée par R. Haag et D. Kastler dans [98]. Elle repose sur des axiomes physiquement raisonnables. À chaque ouvert (de fermeture compacte) de M^4, on associe une C^*-algèbre. Ces C^*-algèbres sont compatibles entre elles avec l'inclusion des ouverts de M^4, avec la séparation de type espace dans M^4, avec la covariance sous le groupe de Poincaré et avec d'autres axiomes plus techniques (voir [49]). C'est aussi l'approche algébrique des axiomes de Wightman développée par H.J. Borchers [66]. Dans cette approche, on considère une $*$-algèbre, sur laquelle certains états (les états de Wightman) donnent par la construction GNS une représentation de l'algèbre satisfaisant les axiomes de Wightman. Sans plus entrer dans les détails, ces descriptions utilisent avant tout des structures algébriques du type considéré dans le Chapitre 1. En cela, cette modélisation ne s'éloigne pas trop de la mécanique quantique non relativiste.

Ces travaux indiquent qu'au niveau actuel de notre compréhension de la théorie quantique des champs, il est raisonnable d'avoir une approche purement algébrique (algèbre de Banach, C^*-algèbre...) sans se soucier immédiatement de trouver un espace de Hilbert. Mathématiquement, cette approche est la plus générale puisque nous avons constaté au Chapitre 1 que certaines structures algébriques contiennent en germe des espaces de Hilbert (en considérant par exemple les états et la construction GNS), sans pour cela avoir à l'introduire explicitement dans les définitions. Dans ce qui suit, nous adopterons ce point de vue.

Il faut enfin remarquer que par le processus de renormalisation, les relations de commutation canoniques sont modifiées. Nous n'aborderons pas ce problème dans ce qui suit, car il dépasse largement le cadre de ce chapitre et de ce travail en général. Cela ne change conceptuellement pas le cadre algébrique décrit ici.

2.4 Que conclure ?

De cet état de la physique, nous devons tirer l'enseignement suivant. Deux grandes théories s'opposent, aussi bien au niveau de la physique (pendant longtemps elles n'ont pas concerné les mêmes systèmes) qu'au niveau des mathématiques. D'un côté la mécanique quantique impose de travailler avec des objets algébriques normés, extraits pour la plupart de la théorie des algèbres d'opérateurs. D'un autre côté, les théories des champs classiques, aussi bien de la matière que des interactions (le monde tel que nous le comprenons aujourd'hui), et le monde relativiste nous plongent dans la géométrie différentielle. Il est bien évident que le physicien théoricien ne peut se satisfaire d'une telle opposition, et rêve d'une théorie unifiée, regroupant le monde quantique et le monde relativiste (y compris la relativité générale). En considérant les mathématiques sous-jacentes à ces théories (telles que nous les modélisons aujourd'hui), il semble évident que le mathématicien se doit d'intervenir pour construire un nouveau cadre, dans lequel la géométrie différentielle et les théories algébriques puissent s'unifier. C'est l'un des buts de la géométrie différentielle non commutative que de généraliser la géométrie des variétés différentiables à des objets purement algébriques, du type de ceux utilisés en théorie quantique des champs.

Dans une modélisation raisonnable de cette théorie quantique des champs, on doit s'attendre à avoir schématiquement une suite de limites du genre

$$\text{TQC} \to \text{TCC} \to \text{MQNR} \to \text{MC}$$

où TQC est une théorie quantique des champs, TCC la théorie classique des champs (Dirac y compris), MQNR la mécanique quantique non relativiste et MC la mécanique classique. Ces limites sont nécessaires pour le physicien, même si elles sont un peu formelles, puisqu'elles relient entre elles les différentes descriptions dont il dispose du réel. Elles sont parfois un guide pour construire des théories, comme le fut le principe de correspondance pour N. BOHR, ou la limite non relativiste de la relativité générale pour A. EINSTEIN. Au niveau mathématique, il doit aussi exister des limites semblables. Par exemple, la flèche TCC$\rightarrow$MQNR consiste à prendre la limite bien connue $c \to \infty$ dans la théorie de Dirac. On obtient alors la théorie de Schrödinger avec spin 1/2. En ce qui concerne la théorie de Maxwell, cette limite ne peut bien sûr pas être considérée, puisque cette théorie est d'essence relativiste. La dernière flèche est peut être moins bien comprise que la précédente, mais les approximations semi-classiques par exemple indiquent assez bien comment elle se réalise. La première limite, quant à elle, relie des objets mathématiques purement algébriques (TQC) à des objets mathématiques de la géométrie différentielle (TCC). On remarquera au passage que la seconde limite nous ramène dans le cadre des algèbres d'opérateurs (MQ), et que la limite "composée" TQC$\rightarrow$MQ consiste à oublier une partie de la structure algébrique de départ (essentiellement le produit) pour ne conserver que la structure linéaire. Mathématiquement, ces limites ne peuvent être comprises que si nous disposons d'un cadre assez vaste pour contenir à la fois la théorie des algèbres normées et la géométrie différentielle.

Sur un exemple très simple, nous voudrions maintenant illustrer l'utilisation de structures différentiables en théorie quantique des champs. Pour cela, soit le modèle élémentaire d'une particule libre chargée, de spin nul. On se donne donc un champ scalaire complexe ϕ. Dans l'approche habituelle de la théorie quantique des champs, (telle qu'elle est exposée par exemple dans [25]), on décompose ce champ en transformée de Fourier sous la forme

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left[a(k)e^{ik\cdot x} + a^\dagger(k)e^{-ik\cdot x} \right]$$

(pour $k_0 = \omega_k$) et on impose que les cœfficients $a(p)$ et $a^\dagger(p)$ vérifient des relations de commutation

$$[a(p), a^\dagger(q)] = (2\pi)^3 2\omega_p \delta^3(\vec{p} - \vec{q})$$

et toutes les autres nulles. On peut représenter cette algèbre sur l'espace de Fock associé aux opérateurs de création et d'annihilation a et $a^\dagger$. Dans cette représentation, tout état est une somme de vecteurs de la forme $a^\dagger(p_1) \dots a^\dagger(p_n)|0\rangle$ où $|0\rangle$ est le vide de la théorie (c'est un vecteur cyclique). Dans ce contexte, on introduit habituellement le quadrivecteur énergie-impulsion P_μ sous la forme

$$P_\mu = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_k} k_\mu a^\dagger(k)a(k)$$

Or, une telle quantité n'existe pas en tant qu'opérateur, puisque cette intégrale n'est pas définie.

Pour interpréter cette expression, oublions l'espace de Hilbert, considérons l'algèbre engendrée par les $a^\dagger(p)$ et $a(p)$, et considérons les états comme des éléments de cette algèbre engendrée par les $a^\dagger(p)$. Alors P_μ est une dérivation sur cette algèbre en posant

$$\begin{aligned} P_\mu(a^\dagger(p)) &= p_\mu a^\dagger(p) \\ P_\mu(a(p)) &= -p_\mu a(p) \end{aligned}$$

Il est facile en effet de voir que le prolongement de cette application en une dérivation est compatible avec les relations de l'algèbre. Cette dérivation est symboliquement le commutateur avec l'expression "intégrale" de P_μ, ce qui est parfois explicitement écrit, mais en interprétant la forme intégrale de P_μ comme un opérateur. Si on interprète P_μ comme une dérivation, alors l'écriture intégrale n'est plus nécessaire. Cependant, si on se sert de cette écriture comme d'une expression symbolique pour voir la dérivation sous forme d'un commutateur, alors l'ordre des opérateurs a et $a^\dagger$ importe peu car leur commutateur est lui-même dans le centre de l'algèbre. Cette dérivation n'est bien sûr pas intérieure, puisque l'expression de P_μ en fonction des $a^\dagger(p)$ et $a(p)$ n'existe pas dans l'algèbre considérée. Sur ϕ, P_μ est la dérivée $P_\mu = i\partial_\mu$, ce qui est cohérent avec la limite TQC$\rightarrow$TCC évoquée plus haut.

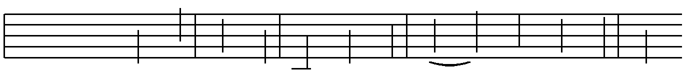
L'interprétation de P_μ comme une dérivation est une façon de représenter l'algèbre de Lie des translations d'espace-temps, en la considérant comme sous-algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre sur laquelle on travaille. C'est un signe que nous devrions munir l'algèbre non commutative qui modélise la théorie quantique des champs de structures différentielles non commutatives.

L'exemple précédent donne une idée de ce que peuvent être les structures différentielles au niveau de la théorie quantique des champs. Bien sûr, cet exemple n'apporte rien de nouveau, mais il suggère une approche mathématiquement différente de l'approche habituelle. Il reste cependant à développer un cadre mathématique cohérent, celui de la géométrie différentielle non commutative.

Avant de fermer ce chapitre, il est utile de remarquer qu'une modélisation de la gravitation quantique à l'aide d'une algèbre non commutative remet en cause notre conception habituelle de l'espace-temps. En effet, la non commutativité ne nous permet pas de localiser, et la notion de point n'est plus accessible. Cette remise en cause de l'espace-temps comme variété différentiable n'est cependant pas un problème, puisque nos expériences se limitent à des échelles supérieures à la longueur de Planck et au temps de Planck. Le défi réel d'une telle modélisation consiste à conserver ou déduire un "espace-temps" à l'échelle macroscopique.

Chapitre 3

Structures algébriques



Johann Sebastian Bach
L'Art de la Fugue (thème)

Dans ce chapitre, nous voudrions considérer sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ divers complexes différentiels, qui donnent des renseignements sur cette algèbre. Certains sont connus depuis longtemps, d'autres plus nouveaux. Des relations sont établies entre ces objets. Ce chapitre (en particulier les définitions de la cohomologie de Hochschild et du calcul différentiel universel) constitue une base mathématique indispensable à l'étude ultérieure des structures différentielles sur des algèbres associatives.

3.1 Homologie et Cohomologie de Hochschild

3.1.1 Cohomologie de Hochschild

Définition

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère sur le corps $\mathbb{K}$, et $\mathcal{M}$ un bimodule sur $\mathcal{A}$. Soit $C^n(\mathcal{A};\mathcal{M})$ le bimodule des applications linéaires

$$\underbrace{\mathcal{A}\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}}_{n \text{ fois}} \to \mathcal{M}$$

Par convention, $C^0(\mathcal{A};\mathcal{M}) = \mathcal{M}$.

Soit δ la différentielle définie sur le bimodule

$$C^*(\mathcal{A};\mathcal{M}) = \bigoplus_{n\geq 0} C^n(\mathcal{A};\mathcal{M})$$

par $\delta : C^n(\mathcal{A};\mathcal{M}) \to C^{n+1}(\mathcal{A};\mathcal{M})$ en posant

$$\begin{aligned}(\delta\omega)(a_0,\ldots,a_n) &= a_0\omega(a_1,\ldots,a_n)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\omega(a_0,\ldots,a_{i-2},a_{i-1}a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)\\ &\quad+(-1)^{n+1}\omega(a_0,\ldots,a_{n-1})a_n\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\delta^2 = 0$, en utilisant l'associativité de $\mathcal{A}$.

$(C^*(\mathcal{A};\mathcal{M}),\delta)$ est le *complexe de Hochschild* de l'algèbre $\mathcal{A}$ à valeurs dans le bimodule $\mathcal{M}$. Sa cohomologie $H^*(\mathcal{A};\mathcal{M})$ est la *cohomologie de Hochschild*.

Cochaines normalisées

Soit $\mathcal{S}$ une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Alors on définit un sous-complexe du complexe de Hochschild en posant $C^0(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M}) = \mathcal{M}^{\mathcal{S}} = \{m \in \mathcal{M} \ / \ sm = ms \ \forall s \in \mathcal{S}\}$. C'est le commutant de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{M}$. Pour $n \geq 1$, $f \in C^n(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ si f est une cochaine de Hochschild de degré n vérifiant

$$\begin{aligned}f(sa_1,a_2,\ldots,a_n) &= sf(a_1,a_2,\ldots,a_n)\\ f(a_1,\ldots,a_{n-1},a_ns) &= f(a_1,\ldots,a_{n-1},a_n)s\\ f(a_1,\ldots,a_is,a_{i+1},\ldots,a_n) &= f(a_1,\ldots,a_i,sa_{i+1},\ldots,a_n)\end{aligned}$$

En d'autres termes, f est un homomorphisme de $\mathcal{S}$-bimodule $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{S}}\cdots\otimes_{\mathcal{S}}\mathcal{A} \to \mathcal{M}$.

Pour $\mathcal{S} = \mathbb{K}$, le corps de base, c'est bien sûr la linéarité, et l'on retrouve les cochaines précédentes.

Le complexe $C^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M}) = \oplus_{n\geq 0}C^n(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ est stable par δ. Ceci définit donc une cohomologie, $H^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$.

DÉFINITION 3.1 *Une algèbre associative unifère $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ est dite séparable si et seulement si $H^1(\mathcal{A};\mathcal{M}) = 0$ pour tout bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$.*

On renvoie à [47] pour d'autres caractérisations des algèbres séparables.

Théorème 3.2 *[96] Lorsque $\mathcal{S}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre séparable, l'inclusion*

$$C^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M}) \hookrightarrow C^*(\mathcal{A};\mathcal{M})$$

induit un isomorphisme entre les cohomologies $H^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ et $H^*(\mathcal{A};\mathcal{M})$

DÉFINITION 3.3 *Les cochaines normalisées de* $C^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ *sont les cochaines de* $C^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ *qui s'annulent dès que l'un de leurs arguments est dans* $\mathcal{S}$. *Elles sont stables par* δ. *Nous notons* $\overline{C}^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ *ce complexe, muni de* δ.

Nous avons alors le résultat suivant :

Proposition 3.4 *[96] La cohomologie de* $H^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$ *peut être calculée sur le complexe des cochaines normalisées,* $\overline{C}^*(\mathcal{A},\mathcal{S};\mathcal{M})$.

En particulier, la cohomologie de Hochschild $H^*(\mathcal{A};\mathcal{M})$ peut être calculée sur les cochaines qui s'annulent dès que l'un de leurs arguments est $\mathbb{1}$.

3.1.2 Cohomologie de Hochschild à valeurs dans $\mathcal{A}$

Nous allons étudier le cas où le bimodule $\mathcal{M}$ est $\mathcal{A}$ lui-même.

Centre et dérivations

Un élément $a \in \mathcal{A} = C^0(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est un cocycle si et seulement si $(\delta a)(b) = ab - ba = [a,b] = 0$ pour tout $b \in \mathcal{A}$. Ceci signifie que l'ensemble des cocycles d'ordre 0 est le centre de l'algèbre, noté $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Comme il n'y a pas de cobord non nul à cet ordre, nous avons

$$H^0(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$$

Maintenant, soit $X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ un élément de $C^1(\mathcal{A},\mathcal{A})$. X est un cocycle si pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, nous avons

$$(\delta X)(a,b) = aX(b) - X(ab) + X(a)b = 0$$

c'est-à-dire

$$X(ab) = X(a)b + aX(b)$$

Donc l'ensemble des cocycles de $C^1(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathcal{A}$.

X est un cobord s'il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que $(\delta a)(b) = X(b)$, c'est-à-dire

$$X(b) = ab - ba = ad_a b$$

L'ensemble des cobords de $C^1(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est donc $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$, l'algèbre de Lie des dérivations intérieures de $\mathcal{A}$. C'est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

Ainsi, nous avons

$$H^1(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \mathrm{Der}(\mathcal{A})/\mathrm{Int}(\mathcal{A})$$

et cet espace est une algèbre de Lie, que nous noterons $\mathrm{Out}(\mathcal{A})$.

Ceci donne un lien entre la cohomologie de Hochschild à valeurs dans l'algèbre, et les dérivations de cette algèbre.

Cup produit

Il est possible de définir sur l'espace vectoriel $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ un produit, appelé *cup produit*.

Par définition, pour $f \in C^m(\mathcal{A};\mathcal{A})$ et $g \in C^n(\mathcal{A};\mathcal{A})$, $f \smile g$ est la cochaine de $C^{m+n}(\mathcal{A};\mathcal{A})$ définie par

$$(f \smile g)(a_1,\ldots,a_{m+n}) = f(a_1,\ldots,a_m)g(a_{m+1},\ldots,a_{m+n})$$

Lemme 3.5 *On a*

$$\delta(f \smile g) = (\delta f) \smile g + (-1)^m f \smile (\delta g)$$

donc $(C^*(\mathcal{A};\mathcal{A}),\delta)$ est une algèbre différentielle graduée.

Par conséquent, le cup produit passe à la cohomologie, et l'on a

Proposition 3.6 *$H^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ est une algèbre graduée commutative pour le cup produit.*

On a donc

$$[f] \smile [g] = (-1)^{mn}[g] \smile [f]$$

où $[f]$ désigne la classe de cohomologie de f.

Composition de cochaines

Soient f et g comme ci-dessus. Pour $1 \leq i \leq m$, on pose

$$f \circ_i g(a_1,\ldots,a_{m+n-1}) = f(a_1,\ldots,a_{i-1},g(a_i,\ldots,a_{i+n-1}),a_{i+n},\ldots,a_{m+n-1})$$

qui est un élément de $C^{m+n-1}(\mathcal{A};\mathcal{A})$, et on définit la composition de f par g

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{m}(-1)^{(n-1)(i-1)} f \circ_i g$$

Cette loi de composition sur $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ permet de définir le commutateur gradué de f et g comme

$$[f,g] = f \circ g - (-1)^{(m-1)(n-1)} g \circ f$$

où le degré de f et g doit être diminué de 1.

Proposition 3.7 *$C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ muni de ce crochet gradué est une algèbre de Lie graduée. Ce crochet passe en cohomologie, et donne à $H^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ une structure d'algèbre de Lie graduée, compatible avec le cup produit aux sens où $[\cdot,f]$ est une dérivation graduée de $\smile$, de degré $m-1$.*

Sur $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ et sur $\mathrm{Out}(\mathcal{A})$, ce crochet coïncide avec les crochets d'algèbre de Lie respectifs.

DÉFINITION 3.8 *Une algèbre de Poisson graduée est une algèbre associative graduée munie d'un crochet de Lie gradué qui induit des dérivations graduées pour le produit associatif.*

$H^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ est une algèbre de Poisson graduée commutative.

Déformation d'algèbres associatives

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère, et notons $\mu_0 : \mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ son produit, $\mu_0(a \otimes b) = ab$.

Nous voulons étudier les déformations du produit μ_0 au sens suivant. Soit ϵ un paramètre, on pose la série formelle

$$\mu_\epsilon(a \otimes b) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \mu_k(a \otimes b)$$

où $\mu_k : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ sont des applications linéaires. On retrouve bien sûr le produit de départ pour $\epsilon = 0$.

Regardons les conséquences de l'associativité de μ_ϵ à l'ordre $k = 1$. La relation

$$\mu_\epsilon(\mu_\epsilon(a \otimes b) \otimes c) = \mu_\epsilon(a \otimes \mu_\epsilon(b \otimes c))$$

conduit à l'ordre ϵ, compte tenu de l'associativité de μ_0, à

$$\mu_1(ab \otimes c) + \mu_1(a \otimes b)c = \mu_1(a \otimes bc) + a\mu_1(b \otimes c)$$

Ceci s'interprète comme le fait que μ_1 est un 2-cocycle de Hochschild : $\mu_1 \in Z^2(\mathcal{A};\mathcal{A})$. Ainsi, $\delta\mu_1 = 0$ est équivalente à l'associativité de μ_ϵ à l'ordre ϵ.

Si maintenant μ_1 est un 2-cobord, alors il existe une 1-cochaine $\beta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ telle que $\mu_1(a \otimes b) = a\beta(b) - \beta(ab) + \beta(a)b$.

Effectuons alors la transformation $a \mapsto a - \epsilon\beta(a)$ entre l'algèbre $(\mathcal{A}, \mu_0)$ et l'algèbre $(\mathcal{A}, \mu_\epsilon)$. C'est un isomorphisme à l'ordre ϵ de l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ sur lui-même. Au premier ordre en ϵ, cette transformation respecte les produits, c'est-à-dire que $\mu_0(a \otimes b)$ est envoyé sur $\mu_0(a \otimes b) - \epsilon\beta(\mu_0(a \otimes b))$. Dans ce cas, nous dirons que la déformation du produit est triviale à l'ordre ϵ.

Ceci permet de conclure que l'espace $H^2(\mathcal{A};\mathcal{A})$ (δ étant défini pour le produit μ_0 sur $\mathcal{A}$) classe les déformations possibles du produit associatif μ_0 sur $\mathcal{A}$.

Si $\mu_1 \in Z^2(\mathcal{A};\mathcal{A})$ est le premier terme de la déformation du produit, alors l'associativité à l'ordre 2 impose

$$\mu_2(a,b)c+\mu_1(\mu_1(a,b),c)+\mu_2(ab,c)-\mu_2(a,bc)-\mu_1(a,\mu_1(b,c))-a\mu_2(b,c)=0$$

Posons $\phi(a,b,c) = \mu_1(\mu_1(a,b),c) - \mu_1(a,\mu_1(b,c))$. L'équation ci-dessus signifie $\delta\mu_2 = \phi$. Il faut que cette relation soit satisfaite dans $C^3(\mathcal{A};\mathcal{A})$. Les obstructions à l'existence de μ_1 se retrouvent donc dans $H^3(\mathcal{A};\mathcal{A})$, à travers la classe de ϕ qui doit y être triviale. En particulier, si $H^3(\mathcal{A};\mathcal{A}) = 0$, il n'y a aucune obstruction à l'ordre 2, ni aux ordres supérieurs, comme on peut le vérifier aisément.

Si maintenant nous voulons que l'élément unité $\mathbb{1}$ de $\mathcal{A}$ reste unité pour μ_ϵ, alors on doit avoir $\mu_k(\mathbb{1}\otimes a) = \mu_k(a\otimes\mathbb{1}) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et tout $a \in \mathcal{A}$. En particulier, μ_1 est une cochaine normalisée de $C^2(\mathcal{A};\mathcal{A})$. Comme la cohomologie de Hochschild est la même si on la calcule sur les cochaines normalisées, on peut sans perdre en généralité supposer que l'élément unité est stable dans la déformation du produit.

Opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ dans $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$

On note $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ l'algèbre de Lie dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathcal{A}$ et le crochet le commutateur dans $\mathcal{A}$. Dans ce qui suit, on considère $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ comme une algèbre différentielle graduée pour le cup produit et δ.

Pour tout élément $a \in \mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$, nous définissons l'opérateur $i_a : C^*(\mathcal{A};\mathcal{A}) \to C^{*-1}(\mathcal{A};\mathcal{A})$ en posant, pour $f \in C^m(\mathcal{A};\mathcal{A})$

$$(i_a f)(a_1,\dots,a_{m-1}) = \sum_{p=1}^{m}(-1)^{p+1} f(a_1,\dots,a_{p-1},a,a_{p+1},\dots,a_{m-1})$$

On remarquera que $i_a f$ n'est autre que $f\circ a$ où a est considéré comme élément de $C^0(\mathcal{A};\mathcal{A})$.

Proposition 3.9 *i_a est une dérivation graduée de degré -1 sur $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$, et $L_a = i_a\delta + \delta i_a$ est une dérivation graduée de degré 0 sur $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ donnée par*

$$(L_a f)(a_1,\dots,a_m) = [a, f(a_1,\dots,a_m)] - \sum_{p=1}^{m} f(a_1,\dots,a_{p-1},[a,a_p],a_{p+1},\dots,a_m)$$

i_a et L_a définissent une opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ dans $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$.

Démonstration : C'est une série de calculs sans difficultés. □

Cette opération de Cartan est visiblement caractéristique de l'aspect non commutatif de $\mathcal{A}$, puisque L_a est nulle dès que $a \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Cette opération de Cartan se restreint aux cochaines normalisées pour $\mathcal{S} = \mathbb{K}\mathbb{1} \subset \mathcal{A}$ (qui forment bien une algèbre différentielle graduée pour le cup produit et δ). Dans ce cas, $i_{\mathbb{1}}$ est nulle sur ces cochaines. Nous noterons $C_0^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ cette algèbre différentielle graduée.

Le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. On peut munir $\bigwedge\mathfrak{g}$ d'une structure d'algèbre de Poisson graduée commutative en prenant le crochet de Schouten défini par

$$[a_1 \wedge \cdots \wedge a_m, b_1 \wedge \cdots \wedge b_p] =$$
$$(-1)^{(m-1)(p-1)} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} [a_i, b_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \overset{i}{\vee} \cdots a_m \wedge b_1 \wedge \cdots \overset{j}{\vee} \cdots \wedge b_p$$

Il est possible de considérer une variante de cette construction. En effet, il est facile de vérifier que ce crochet est bien défini sur l'algèbre graduée commutative

$$\bigwedge\nolimits_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

pour toute algèbre associative. Le produit extérieur est effectué sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$. Cette algèbre associative est une algèbre de Poisson graduée commutative.

On a alors :

Lemme 3.10 *Si $\mathcal{A}$ est commutative, alors on a une application canonique d'algèbres de Poisson commutatives*

$$\bigwedge\nolimits_{\mathcal{A}} \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \to H^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$$

qui correspond en degré 1 *à l'identification* $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = H^1(\mathcal{A};\mathcal{A})$.

Démonstration : Il s'agit en fait de la propriété universelle du produit extérieur, qui permet de relever à tout $\bigwedge_{\mathcal{A}} \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ l'application donnée en degré 1, puisque $H^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ est graduée commutative. □

Le théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg montre que cette application est un isomorphisme pour une certaine classe d'algèbres commutatives :

Théorème 3.11 *[99] Si $\mathcal{A}$ est une algèbre régulière commutative, alors l'application canonique*

$$\bigwedge\nolimits_{\mathcal{A}} \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \to H^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$$

est un isomorphisme d'algèbres de Poisson graduées commutatives.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module engendré par un nombre fini d'éléments, alors on a un isomorphisme

$$(\bigwedge_{\mathcal{A}}\mathrm{Der}(\mathcal{A})) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to H^*(\mathcal{A}; \mathcal{M})$$

Nous renvoyons à l'article original [99] pour la définition technique d'une algèbre régulière. Ce qu'il faut retenir de ce théorème est que la cohomologie de Hochschild est reliée pour certaines algèbres commutatives à sa structure différentiable induite par les dérivations.

Remarque 3.12 De façon générale, si $\mathcal{A}$ est une algèbre associative *a priori* non commutative, on a une application canonique

$$\bigwedge_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}\mathrm{Out}(\mathcal{A}) \to H^*(\mathcal{A}; \mathcal{A})$$

3.1.3 Invariance de Morita

Définition 3.13 *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres associatives unifères. Nous dirons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes de Morita s'il existe un $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodule $\mathcal{M}$ et un $(\mathcal{B},\mathcal{A})$-bimodule $\mathcal{N}$ tels que $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{N} \simeq \mathcal{A}$ et $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \simeq \mathcal{B}$ où ces isomorphismes sont des isomorphismes de bimodules.*

Exemple 3.14 Prenons $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{B} = M(n,\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices de taille n. Alors ces deux algèbres sont équivalentes de Morita. Pour le voir, il suffit de considérer $\mathcal{M} = \mathbb{C}^n$ comme module à gauche sur $\mathbb{C}$ (multiplication des composantes) et module à droite sur $M(n,\mathbb{C})$ par multiplication d'une matrice ligne par une matrice carré. De même, on prend $\mathcal{N} = \mathbb{C}^n$ avec cette fois les structures de modules inversée. Alors on a immédiatement $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N} = \mathcal{B}$ et $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{M} = \mathcal{A}$.

Plus généralement, toute algèbre associative $\mathcal{A}$ est équivalente de Morita à l'algèbre $M(n,\mathcal{A})$. $\diamondsuit$

Proposition 3.15 *Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont équivalentes de Morita, alors on a une correspondance bijective canonique entre l'ensemble des bimodules sur $\mathcal{A}$ et l'ensemble des bimodules sur $\mathcal{B}$, donnée par*

$$\mathcal{P} \textit{ bimodule sur } \mathcal{A} \mapsto \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \textit{ bimodule sur } \mathcal{B}$$

Démonstration : L'application proposée admet pour inverse

$$\mathcal{Q} \text{ bimodule sur } \mathcal{B} \mapsto \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{Q} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{N} \text{ bimodule sur } \mathcal{A}$$

d'où le résultat. $\square$

On a alors le théorème suivant, bien connu :

Théorème 3.16 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère. Alors sa cohomologie de Hochschild à valeur dans tout bimodule est invariante de Morita.*

Corollaire 3.17 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère. Alors $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ et* $\mathrm{Out}(\mathcal{A})$ *sont des invariants de Morita de $\mathcal{A}$.*

3.1.4 Cohomologie de Hochschild contrainte

Nous allons introduire ici un sous-complexe du complexe de Hochschild.

Soient, comme ci-dessus $\mathcal{A}$ une algèbre associative et $\mathcal{M}$ un bimodule sur $\mathcal{A}$. Soient en plus donnés un idéal (bilatère) $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ et un sous-bimodule $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$ tels que $cm, mc \in \mathcal{N}$ pour tout $c \in \mathcal{C}$ et tout $m \in \mathcal{M}$. Ceci revient à dire que $\mathcal{C}$ est inclus dans l'idéal

$$\mathcal{I}_{\mathcal{N}} = \{a \in \mathcal{A} \ / \ a\mathcal{M} \subset \mathcal{N} \text{ et } \mathcal{M}a \subset \mathcal{N}\}$$

On définit le sous-complexe $C^*(\mathcal{A}, \mathcal{C}; \mathcal{M}, \mathcal{N})$ de $C^*(\mathcal{A}; \mathcal{M})$ des cochaines $f : \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ telles que $f(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{N}$ lorsqu'au moins un des a_i est dans $\mathcal{C}$. En degré 0, nous prenons $C^0(\mathcal{A}, \mathcal{C}; \mathcal{M}, \mathcal{N}) = \mathcal{M}$.

Ce sous-complexe est stable par δ. Il est donc possible d'introduire sa cohomologie $H^*(\mathcal{A}, \mathcal{C}; \mathcal{M}, \mathcal{N})$, appelée cohomologie contrainte de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{M}$ par $(\mathcal{C}, \mathcal{N})$.

On a alors le lemme suivant, prouvé dans [108] :

Lemme 3.18 *Dans la situation précédente, on a une application canonique d'espaces vectoriels gradués*

$$H^*(\mathcal{A}, \mathcal{C}; \mathcal{M}, \mathcal{N}) \to H^*(\mathcal{A}/\mathcal{C}; \mathcal{M}/\mathcal{N})$$

où la seconde cohomologie est la cohomologie de Hochschild du bimodule $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ sur l'algèbre $\mathcal{A}/\mathcal{C}$.

Prenons le cas $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{C}$. Alors le sous-complexe considéré est une sous-algèbre de $C^*(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ pour le cup produit, mais n'est pas un idéal. On le note $C^*_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}; \mathcal{A})$, et sa cohomologie $H^*_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}; \mathcal{A})$.

3.1.5 Homologie de Hochschild

L'homologie de Hochschild est la version duale de la cohomologie de Hochschild.

Soient $\mathcal{A}$ une algèbre associative et $\mathcal{M}$ un bimodule sur $\mathcal{A}$. Posons les espaces vectoriels

$$C_n(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \mathcal{M} \otimes \mathcal{T}^n\mathcal{A}$$

avec $C_0(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ et

$$\mathcal{T}^n\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A}\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}}_{n \text{ fois}}$$

Définissons sur

$$C_*(\mathcal{A},\mathcal{M}) = \bigoplus_{n\geq 0} C_n(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

l'endomorphisme

$$\partial : C_n(\mathcal{A},\mathcal{M}) \to C_{n-1}(\mathcal{A},\mathcal{M})$$

par

$$\begin{aligned}\partial(m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &= ma_1\otimes\cdots\otimes a_n \\ &\quad +\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n \\ &\quad +(-1)^n a_n m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1}\end{aligned}$$

On vérifie par un calcul simple que $\partial^2 = 0$.

Nous avons donc une homologie, c'est l'*homologie de Hochschild* de $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{M}$, notée $H_*(\mathcal{A},\mathcal{M})$.

On note généralement $HH_*(\mathcal{A}) = H_*(\mathcal{A},\mathcal{A})$ l'homologie de Hochschild de $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathcal{A}$.

3.2 L'algèbre $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ et le calcul différentiel universel

Nous allons associer canoniquement à toute algèbre associative unifère $\mathcal{A}$ une algèbre différentielle graduée dont nous extrairons le calcul différentiel universel.

3.2.1 L'algèbre $\mathfrak{T}\mathcal{A}$

Soit donc $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère sur le corps $\mathbb{K}$. En tant qu'espace vectoriel, on définit

$$\mathfrak{T}^n\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A}\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}}_{n+1 \text{ fois}}$$

avec $\mathfrak{T}^0\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

Les $\mathfrak{T}^n\mathcal{A}$ sont des bimodules sur $\mathcal{A}$. On associe à $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \in \mathfrak{T}^n\mathcal{A}$ et $b_0 \otimes \cdots \otimes b_m \in \mathfrak{T}^m\mathcal{A}$ l'élément $a_0 \otimes \cdots \otimes a_n b_0 \otimes \cdots \otimes b_m \in \mathfrak{T}^{n+m}\mathcal{A}$. Ceci donne à l'espace

$$\mathfrak{T}\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{T}^n\mathcal{A}$$

une structure d'algèbre graduée.

On définit maintenant sur cette algèbre une différentielle d_U, en posant

$$\begin{aligned} d_U(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \mathbb{1} \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ \sum_{p=1}^{n} (-1)^p a_0 \otimes \cdots \otimes a_{p-1} \otimes \mathbb{1} \otimes a_p \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^{n+1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes \mathbb{1} \end{aligned}$$

Lemme 3.19 *d_U est une dérivation graduée de degré 1 sur l'algèbre graduée $\mathfrak{T}\mathcal{A}$, vérifiant $d_U^2 = 0$. Donc $(\mathfrak{T}\mathcal{A}, d_U)$ est une algèbre différentielle graduée.*

Il est aussi possible de définir sur cette algèbre une opération bord b définie par

$$b(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p a_0 \otimes \cdots \otimes a_p a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

Lemme 3.20 *b est une dérivation graduée de degré -1 de l'algèbre graduée $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ vérifiant $b^2 = 0$ et $d_U b + b d_U = 0$.*

Théorème 3.21 *La cohomologie de $(\mathfrak{T}\mathcal{A}, d_U)$ est triviale, c'est-à-dire que l'on a $H^0(\mathfrak{T}\mathcal{A}, d_U) = \mathbb{K}$ et $H^n(\mathfrak{T}\mathcal{A}, d_U) = 0$ pour $n \geq 1$.*

Démonstration : On peut prolonger le complexe $(\mathfrak{T}\mathcal{A}, d_U)$ en posant $\mathfrak{T}^{-1}\mathcal{A} = \mathbb{K}$, et prendre $d_U : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ en posant $d_U\lambda = \lambda\mathbb{1}$. Le carré de d_U est encore nul, comme il est facile de le voir.

Soit $\omega \in \mathcal{A}^*$ tel que $\omega(\mathbb{1}) = 1$. Définissons alors $k_\omega : \mathfrak{T}^n\mathcal{A} \to \mathfrak{T}^{n-1}\mathcal{A}$ par

$$k_\omega(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \omega(a_0) a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

pour $n \geq 0$.

Alors nous avons $d_U k_\omega + k_\omega d_U = \mathrm{Id}$. k_ω est donc une homotopie contractante du complexe, d'où le résultat. $\square$

Opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ dans $\mathfrak{T}\mathcal{A}$

Soit $a \in \mathcal{A}_{\text{Lie}}$. On lui associe un opérateur $i_a : \mathfrak{T}\mathcal{A} \to \mathfrak{T}\mathcal{A}$ défini par

$$i_a(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p a_0 \otimes \cdots \otimes a_p a a_{p+1} \otimes \cdots \otimes a_p$$

pour $n \geq 1$ et $i_a a_0 = 0$.

Proposition 3.22 *i_a est une dérivation graduée de degré -1 sur $\mathfrak{T}\mathcal{A}$, et $L_a = i_a d_U + d_U i_a$ est une dérivation graduée de degré 0 sur $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ donnée par*

$$L_a(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{p=0}^{n} a_0 \otimes \cdots \otimes [a, a_p] \otimes \cdots \otimes a_n$$

Ces dérivations graduées définissent une opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ dans $\mathfrak{T}\mathcal{A}$.

Démonstration : C'est une série de calculs sans difficultés. □

3.2.2 Le calcul différentiel universel

Nous pouvons extraire de l'algèbre $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ une sous-algèbre différentielle graduée de la façon suivante.

Posons $\Omega^1_U(\mathcal{A})$ le noyau du produit $\mu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Par associativité de μ, $\Omega^1_U(\mathcal{A})$ est un sous-bimodule de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} = \mathfrak{T}^1\mathcal{A}$. La différentielle d_U définie sur $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ envoie $a \in \mathcal{A}$ sur $d_U a = \mathbb{1} \otimes a - a \otimes \mathbb{1} \in \operatorname{Ker} \mu$. Donc nous avons $d_U : \mathcal{A} \to \Omega^1_U(\mathcal{A})$. Ce couple $(\Omega^1_U(\mathcal{A}), d_U)$ a la propriété universelle suivante :

Proposition 3.23 *Pour toute dérivation X de $\mathcal{A}$ dans un bimodule $\mathcal{M}$, il existe un unique homomorphisme de bimodules*

$$i_X : \Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}$$

tel que $X = i_X \circ d_U$.

Nous rappelons qu'une dérivation X de $\mathcal{A}$ dans un bimodule $\mathcal{M}$ est une application $X : \mathcal{A} \to \mathcal{M}$ vérifiant $X(ab) = X(a)b + aX(b)$.

Démonstration : En tant que bimodule, $\Omega^1_U(\mathcal{A})$ est engendré par les $d_U a$ pour $a \in \mathcal{A}$. Il suffit donc de poser $i_X(d_U a) = X(a)$, qui est compatible avec les diverses structures, et se prolonge en un unique homomorphisme de bimodules. □

On pose alors $\Omega_U^0(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ et pour $n \geq 1$,

$$\Omega_U^n(\mathcal{A}) = \underbrace{\Omega_U^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_U^1(\mathcal{A})}_{n \text{ fois}}$$

$\Omega_U(\mathcal{A}) = \oplus_{n\geq 0}\Omega_U^n(\mathcal{A})$ est alors une algèbre graduée, sous-bimodule de $\mathfrak{T}\mathcal{A}$. d_U s'étend de façon unique en une dérivation graduée de degré 1 satisfaisant $d_U^2 = 0$ sur cette algèbre.

$(\Omega_U(\mathcal{A}), d_U)$ est donc une sous-algèbre différentielle graduée de $\mathfrak{T}\mathcal{A}$, qui a la propriété universelle suivante :

Proposition 3.24 *Soit $(\Omega = \oplus_{n\geq 0}\Omega^0, \delta)$ une algèbre différentielle graduée. Pour tout homomorphisme d'algèbres unifères $\rho : \mathcal{A} \to \Omega^0$, il existe un unique homomorphisme d'algèbres différentielles graduées*

$$\tilde{\rho} : (\Omega_U(\mathcal{A}), d_U) \to (\Omega, \delta)$$

qui coïncide avec ρ en degré 0.

Démonstration : Ω^1 est un bimodule sur $\mathcal{A}$ pour le produit

$$(a, \omega, b) \mapsto \rho(a)\omega\rho(b)$$

L'application $X : \mathcal{A} \to \Omega^1$ définie par $X(a) = \delta\rho(a)$ est une dérivation sur ce bimodule. Donc il existe un homomorphisme de bimodules $i_X : \Omega_U^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1$. On pose $\tilde{\rho} = i_X$ en degré 1. Alors, puisque $\Omega_U^2(\mathcal{A}) = \Omega_U^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega_U^1(\mathcal{A})$, on pose $\tilde{\rho}(\alpha \otimes \beta) = \tilde{\rho}(\alpha)\tilde{\rho}(\beta)$. En itérant cette construction, on a construit $\tilde{\rho}$ ayant les propriétés voulues. $\square$

Nous avons alors un corollaire immédiat de cette proposition :

Corollaire 3.25 *Si (Ω, δ) est une algèbre différentielle graduée telle que $\Omega^0 = \mathcal{A}$ et Ω^n soit engendrée par les δa avec $a \in \mathcal{A}$, alors (Ω, δ) est isomorphe (en tant qu'algèbre différentielle graduée) à un quotient de $(\Omega_U(\mathcal{A}), d_U)$.*

Démonstration : Prenons $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ l'identité. Alors $\tilde{\rho}$ est surjectif et donc (Ω, δ) est isomorphe au quotient de $(\Omega_U(\mathcal{A}), d_U)$ par le noyau de $\tilde{\rho}$. $\square$

Définition 3.26 $(\Omega_U(\mathcal{A}), d_U)$ *est appelé calcul différentiel universel de $\mathcal{A}$.*

Tout comme $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ a une cohomologie triviale, $(\Omega_U(\mathcal{A}), d_U)$ a aussi une cohomologie triviale :

Théorème 3.27 *La cohomologie de $(\Omega_U(\mathcal{A}), d)$ est triviale.*

Exemple 3.28 Soit $\mathcal{A} = C(X)$ l'algèbre commutative des fonctions continues sur un espace topologique X. On peut considérer que le produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ s'identifie aux fonctions de deux variables $f(x, y)$. Les éléments de $\Omega^1_U(\mathcal{A})$ sont les fonctions de deux variables x et y qui s'annulent sur la diagonale $x = y$. La différentielle d'une fonction $f \in \mathcal{A}$ est la fonction de deux variables $d_U f(x, y) = f(y) - f(x)$. La différentielle est donc ici une différence finie. Dans le cas où $\mathcal{A} = C^\infty(X)$ pour une variété différentiable X, toutes les fonctions sont dérivables, et cette différence finie se développe en $f(y) - f(x) = \partial_\mu f(x)(y^\mu - x^\mu) + \dots$ où ∂_μ sont les dérivées partielles par rapport à des coordonnées locales x^μ. Par le Corollaire 3.25, les 1-formes de de Rham s'obtiennent par quotient de $\Omega^1_U(\mathcal{A})$. Dans ce quotient, la différence finie $f(y) - f(x)$ s'envoie sur $\partial_\mu f(x) dx^\mu$, la différentielle de de Rham de f. $\diamondsuit$

Nous avons généralisé d'une certaine façon la Proposition 3.23 en la Proposition 3.24. Il existe une autre façon de généraliser ce résultat.

Pour cela, remarquons qu'une dérivation de $\mathcal{A}$ dans un bimodule $\mathcal{M}$ est un 1-cocycle de Hochschild de $Z^1(\mathcal{A}; \mathcal{M})$. Pour un tel cocycle, la Proposition 3.23 dit qu'il existe un et un seul homomorphisme de bimodules entre $\Omega^1_U(\mathcal{A})$ et $\mathcal{M}$. En fait, nous avons :

Proposition 3.29 *[69] Il existe un isomorphisme canonique entre les espaces* $\mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\Omega_U(\mathcal{A}), \mathcal{M})$ *et* $Z^*(\mathcal{A}; \mathcal{M}) = C^*(\mathcal{A}; \mathcal{M}) \cap \mathrm{Ker}\, \delta$.

Démonstration : Soit $\phi \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\Omega^n_U(\mathcal{A}), \mathcal{M})$. Nous lui associons le n-cocycle f_ϕ défini par

$$f_\phi(a_1, \dots, a_n) = \phi(d_U a_1 \dots d_U a_n)$$

Alors $\delta f_\phi = 0$ est une conséquence de la $\mathcal{A}$-linéarité à droite et à gauche de ϕ et de la règle de dérivation de d_U.

Réciproquement, tout n-cocycle définit un tel homomorphisme de bimodules en utilisant la formule ci-dessus. $\square$

Opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ dans $\Omega_U(\mathcal{A})$

Proposition 3.30 *L'opération de Cartan de* $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ *définie sur* $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ *se restreint à l'algèbre différentielle graduée* $\Omega_U(\mathcal{A})$*, et prend la forme :*

$$\begin{aligned} i_a(a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n) &= \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} a_0 d_U a_1 \dots d_U a_{p-1} [a, a_p] d_U a_{p+1} \dots d_U a_n \\ L_a(a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n) &= [a, a_0] d_U a_1 \dots d_U a_n \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n} a_0 d_U a_1 \dots d_U a_{p-1} d_U [a, a_p] d_U a_{p+1} \dots d_U a_n \end{aligned}$$

Démonstration : C'est une vérification calculatoire. □

Nous verrons plus loin une autre opération sur l'algèbre $\Omega_U(\mathcal{A})$ semblable à celle-ci.

3.2.3 Relation entre $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ et les cochaines de Hochschild

Nous allons voir que les deux algèbres différentielles $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ et $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ sont reliées par une application canonique.

L'application $\mathfrak{T}\mathcal{A} \to C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$

Théorème 3.31 *Soit $\Psi : \mathfrak{T}\mathcal{A} \to C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ l'application définie par*

$$\Psi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_0 b_1 a_1 \cdots b_n a_n$$

Alors Ψ est un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées, respectant les opérations de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$.

Démonstration : La vérification des diverses relations se fait directement par le calcul. □

Corollaire 3.32 *Ψ induit un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées respectant les opérations de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ entre $\Omega_U(\mathcal{A})$ et $C^*_0(\mathcal{A};\mathcal{A})$. Cet homomorphisme coïncide avec l'homomorphisme universel de la Proposition 3.24, relevant l'application identité sur $\mathcal{A}$.*

Démonstration : Il est immédiat de vérifier que le relèvement de l'application identité sur $\mathcal{A}$ est l'application Ψ restreinte à $\Omega_U(\mathcal{A})$. □

Remarque 3.33 Il est facile de voir que l'algèbre $\Psi(\mathfrak{T}\mathcal{A})$ est contenue dans $C^*(\mathcal{A},\mathcal{Z}(\mathcal{A});\mathcal{A})$, et que $\Psi(\Omega_U(\mathcal{A}))$ est contenue dans $\overline{C}^*(\mathcal{A},\mathcal{Z}(\mathcal{A});\mathcal{A})$.

Pour une algèbre commutative, cette application se réduit à une simple multiplication : $\Psi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n)(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) = a_0 \dots a_n b_1 \dots b_n$. Dans ce cas, $\Psi(\Omega_U(\mathcal{A}))$ est réduit à 0 dans $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$. L'application Ψ est donc loin d'être injective dans tous les cas.

Théorème d'injectivité

Définition 3.34 *Une algèbre associative unifère sur $\mathbb{C}$ est dite centrale simple si elle est simple et si son centre est $\mathbb{C}$.*

Théorème 3.35 *Si l'algèbre $\mathcal{A}$ est centrale simple, alors Ψ est injective de $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ dans $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$.*

Démonstration : Nous allons utiliser le lemme suivant, démontré dans [47] :

Lemme 3.36 *Si $\mathcal{B}$ est une algèbre centrale simple et si $\mathcal{C}$ est une algèbre simple, alors $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ est une algèbre simple.*

Si $\mathcal{C}$ est en plus centrale simple, alors $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C}$ est centrale simple.

Le corollaire immédiat de ce lemme est que si $\mathcal{A}$ est centrale simple, alors $\mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}$ est centrale simple.

La démonstration du théorème repose alors sur la constatation suivante : Ker $\Psi \cap \mathfrak{T}^n\mathcal{A}$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$. En effet, soit $A = \sum_i a_{0,i} \otimes \cdots \otimes a_{n,i} \in \mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$ un élément du noyau de Ψ, et soit $B = b_0 \otimes \cdots \otimes b_n$ un élément de $\mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$. Alors

$$\Psi(AB)(c_1 \otimes \cdots \otimes c_n) = \sum_i a_{0,i} b_0 c_1 a_{1,i} b_1 \cdots c_{n-1} a_{n-1,i} b_{n-1} c_n a_{n,i} b_n$$

est nul car est de la forme $(\Psi(A)(b_0 c_1 \otimes \cdots \otimes b_{n-1} c_n)) b_n$. Ainsi, $AB \in$ Ker $\Psi \cap \mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$. Le même raisonnement en multipliant à gauche montre que $BA \in$ Ker $\Psi \cap \mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$.

La simplicité de l'algèbre $\mathcal{A}^{\otimes^{n+1}}$ pour tout n, implique alors Ker $\Psi = \{0\}$ puisque trivialement Ker $\Psi \cap \mathcal{A}^{\otimes^{n+1}} \neq \mathfrak{T}^n\mathcal{A}$ ($\mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \notin$ Ker Ψ pour tout n). □

Un exemple d'isomorphisme

Nous connaissons au moins deux algèbres centrales simples : l'algèbre de Heisenberg et l'algèbre des matrices sur $\mathbb{C}$ de dimension n. Pour cette dernière algèbre, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.37 *Soit $\mathcal{A} = M(n, \mathbb{C})$ l'algèbre des matrices complexes de dimension n. Alors Ψ réalise un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\mathfrak{T}\mathcal{A}$ et $C^*(\mathcal{A}; \mathcal{A})$.*

Démonstration : $M(n, \mathbb{C})$ est une algèbre de dimension n^2. Dans ce cas, $C^*(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}\mathcal{A}^*$ où $\mathcal{T}\mathcal{A}^*$ est l'algèbre tensorielle sur $\mathcal{A}^*$, le dual de $\mathcal{A}$. Compte tenu des dimensions de $\mathfrak{T}^n\mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \otimes \mathcal{T}^n\mathcal{A}^*$, et de l'injectivité de Ψ démontrée plus haut, Ψ est nécessairement un isomorphisme. □

Remarque 3.38 Ce qui joue un rôle important dans cette démonstration est la dimension finie. Ψ est donc un isomorphisme lorsque l'algèbre considérée est centrale simple et de dimension finie. Or, une telle algèbre ne peut être qu'une algèbre de matrices. Le résultat précédent est donc assez général.

Étudions les conséquences de cet isomorphisme d'algèbres différentielles graduées. $\mathfrak{T}M(n,\mathbb{C})$ va pouvoir s'identifier à l'algèbre $M(n,\mathbb{C})\otimes\mathcal{T}M(n,\mathbb{C})^*$, et $\Omega_U(M(n,\mathbb{C}))$ à une sous-algèbre.

Soient $\{E_k\}$ pour $k\in\{1,\ldots,n^2-1\}$ une base de matrices hermitiennes de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ (matrices de trace nulle). Alors $\{E_k\}\cup\{\mathbb{1}\}$ est une base de $M(n,\mathbb{C})$.

Décomposons la multiplication dans $M(n,\mathbb{C})$ sous la forme

$$E_kE_\ell = g_{k\ell}\mathbb{1} + \left(S^m_{k\ell} - \frac{i}{2}C^m_{k\ell}\right)E_m \tag{3.1}$$

avec $g_{k\ell}=g_{\ell k}$, $S^m_{k\ell}=S^m_{\ell k}$ réels et $C^m_{k\ell}=-C^m_{\ell k}$ réels (constantes de structure de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$). Ainsi, $[E_k,E_\ell]=-iC^m_{k\ell}E_m$. On peut remarquer que

$$g_{k\ell}=\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(E_kE_\ell)$$

et que $S^m_{k\ell}$ est sans trace, c'est-à-dire $g^{k\ell}S^m_{k\ell}=0$ où $(g^{k\ell})$ est la matrice inverse de $(g_{k\ell})$.

Notons ω^k une base duale de $\{iE_k\}\cup\{\mathbb{1}\}$, avec ω^0 dual de $\mathbb{1}$. Ainsi, $\omega^\ell(E_k)=-i\delta^\ell_k$. Cette convention trouvera sa justification plus tard.

Nous noterons par juxtaposition le produit dans $M(n,\mathbb{C})\otimes\mathcal{T}M(n,\mathbb{C})^*$ où nous identifions ω^k à $\mathbb{1}\otimes\omega^k$. Les matrices commutent avec les ω^k.

La différentielle $d_U=\delta$ de $C^*(M(n,\mathbb{C});M(n,\mathbb{C}))$ se définit en degré 0, pour $M,N\in M(n,\mathbb{C})$, par $d_UM(N)=[N,M]$. Pour $M=\mathbb{1}$, on a donc

$$d_U\mathbb{1}=0$$

et pour $M=E_k$ et $N=E_\ell$, un calcul simple donne

$$d_UE_k=-C^m_{k\ell}E_m\omega^\ell$$

Considérons maintenant d_U sur les éléments ω^ℓ de degré 1. Par définition,

$$d_U\omega^\ell(E_i,E_j)=E_i\omega^\ell(E_j)-\omega^\ell(E_iE_j)+\omega^\ell(E_i)E_j$$

Pour $\ell\geq 1$, on a donc

$$d_U\omega^\ell = iE_n(\omega^n\omega^\ell+\omega^\ell\omega^n) - i\left(S^\ell_{mn}-\frac{i}{2}C^\ell_{mn}\right)\omega^m\omega^n \tag{3.2}$$

et

$$d_U\omega^0=g_{mn}\omega^m\omega^n+iE_n(\omega^n\omega^0+\omega^0\omega^n)+\omega^0\omega^0$$

La sous-algèbre différentielle graduée $\Omega_U(M(n,\mathbb{C}))$ s'identifie aux cochaines normalisées, celles qui s'annulent dès que l'un de ses arguments est $\mathbb{1}$. Donc

$$\Omega_U(M(n,\mathbb{C}))\simeq M(n,\mathbb{C})\otimes\mathcal{T}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$$

où $\mathcal{T}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$ est engendré par les ω^ℓ pour $\ell \geq 1$.

L'élément $\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ de $\mathfrak{T}^1 M(n,\mathbb{C})$ s'envoie par Ψ sur $\rho : M \mapsto M$. Il s'écrit

$$\rho = \omega^0 + iE_k\omega^k$$

et vérifie

$$d_U\rho - \rho^2 = 0$$

3.3 Cohomologie cyclique

La cohomologie cyclique a été introduite par A. Connes en 1981 ([71]) à partir de considérations sur les traces d'opérateurs et les classes caractéristiques. Nous allons en donner un bref aperçu ici, en renvoyant à des textes plus spécialisés pour des compléments. Nous suivons principalement ici l'exposition d'A. Connes dans [11, 12].

3.3.1 Le complexe de Hochschild $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre associative, alors $\mathcal{A}^*$ est un bimodule sur $\mathcal{A}$ en posant, pour $\phi \in \mathcal{A}^*$ et $a, b, c \in \mathcal{A}$,

$$(a\phi b)(c) = \phi(bca)$$

On considère alors le complexe de Hochschild pour ce bimodule. Pour $\phi \in C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$, on note $\phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ la valeur de cette cochaine sur $a_0 \in \mathcal{A}$, où $\phi(\,\cdot\,, a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^*$. On peut donc considérer ces cochaines comme des applications $n+1$-linéaires sur $\mathcal{A}$.

L'opérateur de cobord δ prend la forme

$$\begin{aligned}\delta\phi(a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}) &= \phi(a_0a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \phi(a_0, a_1, \ldots, a_pa_{p+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1}\phi(a_{n+1}a_0, a_1, \ldots, a_n)\end{aligned}$$

Cas $\mathcal{A} = C^\infty(V)$

Soit V une variété différentiable compacte, et $\mathcal{A} = C^\infty(V)$ l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur cette variété. Pour la topologie sur $\mathcal{A}$ définie par les semi-normes

$$p_n(f) = \sup_{|\alpha|\leq n} |\partial^\alpha f|$$

sur les cartes locales de V, il est possible de ne considérer que les formes multilinéaires continues sur $\mathcal{A}$.

A. CONNES a alors montré le résultat suivant ([72]) :

Proposition 3.39 *Soit $H^*_c(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$ la cohomologie de Hochschild des cochaines continues. L'application $\phi \mapsto C_\phi$ définie pour $[\phi] \in H^k_c(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$ par*

$$\langle C_\phi, f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_k \rangle = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{|\sigma|} \phi(f_0, f_{\sigma(1)}, \ldots, f_{\sigma(k)})$$

pour tout $f_0, \ldots, f_k \in C^\infty(V)$ est un isomorphisme canonique entre $H^k_c(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$ et les courants de de Rham de dimension k sur V.

Ce résultat montre que le complexe de de Rham des courants est contenu (moyennant la condition de continuité) dans la structure algébrique de $C^\infty(V)$. C'est un encouragement de plus à définir purement algébriquement des objets de géométrie différentielle dans un cadre non commutatif. Il faut comparer ce résultat au théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg.

Nous verrons plus loin que le bord de de Rham a un équivalent par cet isomorphisme.

3.3.2 La cohomologie cyclique

La cohomologie cyclique est obtenue en considérant un sous-complexe de $(C^*(\mathcal{A};\mathcal{A}^*), \delta)$ de cochaines qui vérifient une certaine propriété de symétrie. Soit $C^n_\lambda(\mathcal{A})$ l'ensemble des cochaines $\phi \in C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$ vérifiant

$$\phi(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_0) = (-1)^n \phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

Lemme 3.40 *$C^*_\lambda(\mathcal{A}) = \oplus_{n \geq 0} C^n_\lambda(\mathcal{A})$ est stable par δ.*

Nous noterons b la différentielle δ restreinte à ce complexe.

$$\begin{aligned} b\phi(a_0, \ldots, a_{n+1}) &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \phi(a_o, \ldots, a_p a_{p+1}, \ldots, a_{n+1}) \\ &\quad + (-1)^{n+1} \phi(a_{n+1} a_0, \ldots, a_n) \end{aligned}$$

DÉFINITION 3.41 *La cohomologie de $(C^*_\lambda(\mathcal{A}), b)$ est la cohomologie cyclique de $\mathcal{A}$, notée $HC^*(\mathcal{A})$.*

Pour $n = 0$, $HC^0(\mathcal{A}) = Z^0_\lambda(\mathcal{A})$ est exactement l'espace vectoriel des traces sur $\mathcal{A}$.

Cette cohomologie n'est pas triviale et n'est pas une rétraction de $H^*(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$, comme le montre le résultat suivant, qui sera utile par la suite :

Lemme 3.42 *Pour $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, la cohomologie $H^*(\mathbb{C}; \mathbb{C}^*)$ est triviale, alors que $HC^{2p}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et $HC^{2p+1}(\mathbb{C}) = 0$.*

Nous noterons $\sigma \in C^2_\lambda(\mathbb{C})$ le générateur de cette cohomologie, défini par $\sigma(1,1,1) = 1$. $HC^*(\mathbb{C})$ est donc l'algèbre des polynômes en $[\sigma]$, où $[\sigma]$ est de degré 2.

3.3.3 Cycles

Nous allons constater ici en quoi la cohomologie cyclique est reliée à la notion de trace. Pour cela, nous allons introduire la notion de cycle, qui est une version algébrique de la notion d'intégration de formes différentielles sur une variété.

Définition 3.43 *Un cycle de dimension n est une triplet $(\Omega, d, \int)$ où $\Omega = \oplus_{0 \leq p \leq n} \Omega^p$ est une algèbre graduée sur $\mathbb{C}$, d une dérivation graduée de degré 1 et de carré nul sur cette algèbre, et $\int : \Omega^n \to \mathbb{C}$ une trace graduée fermée sur Ω.*

Un cycle sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ est un cycle $(\Omega, d, \int)$ et un homomorphisme $\rho : \mathcal{A} \to \Omega^0$.

A tout cycle de dimension n sur $\mathcal{A}$, on fait correspondre une application $(n+1)$-linéaire τ sur $\mathcal{A}$ en posant

$$\tau(a_0, \ldots, a_n) = \int \rho(a_0) d\rho(a_1) \ldots d\rho(a_n)$$

τ est appelée le caractère du cycle.

Exemple 3.44 Soit V une variété différentiable compacte, et soit C un courant fermé de de Rham sur V de dimension n. Alors ce courant définit un cycle sur $C^\infty(V)$ en prenant l'algèbre différentielle $\Omega = \Omega(V)$ des formes différentielles sur V (en la restreignant aux formes de degré $\leq n$ si nécessaire) et pour tout $\omega \in \Omega^n(V)$,

$$\int \omega = \langle C, \omega \rangle$$

est le couplage entre courants et formes, ce qui définit bien une trace fermée. $\diamondsuit$

D'autres exemples sont donnés dans [12].

Lemme 3.45 *Le caractère τ d'un cycle de dimension n sur $\mathcal{A}$ est un élément de $Z^n_\lambda(\mathcal{A})$.*

Démonstration : Il suffit de vérifier par le calcul direct, en utilisant les propriétés de la trace $\int$, que τ est cyclique et fermé. $\square$

Ce lemme admet une réciproque sous la forme :

Proposition 3.46 *Si $\tau \in Z^n_\lambda(\mathcal{A})$, alors il existe un cycle de dimension n sur $\mathcal{A}$ tel que τ en soit son caractère.*

Démonstration : Nous allons nous contenter de donner l'idée clé de cette démonstration. Elle consiste à considérer le calcul différentiel universel sur l'algèbre $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}\mathbb{1}$, obtenue en adjoignant à $\mathcal{A}$ une unité (même si $\mathcal{A}$ en a déjà une). Alors τ devient un caractère sur le cycle dont l'algèbre différentielle graduée est la restriction aux degrés $\leq n$ de $\Omega_U(\widetilde{\mathcal{A}})$ et $\rho : \mathcal{A} \to \widetilde{\mathcal{A}}$ est $a \mapsto (a, 0)$. $\square$

Plus généralement, à toute forme $(n+1)$-linéaire ϕ sur $\mathcal{A}$, on peut associer une forme linéaire $\widehat{\phi}$ sur $\Omega^n_U(\widetilde{\mathcal{A}})$ de la façon suivante. Notons

$$j : \widetilde{\mathcal{A}}^{\otimes^{n+1}} \to \Omega^n_U(\widetilde{\mathcal{A}})$$

l'application surjective

$$(a_0 + \lambda_0\mathbb{1}) \otimes (a_1 + \lambda_1\mathbb{1}) \otimes \cdots \otimes (a_n + \lambda_n\mathbb{1}) \mapsto a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n + \lambda_0 d_U a_1 \dots d_U a_n$$

où nous rappelons que $d_U(a + \lambda\mathbb{1}) = \mathbb{1} \otimes a - a \otimes \mathbb{1}$ dans $\Omega_U(\widetilde{\mathcal{A}})$.

Alors par définition, on pose

$$\widehat{\phi} \circ j((a_0 + \lambda_0\mathbb{1}) \otimes (a_1 + \lambda_1\mathbb{1}) \otimes \cdots \otimes (a_n + \lambda_n\mathbb{1})) = \phi(a_0, \dots, a_n)$$

Il est facile de voir que cette application est bien définie sur $\Omega^n_U(\widetilde{\mathcal{A}})$, et que (grâce à l'adjonction d'une unité) on a $\widehat{\phi}(d_U\omega) = 0$. Réciproquement, la donnée d'une telle application sur $\Omega^n_U(\widetilde{\mathcal{A}})$ définit une forme $(n+1)$-linéaire sur $\mathcal{A}$.

Étant donnés deux cycles $(\Omega, d, \int)$ et $(\Omega', d', \int')$, il est possible de définir le cycle produit tensoriel, en posant (Ω'', d'') le produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées, et $\int''$ la trace graduée fermée

$$\int'' \omega \otimes \omega' = \int \omega \int' \omega'$$

3.3.4 Le cup produit

Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres associatives. Par propriété universelle de Ω_U, il existe un unique homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$\pi : \Omega_U(\widetilde{\mathcal{A}} \otimes \widetilde{\mathcal{B}}) \to \Omega_U(\widetilde{\mathcal{A}}) \otimes \Omega_U(\widetilde{\mathcal{B}})$$

DÉFINITION 3.47 *Pour $\phi \in C^n(\mathcal{A}; \mathcal{A}^*)$ et $\psi \in C^m(\mathcal{B}; \mathcal{B}^*)$, on définit le cup produit $\phi\sharp\psi \in C^*(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}; (\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})^*)$ en posant*

$$\widehat{\phi\sharp\psi} = (\widehat{\phi} \otimes \widehat{\psi}) \circ \pi$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.48 *[12]*

1. *Le cup produit induit un homomorphisme*

$$HC^n(\mathcal{A}) \otimes HC^m(\mathcal{B}) \to HC^{n+m}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$$

2. *Le caractère du produit tensoriel de deux cycles est le cup produit des caractères.*

Le corollaire qui nous intéresse pour la suite est le suivant :

Corollaire 3.49 *Chaque $HC^*(\mathcal{A})$ est un module sur $HC^*(\mathbb{C})$.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de $\mathcal{A}\otimes\mathbb{C} = \mathbb{C}\otimes\mathcal{A} = \mathcal{A}$. □

Il peut être montré de plus que la structure de module à droite est la même que la structure de module à gauche.

Ce corollaire permet la définition

DÉFINITION 3.50 *On définit l'application $S : HC^n(\mathcal{A}) \to HC^{n+2}(\mathcal{A})$ comme la multiplication par $[\sigma] \in HC^2(\mathbb{C})$.*

3.3.5 La suite exacte longue reliant $HC^*(\mathcal{A})$ et $H^*(\mathcal{A}; \mathcal{A}^*)$

Puisque $(C^*_\lambda(\mathcal{A}), b)$ est un sous-complexe de $(C^*(\mathcal{A}; \mathcal{A}^*), \delta)$, l'inclusion induit la suite exacte courte de complexes

$$0 \to C^*_\lambda \xrightarrow{i} C^* \to C^*/C^*_\lambda \to 0$$

(en simplifiant les notations).

Par la Proposition A.7, il existe une suite exacte longue

$$\cdots \xrightarrow{\partial} H^n(C^*_\lambda) \xrightarrow{i} H^n(C^*) \to H^n(C^*/C^*_\lambda) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(C^*_\lambda) \xrightarrow{i} \ldots \tag{3.3}$$

où $H^n(C^*_\lambda) = HC^n$ par définition.

Cette suite exacte peut être modifiée en calculant $H^n(C^*/C^*_\lambda)$. Pour cela, on introduit les opérateurs suivants :

$A : C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \to C^n_\lambda(\mathcal{A})$,

$$A\phi = \sum_{\gamma\in\Gamma_{n+1}} (-1)^{|\gamma|}\phi^\gamma$$

où Γ_{n+1} est le groupe des permutations cycliques de $n+1$ éléments et ϕ^γ est l'action évidente de γ sur ϕ.

$D : C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \to C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$,

$$D\phi = \phi - (-1)^{|\gamma_0|}\phi^{\gamma_0}$$

où γ_0 est le générateur de Γ_{n+1}, $\gamma_0(k) = k-1$.

$b' : C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \to C^{n+1}(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$,

$$b'\phi(a_0,\ldots,a_n) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p\phi(a_0,\ldots,a_pa_{p+1},\ldots,a_{n+1})$$

$s : C^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \to C^{n-1}(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$,

$$s\phi(a_0,\ldots,a_{n-1}) = (-1)^{n-1}\phi(a_0,\ldots,a_{n-1},1)$$

On alors

Lemme 3.51 *$DA = AD = 0$, $b'^2 = 0$, $Ab' = bA$, $Db = b'D$, $b's + sb' = \mathrm{Id}$.*

Si on pose $B = AsD$, alors $B^2 = 0$ et $Bb + bB = 0$. Donc B passe en cohomologie.

Faisons remarquer que dans la Proposition 3.39, le bord de de Rham sur les courants correspond à l'opérateur $i \circ B : H^k(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \to H^{k-1}(\mathcal{A};\mathcal{A}^*)$ dans l'identification.

À l'aide de ces opérateurs, il est possible de montrer [12]

Théorème 3.52 *On a*

$$H^n(C^*/C^*_\lambda) = HC^{n-1}(\mathcal{A})$$

et la suite exacte longue (3.3) devient

$$\cdots \xrightarrow{i} H^n(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \xrightarrow{B} HC^{n-1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{S} HC^{n+1}(\mathcal{A}) \xrightarrow{i} H^{n+1}(\mathcal{A};\mathcal{A}^*) \xrightarrow{B} \ldots$$

Grâce à ce résultat, il est possible de calculer la cohomologie cyclique de l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété compacte V :

Théorème 3.53 *Dans le cas où $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, pour tout k, $HC^k(\mathcal{A})$ est isomorphe à*

$$\operatorname{Ker} b \oplus H_{k-2}(V, \mathbb{C}) \oplus H_{k-4}(V, \mathbb{C}) \oplus \dots$$

où $H_*(V, \mathbb{C})$ est l'homologie des courants de de Rham pour le bord b.

Nous renvoyons à [12] pour la démonstration. Ce résultat montre que la cohomologie cyclique (continue) de $C^\infty(V)$ contient l'homologie de de Rham de la variété V.

3.4 Cohomologie basique

Nous voulons ici introduire un nouveau complexe canoniquement associé à une algèbre associative unifère $\mathcal{A}$, et calculer explicitement sa cohomologie. Ce travail a été présenté dans [88], et nous nous référons à cet article dans ce qui suit. Ce résultat montre que nous pouvons associer canoniquement à une algèbre associative $\mathcal{A}$ une cohomologie non triviale autre que celles que nous venons d'introduire.

Pour introduire ce complexe, nous allons tout d'abord construire une algèbre différentielle graduée $(C^*(\mathcal{A}), d)$, puis introduire dessus une opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$, et considérer l'algèbre différentielle graduée des éléments basiques pour cette opération. C'est la cohomologie de cette algèbre que nous appellerons *cohomologie basique de $\mathcal{A}$*.

3.4.1 L'algèbre différentielle graduée $C^*(\mathcal{A})$

Soit $C^n(\mathcal{A})$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur $\mathcal{A}^{\otimes^n}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ce pourrait être un corps quelconque $\mathbb{K}$).

On munit $C^*(\mathcal{A}) = \oplus_{n\geq 0} C^n(\mathcal{A})$ du produit défini par

$$(\alpha\beta)(a_1, \dots, a_{m+n}) = \alpha(a_1, \dots, a_m)\beta(a_{m+1}, \dots, a_{m+n})$$

pour $\alpha \in C^m(\mathcal{A})$ et $\beta \in C^n(\mathcal{A})$.

La différentielle d est définie sur cette algèbre graduée en posant, pour $\alpha \in C^m(\mathcal{A})$,

$$(d\alpha)(a_1, \dots, a_{m+1}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \alpha(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{m+1})$$

d est le prolongement en dérivation graduée de degré 1 à tout $C^*(\mathcal{A})$ du dual du produit (à un signe près), $\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\rightarrow\mathcal{A}$. Il est facile de vérifier, grâce à l'associativité de ce produit que $d^2=0$.

Il faut noter que ce complexe ressemble à un complexe de Hochschild.

3.4.2 Opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$

Pour $a\in\mathcal{A}_{\text{Lie}}$, posons $i_a : C^n(\mathcal{A})\rightarrow C^{n-1}(\mathcal{A})$,

$$(i_a\alpha)(a_1,\dots,a_{n-1})=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\alpha(a_1,\dots,a_k,a,a_{k+1},\dots,a_{n-1})$$

et $i_aC^0(\mathcal{A})=0$.

Lemme 3.54 *i_a est une dérivation graduée de degré -1 sur $C^*(\mathcal{A})$, et $L_a=i_ad+di_a$ est une dérivation graduée de degré 0 sur $C^*(\mathcal{A})$ donnée par*

$$(L_a\alpha)(a_1\otimes\cdots\otimes a_n)=\sum_{k=1}^{n}\alpha(a_1,\dots,[a_k,a],\dots,a_n)$$

Ces dérivations graduées définissent une opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ dans $C^*(\mathcal{A})$.

Comme d'habitude avec les opérations de Cartan, nous pouvons introduire la sous-algèbre graduée $C^*_H(\mathcal{A})$ des éléments horizontaux et les sous-algèbres différentielles graduées $C^*_I(\mathcal{A})$ et $C^*_B(\mathcal{A})$ des éléments respectivement invariants et basiques. Nous noterons $H^*_I(\mathcal{A})$ et $H^*_B(\mathcal{A})$ leurs cohomologies respectives. C'est la cohomologie basique $H^*_B(\mathcal{A})$ que nous nous proposons de calculer dans ce qui suit.

3.4.3 Résultats sur les cohomologies

Proposition 3.55 *Si $\mathcal{A}$ est unifère, alors $H^n(\mathcal{A})=H^n_I(\mathcal{A})=0$ pour $n\geq 1$, et $H^0(\mathcal{A})=H^0_I(\mathcal{A})=\mathbb{C}$.*

Démonstration : Pour $n\geq 1$, on définit $h : C^n(\mathcal{A})\rightarrow C^{n-1}(\mathcal{A})$ par

$$(h\alpha)(a_1,\dots,a_{n-1})=-\alpha(\mathbb{1},a_1,\dots,a_{n-1})$$

Alors on a $dh+hd=\text{Id}$ et $L_ah-hL_a=0$ sur $C^n(\mathcal{A})$ pour $n\geq 1$. Donc h est une homotopie contractante pour $\oplus_{n\geq 1}C^n(\mathcal{A})$ et $\oplus_{n\geq 1}C^n_I(\mathcal{A})$. □

La cohomologie basique, quant à elle, n'est pas triviale, comme le montre déjà le cas $\mathcal{A}=\mathbb{C}$:

Proposition 3.56 *La cohomologie basique $H_B^*(\mathbb{C})$ de $\mathbb{C}$ est l'algèbre libre graduée commutative unifère engendrée par un élément X en degré 2. Donc $H_B^*(\mathbb{C})$ s'identifie à l'algèbre $\mathbb{C}[X]$.*

Démonstration : On la trouvera dans [88]. □

Notons $\mathcal{I}_S^n(\mathcal{A}_{\text{Lie}})$ l'espace vectoriel des polynômes ad^*-invariants de degrés n sur l'algèbre de Lie $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$. On note $\mathcal{I}_S(\mathcal{A}_{\text{Lie}}) = \oplus_{n\geq 0}\mathcal{I}_S^n(\mathcal{A}_{\text{Lie}})$ l'algèbre des polynômes invariants.

Théorème 3.57 *La cohomologie basique $H_B^*(\mathcal{A})$ s'identifie à l'algèbre $\mathcal{I}_S(\mathcal{A}_{\text{Lie}})$ où le degré $2n$ de $H_B^*(\mathcal{A})$ s'envoie sur le degré n de $\mathcal{I}_S(\mathcal{A}_{\text{Lie}})$, et le reste sur 0. En particulier, cette cohomologie est une algèbre commutative.*

Démonstration : La démonstration de ce théorème est donnée dans [88]. Cependant, nous allons en donner une version simplifiée dans le cas de la dimension finie dans ce qui suit. □

3.4.4 Démonstration pour la dimension finie

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est de dimension finie, $C^*(\mathcal{A})$ s'identifie à $\mathcal{TA}^*$. On pose (e_i) une base de $\mathcal{A}$ et (e^i) sa base duale dans $\mathcal{A}^*$.

La première idée est d'augmenter le complexe de telle sorte que i devienne une différentielle δ. Cette idée est classique dans l'étude des cohomologies équivariantes ([2]). On considère donc $\mathcal{TA}^*$ comme sous-algèbre graduée de l'algèbre bigraduée $\mathcal{P} = \mathcal{SA}^* \otimes \mathcal{TA}^*$, où $\mathcal{SA}^*$ est l'algèbre symétrique sur $\mathcal{A}^*$. On note $\alpha \vee \beta$ le produit dans l'algèbre $\mathcal{SA}^*$.

On pose alors

$$\delta = \sum_i \mu(e^i) \otimes i_{e_i}$$

où $\mu(e^i)$ est la multiplication par e^i dans $\mathcal{SA}^*$. Ainsi, δ agissant sur $\mathcal{P}$ diminue d'un degré dans $\mathcal{TA}^*$ et augmente d'un degré dans $\mathcal{SA}^*$. Comme $i_{e_i}i_{e_j} + i_{e_j}i_{e_i} = 0$ et $\mu(e^i)\mu(e^j) = \mu(e^j)\mu(e^i)$, on a $\delta^2 = 0$.

On prolonge d à $\mathcal{P}$ tout entier, en posant $\mathrm{Id}_{\mathcal{SA}^*} \otimes d$. On conserve la notation d. d et δ ne commutent pas sur $\mathcal{P}$ tout entier.

On peut prolonger à $\mathcal{P}$ les dérivations L_a, en posant

$$L_a^S(\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \cdots \vee \alpha_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_1 \vee \cdots \vee L_a^S\alpha_k \vee \cdots \vee \alpha_n$$

où $(L_a^S\alpha)(b) = \alpha([b,a])$. Si L_a^T désigne la dérivation $i_a d + d i_a$ sur $\mathcal{TA}^*$, alors on pose $L_a = L_a^S + L_a^T$ sur $\mathcal{P}$.

Notons $\mathcal{I}^{m,n}$ les éléments de $\mathcal{P}^{m,n}$ invariants par tous les L_a pour $a \in \mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$. Alors $\mathcal{I} = \oplus \mathcal{I}^{m,n}$ est stable par d et δ et nous avons

Lemme 3.58 *d et δ anticommutent sur $\mathcal{I}$.*

Démonstration : On a $d\delta + \delta d = \sum_i \mu(e^i) \otimes L^T_{e_i}$. Donc sur $\mathcal{I}$, on a $d\delta + \delta d = -\sum_i \mu(e^i) L^S_{e_i} \otimes \mathrm{Id}$. Or, il est facile de voir que $\mu(e^i) L^S_{e_i}$ est nulle sur $\mathcal{S}\mathcal{A}^*$. □

Nous avons alors les résultats suivants :

Lemme 3.59 *$H^{m,n}(\mathcal{I}, d) = 0$ pour $n \geq 1$ et $H^{m,0}(\mathcal{I}, d) = \mathcal{I}^m_S(\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}})$.*

Ici, $\mathcal{I}^m_S(\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}})$ s'identifie aux éléments de $\mathcal{S}^m\mathcal{A}^*$ invariants pour les L^S_a.

Démonstration : Il suffit d'utiliser la même homotopie que dans la Proposition 3.55. □

Nous avons alors le lemme clé suivant :

Lemme 3.60 *$H^{m,n}(\mathcal{I}, \delta) = 0$ pour $m \geq 1$ et $H^{0,n}(\mathcal{I}, \delta) =$ ensemble des éléments basiques de $\mathcal{T}^n\mathcal{A}^*$.*

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, on a envie d'introduire une homotopie contractante. Un candidat naturel pour cette homotopie est l'application définie sur les $\omega^m_n = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_m \otimes \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_n$ pour $m \geq 1$ par

$$\ell\omega^m_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_{k-1} \vee \alpha_{k+1} \vee \cdots \vee \alpha_m \otimes \alpha_k \otimes \beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_n$$

Alors, sur un tel ω^m_n, on a

$$(\ell\delta + \delta\ell)\omega^m_n = m\omega^m_n + \Delta\omega^m_n \tag{3.4}$$

où Δ est un opérateur qui n'agit que sur $\mathcal{T}\mathcal{A}^*$:

$$\Delta(\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_n) = \sum_i e^i \otimes i_{e_i}(\beta_1 \otimes \cdots \otimes \beta_n)$$

On a alors les relations

$$\begin{aligned} \ell L_a &= L_a \ell \\ \delta\Delta &= \Delta\delta + \delta \\ L_a\Delta &= \Delta L_a \end{aligned}$$

Ainsi, ℓ respecte l'invariance. ℓ n'est pas une homotopie contractante à cause du Δ. Cet opérateur a cependant de bonnes propriétés. Posons

$$\Delta_p = \sum_{i_1,\ldots,i_p} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_p} \otimes i_{e_{i_1}} \ldots i_{e_{i_p}}$$

sur $\mathcal{TA}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta\Delta_p &= p\Delta_p + (-1)^p \Delta_{p+1} \\ \delta\Delta_p &= \Delta_p \delta + (-1)^p p \Delta_{p-1} \delta \end{aligned}$$

et si $\omega \in \bigwedge^n \mathcal{A}^* \subset \mathcal{T}^n\mathcal{A}^*$, alors $\Delta_n \omega = n\omega$.

Soit maintenant $\omega_n^m \in \mathcal{I}^{m,n}$ tel que $\delta\omega_n^m = 0$ et $m \geq 1$. Alors en appliquant (3.4) à ω_n^m, on a $m\omega_n^m = \delta\ell\omega_n^m - \Delta\omega_n^m$. En appliquant itérativement n fois (3.4) aux termes en Δ, et en utilisant les diverses relations, on trouve que $m\omega_n^m = \delta\omega(m,n) + c(m,n)\Delta_n\omega_n^m$, où $\omega(m,n)$ est un élément de $\mathcal{I}$, et $c(m,n)$ une constante. Par construction même de Δ_n, nous avons $\Delta\omega_n^m \in \mathcal{S}^m\mathcal{A}^* \otimes \bigwedge^n \mathcal{A}^*$. Donc, en appliquant une fois de plus (3.4) à ce terme, on trouve $(m+n)\Delta_n\omega_n^m = \delta\ell\Delta_n\omega_n^m$, ce qui implique que ω_n^m est le cobord d'un élément de $\mathcal{I}$.

Le cas $m = 0$ étant trivial, ceci démontre le lemme. □

Revenons maintenant à la démonstration du théorème. Un élément $\alpha \in \mathcal{TA}^*$ est horizontal si et seulement si $\delta\alpha = 0$. Soit donc $\alpha_n \in \mathcal{I}^{0,n} \subset \mathcal{T}^n\mathcal{A}^*$ un cocycle basique pour $n \geq 1$. Alors on a $d\alpha_n = 0$ et $\delta\alpha_n = 0$. La trivialité de la cohomologie invariante de d montre qu'il existe $\omega_{n-1} \in \mathcal{I}^{0,n-1}$ tel que $\alpha_n = d\omega_{n-1}$. En appliquant δ à cette relation, on trouve que $d\delta\omega_{n-1} = 0$. Il existe donc $\omega_{n-3}^1 \in \mathcal{I}^{1,n-3}$ tel que $\delta\omega_{n-1} + d\omega_{n-3}^1 = 0$. En itérant cette construction, on trouve une suite $\omega_{n-2p-1}^p \in \mathcal{I}^{p,n-2p-1}$ telle que

$$\delta\omega_{n-2p+1}^{p-1} + d\omega_{n-2p-1}^p = 0 \tag{3.5}$$

Si pour $p \geq 1$, on a $\delta\omega_{n-2p-1}^p = 0$, alors par trivialité de la cohomologie de δ, il existe $\eta_{n-2p}^{p-1} \in \mathcal{I}^{p-1,n-2p}$ tel que $\delta\eta_{n-2p}^{p-1} = \omega_{n-2p-1}^p$. En reportant ce résultat dans (3.5), on a $\delta(\omega_{n-2p+1}^{p-1} - d\eta_{n-2p}^{p-1}) = 0$. D'où

$$\omega_{n-2p+1}^{p-1} - d\eta_{n-2p}^{p-1} = \delta\eta_{n-2p+2}^{p-2} \tag{3.6}$$

En itérant, on construit une suite d'éléments η_{n-2p}^{p-1} de $\mathcal{I}$ vérifiant (3.6). On arrive alors à $\delta(\omega_{n-1} - d\eta_{n-2}^0) = 0$. Cette relation signifie que $\omega_{n-1} - d\eta_{n-2}^0$ est basique. Or, $\alpha_n = d\omega_{n-1} = d(\omega_{n-1} - d\eta_{n-2}^0)$. Donc la classe de cohomologie basique de α_n est nulle.

Si maintenant aucun ω^p_{n-2p-1} ne vérifie $\delta\omega^p_{n-2p-1} = 0$, alors la descente continue jusqu'à $n-2p-1$ très petit.

Considérons le premier cas où $n = 2q+1$. Pour $p = q-1$, on a $\delta\omega_4^{q-2} + d\omega_2^{q-1} = 0$, d'où $d\delta\omega_2^{q-1} = 0$. Or, $\delta\omega_2^{q-1}$ est de degré $(q,1)$, donc ne peut pas être le d d'un élément non nul. Il est donc nul, et l'on revient au cas précédent.

Considérons alors le cas $n = 2q$, et $p = q-1$. On doit avoir $d\delta\omega_1^{q-1} = 0$, ce qui est vrai pour tout ω_1^{q-1}. On pose donc $P^q = \delta\omega_1^{q-1} \in \mathcal{S}^q\mathcal{A}^*$, invariant. Il est alors facile, en reconsidérant la chaine de remontée (3.6), qu'il y a équivalence entre la classe de cohomologie basique de α_{2q} et le polynôme invariant P^q.

Ceci termine la démonstration du théorème en dimension finie.

3.4.5 Opération de $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ dans $C^*(\mathcal{A})$

L'opération de $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ dans $C^*(\mathcal{A})$ qui nous a permis d'introduire la cohomologie basique se généralise en une opération de l'algèbre de Lie graduée $C^*(\mathcal{A};\mathcal{A})$ dans $C^*(\mathcal{A})$.

Définition 3.61 *Soit $f \in C^m(\mathcal{A};\mathcal{A})$ et $\alpha \in C^n(\mathcal{A})$. On pose $i_f\alpha \in C^{m+n-1}(\mathcal{A})$*

$$(i_f\alpha)(a_1,\dots,a_{m+n-1}) = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{(m-1)(p-1)}\alpha(a_1,\dots,a_{p-1},f(a_p,\dots,a_{p+m-1}),a_{p+m},\dots,a_{m+n-1})$$

Dans le cas $m = 0$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{A}$, on retrouve l'opération de $\mathcal{A}_{\mathrm{Lie}}$ dans $C^*(\mathcal{A})$.

Proposition 3.62 *Pour $f \in C^m(\mathcal{A};\mathcal{A})$, i_f est une dérivation graduée de degré $m-1$ sur $C^*(\mathcal{A})$. On a de plus*

$$[d, i_f]_{\mathrm{gr}} = i_{\delta f}$$

où $[\ ,\ ]_{\mathrm{gr}}$ est le commutateur gradué (d est de degré 1 et i_f de degré $m-1$ si $f \in C^m(\mathcal{A};\mathcal{A})$)

Démonstration : C'est un calcul long mais sans difficulté. □

Chapitre 4

Un peu de K-théorie

"Car Dieu est le compactifié d'Alexandrov de l'univers."
Groth. IV. 22.[1]

Dans ce chapitre, nous voudrions donner un bref aperçu de la K-théorie, telle qu'elle peut être utile en géométrie non commutative. En particulier, nous allons voir l'intérêt d'introduire des modules.

4.1 K-théorie des fibrés vectoriels

4.1.1 Définitions et propriétés

Soit X un espace topologique, et considérons au-dessus de cet espace les fibrés vectoriels localement triviaux de rangs finis, (E, p, X) où E est le fibré vectoriel, $p : E \to X$ est la projection (continue). Génériquement, nous dirons fibré vectoriel pour fibré vectoriel localement trivial de rang fini.

À deux fibrés vectoriels E et F au-dessus de X, on sait associer un troisième fibré vectoriel, appelé somme de Whitney, noté $E \oplus F$, dont chaque fibre au-dessus de $x \in X$ est la somme directe des fibres de E et F en x. Un fibré vectoriel du type $X \times V$ où V est un espace vectoriel de dimension finie, sera dit trivial.

Nous devons le théorème suivant à J.-P. Serre et Swan :

Théorème 4.1 *Soit E un fibré vectoriel localement trivial de rang fini au-dessus d'un espace topologique compact X. Alors il existe un fibré vectoriel F localement trivial de rang fini sur X tel que $E \oplus F$ soit trivial.*

[1] repris de [9, p. 97].

Ce théorème signifie qu'en utilisant la somme de Whitney, il est toujours possible de “détordre” un fibré vectoriel (localement trivial) au-dessus d'un espace compact.

On note $[E]$ la classe d'isomorphie du fibré vectoriel E, et $[m]$ la classe d'isomorphie du fibré vectoriel trivial dont la fibre est de dimension m.

On peut facilement montrer que la classe d'isomorphie de $E \oplus F$ ne dépend que des classes d'isomorphie de E et F. On pose donc naturellement :

DÉFINITION 4.2 *On note $V(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence (pour l'isomorphie) des fibrés vectoriels sur X, muni de la loi interne commutative $[E] + [F] = [E \oplus F]$, qui fait de $V(X)$ un semi-groupe abélien d'élément neutre* $[0]$.

Cet ensemble $V(X)$ a de bonnes propriétés par rapport à X, que l'on résume dans le résultat suivant :

Proposition 4.3 *V est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques compacts dans la catégorie des semi-groupes abéliens.*

La démonstration est de l'ordre de la vérification.

4.1.2 Les groupes $K(X)$

Si X est un espace topologique compact, on définit le groupe abélien $K^0(X)$ comme le groupe universel enveloppant du semi-groupe $V(X)$ (voir A.3).

K^0 est alors un foncteur contravariant comme V.

Les applications $p : x \mapsto x_0$ et $\iota : x_0 \mapsto x$ sont continues entre X et $\{x_0\}$ pour n'importe quel $x_0 \in X$, avec $p \circ \iota = \mathrm{Id}_{\{x_0\}}$. On a donc des applications $\iota^* : K^0(X) \to K^0(\{x_0\})$ et $p^* : K^0(\{x_0\}) \to K^0(X)$ telles que $\iota^* \circ p^* = \mathrm{Id}_{K^0(\{x_0\})}$. En particulier, p^* est injective. Or, il est facile de voir que $K^0(\{x_0\}) = \mathbb{Z}$, donc $K^0(X)$ contient toujours une copie de $\mathbb{Z}$.

On définit, pour tout $X \neq \emptyset$ espace topologique compact, le groupe réduit $\tilde{K}^0(X) = K^0(X)/\mathbb{Z}$. L'application ι^* scinde la suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z} \to K^0(X) \to \tilde{K}^0(X) \to 0$$

donc $K^0(X) = \tilde{K}^0(X) \oplus \mathbb{Z}$. Cette construction est indépendante du point x_0 choisi dans X.

Dans le cas où X n'est pas compact, mais seulement localement compact, on considère $X^+ = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de X. On pose alors $K^0(X) = \tilde{K}^0(X^+)$.

Ainsi, en prenant $\tilde{K}^0$ sur l'espace $X \cup \{\infty\}$, on retire une contribution de $\mathbb{Z}$ qui moralement viendrait du point ∞.

Lemme 4.4 *Soit X un espace compact et Y un sous-espace fermé de X. Alors on a la suite exacte*

$$K^0(X\backslash Y) \to K^0(X) \to K^0(Y)$$

On trouvera la démonstration dans [28] par exemple.

On peut définir des groupes d'ordre supérieur. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$K^{-n}(X) = K^0(X \times \mathbb{R}^n)$$

où $S^n(X) = X \times \mathbb{R}^n$ est la n-ième suspension réduite de X.

Cette construction permet de construire une suite exacte longue :

Proposition 4.5 *Soit X un espace compact et $Y \subset X$ un sous-espace fermé. Alors on a une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow K^{-n-1}(Y) \xrightarrow{\delta} K^{-n}(X\backslash Y) \longrightarrow K^{-n}(X) \longrightarrow K^{-n}(Y) \\ \xrightarrow{\delta} \cdots \\ \cdots \xrightarrow{\delta} K^0(X\backslash Y) \longrightarrow K^0(X) \longrightarrow K^0(Y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tous les groupes $K^{-n}(X)$ ne sont pas indépendants, comme le montre le résultat suivant, connu sous le nom de périodicité de Bott :

Proposition 4.6 *On a $K^0(S^2(X)) = K^0(X)$ pour tout espace topologique X si on considère les fibrés vectoriels complexes.*

Dans le cas des fibrés vectoriels réels, la périodicité est de 8. Nous renvoyons à [3] pour la démonstration.

Corollaire 4.7 *La suite exacte longue (4.1) se réduit à*

$$\begin{tikzcd} K^{-1}(X\backslash Y) \arrow[r] & K^{-1}(X) \arrow[r] & K^{-1}(Y) \arrow[d, "\delta"] \\ K^0(Y) \arrow[u, "\delta"] & K^0(X) \arrow[l] & K^0(X\backslash Y) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

4.1.3 Sections

Dans la définition précédente des groupes $K^0(X)$, nous avons utilisé surtout une approche géométrique, en considérant les fibrés vectoriels. Une approche plus algébrique est possible, en considérant les espaces de sections.

Soit $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues sur X. On note $\Gamma(E)$ l'espace des sections sur un fibré vectoriel E sur X. Alors on sait que $\Gamma(E)$ est un module sur $C(X)$. Par le théorème de Serre-Swan, si X est compact, $\Gamma(E)$ est un module projectif de type fini sur $C(X)$. Un isomorphisme de fibrés vectoriels induit un isomorphisme sur les modules des sections. Si E est trivial, $[E]=[n]$, alors $\Gamma(E) \simeq C(X)^n$.

Si X est un espace compact, on peut montrer qu'il y a équivalence entre la donnée d'un module projectif de type fini sur $C(X)$ et d'un fibré vectoriel localement trivial sur X. Cette correspondance se réalise en considérant pour tout module projectif de type fini $\mathcal{M}$ tel que $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = C(X)^n$, la projection $p : C(X)^n \to C(X)^n$ sur $\mathcal{M}$. On peut interpréter p comme une matrice dans $M(n, C(X)) \simeq C(X \to M(n, \mathbb{C}))$, et on pose

$$E_{\mathcal{M}} = \{(x, \xi) \in X \otimes \mathbb{C}^n \ / \ \xi \in \operatorname{Im} p(x)\}$$

$E_{\mathcal{M}}$ est un fibré vectoriel sur X, dont le module des sections est $\mathcal{M}$.

L'ensemble des classes d'équivalence des modules projectifs de type fini sur $C(X)$ est un semi-groupe abélien pour la somme directe de modules, et $K^0(X)$ est isomorphe à son groupe universel enveloppant.

4.1.4 Projecteurs

Pour montrer l'équivalence entre les fibrés vectoriels et les modules projectifs de type fini, nous avons utilisé un projecteur. Nous allons voir que ces projecteurs peuvent servir à définir directement les groupes $K^0(X)$.

Soit l'algèbre $M_\infty(C(X)) = \cup_{n=0}^{\infty} M(n, C(X))$. On peut considérer les projecteurs dans cette algèbre, c'est-à-dire les éléments $p \in M_\infty(C(X))$ tels que $p^2 = p$.

Définition 4.8 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Deux projecteurs p et q sont équivalents (algébriquement) s'il existe a et b dans $\mathcal{A}$ tels que $p = ab$ et $q = ba$.*

Si $\mathcal{M}$ est un module projectif de type fini sur $C(X)$, alors on lui associe comme précédemment un projecteur dans $M(n, C(X))$. Si $\mathcal{N}$ est un autre module projectif de type fini isomorphe à $\mathcal{M}$, alors le projecteur q qu'on lui associe est équivalent à p au sens précédent.

Il est facile de voir que si $p \in M_\infty(C(X))$ est un projecteur, alors il est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \in M_\infty(C(X))$$

où p est lui-même identifié à

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_\infty(C(X))$$

Ces deux projecteurs sont orthogonaux (leur produit est nul). Ainsi, si p et q sont deux projecteurs de $M_\infty(C(X))$, alors il existe p' et q' respectivement équivalents à p et q tels que p' soit orthogonal à q'.

Dans l'ensemble des classes d'équivalence des projecteurs dans $M_\infty(C(X))$, on définit une addition en posant

$$[p] + [q] = [p' \oplus q']$$

où $p' \oplus q'$ est la somme directe habituelle de deux projecteurs orthogonaux. Cette définition est encore équivalente à prendre pour $[p] + [q]$ la classe d'équivalence de

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

dans $M_\infty(C(X))$.

Muni de cette composition, l'ensemble des classes d'équivalence des projecteurs dans $M_\infty(C(X))$ est un semi-groupe, dont le groupe universel enveloppant est $K^0(X)$.

4.1.5 Structure d'anneau sur $K^0(X)$

Pour définir la structure de groupe (l'addition) sur $K^0(X)$, il faut utiliser la somme directe des fibrés vectoriels. On peut définir un produit sur $K^0(X)$ en considérant le produit tensoriel des fibrés vectoriels. Ce produit induit une structure d'anneau sur $K^0(X)$.

Cette structure d'anneau peut aussi être introduite en considérant les modules projectifs de type finis, pour lesquels le produit tensoriel sur l'algèbre $C(X)$ est parfaitement bien défini puisque l'algèbre $C(X)$ est commutative. Nous reviendrons sur ce point plus tard, lorsqu'on considérera des algèbres non commutatives.

4.2 K-théorie des C^*-algèbres

4.2.1 Définitions et premières propriétés

Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre. On a vu que si $\mathcal{A}$ est commutative, c'est l'algèbre des fonctions continues sur un espace topologique localement compact (et compact si $\mathcal{A}$ est unifère). Pour les C^*-algèbres commutatives, on vient de voir comment construire une K-théorie, c'est-à-dire un ensemble de groupes abéliens (deux en pratique !) qui donnent des informations sur l'algèbre considérée.

Il est possible de généraliser cette construction aux C^*-algèbres quelconques. Pour cela, il faut prendre l'une des constructions purement algébrique de la K-théorie des espaces localement compacts.

Dans une C^*-algèbre $\mathcal{A}$, un projecteur p est un élément tel que $p = p^* = p^2$.

DÉFINITION 4.9 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre. On note $M_\infty(\mathcal{A}) = \cup_{n=0}^{\infty} M(n, \mathcal{A})$. Deux projecteurs p et q dans cette algèbre sont dits équivalents s'il existe $v \in M_\infty(\mathcal{A})$ tel que $p = v^*v$ et $q = vv^*$. On note $p \sim q$ cette relation d'équivalence, et $[p]$ la classe d'équivalence de p.*

L'ensemble

$$V(\mathcal{A}) = \{[p] \ / \ p = p^* = p^2 \in M_\infty(\mathcal{A})\}$$

est un semi-groupe abélien pour l'addition

$$[p] + [q] = \left[\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \right] = [p' \oplus q']$$

où $p' \sim p$ et $q' \sim q$ sont tels que p' et q' soient orthogonaux.

REMARQUE 4.10 Cette définition de $V(\mathcal{A})$ peut être considérée pour une algèbre involutive $\mathcal{A}$ quelconque. Néanmoins, pour des considérations ultérieures, il est souhaitable d'avoir une C^*-algèbre.

Proposition 4.11 *Si $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme, alors l'application induite $\alpha_* : V(\mathcal{A}) \to V(\mathcal{A})$ donnée par $\alpha_*[(a_{ij})] = [(\alpha(a_{ij}))]$ est un homomorphisme de semi-groupes. Donc $\mathcal{A} \mapsto V(\mathcal{A})$ est un foncteur covariant de la catégorie des C^*-algèbres dans la catégorie des semi-groupes abéliens.*

EXEMPLE 4.12 Soit $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. Dans $M_\infty(\mathbb{C})$, deux projecteurs sont équivalents si ils ont même rang. Donc on a $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{A} = M(n, \mathbb{C})$. Comme $M_\infty(M(n, \mathbb{C})) = M_\infty(\mathbb{C})$, on a $V(M(n, \mathbb{C})) = \mathbb{N}$. $\diamondsuit$

EXEMPLE 4.13 Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable de dimension infinie. Pour $\mathcal{A} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, on a $M(n, \mathcal{K}(\mathcal{H})) \simeq \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Dans $\mathcal{K}(\mathcal{H})$, tout projecteur est de dimension finie, donc $V(\mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathbb{N}$.

Si $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors on a $M(n, \mathcal{L}((\mathcal{H})) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$. On peut montrer qu'il existe des projecteurs de rang infini dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Mais deux projecteurs sont équivalents dès que leur rang sont égaux, d'où $V(\mathcal{L}(\mathcal{H})) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. $\diamondsuit$

4.2.2 Le groupe $K_0(\mathcal{A})$

Soit $K_{00}(\mathcal{A})$ le groupe universel enveloppant de $V(\mathcal{A})$. Tout élément de ce groupe s'écrit comme différence formelle $[p]-[q]$ où $[p],[q]$ sont des éléments de $V(\mathcal{A})$. On note $i_{\mathcal{A}}$ l'homomorphisme canonique de $V(\mathcal{A})$ dans $K_{00}(\mathcal{A})$, $[p]\mapsto[p]-[0]$.

On a donc en particulier $K_{00}(\mathbb{C})=\mathbb{Z}$.

Tout comme V, K_{00} est un foncteur covariant. Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ la C^*-algèbre obtenue de $\mathcal{A}$ en lui adjoignant une unité. Alors la projection $\pi:\tilde{\mathcal{A}}\to\mathbb{C}$, donnée par $(a,\lambda)\mapsto\lambda$, induit un homomorphisme $\pi_*:K_{00}(\tilde{\mathcal{A}})\to\mathbb{Z}$.

Définition 4.14 *Le groupe $K_0(\mathcal{A})$ est défini par $K_0(\mathcal{A})=\operatorname{Ker}\pi_*$.*

L'inclusion $\iota:\mathbb{C}\to\tilde{\mathcal{A}}$ scinde la suite exacte courte

$$0\to\mathcal{A}\to\tilde{\mathcal{A}}\xrightarrow{\pi}\mathbb{C}\to 0$$

Donc la suite exacte courte

$$0\to K_0(\mathcal{A})\to K_{00}(\tilde{\mathcal{A}})\to\mathbb{Z}\to 0$$

est scindée, ce qui signifie que

$$K_{00}(\tilde{\mathcal{A}})\simeq K_0(\mathcal{A})\oplus\mathbb{Z}$$

En particulier, si $\mathcal{A}$ a une unité, alors $K_0(\mathcal{A})=K_{00}(\mathcal{A})$.

Il faut comparer cette construction à celle du groupe $K^0(X)$ lorsque X n'est pas compact. Elle procède du même raisonnement.

Exemple 4.15 On a $K_0(\mathbb{C})=K_0(M(n,\mathbb{C}))=K_0(\mathcal{K}(\mathcal{H}))=\mathbb{Z}$ et $K_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))=\{0\}$. ♢

Pour cette définition du groupe $K_0(\mathcal{A})$, il existe un résultat similaire au Lemme 4.4 :

Théorème 4.16 *Une suite exacte courte*

$$0\to\mathcal{J}\to\mathcal{A}\to\mathcal{A}/\mathcal{J}\to 0$$

où $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{A}$ induit une suite exacte de K_0 groupes

$$K_0(\mathcal{J})\to K_0(\mathcal{A})\to K_0(\mathcal{A}/\mathcal{J})$$

4.2.3 Suspension et groupes d'ordre supérieur

On peut généraliser la notion de suspension pour une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ quelconque. Au lieu de considérer le produit cartésien $X \times \mathbb{R}^n$, au niveau des algèbres de fonctions, on considère le produit tensoriel $\mathcal{A} \otimes C_0(\mathbb{R}^n)$.

DÉFINITION 4.17 *La suspension de la C^*-algèbre $\mathcal{A}$ est la C^*-algèbre $S\mathcal{A} = \mathcal{A} \otimes C_0(\mathbb{R})$. On pose alors $K_1(\mathcal{A}) = K_0(S\mathcal{A})$.*

Cette définition nous permet d'obtenir une suite exacte analogue à celle du Théorème 4.16 :

Proposition 4.18 *Si $0 \to \mathcal{J} \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{J} \to 0$ est une suite exacte courte où $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{A}$, alors on a la suite exacte courte de K_1-groupes*

$$K_1(\mathcal{J}) \to K_1(\mathcal{A}) \to K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J})$$

Pour définir les groupes K_n, on itère la suspension : $K_n(\mathcal{A}) = K_0(S^n\mathcal{A})$.

Le théorème de périodicité de Bott implique alors qu'il n'y a que deux tels groupes : $K_0(\mathcal{A})$ et $K_1(\mathcal{A})$. On peut alors généraliser le Corollaire 4.7 :

Théorème 4.19 *Soit $\mathcal{J}$ un idéal de $\mathcal{A}$. Alors on a une suite exacte*

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{J}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}) & \longrightarrow & K_0(\mathcal{A}/\mathcal{J}) \\ {\scriptstyle\delta}\big\uparrow & & & & \big\downarrow{\scriptstyle\delta} \\ K_1(\mathcal{A}/\mathcal{J}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{A}) & \longleftarrow & K_1(\mathcal{J}) \end{array}$$

Ce théorème est une "version non commutative" du Corollaire 4.7.

Il existe une autre description du groupe K_1. Nous allons la donner pour $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre unifère :

Proposition 4.20 *Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre unifère. Alors*

$$K_1(\mathcal{A}) = GL_\infty(\mathcal{A})/GL_\infty(\mathcal{A})_0$$

où $GL_\infty(\mathcal{A}) = \cup_{n=0}^{\infty} GL(n, \mathcal{A})$ avec $GL(n, \mathcal{A})$ le groupe des éléments inversibles de $M(n, \mathcal{A})$, et $GL_\infty(\mathcal{A})_0$ est la composante connexe de $\mathbb{1}$ dans $GL_\infty(\mathcal{A})$.

On trouvera la démonstration de ce résultat dans [61]. En d'autres termes, on a $K_1(\mathcal{A}) = \pi_0(GL_\infty(\mathcal{A}))$.

Remarque 4.21 Comme dans le cas commutatif, le groupe $K_0(\mathcal{A})$ peut être construit par d'autres méthodes. Soit $\mathcal{A}$ une C^*-algèbre unifère. L'ensemble des modules à droite projectifs de type fini sur $\mathcal{A}$ peut être quotienté par la relation d'équivalence d'isomorphie. L'espace obtenu est un semi-groupe abélien, dont le groupe universel enveloppant est $K_0(\mathcal{A})$. De ce point de vue, dans cette théorie, les modules projectifs de types finis (à droite) jouent le rôle des fibrés vectoriels. Nous allons voir que dans le cas commutatif, le lien entre fibrés vectoriels et la K-théorie est encore plus profond, lorsqu'on introduit des structures différentielles.

Remarque 4.22 Nous avons défini sur $K^0(X)$ une structure d'anneau. Cette structure ne peut pas être introduite ici, pour une C^*-algèbre quelconque. En effet, le produit tensoriel de 2 modules à droite projectifs de type fini sur $\mathcal{A}$ est impossible à considérer. Pour remédier à ce problème, il faudrait considérer dans la cas non commutatif la catégorie des bimodules sur une algèbre $\mathcal{A}$, dans laquelle le produit tensoriel (sur $\mathcal{A}$) est bien défini. Nous renvoyons à 8.3 pour une telle tentative d'introduire des bimodules en géométrie différentielles non commutative.

Remarque 4.23 Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre unifère *a priori* n'ayant pas d'involution, on peut définir le groupe $K_0(\mathcal{A})$ en considérant les projecteurs dans $M_\infty(\mathcal{A})$ et la relation d'équivalence $p \sim q$ s'il existe a, b dans $M_\infty(\mathcal{A})$ tels que $p = ab$ et $q = ba$. Ceci généralise la situation que nous avons déjà rencontrée pour l'algèbre $C(X)$. Cette équivalence correspond à l'équivalence d'isomorphie entre les deux modules à droite projectifs de type fini $p\mathcal{A}^n$ et $q\mathcal{A}^m$ si $p \in M(n, \mathcal{A})$ et $q \in M(m, \mathcal{A})$.

Il est de même possible de définir des K-groupes d'ordres supérieurs. On obtient ainsi la K-théorie algébrique, qui diffère de la K-théorie précédente et que l'on nomme, pour la distinguer, K-théorie topologique. On renvoie à [28] par exemple pour de plus amples développements.

4.3 K-théorie et structures différentielles

4.3.1 Classes caractéristiques et caractère de Chern

Soit M une variété différentiable paracompacte, et E un fibré vectoriel différentiable sur M, de groupe de structure G. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. On sait associer à tout polynôme invariant sur $\mathfrak{g}$ et toute connexion sur E un élément de la cohomologie de de Rham de M. Cette application est indépendante du choix de la connexion sur E. C'est la théorie des classes caractéristiques utilisant les structures différentiables.

Restreignons-nous aux fibrés vectoriels complexes (de rang fini) E sur M. Alors le groupe de structure G est inclus dans un $GL(n,\mathbb{C})$. Soit le polynôme invariant sur $\mathfrak{g} \subset M(n,\mathbb{C})$, défini par

$$\mathrm{Ch}(X) = \mathrm{Tr}\exp\left(\frac{iX}{2\pi}\right)$$

Ce polynôme permet de définir, grâce à la théorie des classes caractéristiques, une application entre les fibrés vectoriels complexes sur M et la cohomologie de de Rham $H^*(M;\mathbb{R})$ de M.

DÉFINITION 4.24 *Le caractère de Chern* Ch *est l'application définie ci-dessus.*

On a alors l'important résultat suivant :

Théorème 4.25 *Le caractère de Chern* Ch *induit un isomorphisme d'anneaux entre* $K_0(M)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$ *et* $H^{2*}(M;\mathbb{R})$ *où* $2*$ *signifie que seuls les espaces de degrés pairs sont considérés.*

Le caractère de Chern couple donc la K-théorie à l'homologie de de Rham de M, en posant, pour C un courant fermé sur M, et E un représentant de $[E] \in K^0(M)$,

$$\varphi_C(E) = \langle C, \mathrm{Ch}(E)\rangle$$

Pour tout courant fermé de de Rham C, on a donc une application φ_C : $K^0(M) \to \mathbb{R}$, ne dépendant que de la classe d'homologie de C.

Ce résultat est très important, car il montre que l'utilisation des structures différentiables (variétés différentiables, fibrés différentiables, connexions...) permet de gagner des informations, qui dans ce cas sont de nature topologiques.

Ce cas n'est bien sûr pas isolé, et c'est le but de la topologie différentielle que d'apporter des informations topologiques en travaillant sur des structures différentiables.

La géométrie différentielle non commutative se donne aussi pour but de gagner en information au niveau de ce qu'on peut appeler la topologie non commutative, en reliant par exemple la K-théorie des C^*-algèbres à des structures différentiables sur l'algèbre. Nous allons voir que ce programme a déjà connu certains succès.

4.3.2 Appariement entre K-théorie et cohomologie cyclique

Comme nous l'avons vu, dans le cas commutatif, la K-théorie est reliée par le caractère de Chern à l'homologie de de Rham. Or, la cohomologie cyclique est elle aussi reliée à l'homologie de de Rham. Nous allons définir ici, en suivant [12], un couplage entre K-théorie et cohomologie cyclique pour une algèbre non commutative unifère $\mathcal{A}$. Une autre approche équivalente mais utilisant l'homologie cyclique (que nous n'avons pas défini ici) est exposée dans [28].

En réalité, on couple la K-théorie à la limite inductive de la cohomologie cyclique, définie comme suit. Nous avons vu que l'opérateur $S : HC^k(\mathcal{A}) \to HC^{k+2}(\mathcal{A})$ permet de définir une inclusion entre les cohomologies cycliques.

DÉFINITION 4.26 *On pose*

$$H^*_\lambda(\mathcal{A}) = \varinjlim (HC^k(\mathcal{A}), S)$$

la limite inductive de $HC^k(\mathcal{A})$ pour l'inclusion définie par S. C'est la cohomologie cyclique périodique de $\mathcal{A}$.

$H^*_\lambda(\mathcal{A})$ est naturellement $\mathbb{Z}_2$-graduée puisque S est de degré 2. On note $H^{\mathrm{pair}}_\lambda(\mathcal{A})$ et $H^{\mathrm{imp.}}_\lambda(\mathcal{A})$ les limites inductives $\varinjlim HC^{2k}(\mathcal{A})$ et $\varinjlim HC^{2k+1}(\mathcal{A})$.

La cohomologie cyclique périodique continue de l'algèbre $C^\infty(V)$ est l'homologie de de Rham de V, puisque cette procédure oublie le terme $\operatorname{Ker} b$ du Théorème 3.53.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre associative, et φ un élément de $C^n_\lambda(\mathcal{A})$, alors on peut définir un élément $\varphi\sharp\mathrm{Tr}$ de $C^n_\lambda(\mathcal{A} \otimes M(k, \mathbb{C})) = C^n_\lambda(M(k, \mathcal{A}))$, en posant

$$(\varphi\sharp\mathrm{Tr})(A_1, \ldots, A_n) = \varphi(a_1, \ldots, a_n)\mathrm{Tr}(M_1 \ldots M_n)$$

où $A_i = a_i \otimes M_i$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 4.27 *[12] Soit p un projecteur de $M(k, \mathcal{A})$ représentant un élément de $K_0(\mathcal{A})$ et $\varphi \in Z^{2m}_\lambda(\mathcal{A})$ un représentant d'un élément de $H^{\mathrm{pair}}_\lambda(\mathcal{A})$. Alors l'expression*

$$\langle [p], [\varphi] \rangle = \frac{1}{m!}(\varphi\sharp\mathrm{Tr})(p, \ldots, p)$$

définit un couplage entre $K_0(\mathcal{A})$ et $H^{\mathrm{pair}}_\lambda(\mathcal{A})$.

Remarquons que la normalisation $\frac{1}{m!}$ sert à avoir

$$\langle [p], [S\varphi] \rangle = \langle [p], [\varphi] \rangle$$

qui assure que ce couplage se fait entre $K_0(\mathcal{A})$ et la limite inductive $H^{\mathrm{pair}}_\lambda(\mathcal{A})$.

Chapitre 5

Calcul différentiel et dérivations

"Par exemple !! Ah ! Il faut que je sache !..."
Edgard P. Jacob
Blake et Mortimer, La marque jaune

La construction du calcul différentiel basé sur les dérivations au-dessus d'une algèbre associative non commutative, a été introduite par M. Dubois-Violette dans [81], puis complétée en collaboration avec P. Michor dans [90, 91]. Dans ce chapitre nous introduisons les définitions de ces constructions, puis nous étudions des objets naturellement associés, comme les structures symplectiques, les "sous-variétés" non commutatives et les "espaces quotients" non commutatifs. Au Chapitre 8, nous utiliserons de nouveau ce cadre pour introduire des connexions.

5.1 Motivations

La construction des formes différentielles que nous allons expliquer plus loin retient deux idées essentielles de la géométrie différentielle sur des variétés.

1. L'algèbre des formes différentielles sur une variété différentiable V est complètement déterminée par l'algèbre des fonctions de classe C^∞ sur V.

2. Les champs de vecteurs représentent au niveau infinitésimal les difféomorphismes de V (donc les automorphismes de l'algèbre $C^\infty(V)$).

Il faut ajouter à cette dernière considération que dans le cadre de la mécanique classique, on considère que la dynamique sur une variété différentiable se formalise grâce à des champs de vecteurs, comme par exemple les champs de vecteurs hamiltoniens sur une variété symplectique.

Les deux idées ci-dessus sont en fait fortement reliées dans la construction explicite des formes différentielles sur V telle qu'elle peut être présentée dans des ouvrages dont l'exposition est assez algébrique. En effet, l'algèbre des formes différentielles se construit par dualité des vecteurs tangents, et par globalité, comme notion duale des champs de vecteurs.

Aussi nous imposons-nous, dans cette construction des formes différentielles dans le cadre de la géométrie non commutative, que l'algèbre des formes différentielles soit canoniquement associée à l'algèbre non commutative de départ.

Nous souhaitons aussi considérer l'équivalent non commutatif des champs de vecteurs. Une telle notion existe dans ce cadre général, c'est celle de dérivation. Il est en effet bien connu que l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V est exactement l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre $C^\infty(V)$.

Nous résumons ici les propriétés de cette algèbre de Lie :

Lemme 5.1 *Soit* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *l'ensemble des dérivations d'une algèbre associative* $\mathcal{A}$*, définis comme les endomorphismes* X *de* $\mathcal{A}$ *tels que*

$$X(ab) = X(a)b + aX(b)$$

Alors

1. $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *est une algèbre de Lie pour le crochet* $[X, Y] = XY - YX$ *;*
2. $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *est un module sur le centre* $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ *de* $\mathcal{A}$ *;*
3. $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *s'identifie au cocycles de* $Z^1(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ *de la cohomologie de Hochschild de* $\mathcal{A}$ *à valeurs dans* $\mathcal{A}$*.*
4. *Soit* $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *l'ensemble des dérivations intérieures de* $\mathcal{A}$ *définies comme les dérivations* $ad_a(b) = [a, b]$ *pour tout* $a, b \in \mathcal{A}$*.* $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ *est un idéal d'algèbre de Lie de* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$*. On note* $\mathrm{Out}(\mathcal{A}) = \mathrm{Der}(\mathcal{A})/\mathrm{Int}(\mathcal{A}) = H^1(\mathcal{A}; \mathcal{A})$ *l'algèbre de Lie quotient.*

5.2 Définition des formes différentielles

La construction des formes différentielles basée sur les dérivations est la version non commutative de la construction purement algébrique des formes différentielles de de Rham en géométrie différentielle ordinaire.

Dans cette construction, une forme différentielle ω de degré n sur une variété différentiable V est une application n-$C^\infty(V)$-linéaire antisymétrique sur $\Gamma(V)$, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur V, à valeurs dans $C^\infty(V)$. La différentielle d sur ces formes est alors définie de façon algébrique par la formule de Koszul.

En remplaçant l'algèbre $C^\infty(V)$ par une algèbre associative unifère $\mathcal{A}$ et l'algèbre de Lie $\Gamma(V)$ par l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, on introduit l'algèbre différentielle suivante.

Pour tout n, on note $C^n_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$ l'espace vectoriel des applications antisymétriques n-$\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéaires de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{A}$, avec $C^0_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A}) = \mathcal{A}$. Il faut remarquer que dans le cas commutatif $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, la linéarité se fait sur l'algèbre toute entière. Ici, $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ n'est un module que sur le centre, d'où une linéarité restreinte. Comme nous aurons encore l'occasion de le constater, le centre joue un rôle considérable dans cette approche du calcul différentiel.

On note
$$C_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A}) = \bigoplus_{n\geq 0} C^n_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$$
l'algèbre graduée dont le produit est
$$(\omega\eta)(X_1,\dots,X_{m+n}) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{m+n}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{m!n!}\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(m)})\eta(X_{\sigma(m+1)},\dots,X_{\sigma(m+n)})$$
pour tout $\omega \in C^m_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$, $\eta \in C^n_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$ et $X_i \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

Sur cette algèbre, on définit la différentielle
$$d : C^n_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A}) \to C^{n+1}_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$$
en utilisant la formule de Koszul
$$\begin{aligned} d\omega(X_1,\dots,X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\dots,\overset{i}{\vee},\dots,X_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j\leq n+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\overset{i}{\vee},\dots,\overset{j}{\vee},\dots,X_{n+1}) \end{aligned}$$
pour tout $\omega \in C^n_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$ et tout $X_i \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

Lemme 5.2 *d est une dérivation graduée de degré* 1 *sur* $C_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Der}(\mathcal{A}),\mathcal{A})$ *et l'identité de Jacobi sur* $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ *donne* $d^2 = 0$.

Dans le cas commutatif, $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, cette algèbre différentielle graduée se réduit à $(\Omega(V), d)$, l'algèbre des formes de de Rham sur V.

Nous proposons donc :

Définition 5.3 *On pose* $(\underline{\Omega}_{\text{Der}}(\mathcal{A}), d) = (C_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\text{Der}(\mathcal{A}), \mathcal{A}), d)$ *la première généralisation des formes différentielles basées sur les dérivations en géométrie non commutative.*

Dans le cadre d'une construction basée sur les dérivations, cette définition n'est pas la seule qui généralise les formes de de Rham.

Sur une variété différentiable paracompacte V, toute forme différentielle de degré n peut s'écrire comme somme finie de termes de la forme

$$f_0 df_1 \wedge \cdots \wedge df_n$$

où $f_i \in C^\infty(V)$ et $d : C^\infty(V) \to \Omega^1(V)$ est définie par $df(X) = Xf$ pour tout $X \in \Gamma(V)$.

Cette approche est purement algébrique et conduit à :

Définition 5.4 *On pose* $(\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}), d)$ *la plus petite sous-algèbre différentielle graduée de* $(C_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\text{Der}(\mathcal{A}), \mathcal{A}), d)$ *contenant* $\mathcal{A}$*. C'est notre seconde généralisation des formes différentielles basées sur les dérivations en géométrie non commutative.*

Il est facile de voir que tout élément $\omega \in \Omega^n_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ est une somme finie d'éléments de la forme $a_0 da_1 \dots da_n$ où $da(X) = Xa$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $X \in \text{Der}(\mathcal{A})$, où le produit se fait dans l'algèbre $C_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\text{Der}(\mathcal{A}), \mathcal{A})$.

Par définition même, $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ est engendrée par les da. Par le Corollaire 3.25, $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A})$ est un quotient du calcul différentiel universel $\Omega_U(\mathcal{A})$.

Nous pouvons construire explicitement le noyau de ce quotient

Proposition 5.5 *[81] Soit* $X \in \text{Der}(\mathcal{A})$*. Alors l'unique homomorphisme de bimodule* $i_X : \Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ *tel que* $X = i_X \circ d_U$*, se prolonge de manière unique en une dérivation graduée de degré* -1 *sur* $\Omega_U(\mathcal{A})$*. Cette construction induit une opération de Cartan de* $\text{Der}(\mathcal{A})$ *dans l'algèbre différentielle graduée* $\Omega_U(\mathcal{A})$*.*

Cette opération généralise l'opération de Cartan de $\mathcal{A}_{\text{Lie}}$ définie dans la Proposition 3.30, au sens où $a \in \mathcal{A}_{\text{Lie}}$ agit de la même façon que $ad_a \in \text{Der}(\mathcal{A})$.

Comme à toute opération de Cartan, nous pouvons associer à cette opération une filtration de $\Omega_U(\mathcal{A})$ en posant

$$F^p\omega^n_U(\mathcal{A}) = \{\omega \in \Omega^n_U(\mathcal{A}) \ / \ i_{X_1} \dots i_{X_{n-p+1}} \omega = 0 \text{ pour tout } X_i \in \text{Der}(\mathcal{A})\}$$

et la suite spectrale associée (E_r, d_r) dont le premier terme est

$$E_0^{p,q} = F^p\Omega^{p+q}_U(\mathcal{A}) / F^{p+1}\Omega^{p+q}_U(\mathcal{A})$$

et dont la différentielle est induite par d_U.

En particulier,

$$F^1\Omega^n_U(\mathcal{A}) = \{\omega \in \Omega^n_U(\mathcal{A}) \ / \ i_{X_1} \dots i_{X_n}\omega = 0 \text{ pour tout } X_i \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})\}$$

et

$$E_0^{0,n} = \Omega^n_U(\mathcal{A})/F^1\Omega^n_U(\mathcal{A})$$

Proposition 5.6 *On a* $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) = E_0^{0,*}$*, c'est-à-dire*

$$0 \to F^1\Omega_U(\mathcal{A}) \to \Omega_U(\mathcal{A}) \to \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \to 0 \tag{5.1}$$

Cette proposition caractérise en particulier le noyau de $\Omega_U(\mathcal{A}) \to \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$.

Démonstration : Par la Proposition 3.24, il existe un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées $\rho : \Omega_U(\mathcal{A}) \to \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Un élément $\omega \in \Omega^n_U(\mathcal{A})$ est dans le noyau de ρ si et seulement si pour tout $X_i \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, $\rho(\omega)(X_1, \dots, X_n) = 0$. Or, par définition, $\rho(\omega)(X_1, \dots, X_n) = i_{X_n} \dots i_{X_1}\omega$, d'où le résultat. $\square$

La suite exacte longue en cohomologie déduite de (5.1), et la trivialité de la cohomologie de $\Omega_U(\mathcal{A})$, relient la cohomologie de $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ à la cohomologie basique de $\Omega_U(\mathcal{A})$ pour l'opération de Cartan des dérivations.

De la Proposition 5.6, nous tirons en particulier que

$$F^1\Omega^1_U(\mathcal{A}) = \bigcap_{X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})} \mathrm{Ker}\ i_{X|\Omega^1_U(\mathcal{A})}$$

Nous montrerons plus loin que $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ a une propriété universelle dans une certaine catégorie, qui lui donne un statut particulier.

Nous avons donc à notre disposition deux généralisations non commutatives de l'algèbre des formes différentielles de de Rham, avec

$$\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \subset \underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$$

5.2.1 Opération de $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ dans $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$

La dérivation graduée i_X sur $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ définie pour toute dérivation $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ par

$$(i_X\omega)(X_1, \dots, X_{n-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{n-1})$$

pour tout $\omega \in \Omega^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$, définit une opération de Cartan de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ dans $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Cette opération est l'image de l'opération de Cartan de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ dans $\Omega_U(\mathcal{A})$. L'étude de cette opération n'aurait pas grand intérêt.

Par contre, l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ a un idéal naturel, $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$, qui induit une opération de Cartan dans $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$.

Par le même raisonnement, on montre que $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ induit une opération de Cartan dans $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$.

Définition 5.7 *On définit une sous-algèbre différentielle de $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ en posant*

$$\Omega_{\mathrm{Out}}(\mathcal{A}) = \{\omega \in \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \;/\; i_X\omega = 0 \text{ et } L_X\omega = 0 \text{ pour tout } X \in \mathrm{Int}(\mathcal{A})\}$$

Autrement dit, $\Omega_{\mathrm{Out}}(\mathcal{A})$ est l'algèbre différentielle graduée des éléments basiques de $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ pour l'opération de Cartan de $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$.

De même, on définit $\underline{\Omega}_{\mathrm{Out}}(\mathcal{A})$ comme l'algèbre différentielle graduée des éléments basiques de $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ pour l'opération de Cartan de $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$.

Remarque 5.8 Dans le cas où $\mathcal{A} = C^\infty(V)$, ces deux algèbres différentielles coïncident elles aussi avec l'algèbre des formes différentielles de de Rham puisque dans ce cas $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ est nulle.

Proposition 5.9 *On a $\underline{\Omega}_{\mathrm{Out}}(\mathcal{A}) = C_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathrm{Out}(\mathcal{A}), \mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ donc $\underline{\Omega}_{\mathrm{Out}}(\mathcal{A})$ est invariante de Morita.*

Démonstration : L'invariance de Morita est une conséquence de l'identification et du fait que $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ et $\mathrm{Out}(\mathcal{A})$ soient des invariants de Morita.

L'identification se démontre de la façon suivante. Tout $\omega \in \underline{\Omega}_{\mathrm{Out}}(\mathcal{A})$ est bien définie en tant qu'application de $\mathrm{Out}(\mathcal{A})$ vers $\mathcal{A}$ par l'horizontalité. Cette application est en réalité à valeurs dans $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ à cause de l'invariance (en considérant la forme explicite de $L_X\omega$). □

Ces deux algèbres différentielles ne sont pas de bons calculs différentiels sur $\mathcal{A}$, car $\mathcal{A}$ elle-même n'est pas toujours contenue dedans.

5.2.2 Involution et réalité

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est une algèbre associative involutive, on peut induire une involution sur l'algèbre de Lie des dérivations :

Proposition 5.10 *Soit $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Alors l'application X^* définie par $X^*a = (Xa^*)^*$ est dans $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. On a $X^{**} = X$ et $[X,Y]^* = [X^*, Y^*]$. Si $a \in \mathcal{A}$ est réel ($a^* = a$), et si $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ est réel, alors Xa est réel.*

L'involution définie ci-dessus sur les dérivations permet de définir une involution sur les formes :

Proposition 5.11 *Soit $\omega \in \underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Alors ω^* définie par*

$$\omega^*(X_1, \dots, X_n) = (\omega(X_1^*, \dots, X_n^*))^*$$

est un élément de $\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Si $\eta \in \underline{\Omega}^p_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$, on a

$$(\omega\eta)^* = (-1)^{np}\eta^*\omega^*$$

Une forme différentielle ω sera réelle lorsque $\omega^* = \omega$. En particulier, si $a \in \mathcal{A}$ est réelle, alors da est une 1-forme réelle puisqu'on a de façon générale $(da)^* = da^*$.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, les éléments réels de $\mathcal{A}$ forment une algèbre (réelle) de Jordan dans $\mathcal{A}$. Comme ce n'est pas une algèbre associative, nous ne pouvons pas considérer la notion de dérivation directement sur cette algèbre. En physique, nous devons en réalité utiliser les éléments hermitiens d'une algèbre involutive. Cette situation est très satisfaisante, car nous pouvons alors développer un calcul différentiel sur cette algèbre associative dont nous pouvons extraire les parties réelles. Travailler directement avec une algèbre de Jordan eut été beaucoup plus délicat.

5.3 Structures symplectiques

Nous allons maintenant utiliser la construction précédente, et notamment la présence des dérivations, dans diverses définitions généralisant des concepts commutatifs.

Revenons tout d'abord à des considérations venant de la physique. La mécanique classique et la mécanique quantique (toutes deux non relativistes), partagent, dans leur façon de modéliser le réel, l'approche Hamiltonienne.

En mécanique classique, cette approche a été formalisée dans le cadre des variétés symplectiques [37]. Rappelons qu'une forme symplectique ω sur une variété différentiable V de dimension paire, est une 2-forme différentielle fermée et non dégénérée au sens suivant : localement, dans un système de coordonnées locales, ω s'écrit $\omega = \omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$. ω est dite non dégénérée si la matrice antisymétrique (ω_{ij}) est inversible. On note (ω^{ij}) son inverse. La non-dégénérescence de ω induit un isomorphisme $\omega^\sharp : \Omega^1(V) \to \Gamma(V)$ défini localement par

$$\omega^\sharp(\alpha) = \omega^{ij}\alpha_j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

pour $\alpha = \alpha_j dx^j$.

En particulier, à toute fonction $f \in C^\infty(V)$, on associe son champ de vecteur Hamiltonien $X_f = \omega^\sharp df$. Si $f = H$ est la fonction Hamiltonienne d'un système dynamique sur (V, ω), les équations du mouvement sont données par le champ de vecteurs X_H.

De la définition même de X_f, on a, pour tout champ de vecteurs Y sur V,

$$\omega(Y, X_f) = Yf$$

Si f et g sont deux fonctions C^∞ sur V, on définit

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$$

$\{f, g\}$ est un crochet de Poisson sur $C^\infty(V)$.

Une observable physique de la mécanique classique est une fonction f sur V. On montre que son évolution dans le temps est gouvernée par l'équation

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\}$$

Comme l'a remarqué P.A.M. Dirac [16], en mécanique quantique, l'équation d'évolution équivalente est l'équation de Heisenberg

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, A]$$

où cette fois A est une observable quantique (opérateur hermitien), H est l'opérateur Hamiltonien et $[\ ,\ ]$ est le commutateur, qui a les mêmes propriétés sur l'algèbre des opérateurs que le crochet de Poisson sur l'algèbre $C^\infty(V)$.

Afin de pouvoir parfaitement identifier $\{\ ,\}$ et $[\ ,\ ]$, il faudrait leur donner une origine mathématique commune, l'un dans un cadre commutatif, l'autre dans un cadre non commutatif.

Pour cela, on définit en géométrie non commutative la notion de forme symplectique :

Définition 5.12 *Une forme symplectique ω sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ est une 2-forme différentielle dans $\Omega^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ (ou dans $\underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$), telle que*

1 - $d\omega = 0$;

2 - pour tout $a \in \mathcal{A}$, il existe une dérivation $X_a \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ telle que $\omega(Y, X_a) = Ya$ pour tout $Y \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

La seconde condition est l'équivalent non commutatif de la non-dégénérescence de ω. L'application $\mathcal{A} \to \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, $a \mapsto X_a$ est bien définie car il est facile de montrer que pour a donné, X_a est unique.

DÉFINITION 5.13 *Si ω est une forme symplectique sur $\mathcal{A}$, on définit le crochet de Poisson associé sur $\mathcal{A}$, en posant, pour $a, b \in \mathcal{A}$,*

$$\{a, b\} = \omega(X_a, X_b)$$

Lemme 5.14 *Pour tout $a, b, c \in \mathcal{A}$, on a*
$\{a, b\} = -\{b, a\}$
$\{a, bc\} = b\{a, c\} + \{a, b\}c$
$\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$
$[X_a, X_b] = X_{\{a,b\}}$

Démonstration : La première relation est une conséquence de l'antisymétrie de ω dans ses arguments, la seconde de la définition du crochet. La troisième et la quatrième viennent de $d\omega = 0$. □

Dans ce qui suit, nous rencontrerons des exemples de telles structures symplectiques.

5.4 L'algèbre des matrices

Nous avons déjà rencontré l'algèbre des matrices en 3.2.3. D'un point de vue physique, cette algèbre intervient dans la modélisation d'un système quantique de spin $s = \frac{n-1}{2}$. Par exemple, pour un système de spin $\frac{1}{2}$, on introduit les matrices 2×2 en utilisant les matrices habituelles de Pauli.

Nous utilisons ici les mêmes notations qu'en 3.2.3. Nous allons maintenant donner le calcul différentiel basé sur les dérivations qui est associé à cette algèbre.

Lemme 5.15 *Toute dérivation de l'algèbre associative unifère $M(n, \mathbb{C})$ est intérieure et $\mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C}))$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.*

Démonstration : C'est un fait bien connu que $M(n, \mathbb{C})$ n'a que des automorphismes intérieurs. Cela implique que les dérivations soient toutes intérieures. Si $M \in M(n, \mathbb{C})$ définit la dérivation ad_M, alors $M - \lambda \mathbb{1}$ définit la même dérivation. L'algèbre de Lie $\mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C}))$ s'identifie donc à $M(n, \mathbb{C})$ modulo cette transformation. En fixant à 0 la trace des matrices représentant les éléments de $\mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C}))$, nous éliminons cette indétermination. L'algèbre obtenue est $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, en tant qu'algèbre de Lie. □

Fixons une base de $\mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C})) \simeq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ en prenant les éléments $\partial_k = ad_{iE_k}$ où les matrices E_k sont définies en 3.2.3.

Nous allons caractériser l'opération de $\mathrm{Der}(M(n,\mathbb{C}))$ sur $\Omega_U(M(n,\mathbb{C}))$. Par définition de cette opération, on a

$$\begin{aligned} i_{\partial_k} d_U E_n &= [iE_k, E_n] \\ &= C^m_{kn} E_m \end{aligned} \tag{5.2}$$

D'un autre côté, dans l'identification

$$\Omega_U(M(n,\mathbb{C})) \simeq M(n,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^* \tag{5.3}$$

on a $d_U E_n = -C^m_{n\ell} E_m \omega^\ell$. L'expression (5.2) suggère de poser

$$i_{\partial_k} \omega^\ell = \delta^\ell_k$$

En prolongeant cet opérateur en un homomorphisme de bimodule sur $M(n,\mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$, puis en une dérivation graduée de degré -1 sur $M(n,\mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$, on a l'expression de l'opération de $\mathrm{Der}(M(n,\mathbb{C}))$ dans l'identification (5.3).

Proposition 5.16

$$\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) = M(n,\mathbb{C}) \otimes \bigwedge \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$$

En particulier, $\Omega^p_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) = 0$ *pour* $p \geq n^2$.

Démonstration : Puisque l'algèbre des matrices est de dimension finie, nous avons l'identification

$$C_{\mathbb{C}}(\mathrm{Der}(M(n,\mathbb{C})), M(n,\mathbb{C})) = M(n,\mathbb{C}) \otimes \bigwedge \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$$

(avec $\mathcal{Z}(M(n,\mathbb{C})) = \mathbb{C}$). Par définition de d sur cette algèbre, on a

$$\begin{aligned} d\mathbb{1} &= 0 \\ dE_k &= -C^m_{k\ell} E_m \theta^\ell \\ d\theta^k &= -\frac{1}{2} C^k_{\ell m} \theta^\ell \theta^m \end{aligned}$$

où les θ^k sont les générateurs de $\bigwedge \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$, qui forment une base duale des ∂_k. Nous avons donc

$$\theta^k \theta^\ell = -\theta^\ell \theta^k$$

La plus petite sous-algèbre différentielle graduée de $M(n,\mathbb{C}) \otimes \bigwedge \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})^*$ contenant $M(n,\mathbb{C})$ est l'algèbre toute entière. D'où le résultat. □

REMARQUE 5.17 Dans le quotient $\Omega_U(M(n,\mathbb{C})) \to \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$, ω^ℓ se projette sur θ^ℓ, et l'on peut vérifier que $d_U\omega^\ell$ (formule (3.2)) se projette bien sur $d\theta^\ell$ ci-dessus.

Remarque 5.18 On a dans cet exemple $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) = \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

Remarque 5.19 On peut considérer que du point de vue de la géométrie différentielle, l'algèbre des matrices munie de cette algèbre des formes représente une variété parallélisable. Cette structure différentielle ressemble, en un certain sens, à celle d'un groupe de Lie.

Remarque 5.20 On remarquera qu'en particulier on a

$$\Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) = \Omega^1_U(M(n,\mathbb{C}))$$

Ceci nous permet de considérer $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ comme un sous-bimodule de $\mathfrak{T}^1 M(n,\mathbb{C}) = M(n,\mathbb{C}) \otimes M(n,\mathbb{C})$. Il est facile de trouver un complémentaire de $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ dans ce bimodule. Pour cela, remarquons que

$$e = \frac{1}{n^2}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + g^{k\ell} E_k \otimes E_\ell) \in M(n,\mathbb{C}) \otimes M(n,\mathbb{C})$$

commute avec tout élément de $M(n,\mathbb{C})$. Donc $M(n,\mathbb{C})e$ est un sous-bimodule de $\mathfrak{T}^1 M(n,\mathbb{C})$ et

$$\Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) \oplus M(n,\mathbb{C})e = M(n,\mathbb{C}) \otimes M(n,\mathbb{C})$$

(e n'est autre que l'idempotent séparateur de l'algèbre séparable $M(n,\mathbb{C})$, d'où ce résultat.)

5.4.1 Cohomologie de $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$

En utilisant des techniques exposées dans [21], il est possible de calculer la cohomologie de $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$:

Proposition 5.21 *[83] La cohomologie de $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ est la cohomologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. En particulier,*

$$H^1(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))) = H^2(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))) = 0$$

$$H^0(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))) = H^3(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))) = H^{n^2-1}(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))) = \mathbb{C}$$

5.4.2 Réalité

L'algèbre $M(n,\mathbb{C})$ munie de son involution habituelle, peut être considérée comme l'équivalent non commutatif d'une algèbre de fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, les fonctions à valeurs réelles étant les éléments hermitiens.

Les dérivations ∂_k sont alors réelles puisque $\partial_k M^* = (\partial_k M)^*$. Ceci se vérifie facilement, et justifie la présence du facteur i, que nous avions déjà introduit en 3.2.3. Comme les formes θ^k sont duales des ∂_k, elles sont réelles, et dans $\Omega^p_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$, on a

$$\left(M_{i_1\dots i_p}\theta^{i_1}\dots\theta^{i_p}\right)^* = M^*_{i_1\dots i_p}\theta^{i_1}\dots\theta^{i_p}$$

5.4.3 La 1-forme θ

Lemme 5.22 *Soit $\theta = E_k\theta^k \in \Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. Alors θ est indépendante du choix de la base $\{E_k\}$, et pour tout $M \in M(n,\mathbb{C})$, on a*

$$dM = i[\theta, M]$$

et

$$d\theta = i\theta^2 \tag{5.4}$$

Démonstration : Le fait que θ soit indépendante du choix de la base de matrices hermitiennes de trace nulle est évident. Par définition, on a

$$\begin{aligned} i[\theta, M](\partial_k) &= i\theta(\partial_k)M - iM\theta(\partial_k) \\ &= ad_{iE_k}(M) \\ &= dM(\partial_k) \end{aligned}$$

d'où la première relation.

D'autre part,

$$\begin{aligned} d\theta &= (dE_k)\theta^k + E_k d\theta^k \\ &= \frac{1}{2}C^m_{k\ell}E_m\theta^k\theta^\ell \end{aligned}$$

or, $\theta^2 = E_k E_\ell\theta^k\theta^\ell = -\frac{i}{2}C^m_{k\ell}E_m\theta^k\theta^\ell$. D'où la seconde relation. □

Il est facile d'établir une expression explicite de la 1-forme θ :

$$\theta(ad_{iM}) = M - \frac{\mathbb{1}}{n}\mathrm{Tr}(M)$$

Ce lemme nous dit que la différentielle en degré 0 est une dérivée intérieure. Il est facile de voir que d n'est pas le commutateur gradué avec θ en degré supérieur (en particulier parce que θ^2 ne commute pas avec les matrices).

5.4.4 Structure symplectique

Puisque $H^2(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))) = 0$, toute forme fermée est exacte. En particulier, une forme symplectique sur $M(n,\mathbb{C})$ est exacte.

Lemme 5.23 *$\omega = d\theta$ est une forme symplectique sur $M(n,\mathbb{C})$, appelée forme symplectique canonique. Son crochet de Poisson est*

$$\{M, N\} = i[M, N]$$

Démonstration : C'est une série de calculs sans difficultés. □

Remarque 5.24 Dans cet exemple, l'application "champ de vecteurs Hamiltonien", $M(n,\mathbb{C}) \to \mathrm{Der}(M(n,\mathbb{C}))$ est l'application $M \mapsto ad_{iM}$.

5.4.5 Cycle sur $M(n,\mathbb{C})$

Nous avons remarqué que l'algèbre graduée $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ s'arrête au rang n^2-1, la dimension de $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$. Tout élément ω de $\Omega^{n^2-1}_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ s'écrit de façon unique sous la forme $\omega = M\theta^1\theta^2\dots\theta^{n^2-1}$ pour un choix fixé de l'ordre des θ^k, c'est-à-dire en réalité, un choix d'une orientation.

Cependant, dans cette écriture, M dépend du choix de la base $\{E_k\}$. Comme en géométrie différentielle ordinaire, nous sommes obligés d'ajouter un facteur supplémentaire ayant les bonnes propriétés de covariance par rapport au choix de cette base. Ce facteur est $\sqrt{g}$, où g est le déterminant de la matrice symétrique réelle définie positive (g_{ij}) de l'équation (3.1).

Lemme 5.25 *$\sqrt{g}\theta^1\theta^2\dots\theta^{n^2-1}$ est indépendant du choix de la base $\{E_k\}$.*

Démonstration : Il s'agit du même genre de calcul que dans le cadre de la géométrie différentielle ordinaire avec une métrique. □

Cette construction conduit alors à

Proposition 5.26 *$(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})), d, \int)$ est un cycle de dimension n^2-1 sur $M(n,\mathbb{C})$, où, pour tout $\omega \in \Omega^{n^2-1}_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$, écrit de façon unique sous la forme $\omega = M\sqrt{g}\theta^1\theta^2\dots\theta^{n^2-1}$,*

$$\int \omega = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)$$

Démonstration : Il est facile de vérifier que $\int$ est une trace graduée fermée [83]. □

5.5 Autres exemples

5.5.1 L'algèbre $C^\infty(V) \otimes M(n,\mathbb{C})$

Une façon très simple de construire une algèbre non commutative est de considérer le produit tensoriel de deux algèbres. La situation la plus simple est sans doute de prendre des algèbres déjà connues. Soit donc $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes M(n,\mathbb{C})$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété différentiable V à valeurs dans les matrices $M(n,\mathbb{C})$. Cette algèbre a été étudiée dans [84]. Nous nous contentons ici de donner les résultats principaux sur la structure différentiable de cette algèbre.

Lemme 5.27 *[84] On a*

$$\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = [\mathrm{Der}(C^\infty(V) \otimes \mathbb{1}] \oplus [C^\infty(V) \otimes \mathrm{Der}(M(n,\mathbb{C}))]$$

Ce résultat implique la structure de l'algèbre des formes différentielles :

$$\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) = \Omega(V) \otimes \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$$

comme algèbre différentielle bigraduée, où $\Omega(V)$ est l'algèbre des formes de de Rham sur V. Les deux différentielles sont les prolongements des différentielles sur chaque facteur à l'algèbre totale. On note d' la différentielle venant de la variété, et d'' la différentielle venant des matrices. On a donc $d = d' + d''$.

5.5.2 L'algèbre de Heisenberg

Pour des raisons de commodité, nous rappelons la définition de l'algèbre de Heisenberg.

Définition 5.28 *L'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{H}$ est la $*$-algèbre associative unifère engendrée par les 2 éléments hermitiens p et q et la relation*

$$[p,q] = i\hbar\mathbb{1}$$

On a alors immédiatement

Lemme 5.29 *$\mathfrak{H}$ est une algèbre centrale simple et les dérivations de $\mathfrak{H}$ sont toutes intérieures.*

Démonstration : Ce sont des résultats classiques, que l'on peut trouver dans [47] par exemple. □

L'algèbre de Heisenberg est d'une grande importance en physique car elle est à la base de la modélisation de la mécanique quantique (non relativiste). Il est en effet bien connu (voir [58] par exemple) que l'on retrouve la représentation de Schrödinger (au sens physique du terme) en considérant une représentation de $\mathfrak{H}$ (au sens mathématique du terme). En fait, comme nous l'avons déjà vu, il a été montré que toutes les représentations hermitiennes régulières de $\mathfrak{H}$ sont équivalentes. La représentation usuellement considérée consiste à prendre l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ (ici il n'y a qu'une seule dimension d'espace) et les opérateurs $p \mapsto -i\frac{\partial}{\partial x}$ et $q \mapsto x$, la multiplication par x. La fonction d'onde de Schrödinger est donc un élément de $L^2(\mathbb{R})$.

La description explicite du calcul différentiel basé sur les dérivation de l'algèbre de Heisenberg ne nous est pas utile ici. Nous voudrions juste exhiber une forme symplectique.

Il a été montré dans [82] que $\mathfrak{H}$ possède une forme symplectique dans $\underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathfrak{H})$. Elle est définie, sur toute dérivation $ad_{\frac{i}{\hbar}a}$ et $ad_{\frac{i}{\hbar}b}$ par

$$\omega(ad_{\frac{i}{\hbar}a}, ad_{\frac{i}{\hbar}b}) = \frac{i}{\hbar}[a,b]$$

Une expression explicite de cette 2-forme symplectique est

$$\omega = \sum_n \frac{1}{(i\hbar)^n(n+1)!}[\dots[dp,\underbrace{p],\dots,p]}_{n \text{ fois}}[\dots[dq,\underbrace{q],\dots,q]}_{n \text{ fois}}$$

Le crochet de Poisson associé à cette forme symplectique est donc $\{a,b\} = \frac{i}{\hbar}[a,b]$.

Ceci justifie l'idée de Dirac de considérer le commutateur en mécanique quantique comme un crochet de Poisson.

Remarque 5.30 Comme dans le cas des matrices (Remarque 5.24), l'application "champ de vecteurs Hamiltonien" est l'application qui à un élément de l'algèbre associe sa dérivée intérieure (à un facteur $\frac{i}{\hbar}$ près).

5.5.3 Le tore non commutatif

Nous allons construire une algèbre non commutative qui généralise l'algèbre des fonctions sur le tore à deux dimensions, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Pour cela, on remarque que toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ peut s'écrire par transformée de Fourier

$$f(t,s) = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} c_{k\ell} u^k v^\ell$$

avec $u = \exp(2\pi i t)$ et $v = \exp(2\pi i s)$ et où les coefficients $c_{k\ell}$ sont à décroissance rapide, de telle sorte que les semi-normes

$$\|f\|_m = \sup_{k,\ell \in \mathbb{Z}} |c_{k\ell}|(1 + |k| + |\ell|)^m$$

soient toutes finies pour tout $m \in \mathbb{N}$.

L'algèbre non commutative qui généralise cette algèbre est construite en supprimant la commutativité entre u et v de la façon suivante.

DÉFINITION 5.31 *Soit $q \in U(1)$ et soit T_q^2 la $*$-algèbre associative unifère des éléments de la forme*

$$a = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} c_{k\ell} U^k V^\ell$$

avec

$$\|a\|_m = \sup_{k,\ell \in \mathbb{Z}} |c_{k\ell}|(1 + |k| + |\ell|)^m < \infty$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et la relation

$$UV = qVU$$

L'involution est définie par $U^* = U^{-1}$ et $V^* = V^{-1}$. T_q^2 est l'algèbre du tore non commutatif.

On a alors :

Lemme 5.32 *Si $q = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors le centre de T_q^2 est trivial.*

Si $q^N = 1$ avec N le plus petit entier non nul qui vérifie cette relation, alors le centre de T_q^2 est la sous-algèbre engendrée par les éléments de la forme

$$a(U^N, V^N) = \sum_{k,\ell \in \mathbb{Z}} c_{k\ell} U^{kN} V^{\ell N}$$

L'algèbre de Lie des dérivations bornées de T_q^2 est le produit semi-direct $\mathrm{Int}(T_q^2) \rtimes \mathrm{Out}(T_q^2)$ des dérivations intérieures et des dérivations de la forme

$$X = a(U^N, V^N) X_U + b(U^N, V^N) X_V$$

avec $X_U(U) = U$, $X_U(V) = 0$, $X_V(U) = 0$ et $X_V(V) = V$ où l'on prend $N = 0$ dans le premier cas.

Démonstration : Un élément du centre de T_q^2, écrit sous forme de série, commute avec U et V si et seulement si chacun des termes de la série commute. Or, les seuls termes $U^k V^\ell$ qui commutent avec U et V sont les scalaires dans le premier cas et sont de la forme $U^{kN}V^{\ell N}$ dans le second cas, compte tenu de $q^N = 1$.

Une dérivation bornée X sur T_q^2 est donnée entièrement par sa valeur sur U et V. La relation $UV = qVU$ impose alors des contraintes sur les valeurs possibles de $X(U)$ et $X(V)$. Ces contraintes imposent alors la forme ci-dessus. □

REMARQUE 5.33 Dans le cas $q^N = 1$, le centre de T_q^2 peut s'identifier à l'algèbre $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, en remplaçant dans le développement de Fourier de $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, u par U^N et v par V^N.

REMARQUE 5.34 Du point de vue des dérivations, le cas $q^N = 1$ avec $N > 1$ est beaucoup plus intéressant, puisque $\mathrm{Out}(T_q^2)$ n'est pas réduit à l'espace vectoriel engendré par les deux dérivations X_U et X_V définies ci-dessus.

REMARQUE 5.35 L'algèbre du tore non commutatif a été l'une des premières algèbres à avoir été étudiée du point de vue des structures différentiables par A. CONNES. Cette algèbre a permis à J. BELLISARD de modéliser l'effet Hall quantique pour lequel certaines courbes expérimentales faisaient apparaître des plateaux jusque là inexpliqués [64, 65].

5.6 Algèbre d'une sous-variété

Nous voudrions maintenant utiliser la particularité de ce calcul différentiel (la présence des dérivations) pour montrer qu'il est adapté à deux généralisations non commutatives de concepts de la géométrie différentielle ordinaire. Le premier concept que nous voudrions retrouver dans le cadre de la géométrie non commutative est celui de sous-variété. Ce travail a été proposé dans [108].

5.6.1 Définitions et propriétés

Nous avons déjà constaté dans le cadre des C^*-algèbres commutatives que les idéaux étaient liés aux sous-espaces fermés de l'espace topologique pour lequel l'algèbre était l'algèbre des fonctions continues nulles à l'infini (voir Exemple 1.30). De même, dans l'étude des algèbres de von Neumann commutatives, les idéaux, reliés aux projecteurs, sont en correspondance avec les sous-espaces mesurables.

Un autre domaine des mathématiques fait largement appel aux idéaux pour représenter des sous-espaces, c'est la géométrie algébrique [46, 114]. Cette dernière considère l'algèbre commutative des polynômes $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.

Les sous-ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$ sont considérés à travers l'idéal des polynômes qui s'annulent sur ces ensembles. Le quotient par cet idéal représente une algèbre de fonctions sur cet ensemble, dont l'étude donne des renseignements sur l'ensemble lui-même. Les points sont bien sûr équivalents aux idéaux maximaux, et l'algèbre quotient par l'idéal est le corps $\mathbb{C}$. On dit que les points "prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C}$".

Dans le cadre des C^*-algèbres non commutatives, ou des algèbres de von Neumann non commutatives, les idéaux fermés (pour la bonne topologie, selon le type d'algèbre) peuvent être considérés comme représentant des sous-espaces de l'"espace non commutatif" donné par l'algèbre. Nous avons déjà fait remarquer ce que seraient alors les "points non commutatifs" dans ce cadre pour les deux types d'algèbres.

Il est souhaitable, dans le cadre de la géométrie différentielle non commutative, de disposer d'une notion équivalente à celle de sous-variété. Si on se place dans l'esprit du calcul différentiel basé sur les dérivations, pour lequel toute la structure différentiable est donnée par l'algèbre (grâce à ses dérivations), alors il faut que la structure différentiable de l'algèbre soit compatible en un certain sens avec la structure différentiable de l'algèbre quotientée par l'idéal. Dans ce cas seulement, on pourra considérer que l'algèbre quotient détermine une "sous-variété différentiable non commutative".

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère et $\mathcal{C}$ un idéal bilatère de cette algèbre. On note $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$ l'algèbre quotient, et $p : \mathcal{A} \to \mathcal{Q}$ l'application quotient. On peut alors associer à ces objets deux sous-algèbres de Lie de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$:

$$\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}) = \{X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \ / \ X\mathcal{C} \subset \mathcal{C}\}$$

et

$$\mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) = \{X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \ / \ X\mathcal{A} \subset \mathcal{C}\}$$

On peut constater que $\mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ est un idéal de $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C})$. Il existe un homomorphisme canonique d'algèbres de Lie $\pi : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{Q})$, définie par $\pi(X)p(a) = p(Xa)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $X \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C})$. Le noyau de cette application n'est autre que $\mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Cette construction nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 5.36 *L'algèbre quotient $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$ est une algèbre de sous-variété pour $\mathcal{A}$ si π est surjective. Dans ce cas, on dira que $\mathcal{C}$ est l'algèbre des contraintes pour $\mathcal{Q}$.*

On peut voir cette définition comme un problème de relèvement. En effet, soit X une dérivation de $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$. Alors $X \circ p$ est une dérivation de $\mathcal{A}$ dans le $\mathcal{A}$-bimodule $\mathcal{Q}$. Cette dérivation se factorise en un homomorphisme de bimodules $i_{X\circ p} : \Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \mathcal{Q}$. La surjectivité de π équivaut à la possibilité de relever cette application en un homomorphisme de bimodules $\Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ pour tout X.

Dans le cas où $\mathcal{Q}$ est une telle algèbre de sous-variété, on a donc la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{Q}) \to 0 \tag{5.5}$$

La condition de la définition précédente implique de fortes relations entre les structures différentiables de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{Q}$. Le résultat suivant montre ce qu'il en est au niveau des formes différentielles :

Proposition 5.37 *Il existe une suite exacte courte d'algèbres différentielles graduées*

$$0 \to \Omega_{\mathrm{Der},\mathcal{C}} \to \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \xrightarrow{p} \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{Q}) \to 0 \tag{5.6}$$

Démonstration : Soit $\overline{X} = \pi(X) \in \mathrm{Der}(\mathcal{Q})$ pour un $X \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C})$, et soit $\overline{a} = p(a) \in \mathcal{Q}$ pour un $a \in \mathcal{A}$. Alors on a sur $\mathcal{Q}$

$$d\overline{a}(\overline{X}) = \overline{X}\overline{a} = p(Xa) = p(da(X))$$

On peut prolonger p en une application $\Omega^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \to \Omega^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{Q})$ en posant

$$p(a_0 da_1 \dots da_n) = p(a_0)dp(a_1)\dots dp(a_n)$$

En particulier, on a $d \circ p = p \circ d$ et $i_{\overline{X}} \circ p = p \circ i_X$. Il est facile de vérifier que p ainsi prolongée est surjective, d'où la suite exacte courte. □

Il est possible de caractériser le noyau $\Omega_{\mathrm{Der},\mathcal{C}}$ de p :

$$\Omega^n_{\mathrm{Der},\mathcal{C}} = \{\omega \in \Omega^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \ / \ \forall X \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}),\ i_X\omega \in \Omega^{n-1}_{\mathrm{Der},\mathcal{C}}\}$$

avec $\Omega^0_{\mathrm{Der},\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. Ainsi, si $a \in \mathcal{C}$, alors $da \in \Omega^1_{\mathrm{Der},\mathcal{C}}$.

Corollaire 5.38 *On a la suite exacte longue en cohomologie*

$$\dots \to H^n(\Omega_{\mathrm{Der},\mathcal{C}}) \to H^n(\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})) \to H^n(\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{Q})) \to H^{n+1}(\Omega_{\mathrm{Der},\mathcal{C}}) \to \cdots$$

On peut définir $H^*(\Omega_{\mathrm{Der},\mathcal{C}})$ comme la cohomologie relative de $\mathcal{A}$ par rapport à $\mathcal{Q}$.

Remarque 5.39 La proposition précédente relie ainsi les algèbres $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ et $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{Q})$. Dans la démonstration, nous avons eu besoin explicitement du fait que tout élément est une somme de termes du type $a_0da_1\dots da_n$. Il nous est donc impossible de donner une relation du même genre entre les algèbres $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ et $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{Q})$, sans renseignement supplémentaire entre Ω_{Der} et $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}$, comme par exemple un résultat de densité de l'un dans l'autre.

Il est maintenant intéressant de regarder quelles peuvent être les dérivations de $\mathcal{Q}$. Toute dérivation intérieure de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C})$. Dans le quotient $\pi : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{Q})$, ces dérivations intérieures sont envoyées sur des dérivations intérieures, par définition même de π. Il est facile de voir que π restreinte aux dérivations intérieures est surjective (sur les dérivations intérieures), même si π ne satisfait pas la condition de la Définition 5.36, c'est-à-dire même si π n'est pas surjective. La dérivation intérieure $ad(a)$ s'envoie sur $ad(p(a))$. Le noyau de π contient ainsi $ad(\mathcal{C})$. Nous avons donc montré le résultat suivant :

Lemme 5.40 *Si $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$ n'admet que des dérivations intérieures, alors l'application $\pi : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Der}(\mathcal{Q})$ est surjective, donc $\mathcal{Q}$ est une algèbre de sous-variété.*

La situation pour les dérivations intérieures étant claire, il ne reste à considérer que les autres dérivations. Or, nous savons que ces autres dérivations sont reliées à la première classe de cohomologie de Hochschild de l'algèbre.

Lemme 5.41 *On a un homomorphisme surjectif*

$$H^1_{\mathcal{C}}(\mathcal{A};\mathcal{A}) \to H^1(\mathcal{Q};\mathcal{Q})$$

où $H^1_{\mathcal{C}}(\mathcal{A};\mathcal{A})$ est la cohomologie de Hochschild contrainte de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{C}$.

Démonstration : C'est une conséquence directe du Lemme 3.18 avec $\mathcal{M} = \mathcal{A}$ et $\mathcal{N} = \mathcal{C}$ et la surjectivité de π sur les dérivations intérieures. □

A priori, on ne peut rien dire du noyau de cette application. Pour cela, il faut ajouter des contraintes sur $\mathcal{C}$:

Proposition 5.42 *Si l'idéal des contraintes $\mathcal{C}$ pour l'algèbre de sous-variété $\mathcal{Q}$ satisfait à la condition*

$$ad(\mathcal{C}) = \{ad(a) \ / \ a \in \mathcal{A} \ and \ [a, \mathcal{A}] \subset \mathcal{A}\}$$

ou encore, de façon équivalente, si $\mathrm{Ker}\,\pi \cap \mathrm{Int}(\mathcal{A}) = ad(\mathcal{C})$, *alors on a la suite exacte courte*

$$0 \to H^1(\mathcal{A};\mathcal{C}) \to H^1_{\mathcal{C}}(\mathcal{A};\mathcal{A}) \to H^1(\mathcal{Q};\mathcal{Q}) \to 0$$

Démonstration : La condition que l'on impose sur $\mathcal{C}$ signifie que l'on a la suite exacte courte

$$0 \to B^1(\mathcal{A};\mathcal{C}) \to B^1_{\mathcal{C}}(\mathcal{A};\mathcal{A}) = B^1(\mathcal{C};\mathcal{A}) \to B^1(\mathcal{Q};\mathcal{Q}) \to 0$$

Associée à la suite exacte courte (5.5), on obtient la suite exacte courte en cohomologie. □

Si l'idéal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$ est maximal, on a envie de dire qu'il représente un "point" dans l'espace non commutatif représenté par $\mathcal{A}$. Dans ce cas en effet, comme on l'a déjà fait remarquer, l'algèbre $\mathcal{Q}$ n'a plus d'idéal, donc n'admet plus de "sous-structure". C'est une algèbre simple, *a priori* non commutative. Aussi, on peut dire que dans le cadre de la géométrie différentielle non commutative, les points prennent leurs valeurs dans des algèbres simples. Contrairement au cas commutatif, ces algèbres peuvent encore avoir une structure riche (*cf.* les exemples plus loin), notamment au niveau de leur structure différentiable (non commutative). À ce propos, il serait bien d'avoir à notre disposition une description des dérivations d'une algèbre simple. Dans les exemples que nous donnons plus bas, ces algèbres simples n'ont que des dérivations intérieures. Ceci est cohérent avec l'idée précédente de les considérer comme des "points", puisque leur structure différentielle "ne sort pas" de l'algèbre, c'est-à-dire est interne au "point", contrairement à des champs de vecteurs sur une variété différentiable.

Maintenant, à tout idéal $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, on peut associer l'algèbre de Lie $\mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \subset \mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Si $\mathcal{C}$ est un idéal maximal, l'espace quotient $T_{\mathcal{C}} = \mathrm{Der}(\mathcal{A})/\mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ peut être considéré comme l'"espace tangent" au "point" $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$. La valeur d'une dérivation X en ce point est l'élément $X_{\mathcal{C}}$ de $T_{\mathcal{C}}$ obtenu dans le quotient $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \to T_{\mathcal{C}}$. De même, on peut considérer la valeur d'une forme différentielle $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ en $\mathcal{C}$ en posant $\alpha_{\mathcal{C}}(X_{\mathcal{C}}) = p \circ \alpha(X)$. On peut généraliser cette construction aux n-formes différentielles.

5.6.2 Exemples

Le cas commutatif

Il est facile de voir que toute sous-variété fermée d'une variété différentiable donne une algèbre de sous-variété, en considérant les algèbres de fonctions C^∞.

Les fonctions à valeurs matricielles

Soit l'algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(V) \otimes M(n, \mathbb{C})$ des fonctions C^∞ sur une variété différentiable V à valeurs dans les matrices. Soit $p \in V$ un point de cette variété. Prenons pour idéal $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{A}$ qui s'annulent en p. Un calcul simple montre que l'algèbre $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$ est l'algèbre des matrices $M(n, \mathbb{C})$. En utilisant le Lemme 5.40, on voit que $\mathcal{Q}$ est une algèbre de sous-variété. L'“espace tangent” en p est $T_pV \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, où T_pV est le plan tangent ordinaire à V en p.

L'interprétation de cette algèbre est simple. En chaque point de la variété V, on place l'algèbre des matrices. Comme cette algèbre est simple, c'est la généralisation non commutative du point. Cette construction est différente de celle qui consisterait à considérer un fibré sur la variété V, car les structures différentiables seraient complètement différentes. Ici, les matrices apportent un calcul différentiel non commutatif, absent d'une construction du type fibré. Nous verrons des applications en physique de cette construction.

Dans une approche semblable à la précédente, il est possible d'utiliser une construction faisant référence à un fibré. Pour cela, on considère l'algèbre des sections d'un fibré (non trivial) en algèbres de matrices sur une variété différentiable V.

L'algèbre tensorielle

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre unifère complexe libre engendrée par les n éléments $x^1, \ldots, x^n$. On considérera que $n \geq 2$. Toute dérivation D de $\mathcal{A}$ est donnée par n élément $P^i \in \mathcal{A}$ en posant $D(x^i) = P^i$, et en utilisant la règle de dérivation. Soit $\mathcal{C}$ l'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par x^1. Alors l'algèbre $\mathcal{Q}$ est l'algèbre unifère libre engendrée par $x^2, \ldots, x^n$. En particulier, $\mathcal{A} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{Q}$, et on peut considérer que $\mathcal{Q}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. Toute dérivation dans $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C})$ est somme de deux dérivations : $D = (P^i)_{1\leq i\leq n}$ avec $P^i \in \mathcal{Q}$ et $P^1 = 0$, et $D = (P^i)_{1\leq i\leq n}$ avec $P^i \in \mathcal{C}$. Toute dérivation dans $\mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ est du second type. Comme les dérivations de $\mathcal{Q}$ sont exactement celles du premier type, on voit que $\mathcal{Q}$ est une algèbre de sous-variété. En passant, on a ici la structure très simple $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \oplus \mathrm{Der}(\mathcal{Q})$.

Parmi les idéaux maximaux de $\mathcal{A}$, il y a ceux engendrés par n éléments de la forme $x^i - a_i$ pour $a_i \in \mathbb{C}$. Le point associé à un tel idéal de $\mathcal{A}$ est le point (a_i) de $\mathbb{C}^n$. Cette situation est analogue à celle de l'algèbre des polynômes utilisée en géométrie algébrique (dans ce cas, il n'y a que ces idéaux maximaux). L'algèbre tensorielle admet d'autres idéaux maximaux, comme le montrent les exemples suivants.

L'algèbre de Heisenberg

Soit l'algèbre tensorielle complexe engendrée par deux éléments x, y. On considère dans cette algèbre l'idéal $\mathcal{C}$ engendré par l'expression $xy - yx - i\mathbb{1}$. L'algèbre quotient est l'algèbre de Heisenberg $\mathfrak{H}$. On note $x \mapsto p$ et $y \mapsto q$ les images de x et y par l'application quotient, ce qui permet de retrouver les notations de 5.5.2. Comme cette algèbre est simple, l'idéal $\mathcal{C}$ est maximal.

Par le Lemme 5.40, l'algèbre de Heisenberg est une algèbre de sous-variété dans $\mathcal{A}$, qui peut être considérée comme un point pour cette algèbre $\mathcal{A}$. Son "espace tangent" vaut $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ [108].

L'algèbre des matrices

Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre tensorielle comme ci-dessus. Soit $q \in \mathbb{C}$ une racine n-ième de l'unité, $q^n = 1$, pour $n \in \mathbb{N}$. On considère l'idéal de $\mathcal{A}$ engendré par les expressions

$$xy - qyx, \qquad x^n - \mathbb{1}, \qquad y^n - \mathbb{1}$$

On note U et V les images de x et y dans l'algèbre quotient $\mathcal{Q} = \mathcal{A}/\mathcal{C}$. Cette algèbre est l'algèbre $M(n, \mathbb{C})$ des matrices complexes. En effet, tout élément de $\mathcal{Q}$ s'écrit sous la forme

$$\sum_{0 \leq k, \ell \leq n-1} a_{k,\ell} U^k V^\ell$$

donc la dimension de $\mathcal{Q}$ est inférieure à n^2. Les deux matrices

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & q^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & q^{n-1} \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfont aux relations de l'algèbre $\mathcal{Q}$, et engendrent une sous-algèbre de $M(n, \mathbb{C})$. Comme les seules matrices qui commutent avec cette sous-algèbre sont multiples de l'identité, on a $\mathcal{Q} = M(n, \mathbb{C})$.

L'algèbre des matrices n'ayant que des dérivations intérieures, en utilisant le Lemme 5.40, on voit que l'algèbre des matrices est une algèbre de sous-variété. Cette algèbre représente aussi un point dans l'algèbre tensorielle $\mathcal{A}$.

5.7 Algèbre d'un quotient, actions

La seconde généralisation que nous proposons est celle de quotient d'une variété. Lorsqu'on étudie l'action d'un groupe de Lie sur une variété différentiable, on peut considérer que l'algèbre de Lie de ce groupe est une sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs sur la variété. Lorsqu'on considère les algèbres de fonctions, celle qui correspondrait à la variété quotient par l'action du groupe est une sous-algèbre des fonctions sur la variété, puisque ce sont exactement les fonctions invariantes par l'action du groupe. C'est cette idée que nous voudrions exploiter. Ces constructions ont été exposées dans [108].

5.7.1 Algèbre d'un quotient

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère, et $\mathcal{B}$ une sous-algèbre de $\mathcal{A}$. On peut définir des sous-algèbres de Lie de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ en posant

$$\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) = \{X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \;/\; X\mathcal{B} = 0\}$$

et

$$\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) = \{X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A}) \;/\; X\mathcal{B} \subset \mathcal{B}\}$$

En particulier, $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ est un idéal dans $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$, puisque $[\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}), \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})] \subset \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. On a alors un homomorphisme canonique d'algèbres de Lie

$$\begin{array}{rcl} \rho : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) & \to & \mathrm{Der}(\mathcal{B}) \\ X & \mapsto & \tilde{X} \end{array}$$

en considérant la restriction de $X \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ à $\mathcal{B}$. Le noyau de cette application est exactement $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$.

Définition 5.43 *Une sous-algèbre $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est une algèbre de quotient si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\mathcal{Z}(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \cap \mathcal{Z}(\mathcal{A})$;
2. $\mathrm{Der}(\mathcal{B}) \simeq \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})/\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$;
3. $\mathcal{B} = \{a \in \mathcal{A} \;/\; Xa = 0 \;\forall X \in \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})\}$.

Quelques commentaires sur cette définition. La condition 1 donne à $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ et $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ une structure de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-module. $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})/\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ est naturellement un $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-module comme quotient de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules, et la condition 2 est un isomorphisme de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules. On a donc la suite exacte courte d'algèbres de Lie et de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules

$$0 \to \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Der}(\mathcal{B}) \to 0 \tag{5.7}$$

La sous-algèbre de Lie $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ induit une opération de Cartan sur $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. La condition 3 dit que $\mathcal{B}$ est exactement l'algèbre basique en degré 0 de cette opération.

Notons $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A})$ la sous-algèbre différentielle graduée des éléments basiques de $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ pour l'opération de $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$.

Lemme 5.44 *On a une application d'algèbres différentielles graduées*

$$\underline{\Omega}_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A}) \to \underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$$

Démonstration : Soit $\omega \in \underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A})$ (alors $d\omega$ est aussi basique). On définit $\tilde{\omega} \in \underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ en posant

$$\tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) = \omega(X_1, \dots, X_n)$$

pour tout $\tilde{X}_i \in \mathrm{Der}(\mathcal{B})$, de représentants $X_i \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. Le fait que ω soit basique assure que $\tilde{\omega}$ ne dépend pas des représentants des $\tilde{X}_i$ dans $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. Par la formule de Koszul et la condition 3 de la définition, on voit facilement que $\omega(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{B}$. La condition 1 assure que $\tilde{\omega}$ est $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-linéaire. Enfin, la formule de Koszul implique que $d\tilde{\omega} = \widetilde{d\omega}$. □

En degré 0, on a égalité par la condition 3 de la définition, $\underline{\Omega}^0_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A}) = \mathcal{B} = \underline{\Omega}^0_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$.

Remarque 5.45 Dans la démonstration précédente, il est nécessaire de regarder les formes comme des applications multilinéaires sur le centre de l'algèbre, antisymétriques, des dérivations dans l'algèbre. Sans cette caractérisation, il est impossible de trouver une relation simple entre les formes basiques sur $\mathcal{A}$ et les formes sur $\mathcal{B}$. Il est donc essentiel d'utiliser $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}$, et non Ω_{Der}.

Remarque 5.46 Il est possible de relâcher la condition 2, si on impose que les seules dérivations de $\mathcal{B}$ que l'on prenne en compte soient justement celles de $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})/\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. Dans ce cas, on a une sorte de structure différentielle induite de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. Nous verrons dans la suite (Section 5.8) qu'il n'est en effet pas nécessaire de considérer toute l'algèbre des dérivations pour construire l'algèbre des formes différentielles.

Proposition 5.47 *Si le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module induit par $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ dans $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ est $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ lui-même, alors on a un isomorphisme*

$$\underline{\Omega}_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A}) \simeq \underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$$

Démonstration : Montrons d'abord que l'application $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A}) \to \underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ construite ci-dessus est injective. Si $\tilde{\omega}$ est nulle dans $\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$, alors pour tout $X_i \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$, on a $\omega(X_1, \dots, X_n) = 0$. Comme ω est $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéaire, et que par hypothèse le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module engendré par $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ est $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ tout entier, ω est nulle dans $\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der},B}(\mathcal{A})$.

Montrons maintenant la surjectivité. Soit $\tilde{\omega} \in \underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ une n-forme. On définit ω comme application multilinéaire sur $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$, antisymétrique sur $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \cdots \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ à valeurs dans $\mathcal{B}$ en posant

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = \tilde{\omega}(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n) \in \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$$

pour tout $X_i \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. On prolonge cette application sur le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module engendré par $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ par $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéarité. Par hypothèse, ω devient un élément de $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Il est alors facile de montrer que ω est basique. □

5.7.2 Action

Dans ce qui précède, l'algèbre de Lie $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ est parfois trop grande (de dimension infinie par exemple) pour être l'équivalent non commutatif de l'action d'une algèbre de Lie (de dimension finie en général) sur la variété non commutative donnée par $\mathcal{A}$. Afin de considérer une telle généralisation, soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Soit alors $\mathcal{B}$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}$ des éléments invariants par $\mathfrak{g}$. On a alors $\mathfrak{g} \subset \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$, et la condition 3 de la définition est vérifiée. En général, on n'a pas égalité. Entre ces deux algèbres de Lie, il en existe une troisième, $\mathfrak{g}_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}$, le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module dans $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ engendré par $\mathfrak{g}$.

Nous verrons par la suite qu'un triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{g})$ est une assez bonne généralisation de la notion de fibré principal si $\mathcal{B}$ est une algèbre de quotient dans $\mathcal{A}$, et si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie comme ci-dessus.

Nous renvoyons à 8.3.7 pour des applications de cette définition.

5.7.3 Actions symplectiques

Nous voudrions utiliser cette notion d'action en présence d'une structure symplectique sur $\mathcal{A}$. Soit donc ω une 2-forme symplectique dans $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie incluse dans $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$.

DÉFINITION 5.48 *Nous dirons que l'action de $\mathfrak{g}$ sur $(\mathcal{A}, \omega)$ est symplectique si $L_X\omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, et hamiltonienne si $i_X\omega$ est exacte pour tout $X \in \mathfrak{g}$.*

Ce sont bien sûr les définitions classiques de la géométrie symplectique ordinaire [37].

Soit maintenant la situation d'une action hamiltonienne, et soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathfrak{g}$. Alors il existe des éléments $a_i \in \mathcal{A}$ tels que $i_{X_i}\omega = -da_i$. Par linéarité, pour tout $X = \lambda^i X_i \in \mathfrak{g}$, on a $i_X\omega = d(\lambda^i a_i)$. Soit $\chi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ l'application $X = \lambda^i X_i \mapsto \lambda^i a_i$.

DÉFINITION 5.49 *χ est appelée hamiltonien généralisé et l'élément $J \in \mathcal{A} \otimes \mathfrak{g}^*$ défini par $\langle J, X \rangle = \chi(X)$ est le moment de cette action hamiltonienne.*

Nous dirons que le moment est fort si χ réalise un homomorphisme d'algèbres de Lie

$$\chi : (\mathfrak{g}, [\ ,\ ]) \to (\mathcal{A}, \{\ ,\ \})$$

pour le crochet de Poisson associé à ω. On parle alors d'action fortement hamiltonienne.

L'intérêt de ces définitions réside dans le théorème suivant, appelé théorème de Nœther dans le cas classique [37] :

Théorème 5.50 *Soit $H \in \mathcal{A}$ un hamiltonien et $\mathfrak{g}$ une action hamiltonienne telle que $L_X H = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Alors $\{J, H\} = 0$.*

Dans cet énoncé, $\{J, H\}$ est défini par la relation $\{J, H\} = \{J_i, H\} \otimes \theta^i$ où $J = J_i \otimes \theta^i \in \mathcal{A} \otimes \mathfrak{g}^*$. En termes classiques, on dit que le système $(\mathcal{A}, \omega, H)$ admet $\dim \mathfrak{g}$ intégrales premières.

Nous allons maintenant donner des exemples de telles actions dans le cas non commutatif. Nous verrons dans ces exemples que la situation y est beaucoup plus simple que dans le cas classique.

Exemple 5.51 Soit $\mathcal{A} = M(n, \mathbb{C})$ munie de la 2-forme symplectique $\omega = d\theta$. Pour tout $\partial_k \in \mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C}))$, on a $i_{\partial_k} d\theta = -dE_k$. Donc si $\mathfrak{g}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, alors son action sur $\mathcal{A}$ est hamiltonienne, et le hamiltonien généralisé est $\chi(\lambda^k \partial_k) = \lambda^k E_k$. Il est facile de vérifier que c'est un hamiltonien fort, et son moment n'est autre que θ restreinte à $\mathfrak{g}$. Si $H \in \mathcal{A}$ est un hamiltonien tel que $XH = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, comme nous avons $X = ad_{iM}$ pour un $M \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, cela signifie que $[M, H] = 0$. Le théorème de Nœther est alors trivial puisqu'il nous apprend que $\chi(ad_{iM}) = M$ commute avec H ! $\diamondsuit$

Exemple 5.52 De façon plus générale, soit $\mathcal{A}$ une algèbre n'admettant que des dérivations intérieures, et munie d'une structure symplectique ω telle que

$$\omega(ad_a, ad_b) = \lambda[a, b]$$

où λ est une constante. Alors toute action est hamiltonienne puisque $i_{ad_a}\omega = -\lambda da$. Si $(ad_{a_1}, \dots, ad_{a_n})$ est une base de $\mathfrak{g} \subset \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, alors on peut prendre pour hamiltonien généralisé $\chi(ad_{a_i}) = \lambda a_i$. Cet hamiltonien n'est pas toujours fort.

Un exemple de telle algèbre est bien sûr l'algèbre de Heisenberg dont la structure symplectique a été introduite en 5.6.2. $\diamondsuit$

5.7.4 Exemples

Les dérivations intérieures

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative unifère sur laquelle il existe des dérivations intérieures. On suppose que $H^1(\mathcal{A}, \mathcal{Z}(\mathcal{A}); \mathcal{A}) = 0$. Soit alors $\mathfrak{g} = \text{Int}(\mathcal{A})$. On vérifie facilement, pour les notations ci-dessus, que $\mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $\mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{B}) = \mathfrak{g}$ (par l'annulation du premier groupe de cohomologie relative de Hochschild) et $\mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{B}) = \text{Der}(\mathcal{A})$. En prenant la structure différentielle induite sur $\mathcal{B}$, c'est-à-dire en ne considérant que les dérivations de $\mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{B})/\mathfrak{g} = \text{Out}(\mathcal{A})$, on voit que l'algèbre des formes différentielles sur $\mathcal{B}$ est l'algèbre $\underline{\Omega}_{\text{Out}}(\mathcal{A})$, introduit dans la Définition 5.7.

Le tore non commutatif

Soit T_q^2 le tore non commutatif introduit en 5.5.3 pour $q^N = 1$. Comme ci-dessus, soit $\mathfrak{g} = \text{Int}(T_q^2)$. Alors on a $\mathcal{B} = \mathcal{Z}(T_q^2)$, $\mathcal{Z}_{\text{Der}}(\mathcal{B}) = \mathfrak{g}$ et $\mathcal{N}_{\text{Der}}(\mathcal{B}) = \text{Der}(T_q^2)$. Comme dans l'exemple précédent, l'algèbre différentielle des formes sur $\mathcal{Z}(T_q^2)$ est l'algèbre basique des formes différentielles sur T_q^2 pour l'opération de $\text{Int}(T_q^2)$. Comme le centre du tore non commutatif est l'algèbre $C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \mathbb{C})$, cette algèbre de formes est l'algèbre des formes de de Rham sur le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

5.8 Variante de la construction des formes

La construction des formes différentielles que nous venons d'introduire admet plusieurs variantes et généralisations. Nous nous proposons d'en esquisser deux.

5.8.1 Réduction de l'algèbre de Lie des dérivations

Dans la définition de la différentielle d utilisant la formule de Koszul, il est possible de considérer une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de $\text{Der}(\mathcal{A})$ au lieu de $\text{Der}(\mathcal{A})$ tout entier. On définit ainsi un calcul différentiel noté $\Omega_{\mathfrak{g}}(\mathcal{A})$ en considérant des objets du type $a_0 d_{\mathfrak{g}} a_1 \dots d_{\mathfrak{g}} a_n$ où $d_{\mathfrak{g}}$ est la différentielle de Koszul sur les applications multilinéaires antisymétriques de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}$. Le produit $d_{\mathfrak{g}} a d_{\mathfrak{g}} b$ est effectué en antisymétrisant sur les arguments. Par restriction à $\mathfrak{g}$, il existe un homomorphisme canonique $\Omega_{\text{Der}}(\mathcal{A}) \to \Omega_{\mathfrak{g}}(\mathcal{A})$, $a_0 da_1 \dots da_n \mapsto a_0 d_{\mathfrak{g}} a_1 \dots d_{\mathfrak{g}} a_n$ qui *a priori* n'est ni injectif ni surjectif. Si $\mathfrak{g}$ n'est pas un module sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, il est difficile de considérer un équivalent satisfaisant de $\underline{\Omega}_{\text{Der}}(\mathcal{A})$.

Pour illustrer cette construction, prenons l'exemple de l'algèbre des matrices $M(n, \mathbb{C})$. Son algèbre de Lie des dérivations $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ admet de nombreuses sous-algèbres de Lie. Par exemple, il est possible de considérer l'algèbre de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et sa représentation irréductible de dimension n. On peut donc voir $\mathfrak{su}(2)$ comme une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. L'algèbre des formes différentielles est alors $M(n, \mathbb{C}) \otimes \bigwedge \mathfrak{su}(2)^*$.

Dans cet exemple, on peut faire croître n en gardant toujours une "dimension" constante à l'espace non commutatif si on relie cette dimension à la dimension de l'algèbre de Lie des dérivations prises en compte. Cette idée a conduit J. Madore à la sphère floue. À la limite $n \to \infty$, il est possible de retrouver l'algèbre des fonctions sur la sphère $\mathbb{S}^2$. On peut donc considérer que l'algèbre $M(n, \mathbb{C})$ munie de cette structure différentiable est une approximation non commutative de la sphère. Le grand avantage de cette approche est que cette approximation conserve des symétries de la sphère, ce qui n'est pas le cas par exemple dans une approche du type réseau. Il est ainsi possible d'introduire des intégrales fonctionnelles sur la sphère en les approximant par des intégrales ordinaires sur ces algèbres non commutatives, puisque ces "algèbres de fonctions" sont de dimension finie. Nous renvoyons à [105, 40] pour plus de développements.

5.8.2 Algèbres graduées

Il est possible de considérer une algèbre associative $\mathcal{A}$ graduée et de construire les formes différentielles à partir des dérivations graduées. Les algèbres graduées ont déjà fait l'objet d'études du point de vue de leurs structures différentiables. Nous renvoyons à [103] pour de telles considérations.

Nous résumons les propriétés des dérivations graduées dans le lemme suivant :

Lemme 5.53 *Soit* $\mathcal{A} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{A}^n$ *une algèbre associative graduée. On note* $\mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{A}) = \oplus_{p \geq 0} \mathrm{Der}_p(\mathcal{A})$ *où*

$$\begin{aligned} \mathrm{Der}_p(\mathcal{A}) \quad = \quad & \{X : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \text{ linéaire } / \ X(\mathcal{A}^n) \subset \mathcal{A}^{n+p}, \\ & X(a_m a_n) = X(a_m) a_n + (-1)^{mp} a_m X(a_n)\} \end{aligned}$$

On a alors

1. $\mathrm{Der}_{\mathrm{gr}}(\mathcal{A})$ *est une algèbre de Lie graduée pour le crochet gradué défini sur* $X_p \in \mathrm{Der}_p(\mathcal{A})$ *et* $X_q \in \mathrm{Der}_q(\mathcal{A})$ *par*

$$[X_p, X_q]_{\mathrm{gr}} = X_p X_q - (-1)^{pq} X_q X_p \in \mathrm{Der}_{p+q}(\mathcal{A})$$

et l'identité de Jacobi graduée

$$[[X_p, X_q]_{\rm gr}, X_r]_{\rm gr} + (-1)^{p(q+r)}[[X_q, X_r]_{\rm gr}, X_p]_{\rm gr} + \\ (-1)^{r(q+p)}[[X_r, X_p]_{\rm gr}, X_q]_{\rm gr} = 0$$

2. $\mathrm{Der}_{\rm gr}(\mathcal{A})$ *est un module gradué sur le centre gradué de* $\mathcal{A}$, $\mathcal{Z}_{\rm gr}(\mathcal{A}) = \oplus_{p\geq 0}\mathcal{Z}_p(\mathcal{A})$ *où*

$$\mathcal{Z}_p(\mathcal{A}) = \{a_p \in \mathcal{A}^p \ / \ a_p a_n = (-1)^{pn} a_n a_p,\ \forall n \geq 0,\ \forall a_n \in \mathcal{A}^n\}$$

($\mathcal{Z}_{\rm gr}(\mathcal{A})$ *est une algèbre graduée commutative).*

3. *On note* $\mathrm{Int}_{\rm gr}(\mathcal{A}) = \oplus_{p\geq 0}\mathrm{Int}_p(\mathcal{A})$ *où* $\mathrm{Int}_p(\mathcal{A})$ *sont les dérivations intérieures (pour le crochet gradué) de degré* p *sur* $\mathcal{A}$. $\mathrm{Int}_{\rm gr}(\mathcal{A})$ *est un idéal (gradué) de l'algèbre de Lie graduée* $\mathrm{Der}_{\rm gr}(\mathcal{A})$. *(Un élément* $a_n \in \mathcal{A}^n$ *définit une dérivation intérieure graduée de degré* n*.)*

On peut définir $\underline{\Omega}^{n,p}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A})$ comme l'ensemble des applications n-linéaires ω^n_p de degré p de $(\mathrm{Der}_{\rm gr}(\mathcal{A}))^n$ dans $\mathcal{A}$ telles que

$$\omega^n_p(X_{q_1}, \dots, X_{q_n}) \in \mathcal{A}^{q_1+\cdots+q_n+p}$$

$$\omega^n_p(f_r X_{q_1}, \dots, X_{q_n}) = (-1)^{pr} f_r \omega^n_p(X_{q_1}, \dots, X_{q_n})$$

$$\omega^n_p(X_{q_1}, \dots, X_{q_i}, X_{q_{i+1}}, \dots, X_{q_n}) = (-1)^{q_i q_{i+1}} \omega^n_p(X_{q_1}, \dots, X_{q_{i+1}}, X_{q_i}, \dots, X_{q_n})$$

pour tout $X_{q_i} \in \mathrm{Der}_{q_i}(\mathcal{A})$, et tout $f_r \in \mathcal{Z}_r(\mathcal{A})$.

On peut définir un produit sur $\underline{\Omega}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A}) = \oplus_{n,p\geq 0}\underline{\Omega}^{n,p}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A})$ qui en fasse une algèbre bigraduée :

$$\underline{\Omega}^{m,p}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A}) \otimes \underline{\Omega}^{n,q}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A}) \to \underline{\Omega}^{m+n,p+q}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A})$$

en utilisant une antisymétrisation graduée sur les arguments.

On définit alors une différentielle $d : \underline{\Omega}^{n,p}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A}) \to \underline{\Omega}^{n+1,p}_{\rm Der,gr}(\mathcal{A})$ en posant

$$\begin{aligned} d\omega^n_p(X_{q_1}, \dots, X_{q_{n+1}}) = & \\ & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1}(-1)^{(p+q_1+\cdots+q_{i-1})q_i} X_{q_i}\omega^n_p(X_{q_1}, \dots, \overset{i}{\vee}, \dots, X_{q_{n+1}}) \\ & + \sum_{1\leq i<j\leq n+1} (-1)^{i+j}(-1)^{(q_1+\cdots+q_{i-1})q_i + (q_1+\cdots+q_{j-1})q_j + q_i q_j} \\ & \qquad \omega([X_{q_i}, X_{q_j}], X_{q_1}, \dots, \overset{i}{\vee}, \dots, \overset{j}{\vee}, \dots, X_{q_{n+1}}) \end{aligned}$$

avec des notations évidentes.

Proposition 5.54 $d^2 = 0$ *est équivalente à l'identité de Jacobi graduée sur* $[\ ,\ ]_{\mathrm{gr}}$.

Démonstration : C'est un calcul sans difficulté. $\square$

Il est facile d'introduire l'algèbre $\Omega_{\mathrm{Der,gr}}(\mathcal{A})$ comme la plus petite algèbre différentielle graduée contenant $\mathcal{A}$ incluse dans $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der,gr}}(\mathcal{A})$.

On a donc obtenu une généralisation du calcul différentiel basé sur les dérivations dans le cadre plus général des algèbres graduées. En particulier, ceci s'applique aux algèbres graduées commutatives, et aux algèbres super-symétriques (bien que ces dernières soient considérées comme $\mathbb{Z}_2$-graduées).

Chapitre 6

Calcul différentiel et opérateur de Dirac

"There is no God, and Dirac is His prophet. "
Wolfgang PAULI[1]

La construction des formes différentielles non commutatives que nous nous proposons d'expliquer ici a été introduite par A. CONNES. Elle s'inspire fortement du domaine mathématique des algèbres d'opérateurs. Afin de bien comprendre l'intérêt de la définition, il nous faut rappeler le rôle de l'opérateur de Dirac en géométrie différentielle ordinaire.

6.1 Opérateur de Dirac en géométrie différentielle

6.1.1 Définitions

Soit V une variété différentiable (pseudo-)riemannienne, et $\mathrm{C}\ell(V)$ son fibré de Clifford, défini par

$$\mathrm{C}\ell(V) = \left(\sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r TV \right) / I(V)$$

où $I(V)$ est le sous-fibré de $\sum_{r=0}^{\infty} \otimes^r TV$ dont la fibre en $p \in V$ est l'idéal engendré par les éléments de la forme $X_{|p} \otimes X_{|p} + g_{|p}(X_{|p}, X_{|p})$ pour tout $X_{|p} \in T_pV$, où g est la métrique sur V.

Lemme 6.1 *[36] Il existe un isomorphisme canonique de fibrés vectoriels*

$$\gamma : \bigwedge T^*V \to \mathrm{C}\ell(V)$$

[1] repris de [53, p. 15]

La connexion de Levi-Civita sur V induit une unique connexion sur $\mathrm{C}\ell(V)$*, noté* $\nabla^{\mathrm{C}\ell}$.

On identifie canoniquement tout vecteur $X_{|p} \in T_pV$ à un élément de $\mathrm{C}\ell(V)_p$ par l'inclusion $T_pV \hookrightarrow \mathrm{C}\ell(V)_p$.

Définition 6.2 *[36] Un fibré de Dirac S sur V est un fibré vectoriel sur V muni d'une métrique (de fibré vectoriel) et d'une connexion métrique ∇, tel que chaque fibre S_p soit un module à gauche sur l'algèbre* $\mathrm{C}\ell(V)_p$*, avec les relations :*

1. *pour tout vecteur unitaire $X_{|p} \in T_pV$ et tout $s_1(p), s_2(p) \in S_p$, on a*

$$\langle X_{|p} \cdot s_1(p), X_{|p} \cdot s_2(p)\rangle = \langle s_1(p), s_2(p)\rangle$$

   où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la structure métrique sur S_p et où $\cdot$ désigne le produit de module ;

2. *pour toute section φ de* $\mathrm{C}\ell(V)$ *de classe C^∞ et toute section s de S de classe C^∞, on a*

$$\nabla(\varphi \cdot s) = (\nabla^{\mathrm{C}\ell}\varphi) \cdot s + \varphi \cdot \nabla s$$

On note $\Gamma(S)$ les sections C^∞ sur S, qui est donc un module à gauche sur l'algèbre des sections C^∞ de $\mathrm{C}\ell(V)$, notée $\Gamma(\mathrm{C}\ell(V))$.

Soit donc donné S un fibré de Dirac.

Définition 6.3 *On définit l'opérateur de Dirac $D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$, opérateur différentiel du premier ordre, en posant, pour $s \in \Gamma(S)$ et (e_i) base locale orthonormale de vecteurs sur V,*

$$Ds = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i} s$$

Dans le cas où la métrique sur V est riemannienne, D est elliptique.
On a alors le lemme trivial :

Lemme 6.4 *Soit f une fonction C^∞ sur V, considérée comme opérateur de multiplication sur $\Gamma(S)$. Alors*

$$[D, f] = \gamma(df) \in \mathrm{C}\ell(V)$$

En d'autres termes, γ est le symbole de D.
Démonstration : Il suffit de considérer la définition de D et d'effectuer le calcul. □

Ce calcul très simple montre que sur les fonctions, le commutateur avec l'opérateur de Dirac D ressemble à la différentielle ordinaire d sur V. C'est cette remarque qui est à la base du calcul différentiel que nous introduirons.

Utiliser un opérateur de Dirac D permet en réalité d'aller plus loin que de définir simplement les formes différentielles. En effet, la définition précédente n'est possible que lorsque V est munie d'une structure (pseudo-)riemannienne. Les objets introduits dépendent fortement de cette métrique, y compris D, à tel point qu'il est possible de retrouver la distance géodésique entre deux points de V à partir de D uniquement [12].

La construction des formes différentielles à partir d'un opérateur de Dirac se donne donc pour but deux choses :

1. généraliser les formes de de Rham ;
2. apporter des outils de géométrie riemannienne.

Avant de considérer en détail cette construction, nous voudrions aller plus en avant dans l'aspect algèbre d'opérateurs dans la cas commutatif.

Lorsqu'elle est définie positive, la métrique sur S permet de définir un produit scalaire défini positif sur $\Gamma(S)$ en posant

$$(s_1, s_2) = \int_V \langle s_1, s_2 \rangle$$

pour tout $s_1, s_2 \in \Gamma(S)$.

Si on note $\Gamma_0(S)$ les sections C^∞ à support compact de S, on définit $L^2(S)$ comme le complété de $\Gamma_0(S)$ pour le produit scalaire $(\ ,\ )$. On a alors

Théorème 6.5 *[36] Si V est une variété riemannienne complète et D l'opérateur de Dirac sur S, alors la fermeture de D dans $L^2(S)$ est autoadjointe.*

Ce résultat nous plonge dans la théorie des algèbres d'opérateurs sur des espaces de Hilbert, où nous retiendrons que D devient un opérateur autoadjoint.

$\bigwedge T^*V$ est un fibré de Dirac pour la structure de module à gauche

$$\Gamma(\mathrm{C}\ell(V)) \times \Omega(V) \to \Omega(V)$$

(où $\Omega(V) = \Gamma(\bigwedge T^*V)$) est induite par la relation

$$r(X)\omega = i_X\omega - g^\sharp(X) \wedge \omega$$

pour tout $\omega \in \Omega(V)$ et tout $X \in \Gamma(TV) \subset \Gamma(\mathrm{C}\ell(V))$, et où $g^\sharp : \Gamma(V) \to \Omega^1(V)$ est l'isomorphisme donné par la métrique g sur V. Il est facile de vérifier que $r(X)r(X)\omega = -g(X,X)\omega$. Donc r est bien définie sur $\Gamma(\mathrm{C}\ell(V))$.

Théorème 6.6 *[36] L'opérateur de Dirac sur $\bigwedge T^*V$ est donné par $d + d^*$ sur $\Omega(V)$, où $d^* : \Omega^p(V) \to \Omega^{p-1}(V)$, est défini par $d^* = (-1)^{np+n+1} * d*$ sur $\Omega^p(V)$ avec $\dim V = n$, et $* : \Omega^p(V) \to \Omega^{n-p}(V)$ est l'application de Hodge induite par la structure riemannienne sur V.*

Nous voudrions retenir de cet exemple qu'un opérateur de Dirac D peut être construit directement à partir de la différentielle et de son adjoint. Nous verrons un exemple non commutatif où cela est encore possible.

6.1.2 Décomposition $\mathbb{Z}_2$

Le fibré de Clifford $\mathrm{C}\ell(V)$ admet une décomposition canonique $\mathrm{C}\ell(V) = \mathrm{C}\ell^0(V) \oplus \mathrm{C}\ell^1(V)$, correspondant à la décomposition paire-impaire de ses fibres (qui sont des algèbres de Clifford). On a donc une graduation $\mathbb{Z}_2$ sur $\mathrm{C}\ell(V)$. De même, $\Omega(V)$ admet une telle graduation en considérant la parité du degré des formes. L'isométrie γ respecte cette graduation. Comme l'idéal définissant $\mathrm{C}\ell(V)$ n'est pas homogène en degré dans $\sum_{r\geq 0} \otimes^r TV$ mais seulement homogène en parité, c'est le seul type de graduation que nous puissions considérer.

On peut demander à un fibré de Dirac S d'avoir lui aussi une graduation $\mathbb{Z}_2$ sous la forme d'une somme orthogonale $S = S^0 \oplus S^1$, compatible avec la décomposition précédente au sens où

$$\begin{array}{ll} \mathrm{C}\ell^0(V)S^0 \subset S^0 & \qquad \mathrm{C}\ell^0(V)S^1 \subset S^1 \\ \mathrm{C}\ell^1(V)S^0 \subset S^1 & \qquad \mathrm{C}\ell^1(V)S^1 \subset S^0 \end{array}$$

et telle que la connexion sur S respecte la graduation : $\nabla S^i \subset \Gamma(T^*V \otimes S^i)$.

Dans ce cas, l'opérateur de Dirac est de degré 1 pour cette graduation, et s'écrit donc, sur $\Gamma(S) = \Gamma(S^0) \oplus \Gamma(S^1)$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme cette décomposition est orthogonale, et que D est autoadjoint pour $(\ ,\ )$, D_0 et D_1 sont adjoints l'un de l'autre.

Cette décomposition en graduation $\mathbb{Z}_2$ n'est pas unique. Une autre décomposition souvent utilisée est la suivante. Supposons que V soit orientable. On définit la section globale ω de $C\ell(V)$ en posant, localement, $\omega_{|p} = e_{1|p} \cdots e_{n|p}$ où $(e_{i|p})$ est une base orthonormale orientée positivement de T_pV. Alors ω est indépendant du choix de cette base orthonormale orientée positivement, et on a

$$\begin{aligned} \omega^2 &= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ \omega e &= (-1)^{n-1} e\omega \end{aligned}$$

pour tout $e \in \Gamma(V) \subset \Gamma(C\ell(V))$. On montre facilement que $\nabla^{C\ell}\omega = 0$.

Cet élément définit l'application de fibrés

$$\begin{aligned} \lambda_\omega : C\ell(V) &\to C\ell(V) \\ \varphi &\mapsto \omega \cdot \varphi \end{aligned}$$

Pour $n \equiv 0$ ou 3 mod 4, $\lambda_\omega^2 = 1$, et on obtient la décomposition $C\ell(V) = C\ell^+(V) \oplus C\ell^-(V)$ selon les espaces propres de λ_ω. En particulier,

$$C\ell^{\pm}(V) = (1 \pm \omega) C\ell(V)$$

Si S est un fibré de Dirac, alors $\lambda_\omega : S \to S$ est bien définie, et induit une décomposition $S = S^+ \oplus S^-$, avec $S^{\pm} = (1 \pm \omega) \cdot S$. C'est la décomposition en chiralité gauche-droite utilisée en physique des particules élémentaires, avec la notation $\gamma^5 = \omega$.

Pour $n \equiv 1$ ou 2 mod 4, on a $\lambda_\omega^2 = -1$. Dans ce cas, on peut complexifier les fibrés et considérer l'opérateur $i\lambda_\omega$, qui induit une décomposition $\mathbb{Z}_2$.

Il est facile de vérifier dans les deux cas que cette décomposition $S^+ \oplus S^-$ est orthogonale.

Proposition 6.7 *[36] Soit S un fibré de Dirac comme ci-dessus. Alors*

$$D\lambda_\omega = (-1)^{n-1} \lambda_\omega D$$

Si on considère maintenant le cas pair, cette relation nous apprend que

$$\begin{aligned} D : \Gamma(S^+) &\to \Gamma(S^-) \\ \Gamma(S^-) &\to \Gamma(S^+) \end{aligned}$$

Donc dans cette décomposition, D s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix}$$

où D^+ et D^- sont adjoints l'un de l'autre.

Ces deux décompositions $\mathbb{Z}_2$ sont préservées lors de la complétion en $L^2(S)$. On aboutit donc à une situation où D est un opérateur autoadjoint de degré impair sur un espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué.

6.2 Construction des formes différentielles

Ayant maintenant le cadre commutatif à l'esprit, nous pouvons définir les formes différentielles sur une algèbre associative involutive quelconque.

DÉFINITION 6.8 *[12] Un K-cycle $(\mathcal{H}, D)$ sur une algèbre associative involutive $\mathcal{A}$ est donné par une représentation de $\mathcal{A}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et un opérateur autoadjoint non borné D sur $\mathcal{H}$, de résolvant compact, tel que $[D, a]$ soit borné pour tout $a \in \mathcal{A}$.*

On note indifféremment a un élément de $\mathcal{A}$ et l'opérateur sur $\mathcal{H}$ donné par la représentation.

Cette définition donne immédiatement le résultat suivant

Proposition 6.9 *[12] L'application $\pi : \Omega_U(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ définie par*

$$\pi(a_0 d_U a_1 \dots d_U a_n) = a_0[D, a_1] \dots [D, a_n]$$

est une représentation involutive de $\Omega_U(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{H}$.

Soit $J_0 = \oplus_n(\mathrm{Ker}\ \pi \cap \Omega_U^n(\mathcal{A}))$, idéal gradué de $\Omega_U(\mathcal{A})$. Alors $J = J_0 + d_U J_0$ est un idéal différentiel gradué de $\Omega_U(\mathcal{A})$.

L'involution sur $\Omega_U^1(\mathcal{A})$ est définie par $(d_U a)^* = -d_U a^*$.

DÉFINITION 6.10 *On définit*

$$\Omega_D(\mathcal{A}) = \Omega_U(\mathcal{A})/J$$

l'algèbre des formes différentielles non commutatives sur $\mathcal{A}$ induite par le K-cycle $(\mathcal{H}, D)$.

Dans la proposition précédente, J_0 n'est pas un idéal différentiel de $\Omega_U(\mathcal{A})$. Il peut arriver en effet que

$$\sum_i a_{0,i}[D, a_{1,i}] \dots [D, a_{n,i}] = 0$$

sans que $\sum_i [D, a_{0,i}][D, a_{1,i}] \dots [D, a_{n,i}]$ ne soit nul. Dans le cas où D^2 est défini, ceci est dû au fait que D^2 ne commute pas avec $\mathcal{A}$.

La définition de ces formes différentielles comme quotient du calcul différentiel universel implique que toute n-forme différentielle soit moralement combinaison linéaire de termes de la forme $a_0[D, a_1] \dots [D, a_n]$, modulo des termes en $[D^2, a]$ (cette dernière expression n'étant pas nécessairement bien définie comme opérateur sur $\mathcal{H}$).

Cette remarque permet une approche constructive d'une telle algèbre de formes différentielles dans le cas où $\mathcal{H}$ est de dimension finie par exemple (dans ce cas D^2 existe). Soient donnés D et $\mathcal{H}$, qui forment un K-cycle sur $\mathcal{A}$, tels que D^2 existe. Par définition, $\Omega^0_D(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, et $\Omega^1_D(\mathcal{A})$ est engendré par les opérateurs $a_0[D, a_1] \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pour $a_0, a_1 \in \mathcal{A}$. Il ne s'agit pas ici des expressions symboliques, mais bien des valeurs de ces opérateurs dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, ce qui permet de prendre en compte le noyau de π à ce degré. Pour construire $\Omega^2_D(\mathcal{A})$, il faut faire intervenir $d_U J_0$. Si on considère les combinaisons linéaires des opérateurs de la forme $a_0[D, a_1][D, a_2]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, on a déjà effectué le quotient par $J_0^2 \subset \Omega^2_U(\mathcal{A})$. Il reste à éliminer l'idéal engendré par les termes de la forme $\sum_i [D, a_{0,i}][D, a_{1,i}]$ où $\sum_i a_{0,i}[D, a_{1,i}] = 0$. Or, dans ce cas on a

$$\sum_i [D, a_{0,i}][D, a_{1,i}] = \Big[D, \sum_i a_{0,i}[D, a_{1,i}]\Big]_+ - \sum_i a_{0,i}[D^2, a_{1,i}] = -\sum_i a_{0,i}[D^2, a_{1,i}]$$

où $[\ ,\ ]_+$ est l'anticommutateur. Il faut donc quotienter l'espace engendré par les expressions $a_0[D, a_1][D, a_2]$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ par l'idéal engendré par les $[D^2, a]$.

L'expression de la différentielle $d : \Omega^1_D(\mathcal{A}) \to \Omega^2_D(\mathcal{A})$ est la composée de 2 applications : la première effectue l'anticommutateur avec D, la seconde projette sur le quotient précédent.

Cette construction peut être itérée aux autres degrés, et d aura toujours la structure "projection"$\circ$"commutateur gradué avec D".

Une variante de la définition précédente est la suivante :

Définition 6.11 *Un K-cycle pair $(\mathcal{H}, D, \lambda)$ sur $\mathcal{A}$ est un K-cycle $(\mathcal{H}, D)$ sur $\mathcal{A}$ où $\mathcal{H}$ est $\mathbb{Z}_2$-gradué par λ, avec $\lambda^2 = 1$, tel que $\lambda a = a\lambda$ pour tout $a \in \mathcal{A}$, et $D\lambda = -\lambda D$.*

En d'autres termes, D est un opérateur impair sur $\mathcal{H}$ et tout élément de l'algèbre $\mathcal{A}$ se représente en un élément pair.

Nous avons vu que par construction, dans le cas habituel, D est un opérateur différentiel du premier ordre. Or, la Définition 6.8 (ou 6.11) ne fait pas mention de propriétés non commutatives généralisant le fait que D soit du premier ordre. Nous verrons en 8.5 comment imposer une telle condition sur D.

6.3 L'algèbre des matrices

Nous voudrions montrer ici que le calcul différentiel introduit dans la Section 5 sur l'algèbre des matrices peut être obtenu par un opérateur de Dirac. Pour cela, enrichissons la structure de $\Omega_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

6.3.1 Structure métrique et isomorphisme $*$

Nous voulons définir sur $\Omega_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ une structure d'espace de Hilbert. Pour cela, nous introduisons un produit scalaire de la façon suivante.

À tout $\omega \in \Omega^p_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$, on associe $*\omega \in \Omega^{n^2-1-p}_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ en posant

$$*\theta^{i_1}\cdots\theta^{i_p} = \frac{1}{(n^2-1-p)!}\sqrt{g}g^{i_1j_1}\cdots g^{i_pj_p}\epsilon_{j_1\dots j_{n^2-1}}\theta^{j_{p+1}}\cdots\theta^{j_{n^2-1}}$$

où $\epsilon_{j_1\dots j_{n^2-1}}$ est complètement antisymétrique avec la normalisation $\epsilon_{12\dots n^2-1} = 1$, et

$$*M\omega = M * \omega$$

pour tout $M \in M(n,\mathbb{C})$ et tout $\omega \in \Omega^p_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

On rappelle que (g_{ij}) est la matrice inversible introduite en (3.1), d'inverse (g^{ij}), et g est son déterminant.

Les propriétés de $*$ sont exactement celles de l'application $*$ de Hodge en géométrie riemannienne ordinaire. Par exemple, nous avons

$$** = (-1)^{n^2p}$$

sur $\Omega^p_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

En utilisant le cycle défini dans la Proposition 5.26, on a un produit scalaire réel sur $\Omega_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ défini par

$$(\omega|\eta) = \int \omega \ \ * \eta$$

Ce produit scalaire réel induit une forme hermitienne définie positive

$$\langle\omega|\eta\rangle = (\overline{\omega}|\eta)$$

qui fait de $\Omega_{\text{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ un espace de Hilbert ayant une graduation $\mathbb{Z}_2$ canonique.

6.3.2 L'opérateur de Dirac

Dans cet espace de Hilbert, on introduit l'adjoint de la différentielle d, noté δ, tel que $\langle d\omega|\eta\rangle = \langle\omega|\delta\eta\rangle$ pour tout $\omega, \eta \in \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. On peut alors vérifier que

$$\delta\omega = (-1)^{(n^2-1)p+n^2} * d * \omega$$

pour $\omega \in \Omega^p_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

δ est une dérivation graduée de degré -1 sur $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

Proposition 6.12 *Soit $D = d+\delta$ l'opérateur autoadjoint impair sur l'espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $(\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})), \langle\ |\ \rangle)$. Alors le calcul différentiel associé à cet opérateur de Dirac est $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.*

Démonstration : La représentation de $M(n,\mathbb{C})$ sur $\mathcal{H} = \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$ est donnée par la multiplication à gauche. Donc, pour tout $M \in M(n,\mathbb{C})$ et tout $\omega \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{aligned} [D,M]\omega &= (d+\delta)M\omega - M(d+\delta)\omega \\ &= (dM)\omega \end{aligned}$$

puisque $\delta M = 0$. $[D,M]$ se représente sur $\mathcal{H}$ comme la multiplication par dM. Tout $M_0 d_U M_1 \dots d_U M_p \in \Omega^p_U(M(n,\mathbb{C}))$ se représente donc sur $\mathcal{H}$ par l'opérateur de multiplication par $M_0 dM_1 \dots dM_p \in \Omega^p_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$.

Cherchons le noyau de cette représentation π. Si $\sum_i M_{0,i} d_U M_{1,i} \dots d_U M_{p,i} \in \operatorname{Ker}\pi$, alors, en l'appliquant à $\mathbb{1} \in M(n,\mathbb{C}) = \Omega^0_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) \subset \mathcal{H}$, on voit que $\sum_i M_{0,i} dM_{1,i} \dots dM_{p,i} = 0$ dans $\mathcal{H} = \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. Cela signifie que le noyau de cette représentation est exactement le noyau de la projection $\Omega_U(M(n,\mathbb{C})) \to \Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. Ceci prouve d'une part que ce noyau est un idéal différentiel de $\Omega_U(M(n,\mathbb{C}))$, et que d'autre part, le calcul différentiel obtenu est exactement $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. $\square$

REMARQUE 6.13 Cette façon de voir ce calcul différentiel sur les matrices occulte complètement la présence des dérivations. On ne peut malheureusement pas lui donner l'avantage d'introduire une structure riemannienne, puisque cette structure était donnée à l'avance.

L'introduction de l'opérateur δ suggère de considérer le Laplacien $\Delta = d\delta + \delta d$.

Proposition 6.14 *[83] On a la décomposition orthogonale*

$$\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) = d\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) \oplus \delta\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C})) \oplus \operatorname{Ker}\Delta$$

et on a

$$\mathrm{Ker}\, \Delta \simeq H_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$$

par l'application qui à $\omega \in \mathrm{Ker}\, \Delta$ *associe sa classe de cohomologie.*

Nous retrouvons ainsi dans cet exemple l'équivalent non commutatif de la décomposition de Hodge-de Rham des formes différentielles.

6.4 Exemples

6.4.1 L'algèbre $\mathbb{C}^2$

Cet exemple est l'un des premiers à avoir été proposé pour cette construction des formes différentielles. Considérons l'algèbre commutative $\mathcal{A} = \mathbb{C}^2$. Le K-cycle pair considéré est donné par $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ pour un entier n fixé. La $\mathbb{Z}_2$-graduation est donnée par l'opérateur

$$\lambda = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

On représente un élément $a = (f, g)$ de l'algèbre par la matrice diagonale

$$\pi(a) = \begin{pmatrix} f\mathbb{1}_n & 0 \\ 0 & g\mathbb{1}_n \end{pmatrix}$$

Un opérateur de Dirac D est défini par une matrice

$$D = \begin{pmatrix} 0 & M^* \\ M & 0 \end{pmatrix}$$

pour M une matrice non nulle de taille $n \times n$.

Une 1-forme universelle $\omega = \sum_i a_0^i d_U a_1^i \in \Omega_U^1(\mathcal{A})$ se représente par la matrice

$$\pi(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -f_0^i(f_1^i - g_1^i)M^* \\ g_0^i(f_1^i - g_1^i)M & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\pi(d_U\omega) = \begin{pmatrix} (g_0^i - f_0^i)(f_1^i - g_1^i)M^*M & 0 \\ 0 & (g_0^i - f_0^i)(f_1^i - g_1^i)MM^* \end{pmatrix}$$

Par conséquent, si $\pi(\omega) = 0$, alors $\pi(d_U\omega) = 0$. Donc on a $\Omega_D^1(\mathcal{A}) = \pi(\Omega_U^1(\mathcal{A}))$ et $\Omega_D^2(\mathcal{A}) = \pi(\Omega_U^2(\mathcal{A}))$.

6.4.2 L'algèbre M_{2+1}

L'exemple très simple que nous allons maintenant introduire illustre de façon concrète comment construire les formes différentielles en tenant compte du noyau $d_U J_0$.

Soit M_{2+1} l'algèbre des matrices 3×3 de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

On représente cette algèbre sur l'espace de Hilbert $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}$ par la multiplication habituelle d'une matrice et d'un vecteur.

La forme la plus générale d'un opérateur de Dirac D (impair pour cette décomposition) est alors $D = \eta_1 - \eta_1^*$ avec

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et η_1^* sa transconjuguée.

Un calcul simple montre alors que Ω_D^1 est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

et Ω_D^2 est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

à cause du quotient par les éléments engendrés par $[D^2, M]$. Les Ω_D^n sont nuls pour $n \geq 3$.

Concrètement, la structure de bimodule sur Ω_D est donnée par la multiplication des matrices. La différentielle consiste à prendre le commutateur graduée avec D et à projeter éventuellement (pour Ω_D^2).

6.5 Modules de Fredholm

6.5.1 Définitions

La construction que nous allons donner maintenant est une variante de la Définition 6.8 d'un K-cycle. Elle permet d'associer au calcul différentiel que l'on introduit un cycle, dont nous verrons l'intérêt pour introduire un caractère de Chern en géométrie non commutative.

DÉFINITION 6.15 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive. Un module de Fredholm sur $\mathcal{A}$ est un couple $(\mathcal{H}, F)$ constitué d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur lequel $\mathcal{A}$ se représente involutivement (par π), et d'un opérateur F tel que $F = F^*$, $F^2 = 1$ et $[F, \pi(a)]$ est un opérateur compact sur $\mathcal{H}$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.*

Les deux différences essentielles avec la définition d'un K-cycle sont que d'une part F est de carré nul, ce qui facilite la construction des formes différentielles, et que d'autre part le commutateur avec tout élément de $\mathcal{A}$ est compact.

Un module de Fredholm pair est un module de Fredholm muni d'une $\mathbb{Z}_2$-graduation donnée par γ autoadjoint, avec $\gamma\pi(a) = \pi(a)\gamma$ et $\gamma F = -F\gamma$. Un module de Fredholm sans $\mathbb{Z}_2$-graduation est dit impair. Si $(\mathcal{H}, D)$ est un K-cycle sur $\mathcal{A}$, alors en posant $F = D|D|^{-1}$, on obtient un module de Fredholm.

Ces définitions des modules de Fredholm abstraits ont émergé des travaux sur les opérateurs elliptiques abstraits. Dans le contexte des opérateurs différentiels elliptiques sur les variétés, la notion de module de Fredholm relie par une certaine application l'indice d'un opérateur de Fredholm à la K-théorie de la variété. Dans ce résultat, le dual du caractère de Chern peut servir d'intermédiaire pour construire cette application. Aussi est-il naturel de considérer une généralisation au cas non commutatif du caractère de Chern, en particulier sur les modules de Fredholm.

Pour cela, il faut définir un cycle sur le calcul différentiel associé au module de Fredholm. Ici, les formes différentielles sont des sommes d'opérateurs compacts du type $a_0[F, a_1] \dots [F, a_n]$. Dans les algèbres d'opérateurs, la généralisation de la notion d'intégration est celle de trace. Pour pouvoir définir un cycle, nous allons devoir considérer des opérateurs à trace. Pour cela, nous allons affiner la définition des modules de Fredholm que nous considérerons.

DÉFINITION 6.16 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre involutive. Un module de Fredholm $(\mathcal{H}, F)$ est p-sommable pour $p \in [1, \infty[$ si $[F, \pi(a)] \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ pour tout $a \in \mathcal{A}$.*

REMARQUE 6.17 On peut définir sur une C^*-algèbre $\mathcal{A}$ une K-homologie, notion duale de la K-théorie, en considérant les classes d'homotopie des modules de Fredholm sur $\mathcal{A}$. Ces définitions de la K-théorie et de la K-homologie ont été regroupées dans une généralisation due à G. KASPAROV, appelée KK-théorie.

6.5.2 Cycles

Considérons donné un module de Fredholm $(n+1)$-sommable, pour n un entier. On suppose que ce module de Fredholm est pair si n est pair. Soit $\Omega_F(\mathcal{A})$ le calcul différentiel associé au K-cycle $(\mathcal{H}, F)$. Comme les éléments de $\Omega_F^k(\mathcal{A})$ sont de la forme $\omega = a_0[F, a_1] \ldots [F, a_k]$, on a $\Omega_F^k(\mathcal{A}) \subset \mathcal{L}^{\frac{n+1}{k}}(\mathcal{H})$ par (1.2). Soit T un opérateur sur $\mathcal{H}$ tel que $FT + TF \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H}) = \mathcal{T}(\mathcal{H})$. On peut définir $\mathrm{Tr}'(T) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F(FT+TF))$. Pour $\omega \in \Omega_F^n(\mathcal{A})$, on pose alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_s(\omega) &= \mathrm{Tr}'(\omega) \text{ si } n \text{ est impair} \\ \mathrm{Tr}_s(\omega) &= \mathrm{Tr}'(\gamma\omega) \text{ si } n \text{ est pair} \end{aligned}$$

Proposition 6.18 *[12] $(\Omega_F, d, \mathrm{Tr}_s)$ est un cycle de dimension n sur $\mathcal{A}$.*

On notera τ_n son caractère. Soit n le plus petit entier de sommabilité du module de Fredholm. Alors la parité de n est fixée, mais comme $\mathcal{L}^p(\mathcal{H}) \subset \mathcal{L}^q(\mathcal{H})$ pour $p \leq q$, la condition $[F, a] \in \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{H})$ implique $[F, a] \in \mathcal{L}^{n+1+2k}(\mathcal{H})$ pour tout entier $k \geq 0$. En particulier, on peut construire des cycles de dimension $n, n+2, \ldots$. Ceci permet d'introduire une famille de caractères $\tau_n, \tau_{n+2}, \ldots$. Pour résoudre cette ambiguïté, il suffit de passer dans la cohomologie cyclique périodique $H_\lambda^*(\mathcal{A}) = \varinjlim(HC^n(\mathcal{A}), S)$.

Proposition 6.19 *[12] Si $(\mathcal{H}, F)$ est un module de Fredholm $(n+1)$-sommable, de même parité que n, alors les caractères τ_{n+2k} vérifient*

$$\tau_{m+2} = -\frac{2}{m+2} S \tau_m$$

dans $HC^{m+2}(\mathcal{A})$.

En ajustant alors τ_m par un facteur multiplicatif, on peut définir un élément de $H_\lambda^*(\mathcal{A})$.

Définition 6.20 *Si $(\mathcal{H}, F)$ est un module de Fredholm d'indice de sommabilité fini, on définit son caractère de Chern $\mathrm{Ch}_*(\mathcal{H}, F) \in H_\lambda^*(\mathcal{A})$ comme la classe de cohomologie cyclique périodique donnée par le cocycle*

$$(-1)^{\frac{n(n_1)}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1) \mathrm{Tr}'(\gamma a_0[F, a_1] \ldots [F, a_n])$$

pour n pair assez grand,

$$\sqrt{2i}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} + 1) \mathrm{Tr}'(a_0[F, a_1] \ldots [F, a_n])$$

pour n impair assez grand.

Ce caractère de Chern se couple à la K-théorie (voir Proposition 4.27). On note $\langle K, [\tau]\rangle$ ce couplage, pour τ un élément de $HC^*(\mathcal{A})$ représentant le caractère de Chern de $(\mathcal{H}, F)$.

Proposition 6.21

$$\langle K, [\tau]\rangle \in \mathbb{Z}$$

Il faut interpréter cette relation comme une formule de l'indice, obtenue par des moyens de géométrie non commutative. En effet, considérons le cas pair. Soit $e \in \mathcal{M}(k, \mathcal{A})$ un projecteur représentant $[e] \in K_0(\mathcal{A})$. Soit

$$F = \begin{pmatrix} 0 & Q \\ P & 0 \end{pmatrix}$$

écrit dans la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$ pour laquelle

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Définissons le module de Fredholm $(\mathcal{H}_k, F_k)$ comme $\mathcal{H}_k = \mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^k$ et $F_k = F \otimes \mathbb{1}$. P et Q vérifient $PQ = 1$ et $QP = 1$. En particulier, P et Q sont inversibles. Notons $P_e = ePe$ et $Q_e = eQe$ les opérateurs respectivement de $e\mathcal{H}_k^+$ dans $e\mathcal{H}_k^-$ et de $e\mathcal{H}_k^-$ dans $e\mathcal{H}_k^+$. On peut alors montrer que

$$\mathrm{Ind} P_e = \langle [e], [\tau]\rangle$$

où $\mathrm{Ind} P_e$ est l'indice ordinaire de l'opérateur P_e. C'est un exemple de théorème de l'indice en géométrie non commutative.

Chapitre 7

Calculs différentiels et algèbres de Hopf

"Un coup de ton doigt sur le tambour décharge tous les sons et commence la nouvelle harmonie."

Arthur RIMBAUD
À une raison

Parmi les variétés différentiables, les groupes de Lie jouent un rôle considérable. Ils permettent par exemple de définir les fibrés principaux, et par conséquent les connexions, dont l'usage en physique des particules élémentaires est maintenant courant. Dans ce chapitre, nous allons montrer que la géométrie différentielle non commutative des groupes de Lie existe. Dans un premier temps, nous allons voir que l'équivalent non commutatif d'un groupe est la notion d'algèbre de Hopf. Ensuite, suivant S.L. WORONOWICZ, nous introduirons une classe de calculs différentiels bien adaptée à ces algèbres de Hopf.

7.1 Algèbres de Hopf

7.1.1 Coalgèbres, Bigèbres

La notion de coalgèbre est une notion duale à celle d'algèbre et la notion de bigèbre réunit les notions d'algèbres et de coalgèbres.

Rappel sur les algèbres

Rappelons que pour définir une algèbre associative unifère $\mathcal{A}$, il faut introduire :

1. un produit $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \otimes b \mapsto m(a \otimes b) = ab$;
2. une unité, que nous pouvons considérer comme une application $\iota : \mathbb{C} \to \mathcal{A}$, $\lambda \mapsto \lambda \mathbb{1}$;

avec les relations suivantes que nous écrivons sous forme de diagrammes commutatifs :

1. associativité

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{Id}"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "m"] \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "m"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

2. unité

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "m"] & \\ \mathbb{C} \otimes \mathcal{A} \arrow[ur, "\iota \otimes \mathrm{Id}"] & \simeq & \mathcal{A} \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[dr, "m"] & \\ \mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \arrow[ur, "\mathrm{Id} \otimes \iota"] & \simeq & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Coalgèbres

Nous allons dualiser la notion d'algèbre. Pour cela, l'écriture diagrammatique des définitions du produit associatif et de l'unité est très utile car les notions duales sont obtenues par inversion des flèches.

DÉFINITION 7.1 *Soit $\mathcal{C}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est une coalgèbre coassociative coünifère s'il existe un coproduit $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ et une coünité $\epsilon : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$ telles que les diagrammes suivants commutent :*

1. *coassociativité,*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[l, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"'] \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[u, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"] & \mathcal{C} \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

2. *coünité,*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[dl, "\epsilon \otimes \mathrm{Id}"'] & \\ \mathbb{C} \otimes \mathcal{C} & \simeq & \mathcal{C} \arrow[ul, "\Delta"'] \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[dl, "\mathrm{Id} \otimes \epsilon"'] & \\ \mathcal{C} \otimes \mathbb{C} & \simeq & \mathcal{C} \arrow[ul, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

Ces relations peuvent encore s'écrire

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c) &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(c) \\ (\epsilon \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c) &= (\mathrm{Id} \otimes \epsilon) \circ \Delta(c)\end{aligned}$$

pour tout $c \in \mathcal{C}$.

Pour $c \in \mathcal{C}$, $\Delta(c) \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ est une somme finie de la forme $\Delta(c) = \sum_i c_{i1} \otimes c_{i2}$. Nous allons noter symboliquement cette somme $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$. Alors nous avons, grâce à la coassociativité,

$$\begin{aligned}(\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(c) &= \Delta(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} \\ &= c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta(c) \\ &= c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)}\end{aligned}$$

et nous noterons donc naturellement

$$c_{(1)(1)} \otimes c_{(1)(2)} \otimes c_{(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)(1)} \otimes c_{(2)(2)} = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$$

La coünité nous donne quant à elle $\epsilon(c_{(1)})c_{(2)} = c_{(1)}\epsilon(c_{(2)}) = c$ pour tout $c \in \mathcal{C}$.

La coalgèbre $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ est dite cocommutative si $\Delta = \tau \circ \Delta$ où

$$\begin{aligned}\tau : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ c \otimes d &\mapsto d \otimes c\end{aligned}$$

est l'opérateur de transposition. C'est la notion duale de la commutativité.

Homomorphismes

DÉFINITION 7.2 *Soient $(\mathcal{C}, \Delta, \epsilon)$ et $(\mathcal{C}', \Delta', \epsilon')$ deux coalgèbres. Un homomorphisme de coalgèbres est une application linéaire $\varphi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ telle que*

$$\begin{aligned}\Delta' \circ \varphi &= (\varphi \otimes \varphi) \circ \Delta \\ \epsilon' \circ \varphi &= \epsilon\end{aligned}$$

Ces relations peuvent encore s'écrire sous forme de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \\ \varphi \big\downarrow & & \big\downarrow \varphi \otimes \varphi \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{\Delta'} & \mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}' \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{C}' \\ \epsilon \big\downarrow & & \big\downarrow \epsilon' \\ \mathbb{C} & \simeq & \mathbb{C} \end{array}$$

Bigèbres

DÉFINITION 7.3 *Une bigèbre $\mathcal{B}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ muni à la fois d'une structure d'algèbre (m, ι) et d'une structure de coalgèbre (Δ, ϵ) telles que les diagrammes suivant commutent :*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{B}\otimes\mathcal{B} & \xrightarrow{m} & \mathcal{B} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{B}\otimes\mathcal{B} \\
\Delta\otimes\Delta \big\downarrow & & & & \big\uparrow m\otimes m \\
\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B} & & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\tau\otimes\mathrm{Id}} & & \mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{B} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{C} \\
m \nwarrow & & \nearrow \epsilon\otimes\epsilon \\
 & \mathcal{B}\otimes\mathcal{B} &
\end{array}
\quad \text{et} \quad
\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{B} \\
\iota\otimes\iota \searrow & & \swarrow \Delta \\
 & \mathcal{B}\otimes\mathcal{B} &
\end{array}$$

Il est facile de voir que ces conditions font de Δ et ϵ des homomorphismes d'algèbres et de m et ι des homomorphismes de coalgèbres.

Ces relations s'écrivent encore

$$\begin{aligned}
\Delta(ab) &= \Delta(a)\Delta(b) \\
\Delta(\mathbb{1}) &= \mathbb{1}\otimes\mathbb{1} \\
\epsilon(ab) &= \epsilon(a)\epsilon(b) \\
\epsilon(\mathbb{1}) &= 1
\end{aligned}$$

EXEMPLE 7.4 Soit $\mathbb{C}[(X^i_j)]$ l'algèbre des polynômes sur les n^2 indéterminées (X^i_j). Alors on lui donne une structure de bigèbre en posant $\Delta(X^i_j) = X^i_k \otimes X^k_j$ et $\epsilon(X^i_j) = \delta^i_j$. Ce n'est pas une algèbre de Hopf (voir ci-dessous) car elle n'admet pas d'antipode. $\diamondsuit$

7.1.2 Algèbres de Hopf

DÉFINITION 7.5 *Une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est une bigèbre munie d'une antipode S, qui est une application $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{H} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{C} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{H} \\
\Delta \big\downarrow & & & & \big\uparrow m \\
\mathcal{H}\otimes\mathcal{H} & & \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes S,\ S\otimes\mathrm{Id}} & & \mathcal{H}\otimes\mathcal{H}
\end{array}$$

Ces relations s'écrivent encore

$$m\circ(S\otimes\mathrm{Id})\circ\Delta = m\circ(\mathrm{Id}\otimes S)\circ\Delta = \iota\circ\epsilon$$

L'antipode ressemble un peu à un inverse, mais n'est pas une application inversible en général.

Propriétés de l'antipode

Lemme 7.6 *Pour une bigèbre* $(\mathcal{H}, m, \Delta, \iota, \epsilon)$ *donnée,* S *est unique telle que* $(\mathcal{H}, m, \Delta, \iota, \epsilon, S)$ *soit une algèbre de Hopf. Si elle existe, elle vérifie*

$$\begin{aligned} S(\mathbb{1}) &= \mathbb{1} \\ S(ab) &= S(b)S(a) \\ (S \otimes S) \circ \Delta(a) &= \tau \circ \Delta \circ S(a) \\ \epsilon \circ S(a) &= \epsilon(a) \end{aligned}$$

S est donc un antihomomorphisme d'algèbres et un antihomomorphisme de coalgèbres.

Exemples

Nous allons voir que la structure d'algèbre de Hopf contient en un certain sens celle de groupe et celle d'algèbre de Lie.

Exemple 7.7 Soit G un groupe. Sur l'algèbre de convolution LG où les éléments sont les sommes formelles finies $\sum_{g \in G} a(g)g$, avec $a(g) \in \mathbb{C}$, nous définissons

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= e \\ \Delta(g) &= g \otimes g \\ \epsilon(g) &= \mathbb{1} \\ S(g) &= g^{-1} \end{aligned}$$

et nous prolongeons par linéarité les trois dernières applications. Muni de ces applications, LG est une algèbre de Hopf. ♢

Exemple 7.8 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. C'est une algèbre associative unifère sur laquelle nous définissons une structure d'algèbre de Hopf, en posant sur ses générateurs

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= X \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes X \\ \epsilon(X) &= 0 \\ S(X) &= -X \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$. ♢

Dans ces exemples, S correspond à des “inverses”.

7.1.3 Représentations

DÉFINITION 7.9 *Une représentation d'une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ sur un espace vectoriel de dimension finie V est un homomorphisme d'algèbres associatives unifères*

$$\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{L}(V)$$

Il s'agit donc d'une représentation de l'algèbre associative unifère sous-jacente à $\mathcal{H}$. Cependant, grâce à sa structure de bigèbre, nous allons pouvoir définir la notion de représentation produit tensoriel de deux représentations, ce qui est impossible à réaliser avec une algèbre associative quelconque.

DÉFINITION 7.10 *Soient η_1 et η_2 deux représentations de $\mathcal{H}$ sur les espaces vectoriels V_1 et V_2 respectivement. Nous définissons la représentation produit tensoriel $\eta_1 \otimes \eta_2$ de $\mathcal{H}$ sur $V_1 \otimes V_2$ en posant pour tout $a \in \mathcal{H}$ et tout $v_1 \otimes v_2 \in V_1 \otimes V_2$*

$$(\eta_1 \otimes \eta_2)(a)(v_1 \otimes v_2) = \eta_1(a_{(1)})v_1 \otimes \eta_2(a_{(2)})v_2$$

où nous rappelons que $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Les propriétés du coproduit Δ font de $\eta_1 \otimes \eta_2$ une représentation de $\mathcal{H}$. En fait, nous n'utilisons que la structure de bigèbre puisque l'antipode n'apparaît pas dans cette définition.

REMARQUE 7.11 Le fait de pouvoir définir le produit tensoriel de deux représentations est d'une grande importance en physique quantique. Nous savons en effet que coupler deux systèmes physiques revient à effectuer le produit tensoriel des espaces de Hilbert correspondants. Une symétrie du système est modélisée par une représentation sur cet espace de Hilbert. Pour que cette symétrie puisse être considérée sur le système couplé (si elle est déjà en place sur les deux sous-systèmes), il faut pouvoir considérer le produit tensoriel des représentations. De ce que nous venons de voir, la structure algébrique minimale pour que cela soit possible est la bigèbre. Les symétries étant en général "inversibles", il semble que l'algèbre de Hopf soit la structure la mieux adaptée. Il n'est cependant pas nécessaire qu'elle soit commutative ! Il est donc possible, pour le physicien, de considérer des "symétries non commutatives" bien plus générales que celles produites par les groupes classiques.

Exemples

EXEMPLE 7.12 Prenons $\mathcal{H} = LG$ où G est un groupe fini. Une représentation (d'algèbre) de LG équivaut à une représentation (de groupe) de G. Nous retrouvons alors, grâce à la définition prise pour Δ, la notion habituelle de produit tensoriel de représentations de groupe de G. $\diamondsuit$

Exemple 7.13 Dans le cas où $\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie de dimension finie, les représentations (d'algèbre de Lie) de $\mathfrak{g}$ équivalent aux représentations (d'algèbre) de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. La définition du coproduit Δ sur $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ fait que le produit tensoriel de représentations de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ coïncide avec le produit tensoriel de représentations de $\mathfrak{g}$. $\diamondsuit$

Représentation adjointe

Définition 7.14 *La représentation adjointe d'une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est une représentation de $\mathcal{H}$ sur l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{H}$, définie de la façon suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ a \otimes b & \mapsto & a_{(1)} b S(a_{(2)}) \end{array}$$

Exemple 7.15 Si $\mathcal{H} = LG$ est l'algèbre de convolution d'un groupe fini, alors, pour $a = g \in G$ et $b = h \in G$, nous avons

$$a_{(1)} b S(a_{(2)}) = g h g^{-1}$$

C'est donc le prolongement linéaire à LG de l'action par les automorphismes intérieurs de G sur lui-même. $\diamondsuit$

Exemple 7.16 Pour $\mathcal{H} = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, nous avons, sur des générateurs $a = X \in \mathfrak{g}$ et $b = Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{array}{rcl} a_{(1)} b S(a_{(2)}) & = & XY\mathbb{1} - \mathbb{1}YX \\ & = & XY - YX \\ & = & [X, Y] \\ & = & ad_X Y \end{array}$$

La représentation adjointe de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est donc un prolongement, dans ce cas, de la représentation adjointe de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur elle-même. $\diamondsuit$

Remarque 7.17 Une représentation η d'algèbre associative unifère $\mathcal{H}$ sur un espace vectoriel V peut aussi être considérée comme une application

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H} \otimes V & \to & V \\ a \otimes v & \mapsto & \eta(a) v \end{array}$$

ayant de bonnes propriétés faciles à établir à partir de celles de η.

7.1.4 Dualité

Dual restreint d'une algèbre

DÉFINITION 7.18 *Soit (V, η) une représentation d'une algèbre associative $\mathcal{A}$. Pour tout $v \in V$ et tout $\xi \in V^*$, on définit le cœfficient $\phi^\eta_{\xi,v}$ dans le dual de $\mathcal{A}$ en posant*

$$\phi^\eta_{\xi,v}(a) = \langle \xi, \eta(a)v \rangle$$

Si V est de dimension finie, de base (e_i) et de base duale (e^i), on pose η^i_j ces cœfficients.

DÉFINITION 7.19 *Les cœfficients des représentations de dimension finie de $\mathcal{A}$ sont appelés formes linéaires représentatives, et forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}^*$ noté $\mathcal{A}^0$, appelé dual restreint de $\mathcal{A}$.*

Fonctions représentatives sur un groupe

Soit G un groupe et (V, ρ) une représentation de dimension finie de G. Pour tout $v \in V$ et tout $\xi \in V^*$, on définit le cœfficient $\phi^\rho_{\xi,v}$, fonction sur G à valeurs dans $\mathbb{C}$, en posant

$$\phi^\rho_{\xi,v}(g) = \langle \xi, \rho(g)v \rangle$$

Ce sont les fonctions représentatives du groupe. On note $\mathcal{R}(G)$ l'ensemble de ces fonctions, lorsqu'on considère toutes les représentations inéquivalentes (V, ρ) de dimensions finies de G. Alors grâce à la somme directe et au produit tensoriel de deux représentations, $\mathcal{R}(G)$ est une algèbre associative commutative pour le produit des fonctions.

Si l'on considère l'algèbre de convolution LG de G, alors $\mathcal{R}(G)$ est le dual restreint LG^0 de LG.

Si G est un groupe topologique, on note $\mathcal{R}_c(G)$ la sous-algèbre de $\mathcal{R}(G)$ des fonctions représentatives continues. Cette algèbre est stable par conjugaison complexe. C'est donc une algèbre involutive.

De même, si G est un groupe de Lie complexe, on note $\mathcal{R}_h(G)$ la sous-algèbre de $\mathcal{R}_c(G)$ des fonctions représentatives holomorphes sur G.

On a alors

Proposition 7.20 *[23] Si G est un groupe de Lie complexe semi-simple et connexe, et si ρ est une représentation holomorphe fidèle de dimension finie, alors ses cœfficients ρ^i_j engendrent $\mathcal{R}_h(G)$.*

L'intérêt de considérer les fonctions représentatives sur un groupe tient en partie au théorème suivant, appelé théorème de Peter-Weyl :

Théorème 7.21 *Si G est un groupe topologique compact, alors $\mathcal{R}_c(G)$ est dense dans $L^2(G)$.*

Cette algèbre de fonctions contient donc beaucoup d'informations sur le groupe.

Dual restreint d'une algèbre de Hopf

Théorème 7.22 *[23] Si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf, alors son dual restreint est une algèbre de Hopf pour les opérations duales de celles de $\mathcal{H}$.*

Ce théorème nous fournit d'autres exemples d'algèbres de Hopf :

Exemple 7.23 Prenons $\mathcal{H} = LG$ où G est un groupe. On sait alors que $\mathcal{H}^0 = \mathcal{R}(G)$, que l'on identifie à une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions sur G. La structure d'algèbre de Hopf sur cette algèbre est donnée par

$$\begin{array}{rcl} (\Delta f)(g_1, g_2) & = & f(g_1 g_2) \\ \epsilon(f) & = & f(e) \\ S(f)(g) & = & f(g^{-1}) \end{array}$$

où on identifie $\mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(G)$ à une sous-algèbre des fonctions sur $G \times G$. $\diamondsuit$

Exemple 7.24 Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie, et $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son algèbre enveloppante. Soit G le groupe de Lie complexe et simplement connexe correspondant. Alors il est bien connu que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ s'identifie aux distributions sur G ayant pour support $\{e\}$. Cette identification s'effectue en associant à $X \in \mathfrak{g}$ la distribution

$$f \mapsto \frac{d}{dt} f(\exp(tX))_{|t=0}$$

et le produit dans $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ correspond au produit de convolution sur les distributions. On a alors

Proposition 7.25 *[23] L'algèbre de Hopf $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^0$ est isomorphe à l'algèbre $\mathcal{R}_h(G)$ munie de la multiplication ordinaire des fonctions.*

$\diamondsuit$

7.1.5 Algèbres de Hopf commutatives

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf commutative. On lui associe le groupe $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ des caractères sur $\mathcal{H}$, c'est-à-dire des homomorphismes d'algèbres $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$. On a bien sûr alors $\mathcal{G}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}^0$.

Théorème 7.26 *[23]*

1. *Soit G un groupe fini. $\mathcal{R}(G)$ est une algèbre de Hopf commutative de dimension finie et semi-simple, et $\mathcal{G}(\mathcal{R}(G))$ est isomorphe à G.*

2. *Si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf commutative de dimension finie, semi-simple, alors $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ est un groupe fini et $\mathcal{R}(\mathcal{G}(\mathcal{H}))$ est isomorphe à $\mathcal{H}$.*

Ce théorème donne donc une antiéquivalence de catégorie entre le catégorie des groupes finis et la catégorie des algèbres de Hopf commutatives de dimension finie et semi-simples.

Nous voudrions obtenir un résultat semblable pour les groupes de Lie réels compacts.

Définition 7.27 *Une $*$-algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf munie d'une involution telle que $\mathcal{H}$ soit une algèbre involutive et $\Delta(a^*) = (\Delta(a))^*$, $\epsilon(a^*) = \overline{\epsilon(a)}$ et $S(S(a)^*)^* = a$, où $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$.*

Si $\mathcal{H}$ est une $*$-algèbre de Hopf, alors l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}^0$ est aussi une $*$-algèbre de Hopf pour $\langle \xi^*, a \rangle = \overline{\langle \xi, S(a)^* \rangle}$. On a alors

Théorème 7.28 *[23] Soit $\mathcal{H}$ une $*$-algèbre de Hopf commutative munie d'une C^*-norme. S'il existe des éléments $(a^i_j)_{0 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathcal{H}$ tels que*

1. *les a^i_j engendrent $\mathcal{H}$ en tant que $*$-algèbre ;*

2. $\Delta(a^i_j) = a^i_k \otimes a^k_j$ *;*

3. $S(a^i_k)a^k_j = a^i_k S(a^k_j) = \delta^i_j \mathbb{1}$ *;*

4. $\epsilon(a^i_j) = \delta^i_j$ *;*

alors il existe un groupe de Lie réel compact G et un isomorphisme isométrique de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{R}_c(G)$ (où $\mathcal{R}_c(G)$ est munie de la C^*-norme habituelle sur les fonctions continues sur un espace compact).

Remarque 7.29 Ce théorème doit bien sûr être rapproché du Théorème de Gel'fand-Naïmark sur les C^*-algèbre commutatives.

Remarque 7.30 Ce théorème a motivé l'introduction par S.L. Woronowicz des groupes quantiques compacts dans [122], essentiellement en ôtant l'hypothèse de la commutativité de $\mathcal{H}$.

7.1.6 Coreprésentations

Définition

Par dualité, la notion de représentation conduit à la notion de coreprésentation. Grâce à la Remarque 7.17, cette notion est introduite de la façon suivante :

DÉFINITION 7.31 *Une coreprésentation d'une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ (en fait d'une coalgèbre) sur un espace vectoriel de dimension finie V est une application*

$$\mu : V \to V \otimes \mathcal{H}$$

telle que

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \mathrm{Id}) \circ \mu &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \mu \\ (\mathrm{Id} \otimes \epsilon) \circ \mu &= \mathrm{Id}\end{aligned}$$

Notons $\mu(v) = v^{(1)} \otimes v^{(2)}$, qui est symboliquement une somme finie d'éléments $v^{(1)} \in V$ et $v^{(2)} \in \mathcal{H}$. Les conditions ci-dessus s'écrivent alors

$$v^{(1)(1)} \otimes v^{(1)(2)} \otimes v^{(2)} = v^{(1)} \otimes {v^{(2)}}_{(1)} \otimes {v^{(2)}}_{(2)}$$

et

$$v^{(1)}\epsilon(v^{(2)}) = v$$

Cette dernière relation est l'expression duale du fait que l'unité agit comme l'identité. Ces relations peuvent encore s'écrire sous forme de diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu} & V \otimes \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \mu}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id} \otimes \Delta} \\ V \otimes \mathcal{H} & \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{Id}} & V \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} & V \otimes \mathcal{H} & \\ \mu \nearrow & & \searrow \mathrm{Id} \otimes \epsilon \\ V & \simeq & V \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

EXEMPLE 7.32 Δ est une coreprésentation de $\mathcal{H}$ sur elle-même, comme il est facile de le vérifier. C'est la coreprésentation régulière à droite. $\diamondsuit$

EXEMPLE 7.33 Les coreprésentations de l'algèbre de Hopf $\mathcal{R}(G)$ sont les représentations du groupe G. En effet, soit ρ une représentation de G sur l'espace vectoriel V, d'éléments de matrice $\rho^i_j \in \mathcal{R}(G)$ dans une base (e_i) de V. Définissons alors la coreprésentation μ de $\mathcal{R}(G)$ sur V en posant

$\mu(e_j) = e_k \otimes \rho^k_j$. Par définition du coproduit, nous avons $(\Delta\rho^i_j)(g_1, g_2) = \rho^i_j(g_1 g_2) = \rho^i_k(g_1)\rho^k_j(g_2)$ puisque ρ est une représentation de G. Donc sur les ρ^i_j, le coproduit vaut $\Delta\rho^i_j = \rho^i_k \otimes \rho^k_j$. Ceci nous conduit à $(\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \mu(e_j) = e_i \otimes \rho^i_k \otimes \rho^k_j$. D'autre part, nous voyons facilement que $(\mu \otimes \mathrm{Id}) \circ \mu(e_j) = e_i \otimes \rho^i_k \otimes \rho^k_j$ d'où l'égalité. Maintenant, nous avons $\epsilon(\rho^i_j) = \rho^i_j(e) = \delta^i_j$ donc $(\mathrm{Id} \otimes \epsilon) \circ \mu(e_j) = e_k \delta^k_j = e_j$. $\diamondsuit$

Produit tensoriel

DÉFINITION 7.34 *Soient μ_1 et μ_2 deux coreprésentations de $\mathcal{H}$ sur les espaces vectoriels V_1 et V_2 respectivement. Nous définissons le produit tensoriel des coreprésentations μ_1 et μ_2 comme la coreprésentation*

$$\begin{array}{rcl} \mu_1 \otimes \mu_2 : V_1 \otimes V_2 & \to & V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{H} \\ v_1 \otimes v_2 & \mapsto & v_1^{(1)} \otimes v_2^{(1)} \otimes v_1^{(2)} v_2^{(2)} \end{array}$$

Il s'agit donc tout simplement de faire (co)agir μ_1 et μ_2 sur v_1 et v_2 et d'effectuer le produit des éléments de $\mathcal{H}$ obtenus. Dans cette définition, la structure d'algèbre de $\mathcal{H}$ intervient donc, tout comme la structure de coalgèbre était nécessaire à la définition du produit tensoriel de représentations d'algèbres de Hopf.

7.2 Calculs différentiels bicovariants

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des calculs différentiels sur des algèbres associatives $\mathcal{A}$ sans structure supplémentaire. Ces calculs différentiels ne faisaient donc usage que de la multiplication associative.

Comme nous venons de le constater, il existe toute une classe d'algèbres que le géomètre non commutatif ne peut ignorer, c'est celle des algèbres de Hopf. Cette catégorie d'algèbre contient en effet certaines algèbres de fonctions sur des groupes ou des algèbres de Lie. La notion clé supplémentaire que de telles algèbres apportent est celle de covariance. Afin de rendre le calcul différentiel introduit sur de telles algèbres pleinement compatible avec cette structure, nous devons le restreindre en lui imposant de nouvelles propriétés.

Pour bien comprendre que ceci n'est pas arbitraire, nous allons rappeler le cas commutatif qui lui correspond, c'est-à-dire le calcul différentiel sur un groupe de Lie.

7.2.1 Calcul différentiel sur un groupe de Lie

Un groupe de Lie G étant une variété, on peut lui associer le calcul différentiel de de Rham.

Rappelons qu'un calcul différentiel sur une variété se donne pour but d'apporter des informations sur la structure infinitésimale, même si pour le calcul de de Rham par exemple, on peut récupérer des informations topologiques globales (à travers sa cohomologie en particulier). Or, en ce qui concerne les groupes de Lie, il est bien connu que les informations infinitésimales sont contenues dans son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ (puisque tout groupe de Lie est analytique). Cette algèbre de Lie peut être caractérisée de deux façons.

1. En tant qu'espace vectoriel de dimension finie, c'est le plan tangent en l'unité e du groupe. De ce point de vue, l'application exponentielle, qui réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ sur un voisinage de e dans G, montre bien le lien entre l'infinitésimal en e contenu dans $\mathfrak{g}$ et le local sur G.

2. En tant qu'algèbre de Lie, c'est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G.

Rappelons que la translation à gauche (ainsi d'ailleurs que la translation à droite) sur G joue un rôle important dans la construction de $\mathfrak{g}$. L'application $L_h : G \to G$, $L_h(g) = hg$ induit entre les plans tangents un isomorphisme L_{h*} qui permet de définir l'invariance des champs de vecteurs.

Par dualité, cette application permet la translation à gauche des formes différentielles. Il est bien connu que les 1-formes différentielles invariantes à gauche forment l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ dual de $\mathfrak{g}$, sous-espace vectoriel de dimension finie de $\Omega^1(G)$.

En considérant les formes différentielles invariantes à gauche à tous les degrés, on obtient $\bigwedge\mathfrak{g}^* \subset \Omega(G)$, algèbre différentielle graduée commutative sur laquelle la différentielle se restreint. Au degré 1, elle coïncide avec le dual du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. En général, l'étude des groupes de Lie ne nécessite pas de travailler avec toute l'algèbre des formes différentielles, mais seulement avec cette sous-algèbre différentielle. Elle a l'avantage de contenir assez d'informations sur le groupe pour le géomètre, et d'être d'une structure très simple pour l'algébriste.

Bien sûr, un développement analogue peut être effectué avec la translation à droite.

Afin de permettre une généralisation non commutative de cette construction, nous allons rendre algébrique ces notions.

Pour cela, considérons une sous-algèbre $\mathrm{Fon}(G)$ de l'algèbre des fonctions C^∞ sur le groupe de Lie G sur laquelle on puisse introduire une structure d'algèbre de Hopf. Cette algèbre peut par exemple être celle des fonctions représentatives différentiables sur G. Dans le cas d'un groupe de Lie compact matriciel, il suffit de considérer les fonctions représentatives de la représentation fondamentale. C'est cette approche qui permet par exemple de considérer le cas non commutatif, comme nous le constaterons par la suite. Sur une telle algèbre $\mathrm{Fon}(G)$, le coproduit est défini par la formule $\Delta f(g_1, g_2) = f(g_1 g_2)$ où l'on considère $\mathrm{Fon}(G) \otimes \mathrm{Fon}(G) \subset C^\infty(G \times G)$. La translation à gauche est alors reliée au coproduit par la relation :

$$\Delta f(g_1, g_2) = L^*_{g_1} f(g_2)$$

On suppose maintenant que toute 1-forme différentielle α sur G peut s'écrire comme somme de termes de la forme $f_1 df_2$ où $f_i \in \mathrm{Fon}(G)$. Alors la translation à gauche agit sur une telle expression sous la forme

$$L^*_{g_1}(f_1 df_2)_{|g_2} = f_1(g_1 g_2) df_2(g_1 \cdot)_{|g_2}$$

où $df(h\cdot)_{|g_2}$ signifie que l'on différentie la fonction $g \mapsto f(hg)$, h étant considéré comme une constante. Cela signifie que d agit sur le second facteur du produit tensoriel dans Δf. Donc on a

$$L^* f_1 df_2 = (\Delta f_1)(\mathrm{Id} \otimes d)(\Delta f_2)$$

où il est sous-entendu que $L^*\alpha \in \mathrm{Fon}(G) \otimes \Omega^1(G)$. Le premier facteur donne la dépendance $h \mapsto L^*_h \alpha$. Posons alors

$$\Delta_L(f_1 df_2) = (\Delta f_1)(\mathrm{Id} \otimes d)(\Delta f_2)$$

Δ_L est l'équivalent algébrique de L^*.

De même, l'équivalent algébrique de la translation à droite est

$$\Delta_R(f_1 df_2) = (\Delta f_1)(d \otimes \mathrm{Id})(\Delta f_2)$$

Δ_L est une application de $\Omega^1(G)$ dans $\mathrm{Fon}(G) \otimes \Omega^1(G)$, et Δ_R est une application de $\Omega^1(G)$ dans $\Omega^1(G) \otimes \mathrm{Fon}(G)$. Elles sont compatibles entre elles au sens où

$$(\Delta_L \otimes \mathrm{Id})\Delta_R = (\mathrm{Id} \otimes \Delta_R)\Delta_L$$

Cette expression est équivalente au fait que L_h et R_g commutent. Maintenant, puisque $L_e = R_e = \mathrm{Id}$ sur G, on a

$$\begin{aligned}(\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta_L &= \mathrm{Id} \\ (\mathrm{Id} \otimes \epsilon)\Delta_R &= \mathrm{Id}\end{aligned}$$

où ϵ est la coünité, qui à une fonction sur G associe sa valeur en e.

Toutes ces considérations algébriques nous permettent de passer au cas non commutatif.

7.2.2 Calcul différentiel bicovariant du premier ordre

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Hopf. On va considérer que cette algèbre est l'équivalent non commutatif d'une algèbre de fonctions différentiables $\mathrm{Fon}(G)$ sur un groupe de Lie.

DÉFINITION 7.35 *Un calcul différentiel bicovariant du premier ordre sur $\mathcal{A}$ est un bimodule $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ sur $\mathcal{A}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *il existe une dérivation $d : \mathcal{A} \to \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ telle que tout élément de $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ soit combinaison linéaire de termes adb pour $a, b \in \mathcal{A}$;*

2. *il existe deux applications*

$$\begin{array}{rcll} \Delta_L : \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) & \to & \mathcal{A} \otimes \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) & \textit{covariance à gauche} \\ \Delta_R : \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) & \to & \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A} & \textit{covariance à droite} \end{array}$$

   telles que

$$\begin{array}{rcl} \Delta_L(adb) & = & \Delta(a)(\mathrm{Id} \otimes d)\Delta(b) \\ \Delta_R(adb) & = & \Delta(a)(d \otimes \mathrm{Id})\Delta(b) \end{array}$$

Lemme 7.36 *Soit $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ un calcul différentiel bicovariant du premier ordre sur $\mathcal{A}$. Alors on a*

$$\begin{array}{rcl} \Delta_L(a\alpha b) & = & \Delta(a)\Delta_L(\alpha)\Delta(b) \\ \Delta_R(a\alpha b) & = & \Delta(a)\Delta_R(\alpha)\Delta(b) \\ (\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta_L & = & \mathrm{Id} \\ (\mathrm{Id} \otimes \epsilon)\Delta_R & = & \mathrm{Id} \end{array}$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et tout $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$.

Démonstration : C'est une vérification immédiate à partir de la définition. □

REMARQUE 7.37 Dans la définition précédente, on donne explicitement l'expression des applications Δ_L et Δ_R. Pour que cette définition ait un sens, il faut en réalité vérifier une seule chose : si $\sum_i a_i db_i = 0$ dans $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$, alors on doit avoir $\sum_i \Delta(a_i)(\mathrm{Id} \otimes d)\Delta(b_i) = 0$ dans $\mathcal{A} \otimes \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ et $\sum_i \Delta(a_i)(d \otimes \mathrm{Id})\Delta(b_i) = 0$ dans $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}$.

Proposition 7.38 *[123] Si $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ est un calcul différentiel bicovariant du premier ordre sur $\mathcal{A}$, alors*

$$(\mathrm{Id} \otimes \Delta_R)\Delta_L = (\Delta_L \otimes \mathrm{Id})\Delta_R$$

De façon plus générale, on définit la notion de bimodule bicovariant.

Définition 7.39 *Un bimodule bicovariant $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$ est un bimodule sur $\mathcal{A}$ muni de deux applications*

$$\begin{aligned}\Delta_L : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{M} \\ \Delta_R : \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{A}\end{aligned}$$

telles que

$$\begin{aligned}\Delta_L(amb) &= \Delta(a)\Delta_L(m)\Delta(b) \\ \Delta_R(amb) &= \Delta(a)\Delta_R(m)\Delta(b) \\ (\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta_L &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta_L)\Delta_L \\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta)\Delta_R &= (\Delta_R \otimes \mathrm{Id})\Delta_R \\ (\epsilon \otimes \mathrm{Id})\Delta_L &= \mathrm{Id} \\ (\mathrm{Id} \otimes \epsilon)\Delta_R &= \mathrm{Id} \\ (\mathrm{Id} \otimes \Delta_R)\Delta_L &= (\Delta_L \otimes \mathrm{Id})\Delta_R\end{aligned}$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathcal{M}$.

En particulier, un calcul différentiel bicovariant du premier ordre est un bimodule bicovariant sur $\mathcal{A}$.

Ces définitions permettent d'introduire la notion d'invariance à droite et à gauche.

Définition 7.40 *Un élément $m \in \mathcal{M}$ est invariant à gauche si $\Delta_L(m) = \mathbb{1} \otimes m$, et invariant à droite si $\Delta_R(m) = m \otimes \mathbb{1}$.*

Les éléments invariants à gauche (resp. à droite) forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, noté $\mathcal{M}_{\mathrm{L-inv}}$ (resp. $\mathcal{M}_{\mathrm{R-inv}}$).

Dans le cas où $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ est le bimodule bicovariant, on note ces espaces $\Omega^1_{\mathrm{L-inv}}(\mathcal{A})$ et $\Omega^1_{\mathrm{R-inv}}(\mathcal{A})$.

Si f est une forme linéaire sur $\mathcal{A}$ et si $a \in \mathcal{A}$, on note $f * a = (\mathrm{Id} \otimes f)\Delta(a)$ et $a * f = (f \otimes \mathrm{Id})\Delta(a)$. Si $m \in \mathcal{M}$, alors on définit $f * m = (\mathrm{Id} \otimes f)\Delta_R(m)$. Si f et g sont deux formes linéaires sur $\mathcal{A}$, on pose $f * g = (f \otimes g) \circ \Delta$, forme linéaire sur $\mathcal{A}$.

On a alors le théorème suivant dû à S.L. Woronowicz :

Théorème 7.41 *[123] Soit $\mathcal{M}$ un bimodule bicovariant sur $\mathcal{A}$. Si l'antipode de $\mathcal{A}$ est inversible, alors on a les résultats suivants :*

1. *Soit* (ω^i) *une base de* $\mathcal{M}_{\mathrm{L-inv}}$. *Alors tout élément* $m \in \mathcal{M}$ *s'écrit de façon unique* $m = a_i \omega^i = \omega^i b_i$ *où* $a_i, b_i \in \mathcal{A}$. *Donc* $\mathcal{M}_{\mathrm{L-inv}}$ *engendre librement* $\mathcal{M}$ *en tant que module à gauche ou à droite.*

2. *De même, si* (η^i) *est une base de* $\mathcal{M}_{\mathrm{R-inv}}$, *alors tout élément* $m \in \mathcal{M}$ *s'écrit de façon unique* $m = c_i \eta^i = \eta^i d_i$, *pour* $c_i, d_i \in \mathcal{A}$.

3. *Il existe des formes linéaires* (f^i_j) *sur* $\mathcal{A}$ *telles que*

$$\begin{aligned} \omega^i b &= (f^i_j * b)\omega^j \\ a\omega^i &= \omega^j [(f^i_j \circ S^{-1}) * a] \end{aligned} \tag{7.1}$$

   Ces formes linéaires sont complètement déterminées par (7.1) et satisfont

$$\begin{aligned} f^i_j(ab) &= f^i_k(a) f^k_j(b) \\ f^i_j(\mathbb{1}) &= \delta^i_j \\ (f^i_k \circ S) * f^k_j &= \delta^i_j \epsilon \\ f^i_k * (f^k_j \circ S) &= \delta^i_j \epsilon \end{aligned}$$

4. *On a* $\Delta_R(\omega^i) = \omega^j \otimes R^i_j$ *avec* $R^i_j \in \mathcal{A}$. *Ces éléments satisfont aux relations*

$$\begin{aligned} \Delta(R^i_j) &= R^i_k \otimes R^k_j \\ \epsilon(R^i_j) &= \delta^i_j \end{aligned}$$

   et les $\eta^i = \omega^j S(R^i_j)$ *forment une base des éléments invariants à droite.*

5. *Enfin, on a*

$$R^i_k (a * f^k_j) = (f^i_k * a) R^k_j$$

   pour tout $a \in \mathcal{A}$.

Ce théorème décrit complètement les bimodules bicovariants en termes de la famille des formes linéaires (f^i_j), et de la famille des éléments de $\mathcal{A}$, (R^i_j). En particulier, cette caractérisation sert à classer les calculs différentiels bicovariants du premier ordre sur une algèbre de Hopf donnée. La démarche consiste à trouver les deux familles ci-dessus compatibles avec les conditions de la Remarque 7.37. De telles classifications ont été proposées pour les groupes quantiques usuels dans [112, 113, 67, 115, 116] par exemple.

7.2.3 Produit tensoriel et algèbre extérieure

Si $\mathcal{M}$ est un bimodule bicovariant sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est aussi un bimodule bicovariant sur $\mathcal{A}$ pour les applications

$$\begin{aligned}
\Delta_L(m^1 \otimes \cdots \otimes m^n) &= a^1_{(1)} \dots a^n_{(1)} \otimes m^1_{(2)} \otimes \cdots \otimes m^n_{(2)} \\
\Delta_R(m^1 \otimes \cdots \otimes m^n) &= m^1_{(1)} \otimes \cdots \otimes m^n_{(1)} \otimes a^1_{(2)} \dots a^n_{(2)}
\end{aligned}$$

où $\Delta_L(m^i) = a^i_{(1)} \otimes m^i_{(2)}$ et $\Delta_R(m^i) = m^i_{(1)} \otimes a^i_{(2)}$.

On peut alors construire l'algèbre tensorielle $\mathcal{M}^{\otimes} = \oplus_{n \geq 0} \mathcal{M}^{\otimes^n_{\mathcal{A}}}$, qui est donc une algèbre graduée bicovariante sur $\mathcal{A}$.

Dans le cas où $\mathcal{M} = \Omega^1_{\text{Bic}}(\mathcal{A})$, cette algèbre, que nous notons en l'occurrence $\Omega^{\otimes}_{\text{Bic}}(\mathcal{A})$, n'est bien sûr pas la généralisation non commutative de l'algèbre des formes différentielles sur $\mathcal{A}$. En effet, dans le cas commutatif, cette construction ne donne pas une algèbre graduée commutative.

Pour construire une bonne généralisation des formes en degrés plus élevés, il faut introduire l'équivalent non commutatif de l'opération d'antisymétrisation. Pour cela, on va associer à tout bimodule bicovariant une algèbre, sous-algèbre de la précédente, qui est une généralisation de l'algèbre extérieure dans le cas commutatif. Si on note $\wedge$ le produit dans cette algèbre, il faut introduire une projection $\pi : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \wedge \mathcal{M} \subset \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ qui correspond au produit antisymétrique.

Dans le cas commutatif, ce produit s'écrit $\pi = 1 - \tau$, où $\tau : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est l'opérateur de transposition habituel. Dans le cas non commutatif, cet opérateur n'est plus défini.

S.L. Woronowicz a remarqué qu'une telle permutation généralisée existait sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$.

Proposition 7.42 *[123] Il existe un unique automorphisme de bimodule*

$$\Lambda : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

tel que

$$\Lambda(\omega^i \otimes \eta^j) = \eta^j \otimes \omega^i$$

où (ω^i) est une base de $\mathcal{M}_{\text{L-inv}}$ et (η^j) une base de $\mathcal{M}_{\text{R-inv}}$.

Démonstration : La démonstration est très facile, en remarquant que tout élément de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ s'écrit de façon unique sous la forme $a_{ij}\omega^i \otimes \eta^j$. On prolonge Λ sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ en la prenant linéaire à gauche sur $\mathcal{A}$. Les propriétés de f^i_j impliquent alors que Λ ainsi définie est linéaire à droite. $\square$

Proposition 7.43 *On a les propriétés suivantes :*

1. *Λ commute avec Δ_L et Δ_R ;*

2. *Λ vérifie la relation des tresses sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$:*

$$\Lambda_{12}\Lambda_{23}\Lambda_{12} = \Lambda_{23}\Lambda_{12}\Lambda_{23}$$

Cette application généralise donc la transposition habituelle. Cependant, ce n'est pas une transposition puisque son carré n'est pas égal à 1 dans tous les cas.

DÉFINITION 7.44 *$\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}$ est l'image de $\pi = 1 - \Lambda$ dans $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$.*

En considérant un opérateur d'antisymétrisation généralisé sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ induit par Λ, on construit de la même façon les sous-espaces $\mathcal{M} \wedge \cdots \wedge \mathcal{M}$.

Il est facile de vérifier que ces espaces sont des bimodules bicovariants sur $\mathcal{A}$.

En appliquant cette construction à un calcul différentiel bicovariant du premier ordre $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$, on obtient des espaces $\Omega^n_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$. On a alors

Théorème 7.45 *[123] L'opérateur différentiel d s'étend de façon unique en une dérivation graduée de degré 1 et de carré nul sur l'algèbre $\Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) = \oplus_{n\geq 0}\Omega^n_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$. De plus, on a*

$$\begin{aligned} \Delta_L d &= (\mathrm{Id} \otimes d)\Delta_L \\ \Delta_R d &= (d \otimes \mathrm{Id})\Delta_R \end{aligned}$$

Sur les éléments de la base (ω^i), d prend la forme

$$d\omega^i = -c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$$

où les c^i_{jk} sont des nombres complexes.

7.2.4 Champs de vecteurs

Nous avons rappelé que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie était un des aspects importants de l'étude du calcul différentiel sur ce groupe de Lie.

Nous allons maintenant constater qu'une telle notion existe dans le cadre des calculs différentiels que nous avons introduit.

Soit donc $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ un calcul différentiel bicovariant du premier ordre sur $\mathcal{A}$. Alors

Théorème 7.46 *[123] L'espace dual $\mathcal{G}$ de $\Omega^1_{\mathrm{L-inv}}(\mathcal{A})$ peut être réalisé comme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}^*$, de base (χ_i) duale de la base (ω^i), telle que*

$$da = (\chi_i * a)\omega^i$$

pour tout $a \in \mathcal{A}$.

$\chi \in \mathcal{G}$ peut donc être considéré comme une généralisation d'un vecteur tangent au groupe de Lie en l'unité e. L'application $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $a \mapsto \chi(a)$ étant la généralisation du fait qu'un vecteur tangent est une dérivation en un point de l'algèbre des fonctions différentiables. De même, l'application $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \mapsto \chi * a$ est l'action du champ de vecteurs invariant à gauche associé à χ.

Comme nous allons le constater, ces "vecteurs tangents" ont de bonnes propriétés. Nous suivons essentiellement l'exposé donné dans [63].

Proposition 7.47 *Pour tout $a, b \in \mathcal{A}$, on a*

$$\chi_i(ab) = \chi_j(a) f^j_i(b) + \epsilon(a)\chi_i(b)$$

d'où l'on tire

$$\chi_i * (ab) = (\chi_j * a)(f^j_i * b) + a(\chi_i * b)$$

Cette proposition montre que les χ_i satisfont une règle de dérivation généralisée lorsqu'ils agissent sur $\mathcal{A}$.

Notons $\Lambda(\omega^i \otimes \omega^j) = \Lambda^{ij}_{kl}\omega^k \otimes \omega^l$. Le résultat suivant donne une structure supplémentaire à $\mathcal{G}$:

Proposition 7.48 *On définit le crochet $[\chi, \chi']$ de deux éléments de $\mathcal{G}$ en posant sur les éléments de la base*

$$[\chi_i, \chi_j] = \chi_i * \chi_j - \Lambda^{kl}_{ij}\chi_k * \chi_l$$

Alors

$$[\chi_i, \chi_j] = C^k_{ij}\chi_k$$

avec $C^k_{ij} = \chi_j(R^k_i) \in \mathbb{C}$.

De plus, on a

$$[[\chi_k, \chi_i], \chi_j] - \Lambda^{rs}_{ij}\,[[\chi_k, \chi_r], \chi_s] = [\chi_k, [\chi_i, \chi_j]]$$

Les constantes C^k_{ij} et c^k_{ij} sont reliées entre elles par la relation

$$C^k_{ij} = c^k_{ij} - \Lambda^{rs}_{ij}c^k_{rs}$$

On peut donc considérer que $\mathcal{G}$ est une algèbre de Lie quantique, où le crochet et l'identité de Jacobi sont donnés ci-dessus.

Soit maintenant $\omega = \chi_i \otimes \omega^i \in \mathcal{G} \otimes \Omega^1_{\mathrm{L-inv}}(\mathcal{A})$. Cet objet est indépendant du choix de la base ω^i de $\Omega^1_{\mathrm{L-inv}}(\mathcal{A})$. C'est la généralisation non commutative de la forme de Maurer-Cartan d'un groupe de Lie.

Proposition 7.49

$$d\omega + \omega \wedge \omega = 0$$

Dans cette relation, on pose $d\omega = \chi_i \otimes d\omega^i$ et $\omega \wedge \omega = \chi_i * \chi_j \otimes \omega^i \wedge \omega^j = [\chi_i, \chi_j] \otimes \omega^i \otimes \omega^j$.

7.2.5 Dérivée de Lie et opérateur d'insertion

Dans ce qui suit, nous suivons encore [63].

DÉFINITION 7.50 *Sur $\Omega^{\otimes}_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ et $\Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$, on définit la dérivée de Lie L_χ dans la direction de $\chi \in \mathcal{G}$, en posant $L_\chi = \chi *$.*

On a alors les règles de dérivations :

Proposition 7.51

$$L_{\chi_i}(a\omega b) = L_{\chi_l}(f^l_k * \omega)(f^k_i * b) + aL_{\chi_k}(\omega)(f^k_i * b) + a\omega L_{\chi_i}(b)$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et tout $\omega \in \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$,

$$L_{\chi_i}(\omega \otimes \omega') = L_{\chi_j}(\omega) \otimes (f^j_i * \omega') + \omega \otimes L_{\chi_i}(\omega')$$

pour tout $\omega, \omega' \in \Omega^{\otimes}_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$,

$$L_{\chi_i}(\omega \wedge \omega') = L_{\chi_j}(\omega) \wedge (f^j_i * \omega') + \omega \wedge L_{\chi_i}(\omega')$$

et

$$L_{\chi_i}(d\omega) = dL_{\chi_i}(\omega)$$

pour tout $\omega, \omega' \in \Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$.

DÉFINITION 7.52 *On définit l'opérateur d'insertion*

$$i_\chi : \Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) \to \Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$$

en posant $i_{\chi_i}(a) = 0$ pour tout $a \in \mathcal{A}$, $i_{\chi_i}(\omega^j) = \delta^j_i$ et

$$i_{\chi_i}(\omega \wedge \omega') = i_{\chi_k}(\omega) \wedge (f^k_i * \omega') + (-1)^{|\omega|}\omega \wedge i_{\chi_i}(\omega')$$

pour tout $\omega, \omega' \in \Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ et en prolongeant i_{χ_i} par linéarité sur $\Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ et en χ.

On a alors la formule habituelle :

Proposition 7.53
$$L_\chi = i_\chi d + di_\chi$$
pour tout $\chi \in \mathcal{G}$.

Cet opérateur d'insertion est donc l'équivalent non commutatif de l'opérateur d'insertion habituel sur les formes différentielles. Il donne une dualité entre la différentielle d sur $\Omega_{\mathrm{L-inv}}$ (la sous-algèbre de $\Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ engendrée par les ω^i sur $\mathbb{C}$) et le crochet $[\ ,\ ]$ sur $\mathcal{G}$ sous la forme :

Proposition 7.54
$$i_\chi i_{\chi'} d\omega^k = i_{[\chi,\chi']}\omega^k$$
et l'identité de Jacobi généralisée sur $[\ ,\ ]$ *est équivalente à* $d^2 = 0$.

La description des champs de vecteurs que nous venons de faire, de la dérivée de Lie et de l'opérateur d'insertion montre que la structure d'un calcul différentiel bicovariant conserve beaucoup des propriétés du calcul différentiel de de Rham.

7.3 Exemples et matrices R

Nous allons donner des exemples d'algèbres de Hopf, de calculs différentiels bicovariants et de coreprésentations. Pour cela, nous allons introduire un objet maintenant courant dans ce domaine, une matrice R, qui contient la structure des algèbres introduites.

7.3.1 Les groupes quantiques $GL_q(n,\mathbb{C})$ et $SL_q(n,\mathbb{C})$

Soit $G = GL(n,\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles de $M(n,\mathbb{C})$. Un élément de G est une matrice (T^i_j). On peut considérer l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par les éléments de matrice T^i_j, sous-algèbre des fonctions C^∞ sur G. On peut munir cette algèbre d'une structure d'algèbre de Hopf en définissant $\Delta T^i_j = T^i_k \otimes T^k_j$, $\epsilon(T^i_j) = \delta^i_j$ et $S(T^i_j) = (T^{-1})^i_j$. Nous allons définir une algèbre de Hopf non commutative qui déforme cette algèbre.

Définition 7.55 *Soit* $q \in \mathbb{C}^*$ *et* R *l'élément de* $M(n,\mathbb{C}) \otimes M(n,\mathbb{C})$ *défini par*
$$R = q\sum_i E_{ii} \otimes E_{ii} + \sum_{i\neq j} E_{ij} \otimes E_{ji} + (q-q^{-1})\sum_{i<j} E_{ii} \otimes E_{jj}$$
où $(E_{ij})^k_\ell = \delta^k_i \delta_{j\ell}$. *$R$ est appelée matrice R.*

Lemme 7.56 *R satisfait les relations suivantes :*

1. *Relation de Hecke :* $(R - q)(R + q^{-1}) = 0$.

2. *Équation de Yang-Baxter :* $R_{23}R_{12}R_{23} = R_{12}R_{23}R_{12}$ *où* $R_{12} = R \otimes \mathbb{1}$ *et* $R_{23} = \mathbb{1} \otimes R$.

3. *Pour* $q = 1$, *on a* $R^{ij}_{k\ell} = \delta^j_k \delta^i_\ell$.

Cette matrice n'est pas la seule vérifiant toutes ces conditions. Comme nous allons le voir, dès que l'on se donne une telle matrice, nous pouvons lui associer une algèbre. Avec la matrice R que l'on s'est donnée, on définit les groupes quantiques $GL_q(n, \mathbb{C})$ et $SL_q(n, \mathbb{C})$.

Définition 7.57 *Le groupe quantique* $GL_q(n, \mathbb{C})$ *est donné par l'algèbre de Hopf engendrée par les générateurs* T^i_j *et* $S(T^i_j)$ *et les relations*

$$R^{ij}_{k\ell} T^k_r T^\ell_s = T^i_k T^j_\ell R^{k\ell}_{rs} \tag{7.2}$$

et $T^i_k S(T^k_j) = S(T^i_k) T^k_j = \delta^i_j$. *La structure d'algèbre de Hopf est donnée par* $\Delta(T^i_j) = T^i_k \otimes T^k_j$, $\epsilon(T^i_j) = \delta^i_j$ *et l'antipode est* $T^i_j \mapsto S(T^i_j)$.

Dans cette définition, l'antipode donne donc l'inverse de la "matrice" (T^i_j), comme dans le cas commutatif.

La relation de Yang-Baxter assure la cohérence des relations (7.2) (que l'on écrit sous la forme $RTT = TTR$) lorsqu'on considère des expressions du type TTT. Par abus de langage, on identifie $GL_q(n, \mathbb{C})$ à l'algèbre de Hopf définie ci-dessus.

Exemple 7.58 Prenons le cas $n = 2$. Alors la matrice R vaut

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

On note

$$(T^i_j) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors les relations de l'algèbre sont

$$\begin{aligned} ab &= qba, & ac &= qca, & bc &= cb, \\ bd &= qdb, & cd &= qdc, & ad - da &= (q - q^{-1})bc \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

DÉFINITION 7.59 *On appelle q-déterminant sur $GL_q(n,\mathbb{C})$ l'expression*

$$\mathrm{det}_q T = \sum_\sigma (-q)^{|\sigma|} T^1_{\sigma(1)} T^2_{\sigma(2)} \dots T^n_{\sigma(n)}$$

où $|\sigma|$ est le nombre minimum de transpositions dans l'écriture de la permutation σ.

Lemme 7.60 $\mathrm{det}_q T$ *est dans le centre de l'algèbre de $GL_q(n,\mathbb{C})$.*

Démonstration : C'est un résultat classique que l'on trouvera par exemple dans [117]. □

Comme cet élément est dans le centre, on peut imposer une relation supplémentaire dans $GL_q(n,\mathbb{C})$ en égalant $\mathrm{det}_q T$ à 1.

DÉFINITION 7.61 *Le groupe quantique $SL_q(n,\mathbb{C})$ est donné par l'algèbre de Hopf quotient de l'algèbre de Hopf de $GL_q(n,\mathbb{C})$ par la relation* $\mathrm{det}_q T = 1$.

Il est facile de voir que pour $q = 1$, les deux algèbres ci-dessus se réduisent aux algèbres de Hopf des éléments de matrices des groupes $GL(n,\mathbb{C})$ et $SL(n,\mathbb{C})$.

Si q est réel, on définit sur $GL_q(n,\mathbb{C})$ l'involution $(T^i_j)^* = S(T^j_i)$. Cette involution est compatible avec la relation $RTT = TTR$ car $R^{ij}_{k\ell} = R^{k\ell}_{ij}$ et pour q réel, $\overline{R} = R$ où $\overline{R}$ est la matrice complexe conjuguée de R. L'algèbre de Hopf obtenue est appelée $U_q(n)$ et le groupe quantique correspondant pour $q = 1$ est $U(n)$. Si on fixe le q-déterminant à 1, on obtient le groupe quantique $SU_q(n)$.

Si $|q| = 1$, on définit une involution sur $GL_q(n,\mathbb{C})$ en posant $(T^i_j)^* = T^i_j$. Cette involution est compatible avec la relation $RTT = TTR$ car pour $|q| = 1$, on a $\overline{R}^{ij}_{k\ell} = (R^{-1})^{ji}_{\ell k}$. Dans ce cas, le groupe quantique est $GL_q(n,\mathbb{R})$. Si on fixe le q-déterminant à 1, on obtient $SL_q(n,\mathbb{R})$.

EXEMPLE 7.62 Dans le cas $n = 2$ et q réel, sur le groupe quantique $SU_q(2)$, l'involution est donnée par $a^* = d$ et $c^* = -q^{-1}b$. ♢

7.3.2 Calcul différentiel bicovariant sur $GL_q(n,\mathbb{C})$

Il existe *a priori* plusieurs calculs différentiels bicovariants sur le groupe quantique $GL_q(n,\mathbb{C})$. Nous allons en introduire un, qui nous servira d'exemple en 8.4.3 pour introduire des connexions linéaires.

Ce calcul différentiel généralise le calcul différentiel de de Rham sur le groupe $GL(n,\mathbb{C})$.

DÉFINITION 7.63 *Soit $\Omega(GL_q(n,\mathbb{C}))$ l'algèbre graduée engendrée par l'algèbre $GL_q(n,\mathbb{C})$ en degré 0 et les nouveaux générateurs dT^i_j en degré 1 et les relations*

$$
\begin{aligned}
T^i_r dT^j_s &= R^{ij}_{k\ell} dT^k_u T^\ell_v R^{uv}_{rs} && (7.3)\\
dT^i_r dT^j_s &= -R^{ij}_{k\ell} dT^k_u dT^\ell_v R^{uv}_{rs} && (7.4)
\end{aligned}
$$

On prolonge l'opérateur $d : T^i_j \mapsto dT^i_j$ en une dérivation graduée de degré 1 et de carré nul sur cette algèbre.

Il est facile de voir que les nouvelles relations sont compatibles avec les anciennes. Les relations (7.4) sont déduites des relations (7.3) en appliquant l'opérateur d ainsi prolongé.

L'algèbre $\Omega(GL_q(n,\mathbb{C}))$ est donc un calcul différentiel sur $GL_q(n,\mathbb{C})$ dont il est facile de voir qu'il se réduit au calcul différentiel de de Rham pour $q=1$.

Proposition 7.64 *Le calcul différentiel $\Omega(GL_q(n,\mathbb{C}))$ est bicovariant.*

Démonstration : Il est facile de vérifier que les diverses hypothèses de définitions d'un calcul différentiel bicovariant sont vérifiées. □

Nous allons donner les divers objets que le Théorème 7.41 donne pour un tel calcul différentiel bicovariant.

Les 1-formes différentielles invariantes à gauche sont

$$\omega^i_j = S(T^i_k) dT^k_j$$

Elles se réduisent aux formes invariantes à gauche lorsque $q=1$. Les formes invariantes à droite sont

$$\eta^i_j = dT^i_k S(T^k_j)$$

Les formes linéaires f sur $GL_q(n,\mathbb{C})$ donnant les relations de commutation entre l'algèbre et les 1-formes invariantes à gauche sont données par

$$f^{jk}_{i\ell}(T^m_n) = (R^{-1})^{sk}_{in}(R^{-1})^{jm}_{s\ell}$$

Il est facile de voir que l'algèbre $\Omega(GL_q(n,\mathbb{C}))$ est l'algèbre obtenue par la Définition 7.44 sur le bimodule bicovariant $\Omega^1(GL_q(n,\mathbb{C}))$. L'application Λ est ici donnée par

$$\Lambda(dT^i_r \otimes dT^j_s) = R^{ij}_{k\ell} dT^k_u \otimes dT^\ell_v (R^{-1})^{uv}_{rs}$$

Cette application vérifie une équation caractéristique

$$(\Lambda - 1)(\Lambda + q^2)(\Lambda + q^{-2}) = 0 \tag{7.5}$$

qu'il est facile de vérifier en utilisant la relation de Hecke sur R.

Ce calcul différentiel est spécial au sens où pour $q \neq \pm 1$, il existe une unique 1-forme différentielle invariante à gauche et à droite donnée par

$$\theta = -\frac{q^{2n+1}}{q - q^{-1}} \sum_i q^{-2i} \omega_i^i$$

qui fait de d une dérivation graduée intérieure :

$$d\omega = [\theta, \omega]_{\mathrm{gr}}$$

pour toute forme ω dans $\Omega(GL_q(n, \mathbb{C}))$, où $[\ ,\ ]_{\mathrm{gr}}$ est le commutateur gradué.

7.3.3 Coactions de $SL_q(n, \mathbb{C})$ et $GL_q(n, \mathbb{C})$

Les deux groupes quantiques $SL_q(n, \mathbb{C})$ et $GL_q(n, \mathbb{C})$ coagissent tous les deux sur une algèbre définie de la façon suivante :

Définition 7.65 *Le plan quantique de dimension n est donné par l'algèbre engendrée par n générateurs x^i et les relations*

$$x^i x^j = q^{-1} R^{ij}_{k\ell} x^k x^\ell$$

À la limite $q = 1$, ce plan se réduit au plan habituel au sens où on obtient l'algèbre des polynômes sur $\mathbb{C}^n$.

La coaction des groupes quantiques sur cette algèbre est donnée par

$$x^i \mapsto T^i_j \otimes x^j$$

Il est facile de vérifier que l'algèbre engendrée par les éléments $T^i_k \otimes x^k$ admet les mêmes relations que le plan quantique :

$$\begin{aligned}
(T^i_k \otimes x^k)(T^j_\ell \otimes x^\ell) &= T^i_k T^j_\ell \otimes x^k x^\ell \\
&= T^i_k T^j_\ell \otimes (q^{-1}) R^{k\ell}_{uv} x^u x^v \\
&= q^{-1} R^{ij}_{uv} T^u_k T^v_\ell \otimes x^k x^\ell \\
&= q^{-1} R^{ij}_{uv} (T^u_k \otimes x^k)(T^v_\ell \otimes x^\ell)
\end{aligned}$$

On peut définir sur le plan quantique un calcul différentiel. Ce calcul différentiel est engendré en degré 0 par le plan quantique et en degré 1 par les générateurs $\xi^i = dx^i$ et les nouvelles relations

$$\begin{aligned}
x^i \xi^j &= q R^{ij}_{k\ell} \xi^k x^\ell \\
\xi^i \xi^j &= -q R^{ij}_{k\ell} \xi^k \xi^\ell
\end{aligned}$$

On prolonge d en une dérivation graduée de degré 1 et de carré nul.

Il est facile de vérifier, grâce à la relation de Hecke sur R, que toutes les relations sont compatibles.

Exemple 7.66 Pour $n = 2$, soient x et y les générateurs du plan quantique, et $\xi = dx$ et $\eta = dy$ les générateurs en degré 1 de l'algèbre des formes. On a les relations :

$$\begin{array}{llll} xy = qyx, & \xi^2 = 0, & \eta^2 = 0, & \eta\xi + q\xi\eta = 0 \\ x\xi = q^2\xi x, & x\eta = q\eta x + (q^2-1)\xi y, & y\xi = q\xi y, & y\eta = q^2\eta y \end{array}$$

$\diamondsuit$

Ce calcul différentiel sur le plan quantique est compatible avec la coaction de $GL_q(n, \mathbb{C})$ et $SL_q(n, \mathbb{C})$ définie par :

$$\begin{array}{rcl} x^i & \mapsto & T^i_k \otimes x^k \\ \xi^i & \mapsto & T^i_k \otimes \xi^k + dT^i_k \otimes x^i \end{array}$$

On a la réciproque :

Proposition 7.67 *Si le calcul différentiel ci-dessus sur le plan quantique est donné, et si la coaction de $GL_q(n, \mathbb{C})$ est imposée, de telle manière qu'elle respecte les algèbres du calcul différentiel, alors on doit imposer sur les dT^i_j les relations (7.3) et (7.4).*

La coaction de $GL_q(n, \mathbb{C})$ sur le plan quantique impose donc une forte contrainte sur le calcul différentiel sur le groupe quantique.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré qu'une déformation à 1 paramètre. Il existe des déformations à plusieurs paramètres, comme le montre le cas $n = 2$. On peut en effet dans ce cas prendre pour matrice R la matrice

$$R = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q - p^{-1} & qp^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

avec $p, q \in \mathbb{C}^*$. Dans le cas $p = q$, on retrouve la déformation précédente. Cette matrice R admet les valeurs propres q et $-p^{-1}$ et vérifie la relation de Hecke

$$(R - q)(R + p^{-1}) = 0$$

À partir de cette matrice, on définit le groupe quantique $GL_{p,q}(2, \mathbb{C})$ et son calcul différentiel. Il est facile de vérifier que l'on ne peut pas définir une déformation du groupe $SL(n,\mathbb{C})$ avec ces deux paramètres car le déterminant n'est plus génériquement dans le centre.

On peut définir le plan quantique de dimension 2, et son calcul différentiel. En réalité, le plan quantique est le même qu'auparavant ($xy = qyx$). Le nouveau paramètre n'intervient que dans le calcul différentiel, et on a

$$\begin{array}{llll} xy = qyx, & \xi^2 = 0, & \eta^2 = 0, & \eta\xi + p\xi\eta = 0 \\ x\xi = pq\xi x, & x\eta = q\eta x + (pq-1)\xi y, & y\xi = p\xi y, & y\eta = pq\eta y \end{array}$$

Remarque 7.68 Considérons dans ce qui suit $q \in U(1)$ non racine de l'unité. La relation $xy = qyx$ définissant le plan quantique de dimension 2 est la même que celle qui a été imposée pour définir le tore non commutatif en 5.5.3. En fait, le plan quantique de dimension 2 et le tore non commutatif ne sont pas indépendants. Si nous acceptons d'augmenter l'algèbre du plan quantique en utilisant les puissances négatives de x et y, alors nous avons presque le tore non commutatif (dans le tore, nous n'avons pas seulement des polynômes, mais aussi des séries, ainsi qu'une involution). Un des calculs différentiels sur le plan quantique obtenus par la déformation à 2 paramètres p et q est celui du tore non commutatif basé sur les dérivations. En effet, comme q n'est pas racine de l'unité, les dérivations du tore non commutatif forment une algèbre de Lie de dimension 2, dont une base est (X, Y) où X et Y sont définis par $X(x) = x$, $X(y) = 0$, $Y(x) = 0$ et $Y(y) = y$ dans ces notations. Ce calcul différentiel est obtenu pour $pq = 1$. En effet, dans ce cas, nous avons

$$\begin{array}{llll} xy = qyx, & \xi^2 = 0, & \eta^2 = 0, & \eta\xi + q^{-1}\xi\eta = 0 \\ x\xi = \xi x, & x\eta = q\eta x, & y\xi = q^{-1}\xi y, & y\eta = \eta y \end{array}$$

Il est facile de voir que ξ et η correspondent aux 1-formes $\xi(X) = x$, $\xi(Y) = 0$, $\eta(X) = 0$ et $\eta(Y) = y$.

7.3.4 Groupe quantique d'une forme bilinéaire

Les groupes quantiques $GL_q(n,\mathbb{C})$ et $SL_q(n,\mathbb{C})$ que nous venons d'introduire sont des déformations des groupes usuels $GL(n,\mathbb{C})$ et $SL(n,\mathbb{C})$ par le paramètre q. Dans la littérature, de nombreuses autres déformations de groupes ont été considérées. Cependant, nous voudrions montrer dans l'exemple suivant, dû à M. Dubois-Violette et G. Launer [85] qu'il existe des groupes quantiques naturels mais qui ne sont pas toujours des déformations.

Pour cela, il faut revenir à l'idée de groupe comme ensemble de transformations laissant invariants certains objets. Soient $T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_\ell}$ les composantes d'un tenseur sur $\mathbb{C}^n$. On regarde alors le groupe des transformations inversibles sur $\mathbb{C}^n$ qui laissent invariant ce tenseur :

$$u^{i_1}_{i'_1} \cdots u^{i_k}_{i'_k} T^{i'_1 \dots i'_k}_{j'_1 \dots j'_\ell} u^{j'_1}_{j_1} \cdots u^{j'_\ell}_{j_\ell} = T^{i_1 \dots i_k}_{j_1 \dots j_\ell}$$

On peut étendre cette construction à une famille finie de tenseurs T. Si on interprète les u^i_j comme des fonctions sur un groupe G, qui à $g \in G$ associent l'élément de matrice $u(g)^i_j$, alors le coproduit est défini comme nous l'avons déjà vu par $\Delta u^i_j = u^i_k \otimes u^k_j$. Dans ce cas, les u^i_j forment une algèbre commutative. Cependant, la commutativité n'est pas nécessaire dans cette définition, et les u^i_j engendrent ainsi une algèbre associative plus générale, admettant les relations ci-dessus.

Dans ce qui suit, on se limite à un tenseur donné par une forme bilinéaire non dégénérée (B_{ij}) sur $\mathbb{C}^n$. On note (B^{ij}) son inverse, qui vérifie donc $B^{ik}B_{kj} = \delta^i_j$.

Définition 7.69 *Soit $\mathcal{A}(B)$ l'algèbre associative unifère engendrée par les u^i_j pour $1 \leq i, j \leq n$ et les relations*

$$\begin{aligned} B_{ij} u^i_k u^j_\ell &= B_{k\ell} \\ B^{ij} u^k_i u^\ell_j &= B^{k\ell} \end{aligned}$$

On a alors

Proposition 7.70 *[85] Il existe une structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{A}(B)$ telle que*

$$\begin{aligned} \Delta(u^i_j) &= u^i_k \otimes u^k_j \\ \epsilon(u^i_j) &= \delta^i_j \\ S(u^i_j) &= B^{ik} u^\ell_k B_{\ell j} \end{aligned}$$

et $S(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$.

Cette algèbre de Hopf est par définition le groupe quantique associé à la forme bilinéaire B.

On peut faire agir le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ sur B. Notons $G \cdot B$ cette action de $G \in GL(n, \mathbb{C})$. Alors $\mathcal{A}(B)$ et $\mathcal{A}(G \cdot B)$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Hopf. Cet isomorphisme correspond en fait à un changement de générateurs dans $\mathcal{A}(B)$. Le groupe quantique $\mathcal{A}(B)$ ne dépend donc que de l'orbite de B par l'action de $GL(n, \mathbb{C})$.

Le groupe quantique $\mathcal{A}(B)$ "contient" le groupe habituel G_B qui laisse invariant la forme bilinéaire B au sens où il existe un homomorphisme surjectif naturel $\mathcal{A}(B) \to \mathrm{Fon}(G_B)$. Nous renvoyons à [85] pour des exemples en dimension 2, et le lien avec d'autres groupes quantiques.

Chapitre 8

Modules et structures différentielles

"La dernière marche d'un escalier qu'on gravit est toujours plus haute que les autres."

Paul MASSON[1]

Dans ce chapitre, nous voudrions introduire des structures différentielles sur des modules, c'est-à-dire essentiellement des connexions. Dans un premier temps, nous exposerons l'approche d'A. CONNES [10], qui considère des modules à droite. La théorie des connexions que l'on y développe donne d'intéressants résultats en physique des particules. Cette approche se révèle cependant insuffisante, en particulier lorsqu'on souhaite définir des connexions sur le bimodule des 1-formes différentielles. Nous verrons que deux propositions ont été faites pour y remédier. La première considère une nouvelle catégorie de bimodules (M. DUBOIS-VIOLETTE et P. MICHOR [90, 91]) dans laquelle se trouve le bimodule des 1-formes différentielles basé sur les dérivations, la seconde (J. MOURAD [110]) généralise l'approche algébrique dans le cas des connexions linéaires en introduisant un objet supplémentaire, une permutation généralisée. Enfin, nous terminerons ce chapitre en considérant la notion d'opérateur différentiel du premier ordre en géométrie non commutative. Cette approche a été développée pour les bimodules quelconques dans [89]

[1] extrait de *Le fond de la besace d'un Yoghi*

8.1 Modules et connexions

8.1.1 Motivations

Dans l'étude de la K-théorie (algébrique) d'une algèbre, un module (sans précision supplémentaire, nous entendons module à droite) projectif de type fini joue le rôle de l'espace des sections sur un fibré vectoriel localement trivial de dimension finie sur une variété compacte.

D'un autre côté, en physique théorique, un fibré vectoriel en tant que tel n'est pas important, seules les sections le sont, et représentent les champs de matière.

Dans le cadre de la géométrie différentielle non commutative, la notion de module est utile, aussi bien pour le mathématicien que pour le physicien.

8.1.2 Connexions

Il est maintenant reconnu ou au moins communément accepté, que les interactions fondamentales sont des théories de jauge. Ces théories se modélisent par la donnée d'une connexion sur un fibré principal dont le groupe de structure caractérise le type d'interaction (voir Chapitre 2).

Mathématiquement, il est équivalent de se donner une connexion sur un fibré principal ou sur un fibré vectoriel associé. De plus, sur un fibré vectoriel E, la notion de connexion peut être rendue entièrement algébrique, en considérant l'algèbre des fonctions C^∞ sur la variété différentiable de base M, et le module projectif de type fini $\Gamma(E)$ des sections de ce fibré. Une connexion est complètement définie sous la forme d'une application linéaire

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(E) \otimes_{C^\infty(M)} \Omega^1(M)$$

vérifiant

$$\nabla(sf) = s \otimes df + f\nabla s$$

pour toute section $s \in \Gamma(E)$ et toute fonction $f \in C^\infty(M)$.

DÉFINITION 8.1 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative munie d'un calcul différentiel $\Omega(\mathcal{A})$. Une connexion ∇ sur un module projectif de type fini (à droite) $\mathcal{M}$ est une application linéaire*

$$\nabla : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$$

telle que

$$\nabla(ma) = m \otimes da + (\nabla m)a$$

Cette définition est donc une reprise sans modification du cas commutatif. La différence essentielle avec le cas commutatif est que le module n'est ici que d'un seul côté.

Lemme 8.2 *Sur un module projectif de type fini, il existe toujours au moins une connexion.*

Démonstration : Soit $p \in M(n, \mathcal{A})$ le projecteur définissant ce module. Tout élément $m \in \mathcal{M}$ s'écrit sous la forme $m = pa^{(n)}$ où $a^{(n)} \in \mathcal{A}^n$, et où on identifie $\mathcal{M}$ à un sous-module à droite de $\mathcal{A}^n$. Posons $\nabla m = pd(pa^{(n)})$ où $d : \mathcal{A}^n \to (\Omega^1(\mathcal{A}))^n$ agit composantes par composantes. Il ne reste plus qu'à vérifier que c'est une connexion, ce qui se fait sans difficulté. $\square$

Remarque 8.3 En considérant la catégorie des modules projectifs de type fini à gauche, on peut introduire une définition semblable de la notion de connexion, avec cette fois $\Omega^1(\mathcal{A})$ placé à gauche. Dans le cas commutatif, ces deux cas se réduisent à un seul.

Pour définir la courbure de cette connexion, qui rappelons le, doit représenter les “champs physiques”, il faut prolonger ∇ à $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega(\mathcal{A})$. Dans le cas non commutatif, ceci ne pose aucun problème :

Définition 8.4 *On prolonge ∇ en une application linéaire*

$$\nabla : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^n(\mathcal{A}) \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{n+1}(\mathcal{A})$$

en posant

$$\nabla(m \otimes \omega) = m \otimes d\omega + (\nabla m) \wedge \omega$$

où $\wedge$ effectue le produit $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^n(\mathcal{A}) \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^{n+1}(\mathcal{A})$.

La courbure de la connexion ∇ est définie par $\mathcal{R} = \nabla^2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2(\mathcal{A})$.

Nous pouvons alors énoncer des résultats élémentaires :

Proposition 8.5 *La différence de deux connexions est un homomorphisme de modules à gauche $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$.*

La courbure d'une connexion est un homomorphisme de modules à gauche $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2(\mathcal{A})$.

Il est facile de voir que la courbure de la connexion définie dans la démonstration du Lemme 8.2 est donnée par $\mathcal{R}(m) = pdpdpm$ en utilisant le fait que $p(dp)p = 0$ puisque $p^2 = p$.

8.1.3 Caractères de Chern

Il est souhaitable, d'un point de vue mathématique, de pouvoir définir l'équivalent non commutatif du caractère de Chern pour un module sur une algèbre, en considérant les connexions sur ce module, comme on le fait dans le cas commutatif (voir 4.3.1). Ce programme a en partie été réalisé par A. CONNES sous la forme suivante :

Proposition 8.6 *[12] Soit* $\mathcal{A} \xrightarrow{\rho} \Omega$ *un cycle de dimension* n *sur l'algèbre associative* $\mathcal{A}$*. Soit* $\mathcal{M}$ *un module projectif de type fini sur* $\mathcal{A}$*, et* ∇ *une connexion sur* $\mathcal{M}$*. Alors il existe un cycle de dimension* n *sur l'algèbre* $\mathrm{End}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$*, dépendant de* ∇*, dont le caractère* τ^{∇} *est un représentant d'une classe* $[\tau^{\nabla}]$ *de* $HC^n(\mathrm{End}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}))$ *indépendante du choix de* ∇*.*

La démonstration, c'est-à-dire la construction de ce cycle, est assez technique. Seul le résultat nous intéresse, car il signifie qu'en présence d'un cycle sur $\mathcal{A}$, on peut associer à toute connexion sur un module $\mathcal{M}$ un élément de la cohomologie cyclique de l'algèbre $\mathrm{End}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$. Dans le cas de l'algèbre $\mathcal{A} = C^\infty(M)$, le caractère τ^{∇} est relié canoniquement au caractère de Chern habituel associé à la connexion sur le fibré, dont l'espace des sections est $\mathcal{M}$. Il s'agit donc bien d'une généralisation non commutative du caractère de Chern.

8.1.4 Structures hermitiennes

DÉFINITION 8.7 *Soit* $\mathcal{M}$ *un module à droite sur l'algèbre associative involutive* $\mathcal{A}$*. Une structure hermitienne sur* $\mathcal{M}$ *est une application sesquilinéaire*

$$h : \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

telle que

$$h(ma \otimes nb) = a^* h(m \otimes n) b$$

pour tout $m, n \in \mathcal{M}$ *et tout* $a, b \in \mathcal{A}$*. Si le cône* $\mathcal{A}_+$ *des éléments de* $\mathcal{A}$ *de la forme* $\sum_i a_i^* a_i$ *pour* $a_i \in \mathcal{A}$ *est strict, c'est-à-dire* $\mathcal{A}_+ \cap (-\mathcal{A}_+) = \{0\}$*, on dira que* h *est positive si* $h(m \otimes m) \in \mathcal{A}_+$ *pour tout* $m \in \mathcal{M}$*.*

Cette définition généralise la définition de structure hermitienne sur les fibrés vectoriels complexes. Comme dans le cas commutatif, on peut demander à une connexion d'être compatible avec une structure hermitienne :

DÉFINITION 8.8 *Une connexion* $\nabla : \mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ *est compatible avec une structure hermitienne* h *sur* $\mathcal{M}$ *si on a*

$$dh(m \otimes n) = h(\nabla m \otimes n) + h(m \otimes \nabla n)$$

Dans cette définition, h est définie sur $\mathcal{M} \otimes (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}))$ en l'appliquant sur les facteurs $\mathcal{M}$, et est définie sur $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})) \otimes \mathcal{M}$ en posant $h(m \otimes \alpha \otimes n) = \alpha^* h(m \otimes n)$, pour tout $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{A})$ et tout $m, n \in \mathcal{M}$. L'involution sur $\Omega^1(\mathcal{A})$ est déduite de celle sur $\mathcal{A}$ en posant $d(a^*) = (da)^*$, et $(a\alpha)^* = \alpha^* a^*$.

On dira aussi qu'une telle connexion est hermitienne.

8.2 Applications à la physique théorique

Dans ce qui suit, nous allons constater que l'introduction d'une structure non commutative dans le cadre de la physique des interactions fondamentales permet d'unifier les théories de jauge, les champs de Higgs et la brisure spontanée de symétrie. Ce travail a été réalisé par M. DUBOIS-VIOLETTE, R. KERNER et J. MADORE en 1988 [83, 84], puis repris par A. CONNES et d'autres sous une forme légèrement différente, pour construire un modèle standard "non commutatif" ([12, 100]).

8.2.1 Électromagnétisme sur l'algèbre des matrices

Nous reprenons ici l'exposé donné dans [83].

Lorsqu'on étudie l'électromagnétisme comme théorie de jauge, on considère un fibré vectoriel de rang 1 sur lequel le groupe $U(1)$ agit. Les sections de ce fibré sont donc localement les fonctions. Nous allons introduire l'analogue de l'électromagnétisme pour l'algèbre des matrices munie du calcul différentiel basé sur les dérivations.

Afin de généraliser le cas commutatif, le module que l'on prend est l'algèbre elle-même, $\mathcal{M} = M(n, \mathbb{C})$. On suppose que h est une structure hermitienne sur $\mathcal{M}$. Soit e un élément de $\mathcal{M}$ tel que $h(e, e) = \mathbb{1}$. Cet élément e n'est pas unique, puisque tout élément eU avec U matrice unitaire, $U \in U(n)$, vérifie aussi cette condition. On dira que e est une jauge, et que la transformation $e \mapsto eU$ est une transformation de jauge. Le groupe de jauge est donc $U(n)$ et non $U(1)$, comme dans le cas commutatif.

Une connexion hermitienne ∇ sur $\mathcal{M}$ peut s'écrire sur $eM \in \mathcal{M}$,

$$\nabla(eM) = (\nabla e)M + e \otimes dM$$

M est unique pour un élément de $\mathcal{M}$ donné. La formule ci-dessus implique donc que ∇ est complètement déterminée par ∇e, que l'on peut toujours écrire $\nabla e = e \otimes \alpha$ pour $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. On dira que α est la composante de ∇ dans la jauge e. Comme ∇ est hermitienne, on doit avoir $\alpha^* = -\alpha$.

Si on change de jauge $e \mapsto eU$, la composante de la connexion dans la nouvelle jauge vaut $U^{-1}\alpha U + U^{-1}dU$.

Dans cet "électromagnétisme", M représente un champ scalaire et α le potentiel de Maxwell, dans une jauge e donnée.

À chaque jauge e, correspond une unique connexion ∇^e définie par

$$\nabla^e e = 0$$

c'est-à-dire $\alpha = 0$. On a alors $\nabla^e(eM) = e \otimes dM$. Dans une jauge eU, cette connexion a pour composante $U^{-1}dU$. Réciproquement, si une connexion admet une telle composante dans une jauge, alors elle est de ce type. On dira que ∇^e est une connexion de pure jauge.

Proposition 8.9 *Pour tout $m \in \mathcal{M}$, l'application*

$$\nabla^0 m = -im \otimes \theta$$

définit une connexion sur $\mathcal{M}$ invariante de jauge :

$$\nabla^0 e = \nabla^0(eU)$$

pour tout $U \in U(n)$.

Si ∇ est une connexion invariante de jauge sur $\mathcal{M}$, alors

$$\nabla m = -im \otimes (\theta + \lambda_k \theta^k)$$

pour des $\lambda_k \in \mathbb{C}$. De plus, ∇ est hermitienne si et seulement si $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Il est facile de vérifier que ∇^0 est une connexion, en utilisant la formule $dN = i[\theta, N]$ pour tout $N \in M(n,\mathbb{C})$. ∇^0 invariante de jauge est équivalent à

$$U^{-1}(-i\theta)U + U^{-1}dU = -i\theta$$

ce qu'il est immédiat de vérifier grâce à $dU = i[\theta, U]$. Si maintenant ∇ est une autre connexion invariante de jauge, alors on peut toujours écrire

$$\nabla e = e \otimes [-i(\theta + \alpha)]$$

avec $\alpha \in \Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$. Dans la jauge eU, elle a pour composante $-i(\theta + U^{-1}\alpha U)$. L'invariance de jauge est équivalente à $U^{-1}\alpha U = \alpha$ pour tout $U \in U(n)$, d'où l'expression $\alpha = \lambda_k \theta^k$. □

On dira que ∇^0 est la connexion canonique sur $\mathcal{M}$. Nous voyons que son existence est d'origine purement non commutative (à cause de θ). Cette connexion peut encore être caractérisée par le résultat suivant :

Lemme 8.10 *∇^0 est l'unique connexion invariante de jauge de courbure nulle.*

Démonstration : La courbure de ∇^0 est nulle car $(\nabla^0)^2 e = e \otimes (-id\theta - \theta^2) = 0$ compte tenu de l'équation (5.4). Si ∇ est une connexion invariante de jauge écrite sous la forme $\nabla e = e \otimes (-i\theta + \lambda_k \theta^k)$, alors $\nabla^2 = 0$ implique $\lambda_k = 0$. □

Le grand apport de la structure non commutative est contenu dans le résultat suivant, qui caractérise facilement les connexions de courbure nulle :

Proposition 8.11 *Une connexion hermitienne ∇ est de courbure nulle si et seulement si ∇ est de pure jauge, $\nabla = \nabla^e$, ou si $\nabla = \nabla^0$.*

Démonstration : Écrivons $\nabla e = e \otimes \alpha$ avec $\alpha^* = -\alpha$. Alors $\nabla^2 = 0$ implique $d\alpha + \alpha^2 = 0$. Posons $\alpha = \beta - i\theta$. Cette équation devient $d\beta + \beta^2 - i(\theta\beta + \beta\theta) = 0$. Avec $\beta = B_k \theta^k$, pour $B_k \in M(n, \mathbb{C})$ antihermitiennes, on a

$$[B_k, B_\ell] - C^m_{k\ell} B_m = 0$$

Les matrices antihermitiennes B_k forment donc une représentation de $\mathfrak{su}(n)$. Considérant les dimensions, cette représentation est soit nulle, et dans ce cas $\nabla = \nabla^0$, soit équivalente à la représentation fondamentale, et dans ce cas $B_k = U^{-1}(iE_k)U$ pour un $U \in U(n)$ d'où $\nabla = \nabla^{eU^{-1}}$. □

Le cycle introduit en 5.4.5 permet d'introduire une action associée à toute connexion ∇ de composante α dans une jauge e, en posant

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \int \overline{\varphi} \ast \varphi$$

où $\varphi = d\alpha + \alpha^2$ est la composante de la courbure de ∇. Cette quantité est indépendante du choix de la jauge e. Un calcul simple montre que

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = -\frac{1}{8n} \sum_{k,\ell} \mathrm{Tr}\left[([B_k, B_\ell] - C^m_{k\ell} B_m)^2 \right]$$

si on écrit comme précédemment $\alpha = B_k \theta^k - i\theta$.

Les minima de cette action sont constitués de deux orbites de jauge distinctes : la première est le point ∇^0, et la seconde l'orbite des connexions ∇^e.

Du point de vue de la théorie perturbative des champs, cette théorie admet deux vides distincts, dont l'un est d'origine purement non commutatif.

8.2.2 Un modèle avec l'algèbre $C^\infty(V) \otimes M(n, \mathbb{C})$

Les notations utilisées ici sont celles introduites jusqu'à présent sur l'algèbre des matrices et l'algèbre $C^\infty(V) \otimes M(n, \mathbb{C})$. On peut définir une métrique pour le calcul différentiel sur cette algèbre, en prenant $g_{\mu\nu}$ une métrique riemannienne sur la variété orientable V, et en posant

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu + \left(\frac{1}{m}\right)^2 \sum_k \theta^k \otimes \theta^k$$

où m est une constante positive, qui mesure en quelque sorte le poids relatif des deux métriques. C'est le seul paramètre que l'on puisse introduire à ce niveau. Il a les dimensions d'une masse dans les unités pour lesquelles $\hbar = c = 1$.

On peut définir à partir de la métrique g sur V un produit scalaire sur $\Omega(V)$, et à partir de la métrique $(\frac{1}{m})^2 \sum_k \theta^k \otimes \theta^k$ sur $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$ un produit scalaire comme on l'a fait en 6.3.1. À un facteur près dépendant de p, sur $\Omega^p_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$, ce produit scalaire est le même que celui introduit auparavant pour l'algèbre des matrices. En combinant ces deux produits scalaires, on obtient un produit scalaire sur $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$, noté $\langle\ |\ \rangle$.

Soit $\mathcal{M}^r$ un module à droite libre de rang r sur $\mathcal{A}$, muni d'une structure hermitienne h. Soit (e_i) une base orthonormale de ce module. Alors tout élément $m \in \mathcal{M}^r$ s'écrit de façon unique $m = \sum_{i=1}^r e_i a_i$ pour $(a_i) \in \mathcal{A}^r$. h s'écrit alors

$$h(m, n) = \sum_{i=1}^r a_i^* b_i$$

pour $m = \sum_i e_i a_i$ et $n = \sum_i e_i b_i$. Une telle base (e_i) est appelée une jauge. Les transformations de jauge U sont les éléments unitaires de $M(r, \mathcal{A}) \simeq C^\infty(V) \otimes M(nr, \mathbb{C})$. Ce sont les fonctions sur V à valeurs dans les matrices unitaires de tailles nr.

Une connexion hermitienne ∇ sur ce module est complètement déterminée par

$$\nabla e_i = e_j \otimes \omega_i^j$$

pour $\omega_i^j \in \Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Ce sont les composantes de la connexion dans la jauge (e_i). Une telle connexion est de courbure nulle si et seulement si $d\omega + \omega^2 = 0$ où cette équation est écrite dans l'algèbre $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \otimes M(r, \mathbb{C})$ (d agit sur la première composante). Pour une jauge (e_i) donnée, il existe toujours une connexion de courbure nulle, définie par

$$\nabla^e e_i = 0$$

pour tout i. Ce sont les connexions de pure jauge.

Considérons maintenant, pour $n \geq 2$, des ensembles de matrices R_k^α dans $M(r, \mathbb{C}) \otimes M(n, \mathbb{C})$, antihermitiennes, avec $k \in \{1, \dots, n^2 - 1\}$ et α variant dans un ensemble $\{0, 1, \dots, N(n, r)\}$, tels que pour α fixé, les R_k^α forment une représentation de $\mathfrak{su}(n)$ dans $\mathbb{C}^r \otimes \mathbb{C}^n$, avec $R_k^0 = 0$ et $R_k^1 = iE_k \otimes \mathbb{1}$.

On suppose qu'en faisant varier α, on obtient toute ces représentations inéquivalentes. On définit, pour α donné, une connexion ∇^α de composante

$$(R_k^\alpha - iE_k \otimes \mathbb{1})\theta^k \in \Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \otimes M(r, \mathbb{C})$$

Théorème 8.12 *[84] Les connexions ∇^α ont des courbures nulles, et sont dans des orbites de jauge différentes. Une connexion hermitienne sur $\mathcal{M}^r$ de courbure nulle est dans l'orbite de jauge d'une telle connexion ∇^α.*

La démonstration est semblable à celle de la Proposition 8.11.

Ce résultat est complètement différent de celui que l'on peut obtenir pour le calcul différentiel habituel sur une variété différentiable et un fibré vectoriel. En effet, seule une topologie non triviale (un tore par exemple) permet dans ce cas d'obtenir ainsi des connexions de courbure nulle différentes des connexions de pure jauge (du type $g^{-1}dg$). Ici, la topologie de la variété V n'a pas été considérée. Cela prouve que la géométrie non commutative apporte des structures non triviales. On peut aussi interpréter ce résultat en disant que dans un certain sens la "topologie" de $M(n, \mathbb{C})$ est non triviale.

En utilisant le produit scalaire sur les formes, on peut introduire une action du type Yang-Mills pour le module $\mathcal{M}^r$. Une étude de ce type d'action a été faite dans [84]. La conclusion est que cette action ressemble à une action avec champs de Higgs de potentiel quartique, et conduit à un mécanisme de brisure spontanée de symétrie, où les différents vides sont ceux du théorème précédent. La connexion non commutative réunit ainsi dans une même structure les champs de jauge habituels et les champs de Higgs. En ajustant n et r, il est possible d'obtenir un modèle semblable au secteur électrofaible du modèle standard. Le nombre de champs de Higgs y est cependant plus élevé. Ces champs se retrouvent dans la partie non commutative de la connexion. Il faut noter que ce modèle est très rigide, puisqu'il ne comporte que deux paramètres entiers n et r, et un paramètre continu m, intervenant dans la métrique.

Pour comprendre cet exemple, il faut se rappeler l'interprétation que l'on peut faire de cette algèbre $\mathcal{A}$. Chaque point de l'espace est devenu une algèbre de matrices, avec sa structure différentiable non commutative. Dans cette interprétation, les champs de Higgs sont donc dans la partie "ponctuelle", ce qui leur donne un statut complètement différent des champs électrofaibles, qui eux sont dans la partie espace.

Dans [82], il a été montré que la partie électrofaible du modèle standard ressemble beaucoup à une théorie du type précédent pour le module non libre $C^\infty(V) \otimes M(3 \times 2, \mathbb{C})$ des matrices de taille 3×2 et $\mathcal{A} = C^\infty(V) \times M(2, \mathbb{C})$. Dans ce modèle, les divers vides sont en correspondance avec les représentations de $\mathfrak{su}(2)$ dans $\mathbb{C}^3$. Le bon vide à considérer pour reproduire la brisure de symétrie de la partie électrofaible du modèle standard correspond à la représentation $\{\frac{1}{2}\} \oplus \{0\}$. Il faut noter que dans ce modèle, il est possible de considérer l'équivalent de la chromodynamique, en considérant le module $C^\infty(V) \otimes M(3\times 2, \mathbb{C})$ comme module à gauche sur l'algèbre $M(3, \mathbb{C})$. L'algèbre à prendre serait alors $C^\infty(V) \otimes M(2, \mathbb{C}) \otimes M(3, \mathbb{C})^{\mathrm{op}}$.

La grande nouveauté dans ces modèles est le statut complètement nouveau du groupe de jauge. Dans l'approche habituelle, le groupe de jauge est celui d'un fibré principal. Ici, le groupe de jauge est le groupe des éléments unitaires de l'algèbre $\mathcal{A}$, ou, pour un module libre de rang r, les éléments unitaires de $M(r, \mathcal{A})$.

D'autres modèles ont été proposés à la suite de celui-ci. En particulier celui d'A. Connes considère un double espace-temps. Le "modèle standard" ainsi obtenu reproduit assez bien le modèle standard habituel, car le nombre de paramètres libres y est suffisant. Dans ce modèle, l'algèbre (réelle) est $C^\infty(V) \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes M(3, \mathbb{C})$, où $\mathbb{H}$ est l'algèbre réelle des quaternions. Le choix de cette algèbre est bien sûr relié à la structure du modèle standard, puisque les facteurs correspondent à la décomposition du groupe de structure $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ (en réalité à un facteur $U(1)$ supplémentaire). Dans la dernière version de ce "modèle standard non commutatif", les particules sont regroupées dans un $(\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}, M(3, \mathbb{C}))$-bimodule sur lequel l'algèbre se représente. C'est un moyen économique de regrouper les interactions électrofaibles et fortes sans introduire de groupe de structure plus grand, comme $SU(5)$ par exemple.

Nous renvoyons à l'abondante littérature sur les modèles physiques que l'on peut construire en géométrie non commutative : par exemple [74, 75, 76, 77, 100, 102] en ce qui concerne le modèle standard et les champs de Higgs, et [104, 106] en ce qui concerne des théories non commutatives à la Kazula-Klein. Cette liste est loin d'être exhaustive.

8.3 Bimodules centraux et diagonaux

Si une algèbre associative $\mathcal{A}$ est commutative, un module sur $\mathcal{A}$ est aussi un bimodule, pour lequel les structures à droite et à gauche coïncident. Lorsque $\mathcal{A}$ est non commutative, nous n'avons considéré jusqu'à présent que des modules d'un seul côté, en général à droite. Cette situation est loin d'être satisfaisante, même si elle conduit déjà à des constructions et des résultats intéressants. Par exemple, quelle que soit la construction que l'on prenne, les formes différentielles en géométrie non commutative constituent toujours un bimodule. Si nous voulons y introduire une connexion, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, le choix de la structure de module à droite ou à gauche n'est pas canonique. De plus, la catégorie des modules unilatères ne permet pas d'introduire la notion d'involution, donc l'analogue des fibrés vectoriels réels.

Il nous faut donc considérer des bimodules. Or, de façon générale, la notion de bimodule ne se réduit pas à celle de module dans le cas commutatif, comme le montre l'exemple du bimodule $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Il faut donc restreindre la catégorie des bimodules d'une certaine façon.

8.3.1 Bimodules centraux

La première restriction que nous prenons est la suivante :

Définition 8.13 *Un bimodule central sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ est un bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$ tel que $zm = mz$ pour tout $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ et tout $m \in \mathcal{M}$.*

Dans le cas où $\mathcal{A}$ est commutative, cette notion se réduit bien à celle de module. Pour $\mathcal{A}$ quelconque, $\mathcal{A}$ est elle-même un bimodule central.

Lemme 8.14 *On a les résultats suivants :*

1. *tout sous-bimodule d'un module central est central ;*
2. *tout quotient d'un bimodule central est central ;*
3. *le produit direct de bimodules centraux est central ;*
4. *le produit tensoriel sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ ou sur $\mathcal{A}$ de deux bimodules centraux est central.*

Ces assertions sont évidentes.

À tout bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$, on peut associer un bimodule central $\mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$, obtenu comme quotient de $\mathcal{M}$ par le sous-bimodule $[\mathcal{Z}(\mathcal{A}), \mathcal{M}]$ des éléments de la forme $zm - mz$ pour $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ et $m \in \mathcal{M}$. On note $p_{\mathcal{Z}}$ la projection $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_{\mathcal{Z}}$.

On peut aussi associer à $\mathcal{M}$ un autre bimodule central

$$\mathcal{M}^{\mathcal{Z}} = \{m \in \mathcal{M} \ / \ zm = mz \ \forall z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})\}$$

qui n'est autre que $C^0(\mathcal{A}, \mathcal{Z}(\mathcal{A}); \mathcal{M})$. On note $i^{\mathcal{Z}}$ l'inclusion de $\mathcal{M}^{\mathcal{Z}}$ dans $\mathcal{M}$.

Proposition 8.15 *[90]*

1. *Soit $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un homomorphisme de bimodules, avec $\mathcal{N}$ bimodule central. Alors il existe un unique homomorphisme de bimodules centraux $\varphi_{\mathcal{Z}} : \mathcal{M}_{\mathcal{Z}} \to \mathcal{N}$ tel que $\varphi = \varphi_{\mathcal{Z}} \circ p_{\mathcal{Z}}$.*

2. *Soit $\psi : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ un homomorphisme de bimodules avec $\mathcal{N}$ bimodule central. Alors il existe un unique homomorphisme de bimodules centraux $\psi^{\mathcal{Z}} : \mathcal{N} \to \mathcal{M}^{\mathcal{Z}}$ tel que $\psi = i^{\mathcal{Z}} \circ \psi^{\mathcal{Z}}$.*

Si $I_{\mathcal{Z}}$ désigne le foncteur oubli de la catégorie des bimodules centraux dans la catégorie des bimodules, on interprète $p_{\mathcal{Z}}$ comme un foncteur adjoint à gauche de $I_{\mathcal{Z}}$ et $i^{\mathcal{Z}}$ comme un foncteur adjoint à droite de $I_{\mathcal{Z}}$.

Il est d'usage courant de considérer un bimodule sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ comme un module à gauche sur l'algèbre $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$ où $\mathcal{A}^{\text{op}}$ est l'algèbre opposée de $\mathcal{A}$. Il est facile de voir que les bimodules centraux sont exactement les modules à gauche sur $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \mathcal{A}^{\text{op}}$. La catégorie des bimodules centraux est donc équivalente à celle des modules à gauche sur cette algèbre.

8.3.2 Bimodules diagonaux

Nous pouvons restreindre davantage la catégorie des bimodules en posant :

Définition 8.16 *Un bimodule diagonal $\mathcal{M}$ sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ est un sous-bimodule d'un bimodule $\mathcal{A}^I$ pour un ensemble I quelconque.*

Ici, $\mathcal{A}^I$ désigne l'ensemble des applications de I dans $\mathcal{A}$. On note $(a_i)_{i\in I}$ les éléments de ce bimodule. La structure de ce bimodule implique que tout bimodule diagonal est en particulier central.

Lemme 8.17 *On a les résultats suivants :*

1. *tout sous-bimodule d'un bimodule diagonal est diagonal ;*

2. *tout produit direct de bimodules diagonaux est diagonal ;*

3. *tout produit tensoriel sur $\mathcal{A}$ de deux bimodules diagonaux est diagonal.*

Pour tout bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$, on définit le bimodule $\text{diag}(\mathcal{M})$ en prenant l'image de $\mathcal{M}$ dans l'application

$$\begin{array}{rcl} c : \mathcal{M} & \to & \mathcal{A}^{\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{A})} \\ m & \mapsto & (\omega(m))_{\omega\in\text{Hom}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M},\mathcal{A})} \end{array}$$

Par construction, $\text{diag}(\mathcal{M})$ est un bimodule diagonal.

Proposition 8.18 *[90] Soit $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un homomorphisme de bimodules, avec $\mathcal{N}$ bimodule diagonal. Alors il existe un unique homomorphisme de bimodules diagonaux* $\mathrm{diag}(\varphi) : \mathrm{diag}(\mathcal{M}) \to \mathcal{N}$ *tel que* $\varphi = \mathrm{diag}(\varphi) \circ c$.

Cette proposition s'interprète comme le fait que diag est un foncteur, foncteur adjoint à gauche du foncteur oubli de la catégorie des bimodules diagonaux dans la catégorie des bimodules.

L'application c réalise un isomorphisme entre $\mathcal{M}$ et $\mathrm{diag}(\mathcal{M})$ (c'est-à-dire est injective) lorsque $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ sépare les points de $\mathcal{M}$. On a donc :

Proposition 8.19 *$\mathcal{M}$ est diagonal si et seulement si* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ *sépare les points de $\mathcal{M}$.*

Le calcul différentiel universel sur $\mathcal{A}$ est un bimodule canoniquement associé à l'algèbre $\mathcal{A}$. On lui associe donc canoniquement sont bimodule diagonal. En degré 1 on a :

Proposition 8.20 *[91]*

$$\mathrm{diag}(\Omega_U^1(\mathcal{A})) = \Omega_{\mathrm{Der}}^1(\mathcal{A})$$

Ceci conduit au résultat suivant, qui caractérise $\Omega_{\mathrm{Der}}^1(\mathcal{A})$ comme un objet universel :

Corollaire 8.21 *Soit δ une dérivation de $\mathcal{A}$ dans un bimodule diagonal $\mathcal{M}$. Alors il existe un unique homomorphisme de bimodules $i_\delta : \Omega_{\mathrm{Der}}^1(\mathcal{A}) \to \mathcal{M}$ tel que $\delta = i_\delta \circ d$.*

Ce corollaire donne à $\Omega_{\mathrm{Der}}^1(\mathcal{A})$ dans la catégorie des bimodules diagonaux le même statut que $\Omega_U^1(\mathcal{A})$ dans la catégorie des bimodules.

8.3.3 Dualité

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative et $\mathcal{M}$ un bimodule sur $\mathcal{A}$. Alors

$$\mathcal{M}^{*\mathcal{A}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$$

est un module (au sens ordinaire) sur le centre $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$, en posant naturellement, pour $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ et $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $(z\omega)(m) = z\omega(m)$ pour tout $m \in \mathcal{M}$.

Si $\mathcal{N}$ est un module sur le centre de $\mathcal{A}$, alors

$$\mathcal{N}^{*\mathcal{A}} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$$

est un bimodule sur $\mathcal{A}$, en posant pour $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})}(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ et $a, b \in \mathcal{A}$, $(a\omega b)(n) = a\omega(n)b$ pour tout $n \in \mathcal{N}$.

Proposition 8.22 *[91] Si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module, alors $\mathcal{N}^{*\mathcal{A}}$ est un bimodule diagonal. Si $\mathcal{M}$ est un bimodule sur $\mathcal{A}$, alors* $\mathrm{diag}(\mathcal{M}) \subseteq \left(\mathcal{M}^{*\mathcal{A}}\right)^{*\mathcal{A}}$.

$\mathcal{N}^{*\mathcal{A}}$ est le sous-bimodule de $\mathcal{A}^{\mathcal{N}}$ des homomorphismes $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéaires de $\mathcal{N}$ dans $\mathcal{A}$.

Définition 8.23 *On dira qu'un bimodule $\mathcal{M}$ est réflexif si $\mathcal{M}^{*\mathcal{A}*\mathcal{A}} = \mathcal{M}$.*

En particulier, un bimodule réflexif est diagonal. Cette notion de réflexivité correspond en quelque sorte à une condition de finitude sur le bimodule.

Théorème 8.24 *[91] On a les dualités*

$$(\Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}))^{*\mathcal{A}} = \mathrm{Der}(\mathcal{A})$$

et

$$\mathrm{Der}(\mathcal{A})^{*\mathcal{A}} = \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$$

Ces dualités sont séparées.

D'une certaine façon, cela donne une relation de densité de $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ dans $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$.

8.3.4 Involution et produits scalaires

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative involutive.

Définition 8.25 *Un bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$ est involutif s'il existe une involution sur $\mathcal{M}$ telle que $(amb)^* = b^*m^*a^*$ pour tout $m \in \mathcal{M}$ et tout $a, b \in \mathcal{A}$.*

Un module $\mathcal{N}$ sur $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ est involutif s'il existe une involution sur $\mathcal{N}$ telle que $(zn)^* = z^*n^*$ pour tout $n \in \mathcal{N}$ et tout $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Si $\mathcal{M}$ est un bimodule involutif, alors $\mathcal{M}^{*\mathcal{A}}$ est naturellement un $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module involutif. Réciproquement, si $\mathcal{N}$ est un $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module involutif, alors $\mathcal{N}^{*\mathcal{A}}$ est naturellement un bimodule involutif.

Nous dirons qu'un élément m d'un bimodule involutif $\mathcal{M}$ est hermitien si $m^* = m$.

Exemple 8.26 Si $\mathcal{A}$ est une algèbre involutive, $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ est un $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module involutif pour l'involution $x \mapsto X^*$ définie par $X^*a = (Xa^*)^*$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. De même, $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ est involutif pour $adb \mapsto (db^*)a^*$, et $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ est involutif comme dual de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$. Ces involutions peuvent s'étendre aux bimodules $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ et $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. $\diamondsuit$

La notion de module à droite (ou à gauche) involutif n'a pas de sens, et il faut nécessairement considérer les bimodules pour pouvoir définir une involution compatible avec celle de l'algèbre.

Comme nous l'avons vu au Chapitre 2, la mécanique quantique prend pour observables les éléments hermitiens d'une algèbre involutive, qui forment une algèbre (réelle) de Jordan. La généralisation non commutative des fonctions à valeurs réelles est donc cette algèbre de Jordan. Dans le même esprit, la généralisation non commutative d'un fibré vectoriel réel, ou plutôt de l'espace des sections réelles d'un fibré vectoriel, est l'espace des éléments hermitiens d'un bimodule involutif sur l'algèbre de départ. Ceci force à avoir une involution, donc à considérer des bimodules et non simplement des modules.

DÉFINITION 8.27 *Un produit scalaire g sur un bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$ est un élément de* $\mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}, \mathcal{A})$. *Si $\mathcal{M}$ est involutif, on dira que g est réel si $g(m \otimes n)^* = g(n^* \otimes m^*)$. Si le cône $\mathcal{A}_+$ de $\mathcal{A}$ est strict, on dira que g est positif si $g(m^* \otimes m) \in \mathcal{A}_+$ pour tout $m \in \mathcal{M}$.*

Si $\mathcal{M}$ est involutif et muni d'un produit scalaire réel g, on définit

$$h_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{A}$$

en posant $h_{\mathcal{M}}(m, n) = g(m^* \otimes n)$ pour tout $m, n \in \mathcal{M}$. $h_{\mathcal{M}}$ est une structure hermitienne sur le module à droite $\mathcal{M}$. Elle est positive si et seulement si g l'est. Remarquons qu'une définition analogue permet de construire une structure hermitienne sur le module à gauche $\mathcal{M}$.

La notion de produit scalaire définie ci-dessus est compatible avec celle de structure hermitienne sur les modules à droite au sens suivant. Soit $\mathcal{E}$ un module à droite sur $\mathcal{A}$, muni d'une structure hermitienne $h_{\mathcal{E}}$. Si $\mathcal{M}$ est un bimodule involutif sur $\mathcal{A}$, muni d'un produit scalaire g, alors $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est un module à droite sur $\mathcal{A}$ sur lequel on définit une structure hermitienne en posant

$$h(e \otimes m, f \otimes n) = g(m^* \otimes h_{\mathcal{E}}(e, f)n)$$

Cette construction peut être itérée, et est associative.

Il est possible de définir une notion de non dégénérescence d'un produit scalaire g sur $\mathcal{M}$. Pour cela, on considère le bimodule $\mathcal{M}' = \mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{A})$ pour la structure $a\alpha b(m) = a\alpha(mb)$. Alors g induit une application $g^\sharp \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M}')$ en posant $g^\sharp(m)(n) = g(m \otimes n)$. On dira que g est non dégénérée si $g^\sharp$ est injective.

8.3.5 Connexions

La notion de connexion sur un module à droite est facile à établir algébriquement. Si l'on veut travailler sur des bimodules en recopiant la Définition 8.1, le problème se pose de savoir de quel côté placer les 1-formes différentielles, et quelle règle de dérivation prendre sur une expression du type *amb* pour $a, b \in \mathcal{A}$ et $m \in \mathcal{M}$ un bimodule sur $\mathcal{A}$. Si on utilise l'algèbre des formes différentielles basée sur les dérivations, ce problème a été résolu en oubliant momentanément les 1-formes différentielles, et en utilisant explicitement les dérivations. Comme nous allons le voir, cette définition ne peut se donner que sur la catégorie des bimodules centraux.

Définitions

DÉFINITION 8.28 *Soit $\mathcal{M}$ un bimodule central sur une algèbre associative $\mathcal{A}$. Une connexion ∇ sur $\mathcal{M}$ est une application qui à $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ associe linéairement en X un endomorphisme ∇_X de $\mathcal{M}$ tel que*

$$\begin{aligned} \nabla_{zX} m &= z \nabla_X m \\ \nabla_X(amb) &= (Xa)mb + a(\nabla_X m)b + am(Xb) \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $m \in \mathcal{M}$ et $a, b \in \mathcal{A}$.

Cette définition reproduit explicitement la définition habituelle des connexions sur le module des sections d'un fibré vectoriel, en remplaçant comme d'habitude les champs de vecteurs par les dérivations. Il faut cependant prendre garde au rôle non trivial joué par le centre de l'algèbre dans cette définition, qui impose de travailler au minimum avec les bimodules centraux.

DÉFINITION 8.29 *La courbure d'un connexion ∇ sur un bimodule central $\mathcal{M}$ est une application $\mathcal{R}$ qui à $X, Y \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ associe $\mathcal{R}_{X,Y} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ définie par*

$$\mathcal{R}_{X,Y} m = \nabla_X \nabla_Y m - \nabla_Y \nabla_X m - \nabla_{[X,Y]} m$$

Lemme 8.30 *On a les propositions triviales suivantes.*

1. *Pour deux connexions ∇ et ∇' sur un bimodule central $\mathcal{M}$, pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, on a $\nabla_X - \nabla'_X \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.*

2. *La courbure est $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéaire antisymétrique en les dérivations.*

3. *Pour tout $X, Y \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, $\mathcal{R}_{X,Y} \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{M})$.*

4. *On a l'identité de Bianchi :*

$$[\nabla_X, \mathcal{R}_{Y,Z}] + [\nabla_Y, \mathcal{R}_{Z,X}] + [\nabla_Z \mathcal{R}_{X,Y}] = \mathcal{R}_{[X,Y],Z} + \mathcal{R}_{[Y,Z],X} + \mathcal{R}_{[Z,X],Y}$$

Dans cette approche, on ne peut pas considérer un produit tensoriel du type $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Il faut plutôt introduire l'espace $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ des applications $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéaires de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{M}$. Alors ∇ réalise une application

$$\nabla : \mathcal{M} \to \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

On peut de même considérer l'espace gradué $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) = \oplus_{n \geq 0} \underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ où $\underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$ est l'ensemble des applications antisymétriques $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-linéaires de $(\mathrm{Der}(\mathcal{A}))^n$ dans $\mathcal{M}$. On prolonge alors ∇ en une application

$$\nabla : \underline{\Omega}^n_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \to \underline{\Omega}^{n+1}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \mathcal{M})$$

de façon naturelle. Nous renvoyons à [91] pour la forme explicite, qui n'est autre que celle habituellement considérée en géométrie différentielle ordinaire.

Propriétés

Nous résumons dans la proposition suivante les diverses façons de construire des connexions à partir de connexions données.

Proposition 8.31 *[91]*

1. *Soit $\mathcal{M}$ un bimodule central, muni d'une connexion $\mathcal{M}$, et $\mathcal{N}$ un sous-bimodule de $\mathcal{M}$. Si $\nabla_X \mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$, alors la restriction de ∇_X à $\mathcal{N}$ définit une connexion sur $\mathcal{N}$, et ∇_X induit une connexion sur $\mathcal{M}/\mathcal{N}$.*

2. *Si $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ est une famille de bimodules centraux munis de connexions ∇^i, alors sur le bimodule central $\prod_i \mathcal{M}_i$, on définit une connexion en posant $\nabla_X (m_i)_{i \in I} = (\nabla^i_X m_i)_{i \in I}$. Par restriction, on a aussi une connexion sur la somme directe $\oplus_i \mathcal{M}_i$.*

3. *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux bimodules centraux munis de connexions $\nabla^{\mathcal{M}}$ et $\nabla^{\mathcal{N}}$, alors sur les bimodules centraux $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{Z}(\mathcal{A})} \mathcal{N}$, l'expression $\nabla_X = \nabla^{\mathcal{M}}_X \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{N}} + \mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \otimes \nabla^{\mathcal{N}}_X$ définit une connexion.*

Dualité

Afin d'utiliser la notion de dualité définie auparavant, on définit une connexion sur un $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module $\mathcal{N}$ comme une application ∇ qui à $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ associe un endomorphisme ∇_X de $\mathcal{N}$ tel que $\nabla_{zX} n = z\nabla_X n$ et $\nabla_X(zn) = (Xz)n + z\nabla_X n$.

Lemme 8.32 *[91] Soit $\mathcal{M}$ un bimodule central sur $\mathcal{A}$, muni d'une connexion ∇. Alors il existe sur le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module $\mathcal{M}^{*\mathcal{A}}$ une unique connexion $\nabla^{*\mathcal{A}}$ telle que*

$$\left(\nabla_X^{*\mathcal{A}}\omega\right)(m) = X(\omega(m)) - \omega\left(\nabla_X m\right)$$

pour tout $\omega \in \mathcal{M}^{*\mathcal{A}}$, tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ et tout $m \in \mathcal{M}$.

Réciproquement, si ∇ est une connexion sur un $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module $\mathcal{N}$, alors il existe une unique connexion $\nabla^{*\mathcal{A}}$ sur le bimodule central $\mathcal{N}^{*\mathcal{A}}$ telle que

$$\left(\nabla_X^{*\mathcal{A}}\alpha\right)(n) = X(\alpha(a)) - \alpha\left(\nabla_X n\right)$$

Pour un bimodule diagonal réflexif $\mathcal{M}$, il y a donc équivalence entre les connexions sur $\mathcal{M}$ et celles sur le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module $\mathcal{M}^{*\mathcal{A}}$.

Connexions et produit scalaire

DÉFINITION 8.33 *Soit $\mathcal{M}$ un bimodule central involutif sur une algèbre associative involutive $\mathcal{A}$. Une connexion ∇ sur $\mathcal{M}$ est réelle si $(\nabla_X m)^* = \nabla_{X^*} m^*$ pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ et tout $m \in \mathcal{M}$.*

Si $\mathcal{M}$ est muni d'un produit scalaire réel g, alors ∇ est compatible avec g si pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ et tout $m, n \in \mathcal{M}$, on a

$$Xg(m \otimes n) = g(\nabla_X m \otimes n) + g(m \otimes \nabla_X n)$$

Exemples

EXEMPLE 8.34 Dans le cas où $\mathcal{A}$ est l'algèbre des fonctions C^∞ sur une variété différentiable V et $\mathcal{M} = \Gamma(E)$ le (bi)module sur $\mathcal{A}$ des sections C^∞ sur un fibré vectoriel E, toute connexion au sens précédent est une connexion au sens habituel. $\diamondsuit$

Nous allons voir que les algèbres non commutatives fournissent des exemples non triviaux de connexions.

EXEMPLE 8.35 Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative non commutative telle que $\mathrm{Out}(\mathcal{A}) = 0$, c'est-à-dire qui n'a que des dérivations intérieures. Alors pour tout bimodule central $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$, on peut définir une connexion canonique ∇^c en posant

$$\nabla^c_{ad(a)} m = am - ma$$

La courbure de cette connexion est nulle. Cette connexion est bien sûr d'origine purement non commutative. Il faut la comparer à la connexion ∇^0 définie en 8.2.1 sur des modules à droite. $\diamondsuit$

EXEMPLE 8.36 Soit $\mathcal{A} = M(n, \mathbb{C})$, et prenons pour module central $\mathcal{M}$ le bimodule $\mathcal{M} = M(n, \mathbb{C}) \otimes V$ où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$, de base (v_i). Une connexion sur $\mathcal{M}$ est complètement déterminée par sa valeur sur les $\mathbb{1} \otimes v_i$. On pose $\nabla_X(\mathbb{1} \otimes v_i) = \Gamma_i(X)$ pour tout $X \in \mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C}))$. Mais, par propriétés de la connexion, on constate que $\Gamma_i(X) \in \mathbb{1} \otimes V$. Posons donc $\Gamma_i(X) = \mathbb{1} \otimes \Gamma_i^j(X) v_j$ avec $\Gamma_i^j(X) \in \mathbb{C}$.

Lemme 8.37 *∇ est de courbure nulle si et seulement si les Γ_i^j forment une représentation de l'algèbre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ sur V.*

Démonstration : Il suffit de calculer la courbure sur les $\mathbb{1} \otimes v_i$ et d'utiliser le fait que $\mathrm{Der}(M(n, \mathbb{C})) \simeq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. $\square$

Ce résultat est semblable à celui obtenu en 8.2.2. Il montre que les connexions de courbure nulle forment des orbites de jauge distinctes paramétrisées par les représentations de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ sur V. Appliqué à un modèle de théorie des champs, ceci conduirait aux mêmes conclusions qu'en 8.2.2 sur les vides possibles. $\diamondsuit$

8.3.6 Connexions linéaires

Une connexion sur le bimodule des 1-formes différentielles a un statut et une importance particuliers en physique théorique, puisqu'une telle connexion est utilisée en relativité générale (voir Chapitre 2). En réalité, la connexion de Levi-Civita associée à une métrique sur une variété riemannienne est définie sur les champs de vecteurs. Par dualité (dans ce cas), il est équivalent de la définir sur les 1-formes différentielles de de Rham.

DÉFINITION 8.38 *On appelle connexion linéaire une connexion linéaire sur le bimodule diagonal $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$.*

Une telle connexion est donc une application

$$\nabla : \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \to \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}))$$

Il existe une application canonique

$$\pi : \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})) \to \underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$$

qui correspondrait classiquement au produit de deux 1-formes, définie en posant

$$(\pi\varphi)(X, Y) = \varphi_X(Y) - \varphi_Y(X)$$

pour tout $X, Y \in \mathrm{Der}(\mathcal{A})$ et tout $\varphi \in \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}, \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}))$.

DÉFINITION 8.39 *On appelle torsion d'une connexion linéaire ∇ l'application $T : \mathcal{A} \to \underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ définie par $T(a) = -\pi \circ \nabla(da)$.*

Lemme 8.40 *On a*

$$T(ab) = (Ta)b + a(Tb)$$

Donc T est une dérivation de $\mathcal{A}$ dans $\underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$.

Par propriété universelle de $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$, il existe un homomorphisme de bimodules $i_T : \Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A}) \to \underline{\Omega}^2_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ tel que $T = i_T \circ d$. Il est facile de voir que i_T se prolonge à $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ en $i_T = d - \pi \circ \nabla$.

Nous avons vu que les espaces $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$, $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ et $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ étaient en dualité. Toute connexion ∇ sur le $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$-module $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ définit donc une connexion linéaire sur $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Dans ce cas, la torsion est définie comme une application bilinéaire en $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, antisymétrique, de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$ dans $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, en posant

$$T_{X,Y} = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

C'est la formule habituelle de définition de la torsion.

EXEMPLE 8.41 Considérons l'algèbre des matrices et son calcul différentiel $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$. Comme

$$\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C})) = M(n, \mathbb{C}) \otimes \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*$$

et

$$\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}), \underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))) = M(n, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}^2\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*$$

où le second $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ correspond à $\underline{\Omega}^1_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$, une connexion linéaire est complètement déterminée par la donnée de $\nabla\theta^i \in M(n, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}^2\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^*$ pour tout i. Posons

$$\nabla\theta^i = -\omega^i_{k\ell}\theta^k \otimes \theta^\ell$$

De $M\theta^i = \theta^i M$ pour toute matrice M, nous tirons que $\omega^i_{k\ell} \in \mathbb{C}$. La torsion de cette connexion vaut $T = E_i \otimes \omega^i_{k\ell}\theta^k\theta^\ell$ en tant que 2-forme à valeurs dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. $\diamondsuit$

8.3.7 Connexions et algèbres de quotient

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre de quotient de l'algèbre $\mathcal{A}$, comme définie en 5.7.1. Alors $\mathcal{A}$ peut être considérée comme un bimodule central sur $\mathcal{B}$. On rappelle aussi que l'on a une suite exacte courte de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules et d'algèbres de Lie :

$$0 \to \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{Der}(\mathcal{B}) \to 0$$

Soit $\psi : \mathrm{Der}(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ une application qui scinde cette suite exacte courte en tant que suite exacte courte de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules. On oublie donc provisoirement les structures d'algèbres de Lie.

Proposition 8.42 *[108] Pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{B})$, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \nabla_X : \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ a & \mapsto & \psi(X)a \end{array}$$

est une connexion sur le bimodule central $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{B}$. Cette connexion est de courbure nulle si et seulement si ψ scinde la suite exacte courte comme suite exacte courte d'algèbres de Lie.

Démonstration : On trouvera cette démonstration dans [108]. □

Une telle connexion donne une projection $P : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules en posant $P(X) = X - \psi \circ \rho(X)$. On a alors $\mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ker}\, P \oplus \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. Réciproquement, une projection de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules $P : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ scinde la suite exacte courte, et donne donc une connexion sur $\mathcal{A}$.

Soit $P(M, G)$ un fibré principal de base M et de groupe de structure G, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre commutative des fonctions C^∞ sur P et $\mathcal{B}$ l'algèbre des fonctions C^∞ sur M. On peut considérer que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est une algèbre de quotient. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ s'envoie de façon injective dans les champs de vecteurs sur P, précisément sur les champs de vecteurs verticaux. $\mathcal{B}$ est exactement l'algèbre basique pour l'action induite de $\mathfrak{g}$ sur $\mathcal{A}$, et $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ est l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs verticaux. Dans ce contexte, une connexion peut être regardée comme une application $\Gamma(TM) \to \Gamma(TP)$, $X \mapsto X^h$, des champs de vecteurs sur M dans ceux sur P, qui remonte horizontalement les champs de vecteurs. Cette application scinde la suite exacte courte ci-dessus.

La proposition précédente montre que nous ne sommes pas loin d'avoir l'équivalent non commutatif de cette situation. Ce qui manque encore est l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{g})$ un triplet constitué d'une algèbre de quotient $\mathcal{B}$ pour $\mathcal{A}$, et d'une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de dimension finie de $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, telle que $\mathcal{B}$ soit l'algèbre basique pour $\mathfrak{g}$. On appelle connexion sur ce triplet une application $\psi : \mathrm{Der}(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ de $\mathcal{Z}(\mathcal{B})$-modules compatible avec l'action de $\mathfrak{g}$ au sens où $[\mathfrak{g}, \psi(X)] = 0$ pour tout $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{B})$. Une telle connexion peut encore être donnée par une projection équivariante $P : \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B}) \to \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ au sens où $[Y, P(X)] = P([Y, X])$ pour tout $Y \in \mathfrak{g}$ et tout $X \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$.

Dans cette situation, soit V un espace vectoriel sur lequel $\mathfrak{g}$ se représente par l'application $\eta : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$. On définit un bimodule central associé à $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{g})$ en posant

$$\mathcal{M}_V = \{a_i \otimes v^i \in \mathcal{A} \otimes V \ / \ (Ya_i) \otimes v^i + a_i \otimes \eta(Y)v^i = 0 \ \forall Y \in \mathfrak{g}\}$$

La structure de bimodule (diagonal) est localisée sur $\mathcal{A}$.

Proposition 8.43 *[108] Soit $\psi : \mathrm{Der}(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ une connexion sur $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{g})$. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} \nabla^V_X : \mathcal{M}_V & \to & \mathcal{M}_V \\ a_i \otimes v^i & \mapsto & (\psi(X)a_i) \otimes v^i \end{array}$$

est bien définie et est une connexion sur le bimodule central $\mathcal{M}_V$.

Cette connexion est la connexion associée à celle définie par ψ sur $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathfrak{g})$. Dans le cas du fibré principal, $\mathcal{M}_V$ est le module sur $\mathcal{B}$ des sections d'un fibré vectoriel associé pour (V, η). Ce module de sections est considéré ici du point de vue des applications équivariantes $P \to V$.

8.3.8 Vers une K-théorie ?

Ayant à notre disposition une catégorie de bimodules sur lesquels on peut définir des connexions, et qui généralisent la notion de module sur les algèbres commutatives, il est temps de se demander s'il existe une K-théorie associée. Cette K-théorie ne serait peut-être pas construite en utilisant toute la catégorie des bimodules centraux, ni même celle des bimodules diagonaux.

La première exigence que l'on puisse formuler sur cette K-théorie serait qu'elle conduise à une structure d'anneau. Cette structure devrait en effet être une conséquence de la stabilité de cette catégorie par produit tensoriel sur l'algèbre $\mathcal{A}$.

D'autre part, comme nous l'avons vu, la définition de la K-théorie habituelle sur une algèbre associative $\mathcal{A}$, repose sur les modules à droite projectifs de type fini sur $\mathcal{A}$. Malheureusement, une telle notion n'existe pas encore pour les bimodules centraux, ni pour les bimodules diagonaux. De plus, si $\mathcal{M}$ est un bimodule et $\mathcal{P}$ un module à droite, alors $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est un module à droite. C'est le germe d'un couplage entre la K-théorie habituelle et cette K-théorie à définir sur les bimodules, qui ferait de la K-théorie habituelle un module (à droite) sur l'anneau de la K-théorie des bimodules. Dans ce cas, il faudrait seulement considérer les bimodules centraux $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$ tels que pour tout module à droite projectif de type fini $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ soit projectif de type fini. Il faut remarquer que cet ensemble de bimodules est stable par produit tensoriel sur $\mathcal{A}$.

Il serait souhaitable aussi de pouvoir relier cette K-théorie aux connexions telles qu'elles viennent d'être définies, en considérant une généralisation du caractère de Chern.

Plus généralement, grâce aux connexions, on peut vouloir définir des classes caractéristiques sur ces bimodules. Dans ce cas, c'est la courbure de la connexion qui importe. Soit donné un couple $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ constitué d'une algèbre $\mathcal{A}$ et d'une algèbre de quotient $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. On suppose que l'on a un bimodule central $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$, muni d'une connexion ∇, telle que la courbure de cette connexion soit nulle dès que l'un de ses arguments est dans $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$. On définit alors le bimodule central sur $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{M}^{\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})} = \{m \in \mathcal{M} \ / \ \nabla_X m = 0 \ \forall X \in \mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})\}$$

Pour tout $\tilde{X} \in \mathrm{Der}(\mathcal{B})$, soit $X \in \mathcal{N}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$ tel que $\rho(X) = \tilde{X}$. On définit, pour $m \in \mathcal{M}^{\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})}$,

$$\widetilde{\nabla}_{\tilde{X}} m = \nabla_X m$$

Alors, comme la courbure de ∇ est nulle sur $\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})$, cette application est bien définie et donne une connexion sur $\mathcal{M}^{\mathcal{Z}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{B})}$. Sa courbure vaut

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\tilde{X},\tilde{Y}} m = \mathcal{R}_{X,Y} m$$

avec des notations évidentes. Ainsi, on a enlevé la partie de courbure nulle, sans perdre d'information sur la courbure. Du point de vue des classes caractéristiques, le problème est simplifié puisque la partie inutile (là où la courbure est nulle) est ôtée.

Dans le cas où $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) = \mathrm{Int}(\mathcal{A})$, on a exhibé une connexion canonique sur tout bimodule central, de courbure nulle. Ceci montre que du point de vue des classes caractéristiques, il ne peut rien y avoir.

Considérons le cas plus général où $\mathrm{Der}(\mathcal{A}) \neq \mathrm{Int}(\mathcal{A})$. Si on peut prolonger cette connexion canonique (définie sur $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$) à tout $\mathrm{Der}(\mathcal{A})$, en conservant la courbure nulle sur $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$, alors on peut espérer transporter cette connexion sur un bimodule central sur l'algèbre $\mathcal{B} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ (c'est-à-dire un module), tout en gardant les informations sur la courbure. Dans ce cas, la théorie des classes caractéristiques est connue si $\mathcal{B}$ est une algèbre de fonctions C^∞ sur une variété. Reste cependant à résoudre le problème du prolongement, qui est loin d'être évident.

Revenons au problème de l'introduction d'une K-théorie. La dualité entre bimodules diagonaux et modules sur le centre donne une possibilité pour définir une telle K-théorie. En effet, nous avons le résultat trivial suivant :

Lemme 8.44 *On a $\mathcal{A}^{*\mathcal{A}} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, $(\mathcal{A}^n)^{*\mathcal{A}} = \mathcal{Z}(\mathcal{A})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si P est une projection dans $M(n, \mathcal{Z}(\mathcal{A}))$, alors $P\mathcal{A}^n$ est un bimodule diagonal et $(P\mathcal{A}^n)^{*\mathcal{A}} = {}^tP\mathcal{Z}(\mathcal{A})^n$.*

Ce lemme suggère de considérer les bimodules diagonaux du type $P\mathcal{A}^n$ pour P une projection dans $M(n, \mathcal{Z}(\mathcal{A}))$. Un tel bimodule central est en quelque sorte "central projectif de type fini". La K-théorie naturelle sur ces bimodules est par dualité celle de l'algèbre $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$.

Proposition 8.45 *Si $\mathcal{M}$ est un bimodule "central projectif de type fini" sur $\mathcal{A}$ et si $\mathcal{N}$ est un module à droite projectif de type fini sur $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est un module à droite projectif de type fini sur $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{N}$ est un bimodule "central projectif de type fini", alors $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est un bimodule "central projectif de type fini".*

Démonstration : Par hypothèse, on a $\mathcal{M} = P\mathcal{A}^m$ et $\mathcal{N} = Q\mathcal{A}^n$ pour $P \in M(m, \mathcal{Z}(\mathcal{A}))$, projection, et $Q \in M(n, \mathcal{A})$ projection. Alors un calcul simple montre que $\mathcal{N} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} = (Q \otimes P)\mathcal{A}^{mn}$ où $Q \otimes P \in M(mn, \mathcal{A})$ est un projection car les cœfficients de P sont dans le centre de $\mathcal{A}$. Si Q est aussi à cœfficients dans le centre, alors $Q \otimes P$ est dans $M(mn, \mathcal{Z}(\mathcal{A}))$. □

Cette proposition fait de $K(\mathcal{A})$ un module à droite sur l'anneau $K(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$.

Exemple 8.46 Dans le cas de l'algèbre des matrices, on sait que $K(M(n, \mathbb{C})) = \mathbb{Z} = K(\mathbb{C})$. ♢

8.4 Connexions linéaires : approche générale

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative et $\Omega(\mathcal{A})$ un calcul différentiel sur $\mathcal{A}$ obtenu par une quelconque méthode, de telle façon qu'il soit engendré par les $a_0 da_1 \dots da_n$. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, une connexion sur le bimodule $\Omega^1(\mathcal{A})$ des 1-formes différentielles est d'une grande importance en physique théorique, puisqu'il s'agit du premier pas vers la généralisation non commutative de la relativité générale. De telles connexions ont déjà été proposées.

Avant l'introduction des bimodules centraux que nous venons d'étudier, ces connexions n'utilisaient qu'une structure de module à droite ou à gauche sur $\Omega^1(\mathcal{A})$ (voir [70] par exemple).

Dans ce qui suit, nous nous proposons de donner une définition d'une connexion sur $\Omega^1(\mathcal{A})$, qu'on appelle alors connexion linéaire, qui fasse usage de la structure de bimodule de $\Omega^1(\mathcal{A})$. Cette définition a été proposée pour la première fois par J. Mourad dans [110]. Des exemples de telles connexions ont été ensuite donnés dans [107, 86, 94, 95].

8.4.1 Définitions et propriétés

Contrairement aux connexions sur les bimodules centraux qui font seulement usage de la structure différentielle induite par les dérivations, la définition que nous allons donner d'une connexion linéaire se veut indépendante du choix de la structure différentielle choisie. Pour comprendre la façon dont on l'introduit, revenons au cas commutatif.

Comme nous l'avons déjà fait, nous allons prendre la définition algébrique d'une connexion sur les 1-formes de de Rham sur une variété différentiable compacte V. Dans ce cas, il s'agit d'une application

$$\nabla : \Omega^1(V) \to \Omega^1(V) \otimes_{C^\infty(V)} \Omega^1(V)$$

telle que

$$\nabla(f\omega) = df \otimes \omega + f\nabla\omega$$

Comme nous avons $\omega f = f\omega$, nous connaissons ∇ sur ωf par la règle de dérivation précédente. Cependant, récrivons $\nabla(\omega f)$ sous la forme

$$\nabla(\omega f) = (\nabla\omega)f + \sigma(\omega \otimes df)$$

où nous posons tout simplement

$$\begin{aligned} \sigma : \Omega^1(V) \otimes_{C^\infty(V)} \Omega^1(V) &\to \Omega^1(V) \otimes_{C^\infty(V)} \Omega^1(V) \\ \omega \otimes \eta &\mapsto \eta \otimes \omega \end{aligned}$$

σ est la permutation du produit tensoriel. Dans le cas d'une algèbre non commutative $\mathcal{A}$, cette permutation σ ne peut pas être définie à cause du produit tensoriel sur $\mathcal{A}$. Néanmoins, nous pouvons considérer une généralisation de cette permutation. Pour savoir quelles propriétés nous devons exiger d'une telle application, remarquons que dans le cas commutatif, nous avons

$$\pi(\sigma + 1) = 0$$

où $\pi : \Omega^1(V) \otimes_{C^\infty(V)} \Omega^1(V) \to \Omega^2(V)$ est le produit dans l'algèbre des formes de de Rham (et 1 l'identité sur $\Omega^1(V) \otimes_{C^\infty(V)} \Omega^1(V)$). Cette relation exprime une compatibilité entre σ et cette structure d'algèbre. De plus, σ est linéaire à droite et à gauche sur les fonctions. De cette petite étude nous tirons la définition :

Définition 8.47 *Une permutation généralisée σ sur un calcul différentiel $\Omega(\mathcal{A})$ engendré par les da sur une algèbre associative $\mathcal{A}$ est un automorphisme de bimodule de $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ tel que*

$$\pi(\sigma + 1) = 0 \tag{8.1}$$

où $\pi : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^2(\mathcal{A})$ est le produit dans l'algèbre $\Omega(\mathcal{A})$.

Une transposition généralisée est une permutation généralisée de carré 1.

Nous noterons généralement τ les transpositions généralisées.

Lemme 8.48 1. *L'application $\tau = -\mathrm{Id}_{\Omega^1(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1(\mathcal{A})} (= -1)$ est une transposition généralisée.*

2. *Si $\Omega^2(\mathcal{A})$ se réalise comme un sous-bimodule de $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$, d'inclusion $\iota : \Omega^2(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$, avec $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_{\Omega^2(\mathcal{A})}$, alors $\tau = 1 - 2\iota \circ \pi$ est une transposition généralisée.*

3. *Si σ est une permutation généralisée, alors σ^{2n+1} est aussi une permutation généralisée pour $n \in \mathbb{Z}$.*

4. *Si σ et σ' sont deux permutations généralisées sur le même calcul différentiel, alors pour tout $\mu, \mu' \in \mathbb{C}$,*

$$\mu(\sigma + 1) + \mu'(\sigma' + 1) - 1$$

est $\mathcal{A}$-bilinéaire et satisfait la condition (8.1). Donc l'espace des $\sigma + 1$ est contenu dans un espace vectoriel. Il faut ôter de cet espace vectoriel les $\sigma + 1$ pour lesquels σ n'est pas inversible.

Dans le cas commutatif, la permutation $\sigma(\omega \otimes \eta) = \eta \otimes \omega$ est une transposition généralisée.

Ayant introduit cette notion de permutation généralisée, il est possible de définir les connexions linéaires :

Définition 8.49 *Une connexion linéaire sur un calcul différentiel $\Omega(\mathcal{A})$ sur une algèbre $\mathcal{A}$ est un couple (∇, σ) constitué d'une permutation généralisée σ et d'une application*

$$\nabla : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$$

telle que

$$\begin{aligned}\nabla(a\omega) &= da \otimes \omega + a\nabla\omega \\ \nabla(\omega a) &= \sigma(\omega \otimes da) + (\nabla\omega)a\end{aligned}$$

On dira que l'application ∇ est une dérivée covariante associée à la permutation généralisée σ. Comme nous le verrons dans les exemples, il peut arriver presque toutes les situations : plusieurs dérivées covariantes pour un seul σ, plusieurs σ pour un même calcul différentiel, unicité du σ, unicité de la dérivée covariante pour un σ donné...

Dans $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$, considéré comme espace d'arrivée de ∇, les deux bimodules $\Omega^1(\mathcal{A})$ n'ont pas le même rôle. Celui de gauche est celui des 1-formes différentielles (cela se voit dans l'expression de $\nabla(a\omega)$) alors que celui de droite est considéré comme le bimodule. Il faut noter que cette convention n'est pas celle utilisée jusqu'à présent.

Symboliquement, σ permute donc ω et da dans l'expression $\sigma(\omega \otimes da)$ pour "ramener" da à gauche.

Remarque 8.50 Ce choix de placer les 1-formes différentielles à droite ou à gauche n'est pas important. En effet, comme σ est un automorphisme, on peut définir une "dérivée covariante droite" sur le calcul différentiel en posant

$$\widetilde{\nabla} = \sigma^{-1} \circ \nabla$$

Cette application vérifie

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}(a\omega) &= \sigma^{-1}(da \otimes \omega) + a\widetilde{\nabla}\omega \\ \widetilde{\nabla} &= \omega \otimes da + (\widetilde{\nabla}\omega)a\end{aligned}$$

Nous noterons $(\sigma^{-1}, \widetilde{\nabla})$ cette connexion linéaire, pour signifier que les règles de dérivations sont inversées. Il y a donc une complète équivalence entre la définition utilisant une permutation pour la dérivation à gauche et celle pour la droite.

Exemple 8.51 Soit $\mathcal{A} = C^\infty(V)$. Il est facile de voir qu'il existe plusieurs permutations généralisées, mais il n'en existe qu'une seule qui admette des dérivées covariantes associées, la transposition habituelle. Aussi, dans ce cas, les dérivées covariantes coïncident avec les dérivées covariantes habituelles. La présence de la permutation généralisée est donc cachée. $\diamondsuit$

Lemme 8.52 *1. Soient (∇, σ) et (∇', σ') deux connexions sur un même calcul différentiel. Alors $\nabla - \nabla'$ est un homomorphisme de modules à gauche.*

2. *Dans la situation précédente, si $\sigma = \sigma'$, alors la différence des deux dérivées covariantes est un homomorphisme de bimodules.*

Comme dans le cas commutatif, on peut prolonger une connexion (∇, σ) à $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$:

DÉFINITION 8.53 *On prolonge ∇ en une application*

$$\nabla : \underbrace{\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})}_{n \text{ fois}} \to \underbrace{\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})}_{n+1 \text{ fois}}$$

définie par récurrence en posant pour $\omega \in \underbrace{\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \cdots \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})}_{n-1 \text{ fois}}$ et $\alpha \in \Omega^1(\mathcal{A})$

$$\nabla(\alpha \otimes \omega) = (\nabla\alpha) \otimes \omega + \sigma_n(\alpha \otimes \nabla\omega)$$

où $\sigma_n = \sigma \otimes \underbrace{\mathrm{Id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{Id}}_{n-1 \text{ fois}}$

La linéarité de σ par rapport à $\mathcal{A}$ est nécessaire dans cette définition.

On peut associer à toute connexion linéaire (∇, σ) une torsion et une courbure de la façon suivante.

DÉFINITION 8.54 *La torsion T de la connexion linéaire (∇, σ) est l'application linéaire $T : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^2(\mathcal{A})$ définie par $T = d - \pi \circ \nabla$.*

Lemme 8.55 *La torsion est un homomorphisme de bimodules.*

Démonstration : C'est une conséquence de $\pi(\sigma + 1) = 0$. □

DÉFINITION 8.56 *La courbure de la connexion linéaire (∇, σ) est l'application linéaire $\mathcal{R} : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ définie par*

$$\mathcal{R} = (d \otimes \mathrm{Id} - \pi_{12}(\mathrm{Id} \otimes \nabla))\,\nabla$$

où $\pi_{12} = \pi \otimes \mathrm{Id}$ sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$.

Lemme 8.57 *La courbure d'une connexion linéaire (∇, σ) est un homomorphisme de modules à gauche.*

REMARQUE 8.58 Ce lemme n'est pas satisfaisant, car, considérant une structure de bimodule au départ, on s'attend à ce que la courbure respecte cette structure. Il est certain que cette définition de la courbure prend bien en compte cette structure, et notamment la structure de module à droite grâce à σ, mais d'une façon qui jusqu'à présent semble obscure. Peut-être cette définition n'est-elle pas la bonne.

On peut construire une seconde courbure $\widetilde{\mathcal{R}} : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2(\mathcal{A})$ qui soit $\mathcal{A}$-linéaire à droite en utilisant la connexion linéaire $(\sigma^{-1}, \widetilde{\nabla})$. Il reste à comprendre la signification de ces deux objets $\mathcal{R}$ et $\widetilde{\mathcal{R}}$ associés à (∇, σ).

8.4.2 Permutation généralisée et involution

On suppose que $\mathcal{A}$ est munie d'une involution. Alors on peut définir une involution sur $\Omega^1(\mathcal{A})$ en posant $(adb)^* = (db^*)a^*$. Nous voudrions définir sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ une involution en utilisant une permutation généralisée. Nous verrons qu'une telle involution est utile pour définir une involution sur les dérivées covariantes.

Pour cela, supposons que l'automorphisme

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) & \to & \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \\ \omega \otimes \eta & \mapsto & \eta^* \otimes \omega^* \end{array}$$

soit bien défini. (Nous verrons dans les exemples que nous traiterons que c'est bien le cas.)

Définition 8.59 *Soit σ une permutation généralisée sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ telle que $(\sigma \circ \alpha)^2 = 1$. On définit une involution sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ en posant $* = \sigma \circ \alpha$.*

Comme pour toute involution, nous avons $** = 1$. Une telle involution est compatible avec l'involution $\omega \wedge \eta \mapsto -\eta^* \wedge \omega^*$ définie sur $\Omega^2(\mathcal{A})$ au sens où $(\omega \wedge \eta)^* = \pi((\omega \otimes \eta)^*)$.

Étant donnée une involution $*$ sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ et une permutation généralisée σ, on dira que σ est réelle pour $*$ si $\sigma \circ * = * \circ \sigma$.

Proposition 8.60 *Soit σ une permutation généralisée telle que $(\sigma \circ \alpha)^2 = 1$. Alors σ est réelle pour $* = \sigma \circ \alpha$ si et seulement si σ est une transposition généralisée.*

Démonstration : La condition de réalité est $\sigma \circ \sigma \circ \alpha = \sigma \circ \alpha \circ \sigma$. Comme σ est inversible, cela donne $\sigma \circ \alpha = \alpha \circ \sigma$. De $(\sigma \circ \alpha)^2 = 1$ et $\alpha^2 = 1$, on a alors $\sigma^2 = 1$. □

Soit maintenant (∇, σ) une connexion linéaire. Soit $*$ une involution sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$. On définit une application $\overline{\nabla} : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ en posant $\overline{\nabla}\omega = (\nabla\omega^*)^*$.

Proposition 8.61 *Il y a équivalence entre les énoncés :*

1. $\overline{\nabla}$ *est une dérivée covariante associée à une certaine permutation généralisée ;*
2. σ *vérifie* $(\sigma \circ \alpha)^2 = 1$ *et* $* = \sigma \circ \alpha$.

Démonstration : La démonstration n'est pas difficile. Elle consiste essentiellement à utiliser les règles de dérivation de ∇ et à identifier les diverses expressions obtenues. □

Si σ est une permutation généralisée vérifiant $(\sigma\circ\alpha)^2 = 1$, alors l'application $\nabla \mapsto \overline{\nabla}$ est une involution sur les dérivées covariantes associées à σ.

DÉFINITION 8.62 *Une connexion linéaire* (∇, σ) *est dite réelle si* σ *définit une involution et* $\overline{\nabla} = \nabla$.

8.4.3 Exemples de connexions linéaires

Dans ce qui suit, nous donnons des exemples de connexions linéaires. Ces exemples sont extraits des articles [107, 86, 94, 95].

L'algèbre des matrices $M(n, \mathbb{C})$

On considère le calcul différentiel $\Omega_{\text{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$ sur l'algèbre des matrices. Soit la permutation généralisée telle que

$$\sigma(\theta^k \otimes \theta^\ell) = \theta^\ell \otimes \theta^k$$

sur $M(n, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{T}^2\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})^* \simeq \Omega^1_{\text{Der}}(M(n, \mathbb{C})) \otimes_{M(n,\mathbb{C})} \Omega^1_{\text{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$. Il ne s'agit pas de la transposition ordinaire puisque cette application est prolongée par linéarité sur $M(n, \mathbb{C})$. Cette permutation généralisée admet des dérivées covariantes en posant

$$\nabla\theta^i = -\omega^i_{k\ell}\theta^k \otimes \theta^\ell$$

puis en la prolongeant à tout $\Omega^1_{\text{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$ en utilisant les règles de dérivations. *A priori*, les $\omega^i_{k\ell}$ sont des éléments de $M(n, \mathbb{C})$. Mais il est facile de voir en utilisant ces mêmes règles et la contrainte $M\theta^i = \theta^i M$, qu'ils doivent être dans le centre de $M(n, \mathbb{C})$. La torsion de cette connexion est nulle si et seulement si $\omega^i_{[k,\ell]} = C^i_{k\ell}$.

Il faut remarquer que ces résultats sont exactement ceux obtenus en utilisant le formalisme des connexions linéaires sur les bimodules centraux (voir l'Exemple 8.41).

Comme nous le verrons plus loin (Remarque 8.70), toute permutation généralisée admet une dérivée covariante, car la différentielle sur les matrices est intérieure.

L'algèbre M_{3+1}

Reprenons le calcul différentiel introduit en 6.4.2 sur l'algèbre M_{3+1}. On résume dans la proposition suivante les résultats obtenus dans [107].

Proposition 8.63 *$\Omega^1_D \otimes_{M_{3+1}} \Omega^1_D$ s'identifie à M_{3+1} en effectuant le produit des matrices. L'ensemble des permutations généralisées est paramétré par $\mu \in \mathbb{C}^*$ en posant dans cette identification*

$$\sigma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sigma \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Cette permutation généralisée vérifie la relation de Hecke

$$(\sigma + 1)(\sigma - \mu) = 0$$

Pour $\mu \neq -1$, Ω^2_D s'identifie au quotient de $\Omega^1_D \otimes_{M_{3+1}} \Omega^1_D$ par le bimodule des valeurs propres de σ de valeur propre μ.

À chaque permutation généralisée σ correspond une unique dérivation covariante définie par

$$\nabla \eta = D \otimes \eta - \sigma(\eta \otimes D)$$

pour tout $\eta \in \Omega^1_D$, où D est l'opérateur de Dirac considéré comme 1-forme.

Il faut retenir de cet exemple deux choses. L'espace des $\sigma + 1$ est ici de dimension 1 (paramètre μ). Le bimodule des 2-formes différentielles est obtenu par quotient (pour $\mu \neq -1$) du bimodule $\Omega^1_D \otimes_{M_{3+1}} \Omega^1_D$ par les vecteurs propres de σ de valeur propre μ. Or, en regardant la relation de Hecke, on peut considérer les éléments des espaces propres de σ pour les valeurs propres différentes de -1 comme les éléments symétriques. L'espace propre de valeur propre -1 est alors l'espace des éléments antisymétriques.

Le plan quantique de dimension 2

Considérons le plan quantique de dimension 2 pour la déformation à 2 paramètres p et q. Nous résumons dans la proposition suivante les résultats que nous avons obtenus dans [86, 95].

Proposition 8.64 *Considérons p et q non racines de l'unité. Alors il n'existe qu'une seule permutation généralisée σ donnée par $\sigma = p^{-1}R^{-1}$, c'est-à-dire*

$$\sigma(\xi^i \otimes \xi^j) = p^{-1}(R^{-1})^{ij}_{k\ell}\xi^k \otimes \xi^\ell$$

σ vérifie la relation de Hecke

$$(\sigma + 1)(\sigma - p^{-1}q^{-1}) = 0$$

L'espace des 2-formes différentielles s'identifie au quotient de bimodules de $\Omega^1 \otimes_{\Omega^0} \Omega^1$ par l'espace propre de σ de valeur propre $p^{-1}q^{-1}$.

Pour $p \neq q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique dérivée covariante associée à σ est donnée par $\nabla\xi^i = 0$.

Pour $p = q^n$ pour un $n \in \mathbb{N}^*$, les dérivations covariantes associées à σ sont de la forme

$$\begin{array}{rcl} \nabla\xi & = & \mu x x^{n-1} y^{n-1} \gamma \otimes \gamma \\ \nabla\eta & = & \mu y x^{n-1} y^{n-1} \gamma \otimes \gamma \end{array}$$

pour $\mu \in \mathbb{C}$ et $\gamma = x\eta - qy\xi$.

Ce résultat montre encore une fois qu'il existe un lien entre la permutation σ et la structure de l'espace des 2-formes différentielles. On peut considérer que les éléments symétriques de $\Omega^1 \otimes_{\Omega^0} \Omega^1$ forment l'espace propre pour σ correspondant aux valeurs propres différentes de -1.

Dans cet exemple particulier, il faut noter la relation que l'on doit imposer entre p et q pour obtenir une famille à 1 paramètre de dérivées covariantes, qui reste pour le moment assez mystérieuse.

Dans le cas où p et q sont racines de l'unité, il y a beaucoup plus de dérivées covariantes associées à la permutation généralisée donnée dans la proposition précédente. Ceci est dû au fait que le centre de l'algèbre augmente considérablement.

Considérons maintenant le plan quantique étendu, c'est-à-dire pour lequel on accepte des puissances négatives de x et y. Considérons le cas $p = q$. Alors la permutation généralisée n'est plus unique, et pour une telle permutation généralisée σ donnée, la dérivée covariante n'est plus unique. En effet, on peut facilement construire d'autres permutations généralisées, par exemple de la forme $\sigma = 1 - 2\iota\circ\pi$ où $\iota : \Omega^2(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ est un homomorphisme de bimodules tel que $\pi \circ \iota = \mathrm{Id}_{\Omega^2(\mathcal{A})}$. De tels ι existent, et sont complètement définis par $\iota(\eta\xi) = P_1\xi \otimes \xi + P_2\xi \otimes \eta + P_3\eta \otimes \xi + P_4\eta \otimes \eta$. Un calcul simple donne les possibilités

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda_1 x^{-1}y^{-1} - qx^{-1}y - (q^2+1)\lambda_2 x^{-1}y + q^4\lambda_3 x^{-1}y^3 \\ P_2 &= \lambda_2 - q^2\lambda_3 y^2 \\ P_3 &= 1 + q^{-1}\lambda_2 - q\lambda_3 y^2 \\ P_4 &= \lambda_3 xy \end{aligned}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des paramètres complexes libres. On remarquera qu'une seule permutation généralisée n'utilise pas de puissances négatives, pour $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ et $\lambda_2 = -\frac{q}{1+q^2}$. Bien sûr, une telle permutation généralisée n'admet pas de dérivée covariante sans utiliser de puissances négatives.

Pour chacune des permutations généralisées σ définies ci-dessus (en réalité transpositions généralisées), il existe des dérivées covariantes. En effet, il existe une famille de 1-formes

$$\theta_\lambda = \frac{q^2}{1-q^2}(y^{-1}\eta + \lambda x y^{-2}\xi)$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}$ telle que $dx = [\theta_\lambda, x]$ et $dy = [\theta_\lambda, y]$. Alors

$$\nabla^\lambda \omega = \theta_\lambda \otimes \omega - \sigma(\omega \otimes \theta_\lambda)$$

est une connexion linéaire.

On remarquera que la différentielle d est un commutateur gradué pour l'unique valeur $\lambda = 0$:

$$d\omega = [\theta_0, \omega]_{\mathrm{gr}}$$

Considérons maintenant le cas $p = q^{-1}$, toujours dans la situation du plan quantique étendu. Comme nous l'avons fait observer, l'algèbre obtenue et son calcul différentiel sont (presque) ceux du tore non commutatif et de son calcul différentiel basé sur les dérivations. Les connexions linéaires définies grâce à $\sigma = qR^{-1}$ de la proposition précédente ont pour dérivées covariantes

$$\begin{aligned} \nabla\xi &= \lambda_1 x^{-1}\xi\otimes\xi + \lambda_2 xy^{-2}\eta\otimes\eta + \lambda_3 y^{-1}\xi\otimes\eta + \lambda_4 y^{-1}\eta\otimes\xi \\ \nabla\eta &= \mu_1 x^{-2}y\xi\otimes\xi + \mu_2 y^{-1}\eta\otimes\eta + \mu_3 x^{-1}\xi\otimes\eta + \mu_4 x^{-1}\eta\otimes\xi \end{aligned}$$

qui dépendent de 8 paramètres $\lambda_1, \ldots, \mu_4$. C'est un exercice facile de montrer que les connexions linéaires introduites dans le formalisme des bimodules centraux sur le tore non commutatif (pour q non racine de l'unité) sont exactement données par ces formules. Dans ce cas, les deux notions coïncident.

Le groupe quantique $GL_q(n, \mathbb{C})$

Dans le cadre des groupes quantiques dont le calcul différentiel est bicovariant, on peut demander à la permutation généralisée d'être bicovariante au sens suivant.

DÉFINITION 8.65 *Une permutation généralisée σ sur un calcul différentiel bicovariant $\Omega_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ est bicovariante si*

$$\begin{aligned}(1 \otimes \sigma)\Delta_L &= \Delta_L \sigma \\ (\sigma \otimes 1)\Delta_R &= \Delta_R \sigma\end{aligned}$$

où Δ_L et Δ_R sont définis sur $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$.

La condition $\pi(\sigma + 1) = 0$ s'écrit dans ce cadre

$$(1 - \Lambda)(\sigma + 1) = 0 \tag{8.2}$$

puisque $\pi = 1 - \Lambda$. Ceci implique que la permutation généralisée est reliée de fait à la structure de $\Omega^2_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ à travers Λ.

La proposition suivante donne les permutations généralisées qui s'écrivent en fonction de la matrice R sous la forme

$$\sigma(dT \otimes dT) = \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \alpha_{ij} R^i dT \otimes dT R^j \tag{8.3}$$

où R^i est la matrice R à la puissance i.

Proposition 8.66 *[94] Les permutations généralisées écrites sous la forme (8.3) sont données sous la forme*

$$\sigma = \mu_1(\sigma_\Lambda + 1) + \mu_2(\sigma_R + 1) - 1$$

pour $\mu_i \in \mathbb{C}$ avec

$$\sigma_\Lambda = 1 - 2\iota \circ \pi$$

et

$$\sigma_R(dT \otimes dT) = R^{-1} dT \otimes dT R^{-1}$$

Ces permutations généralisées sont bicovariantes.

Nous avons vu que pour le groupe quantique $GL_q(n, \mathbb{C})$, Λ vérifie la relation (7.5). En comparant cette relation avec (8.2), on constate qu'un candidat naturel pour σ est $(\Lambda + q^2)(\Lambda + q^{-2})$. À un facteur multiplicatif près, c'est σ_Λ. Le facteur est choisi de telle façon que σ_Λ soit une transposition généralisée.

La permutation généralisée σ_R est obtenue de la même façon par rapport au calcul différentiel que l'est la permutation généralisée sur le plan quantique. Dans la formule de dérivation donnant $\nabla(dT\,T)$, il suffit de poser $\nabla dT = 0$ et d'identifier les termes restants.

Nous avons déjà constaté que les espaces propres associés à une permutation généralisée σ sont importants pour comprendre ce que sont les éléments symétriques. Dans le cas présent, ces espaces propres, pour toutes les permutations généralisées introduites ci-dessus, sont liés aux espaces propres de Λ. Soient les opérateurs

$$P_q = \frac{R+q^{-1}}{q+q^{-1}} \qquad P_{-q^{-1}} = \frac{q-R}{q+q^{-1}}$$

On définit alors les projecteurs orthogonaux

$$\begin{aligned}
\Pi_1(dT\otimes dT) &= P_q dT\otimes dT P_q \\
\Pi_2(dT\otimes dT) &= P_{-q^{-1}} dT\otimes dT P_{-q^{-1}} \\
\Pi_3(dT\otimes dT) &= P_{-q^{-1}} dT\otimes dT P_q \\
\Pi_4(dT\otimes dT) &= P_q dT\otimes dT P_{-q^{-1}}
\end{aligned}$$

agissant dans $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \Pi_1+\Pi_2-q^2\Pi_3-q^{-2}\Pi_4 \\
\sigma &= \lambda_1\Pi_1+\lambda_2\Pi_2-\Pi_3-\Pi_4
\end{aligned}$$

où σ est une des permutations généralisées de la proposition précédente. Il existe bien sûr une relation entre les paramètres μ_i et λ_j.

Les projecteurs Π_i définissent 4 sous-espaces de $\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}\Omega^1_{\mathrm{Bic}}(\mathcal{A})$ qui sont des sous-espaces des espaces propres des permutations généralisées et de Λ.

Nous avons défini sur le groupe quantique $GL_q(n,\mathbb{C})$ une involution lorsque $|q|=1$. Nous avons :

Proposition 8.67 *[94] Soit $|q|=1$. Une permutation généralisée σ définit une involution si et seulement si $|\lambda_1|=|\lambda_2|=1$.*

Nous sommes maintenant à même de considérer les dérivées covariantes associées à ces permutations généralisées. Comme pour les permutations généralisées, on peut définir ce qu'est la bicovariance d'une connexion linéaire.

DÉFINITION 8.68 *Une connexion linéaire* (∇, σ) *sur un calcul différentiel bicovariant est bicovariante si la permutation généralisée est bicovariante et si*

$$\begin{aligned}(1 \otimes \nabla)\Delta_L &= \Delta_L \nabla \\ (\nabla \otimes 1)\Delta_R &= \Delta_R \nabla\end{aligned}$$

Proposition 8.69 *[94] Pour chaque permutation généralisée* σ *définie ci-dessus, il existe une et une seule dérivée covariante associée définie par*

$$\nabla\omega = \theta \otimes \omega - \sigma(\omega \otimes \theta)$$

pour toute 1*-forme* ω. *Ces connexions linéaires sont bicovariantes. Leur torsion est nulle.*

La dérivée covariante associée à la permutation généralisée σ_R est caractérisée par $\nabla dT^i_j = 0$.

La connexion linéaire associée à la permutation généralisée σ_Λ admet une limite lorsque $q \to 1$. La connexion linéaire limite sur $GL(n, \mathbb{C})$ est donnée par

$$\nabla\theta^k = -\frac{1}{2} C^k_{ij} \theta^i \otimes \theta^j$$

où les θ^k sont les 1-formes invariantes à gauche sur le groupe et C^k_{ij} sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie correspondante.

REMARQUE 8.70 Dans les divers exemples que nous venons de donner, une connexion linéaire revient souvent, définie pour un calcul différentiel qui admet une 1-forme différentielle θ telle que $da = [\theta, a]$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. On ne suppose pas que la différentielle soit intérieure, c'est-à-dire $d\omega = [\theta, \omega]_{\mathrm{gr}}$. Pour toute permutation généralisée σ, la dérivée covariante de cette connexion linéaire est définie par

$$\nabla\omega = \theta \otimes \omega - \sigma(\omega \otimes \theta)$$

Il faut comparer cette connexion d'origine purement non commutative à la connexion $\nabla_{ad(a)} m = am - ma$ définie dans l'Exemple 8.35. Par exemple, dans le cas de l'algèbre $M(n, \mathbb{C})$, ces deux connexions linéaires coïncident (pour le bimodule central des 1-formes différentielles basé sur les dérivations).

8.5 Opérateurs différentiels du premier ordre

Nous voudrions montrer que la définition précédente des connexions linéaires s'inscrit dans le cadre plus général des opérateurs différentiels du premier ordre. Cette notion d'opérateur différentiel du premier ordre a été introduite par A. CONNES [12]. Nous avons étudié cette structure dans [89], en particulier en faisant le lien avec la définition précédente des connexions linéaires.

8.5.1 Définition, exemples

Pour $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux algèbres unifères, on peut définir la notion d'opérateur différentiel du premier ordre entre deux $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ de la façon suivante :

DÉFINITION 8.71 *Une application linéaire $D : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ où $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont des $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodules est un opérateur différentiel du premier ordre si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

1. *pour tout $a \in \mathcal{A}$, $m \mapsto D(am) - aD(m)$ est un homomorphisme de $\mathcal{B}$-modules (à droite) ;*
2. *pour tout $b \in \mathcal{B}$, $m \mapsto D(mb) - D(m)b$ est un homomorphisme de $\mathcal{A}$-modules (à gauche).*

Ces conditions s'écrivent encore

$$[[D, R_b], L_a] = 0$$

pour $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ et R_b la multiplication à droite par b et L_a la multiplication à gauche par a.

On note $\mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ l'ensemble des applications linéaires de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$ et $\mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subset \mathcal{L}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ le sous-espace des opérateurs différentiels du premier ordre.

EXEMPLE 8.72 Si $\mathcal{A} = C^\infty(V)$ pour une variété différentiable V et si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont les espaces de sections C^∞ de fibrés vectoriels sur V, alors $\mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est l'espace des opérateurs différentiels ordinaires du premier ordre de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{N}$. ♢

EXEMPLE 8.73 Dans le cas général, on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subset \mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et de même $\mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \subset \mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. En particulier, tout homomorphisme de bimodules $D \in \mathrm{Hom}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. ♢

EXEMPLE 8.74 Soit $D : \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ une connexion linéaire et σ sa permutation généralisée. Alors D est un opérateur différentiel du premier ordre pour les $\mathcal{A}$-bimodules $\Omega^1(\mathcal{A})$ et $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$. ♢

Nous pouvons généraliser cette exemple de la façon suivante :

Exemple 8.75 Soit $\Omega^1(\mathcal{A})$ un $\mathcal{A}$-bimodule et $d_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ une dérivation. De même, soit $\Omega^1(\mathcal{B})$ un $\mathcal{B}$-bimodule et $d_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \Omega^1(\mathcal{B})$ une dérivation. Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules et $D \in \mathcal{L}(\mathcal{M},\mathcal{N})$. S'il existe un homomorphisme de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules

$$\sigma_L : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

tel que

$$D(am) = aD(m) + \sigma_L(d_{\mathcal{A}}a \otimes m)$$

pour tout $m \in \mathcal{M}$ et tout $a \in \mathcal{A}$, alors D est un opérateur différentiel du premier ordre.

De même, s'il existe un homomorphisme de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules

$$\sigma_R : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}$$

tel que

$$D(mb) = D(m)b + \sigma_R(m \otimes d_{\mathcal{B}}b)$$

pour tout $m \in \mathcal{M}$ et tout $b \in \mathcal{B}$, alors $D \in \mathcal{L}_1(\mathcal{M},\mathcal{N})$.

On retrouve l'exemple précédent pour $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mathcal{M} = \Omega^1(\mathcal{A})$ et $\mathcal{N} = \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$. $\diamondsuit$

Exemple 8.76 Il est facile de trouver la structure de $\mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N})$ pour $\mathcal{N}$ un $\mathcal{A}$-bimodule. Pour $D \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N})$, on a en effet

$$D(ab) = D(a)b + aD(b) - aD(\mathbb{1})b$$

pour tout $a, b \in \mathcal{A}$. L'espace des dérivations de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{N}$, $\operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N})$ est donc inclus dans $\mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N})$, et peut être caractérisé de la façon suivante :

$$\operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N}) = \{D \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N}) \ / \ D(\mathbb{1}) = 0\}$$

Maintenant, pour tout $D \in \mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N})$, l'application

$$p_R(D) : \mathcal{A} \ni a \mapsto D(a) - D(\mathbb{1})a \in \mathcal{N}$$

est dans $\operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N})$. De même pour $p_L(D) : a \mapsto D(a) - aD(\mathbb{1})$. Il est facile de voir que p_R et p_L sont des projections $\mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N}) \to \operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N})$. Ceci conduit à la décomposition

$$\mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N}) = \operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N}) \oplus \mathcal{N}$$

et on a les suites exactes courtes

$$0 \to \operatorname{Hom}^{\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N}) \stackrel{p_R}{\to} \operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N}) \to 0$$
$$0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{N}) \hookrightarrow \mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{N}) \stackrel{p_L}{\to} \operatorname{Der}(\mathcal{A},\mathcal{N}) \to 0$$

Dans le cas $\mathcal{N} = \mathcal{A}$, $\mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{A})$ est une algèbre de Lie pour le crochet $[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$ et la décomposition $\mathcal{L}_1(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \operatorname{Der}(\mathcal{A}) \oplus \mathcal{A}$ est une somme directe d'algèbres de Lie. $\diamondsuit$

8.5.2 Théorème de structure

Théorème 8.77 *[89]*

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules, et $D \in \mathcal{L}_1(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Alors il existe un unique homomorphisme de bimodules

$$\sigma_L(D) : \Omega^1_U(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \mathcal{N}$$

et un unique homomorphisme de bimodules

$$\sigma_R(D) : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega^1_U(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}$$

tels que

$$D(amb) = aD(m)b + \sigma_L(D)(d_U a \otimes m)b + a\sigma_R(D)(m \otimes d_U b)$$

pour tout $m \in \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{B}$.

Nous renvoyons à [89] pour la démonstration.

Ce théorème montre donc que tous les opérateurs différentiels du premier ordre sont du type de l'Exemple 8.75 pour un bon choix de $\Omega^1(\mathcal{A})$ et $\Omega^1(\mathcal{B})$.

Les homomorphismes $\sigma_L(D)$ et $\sigma_R(D)$ sont dans ce contexte la généralisation du symbole de D, pour le calcul différentiel universel. On les appellera les symboles universels à gauche et à droite de D. Ces symboles universels peuvent parfois se factoriser sous la forme

$$\sigma_L(D) = \sigma_L \circ (i_{d_{\mathcal{A}}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{M}})$$

et

$$\sigma_R(D) = \sigma_R \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \otimes i_{d_{\mathcal{B}}})$$

où $i_{d_{\mathcal{A}}} : \Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A})$ est l'homomorphisme universel de $\mathcal{A}$-bimodules associé à la dérivation $d_{\mathcal{A}}$ (de même pour $i_{d_{\mathcal{B}}}$) pour $(\Omega^1(\mathcal{A}), d_{\mathcal{A}})$ comme dans l'Exemple 8.75. Dans ce cas, les homomorphismes de $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-bimodules $\sigma_L : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ et $\sigma_R : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{B}} \Omega^1(\mathcal{B}) \to \mathcal{N}$ sont les symboles de D pour les dérivations $d_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ et $d_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \to \Omega^1(\mathcal{B})$.

8.5.3 K-cycles et réalité

Soit $(\mathcal{H}, D)$ un K-cycle pair sur une algèbre associative involutive $\mathcal{A}$. Dans sa dernière version du modèle standard, A. Connes introduit la notion suivante [73]:

Définition 8.78 *Une structure réelle sur le K-cycle $(\mathcal{H}, D)$ est la donnée d'un opérateur J sur $\mathcal{H}$, antilinéaire, isométrique tel que $[D, J] = 0$, $J^2 = \epsilon$ et $J\gamma = \epsilon'\gamma J$ avec $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$ selon la classe de K-homologie réelle de $(\mathcal{H}, D)$ (Remarque 6.17) et $[a, JbJ^*] = 0$ et $[[D, a], JbJ^*] = 0$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$.*

On remarquera que l'opérateur J donné par le théorème de Tomita dans le cadre des algèbres de von Neumann est un bon candidat pour ce type d'opérateur.

Grâce à cet opérateur J, $\mathcal{H}$ devient un bimodule sur $\mathcal{A}$ en posant $a\psi b = aJb^*J^*\psi$ pour tout $a, b \in \mathcal{A}$ et tout $\psi \in \mathcal{H}$. Il est alors immédiat que D est un opérateur différentiel du premier ordre sur ce bimodule. Il est important de noter que sans cette structure de bimodule induite par J, il est impossible de regarder D comme un opérateur différentiel du premier ordre.

Proposition 8.79 *Les symboles universels à droite et à gauche de D se factorisent en des symboles pour la dérivation $d : \mathcal{A} \to \Omega^1_D(\mathcal{A})$.*

Démonstration : Un calcul simple donne

$$D(a\psi b) = [D, a]\psi + aJ[D, b^*]J^*\psi + a(D\psi)b$$

d'où

$$\begin{aligned} \sigma_L(D)(d_U a \otimes \psi) &= [D, a]\psi = \pi(d_U a)\psi \\ \sigma_R(D)(\psi \otimes d_U b) &= J[D, b^*]J^*\psi = J\pi(d_U b^*)J^*\psi \end{aligned}$$

où $\pi : \Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ est la représentation de la Proposition 6.9. Il est évident, sur cette écriture, que les symboles universels de D s'annulent sur $\operatorname{Ker} \pi$, donc passent au quotient $\Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \Omega^1_D(\mathcal{A})$. □

Cette proposition permet de mieux comprendre la définition des formes différentielles associées à un K-cycle en présence d'une structure réelle J.

8.6 Connexions de bimodules

8.6.1 Définition

Soit $(\Omega(\mathcal{A}), d)$ un calcul différentiel sur $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{M}$ un bimodule sur $\mathcal{A}$ et ∇ une connexion à gauche sur $\mathcal{M}$ pour le calcul différentiel $\Omega(\mathcal{A})$. On a donc

$$\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

avec $\nabla(am) = da \otimes m + a\nabla(m)$ pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathcal{M}$. On sait alors que ∇ est un opérateur différentiel du premier ordre de $\mathcal{M}$ dans

$\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$. Il existe donc un homomorphisme de bimodules

$$\sigma_R(\nabla) : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1_U(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

tel que

$$\nabla(ma) = \nabla(m)a + \sigma_R(\nabla)(m \otimes d_U a)$$

pour tout $a \in \mathcal{A}$ et tout $m \in \mathcal{M}$.

Si l'homomorphisme $\sigma_R(\nabla)$ se factorise en $\sigma_R(\nabla) = \sigma_R \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{M}} \otimes i_d)$ où $\sigma_R : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ est un homomorphisme de bimodules, alors ∇ est une connexion sur le bimodule $\mathcal{M}$ pour le calcul différentiel $\Omega(\mathcal{A})$. Ceci nous conduit à proposer la définition suivante :

Définition 8.80 *Une connexion de bimodule sur le $\mathcal{A}$-bimodule $\mathcal{M}$ pour le calcul différentiel $(\Omega(\mathcal{A}), d)$ est un couple (∇, σ) formé d'un homomorphisme de bimodules*

$$\sigma : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

et d'une application linéaire

$$\nabla : \mathcal{M} \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

vérifiant

$$\nabla(amb) = da \otimes mb + a(\nabla m)b + a\sigma(m \otimes db)$$

De ce qui vient d'être vu, l'obstruction pour une connexion de module à gauche sur $\mathcal{M}$ à donner une connexion de bimodule est que son symbole universel à droite $\sigma_R(\nabla)$ se factorise à travers un symbole à droite σ comme ci-dessus.

Dans le cas particulier où $\mathcal{M} = \Omega^1(\mathcal{A})$, on retrouve la notion de connexion linéaire, à ceci près que l'on doit encore prendre en compte la condition supplémentaire $\pi \circ (\sigma + 1) = 0$ sur σ.

Proposition 8.81 *Soit (∇, σ) une connexion de bimodule sur $\mathcal{M}$ et (∇', σ') une connexion de bimodule sur $\mathcal{M}'$ pour un même calcul différentiel $(\Omega^1(\mathcal{A}), d)$ sur $\mathcal{A}$. Alors*

$$\nabla^{\otimes} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}' \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}'$$

définie par

$$\nabla^{\otimes}(m \otimes m') = (\nabla m) \otimes m' + \sigma_{12}(m \otimes \nabla' m')$$

est la dérivée covariante d'une connexion de bimodule sur $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}'$ pour l'homomorphisme

$$\sigma^{\otimes} : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}' \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}'$$

défini par $\sigma^{\otimes} = \sigma_{12}\sigma'_{23}$.

Démonstration : C'est une vérification sans difficulté. □

Ceci généralise bien sûr la Définition 8.53.

Des considérations analogues sur les connexions de bimodule ont été récemment développées dans [68]. Il y est montré que si l'on souhaite une notion de connexion de bimodule qui se prolonge sur les produits tensoriels de bimodules comme dans la proposition précédente, alors il faut prendre la définition ci-dessus.

8.6.2 Structure de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$-module

Dans ce qui suit, nous reprenons des considérations développées dans [87].

On sait que tout bimodule $\mathcal{M}$ sur $\mathcal{A}$ est un module à gauche pour l'algèbre $\mathcal{A}^e = \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}$. Cette remarque nous conduit à considérer des connexions sur $\mathcal{M}$ pour cette structure de module à gauche, et à faire le lien avec les connexions de bimodules précédemment définies. Pour cela, il faut se donner un calcul différentiel sur $\mathcal{A}^e$ qui nous permette de faire ce lien. Soit $(\Omega(\mathcal{A}), d)$ un calcul différentiel sur $\mathcal{A}$. On considère alors le calcul différentiel $(\Omega(\mathcal{A})^{\text{op}}, d^{\text{op}})$ sur $\mathcal{A}^{\text{op}}$ défini de la façon suivante. En tant qu'espace vectoriel gradué, $\Omega(\mathcal{A})^{\text{op}}$ est $\Omega(\mathcal{A})$ lui-même. Le produit y est donné par

$$\omega \cdot \eta = (-1)^{|\omega||\eta|} \eta\omega$$

où $\omega \cdot \eta$ est le produit dans $\Omega(\mathcal{A})^{\text{op}}$ et $\omega\eta$ est le produit dans $\Omega(\mathcal{A})$. La différentielle d^{op} coïncide avec d. En particulier, nous avons $\Omega^0(\mathcal{A})^{\text{op}} = \mathcal{A}^{\text{op}}$. Ceci nous permet de définir un calcul différentiel $(\Omega(\mathcal{A})^e, d^e)$ naturel sur $\mathcal{A}^e$ en posant

$$(\Omega(\mathcal{A})^e, d^e) = (\Omega(\mathcal{A}) \otimes \Omega(\mathcal{A})^{\text{op}}, d \otimes d^{\text{op}})$$

qui est le produit tensoriel d'algèbres différentielles graduées. En particulier, $\Omega^0(\mathcal{A})^e = \mathcal{A}^e$. $\Omega(\mathcal{A})^e$ admet une structure de bimodule sur $\mathcal{A}^e$:

$$\begin{aligned}
(a \otimes b)(\omega \otimes \eta) &= a\omega \otimes b \cdot \eta = a\omega \otimes \eta b \\
(\omega \otimes \eta)(a \otimes b) &= \omega a \otimes \eta \cdot b = \omega a \otimes b\eta
\end{aligned}$$

Remarquons que $\Omega_U(\mathcal{A})^e$ n'est pas le calcul différentiel universel sur $\mathcal{A}^e$.

Lemme 8.82 *[87] Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-bimodule (considéré comme $\mathcal{A}^e$-module à gauche). Alors on a la décomposition de $\mathcal{A}$-bimodules*

$$\Omega^1(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M} = \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$$

Démonstration : On a $\Omega^1(\mathcal{A})^e = \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}^{\text{op}} \oplus \mathcal{A} \otimes \Omega^1(\mathcal{A})^{\text{op}}$. Donc

$$\Omega^1(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M} = (\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}) \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M} \oplus (\mathcal{A} \otimes \Omega^1(\mathcal{A})^{\text{op}}) \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M}$$

Or, compte-tenu de la structure de $\mathcal{A}^e$-bimodule sur $\Omega(\mathcal{A})^e$, on a

$$(\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}^{\text{op}}) \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M} = \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{M}$$

et

$$(\mathcal{A} \otimes \Omega^1(\mathcal{A})^{\text{op}}) \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M} = \Omega^1(\mathcal{A})^{\text{op}} \otimes_{\mathcal{A}^{\text{op}}} \mathcal{M}$$

où la structure de $\mathcal{A}^{\text{op}}$-module à gauche (resp. à droite) est la structure de $\mathcal{A}$-module à droite (resp. à gauche). Donc $\Omega^1(\mathcal{A})^{\text{op}} \otimes_{\mathcal{A}^{\text{op}}} \mathcal{M} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$.
□

Soit maintenant

$$\nabla^e : \mathcal{M} \to \Omega(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M}$$

une connexion de $\mathcal{A}^e$-module à gauche. Par le lemme précédent, on a une décomposition de ∇^e en $\nabla^e = \nabla_L \oplus \nabla_R$ où

$$\begin{aligned} \nabla_L : \mathcal{M} &\to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \\ \nabla_R : \mathcal{M} &\to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que ∇_L vérifie la règle de dérivation à gauche $\nabla_L(am) = da \otimes m + a(\nabla_L m)$ et est $\mathcal{A}$-linéaire à droite, alors que ∇_R vérifie la règle de dérivation à droite et est $\mathcal{A}$-linéaire à gauche.

Réciproquement, tout couple (∇_L, ∇_R) d'applications linéaires comme ci-dessus définit une connexion sur le $\mathcal{A}^e$-module à gauche $\mathcal{M}$. De tels couples (∇_L, ∇_R) ont été considérés dans la littérature par [78] pour le calcul différentiel universel, et [68]. Dans [79], il est proposé une variante de ces considérations, utilisant le centre du bimodule $\mathcal{M}$.

Lemme 8.83 *Soit (∇_L, ∇_R) la décomposition d'une connexion de $\mathcal{A}^e$-module, et soit $\sigma : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ un homomorphisme de bimodules. Alors*

$$\nabla = \nabla_L + \sigma \circ \nabla_R : \mathcal{M} \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$$

est une connexion de bimodule pour le calcul différentiel $(\Omega(\mathcal{A}), d)$.

Démonstration : C'est une vérification immédiate. □

Moyennant l'existence d'au moins un homomorphisme σ, la notion de connexion de $\mathcal{A}^e$-module à gauche sur $\mathcal{M}$ est donc plus restrictive que la notion de connexion de bimodule. De plus, il ne semble pas exister de formule de prolongement d'une connexion de $\mathcal{A}^e$-module à un produit tensoriel sur $\mathcal{A}$ de bimodules.

Dans ce qui suit, nous donnons des exemples de telles connexions de $\mathcal{A}^e$-modules dans des cas particuliers.

EXEMPLE 8.84 Soit $(\Omega(\mathcal{A}), d)$ un calcul différentiel sur $\mathcal{A}$ tel que $d : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ soit intérieure, avec $da = [\theta, a]$ pour un $\theta \in \Omega^1(\mathcal{A})$. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}$-bimodule. Alors $\nabla^0_L m = \theta \otimes m$ et $\nabla^0_R m = -m \otimes \theta$, pour tout $m \in \mathcal{M}$, définissent une connexion de $\mathcal{A}^e$-module sur $\mathcal{M}$. Il est facile de voir que toute autre telle connexion se décompose en $(\nabla^0_L + \tau_L, \nabla^0_R + \tau_R)$ où τ_L et τ_R sont des homomorphismes de bimodules $\mathcal{M} \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ respectivement. ♢

EXEMPLE 8.85 Considérons le bimodule $\mathcal{M} = \mathcal{A}^e$. Alors $d^e : \mathcal{A}^e \to \Omega^1(\mathcal{A})^e = \Omega^1(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{A}^e$ est une connexion de $\mathcal{A}^e$-module à gauche. Si $d : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ est intérieure, alors la décomposition de $d^e = d_L + d_R$ en partie gauche et droite s'écrit, dans l'identification $\Omega^1(\mathcal{A})^e = \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes \mathcal{A}^{\text{op}} \oplus \mathcal{A} \otimes \Omega^1(\mathcal{A})^{\text{op}}$,

$$\begin{aligned} d_L(a \otimes b) &= [\theta, a] \otimes b \\ d_R(a \otimes b) &= a \otimes [\theta, b] \end{aligned}$$

Il peut arriver, comme nous le verrons plus loin, que $\Omega^1(\mathcal{A})$ soit un $\mathcal{A}^e$-module projectif. Dans les exemples que nous rencontrerons, $\Omega^1(\mathcal{A})$ admet un complémentaire dans $\mathcal{A}^e$ lui-même. Dans ce cas, il existe un projecteur $p \in \mathcal{A}^e$ tel que $\Omega^1(\mathcal{A}) = \mathcal{A}^e p$. La restriction de d^e à $\Omega^1(\mathcal{A})$, composée avec la projection $\Omega^1(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{A}^e \to \Omega^1(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} (\mathcal{A}^e p)$ fournit une connexion ∇^e de $\mathcal{A}^e$-module sur $\Omega^1(\mathcal{A})$. Il est facile de voir que si $d : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ est intérieure, alors nous avons, pour $\alpha = (a \otimes b)p = apb \in \Omega^1(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^e$,

$$\begin{aligned} \nabla_L \alpha &= \theta \otimes_{\mathcal{A}} \alpha - \alpha(\theta \otimes_{\mathcal{A}} p) \\ \nabla_R \alpha &= -\alpha \otimes_{\mathcal{A}} \theta + \alpha(p \otimes_{\mathcal{A}} \theta) \end{aligned}$$

où $\alpha(\theta \otimes_{\mathcal{A}} p)$ et $\alpha(p \otimes_{\mathcal{A}} \theta)$ est le produit de $\mathcal{A}^e$-module sur $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A}^e p)$ et sur $(\mathcal{A}^e p) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$, avec α considéré comme élément de $\mathcal{A}^e$.

Dans ce cas, on a donc $\nabla_L = \nabla^0_L + \tau_L$ et $\nabla_R = \nabla^0_R + \tau_R$ avec

$$\begin{aligned} \tau_L(\alpha) &= -\alpha(\theta \otimes_{\mathcal{A}} p) \\ \tau_R(\alpha) &= \alpha(p \otimes_{\mathcal{A}} \theta) \end{aligned}$$

♢

Exemple 8.86 Reprenons l'exemple de l'algèbre M_{2+1}, munie du calcul différentiel basé sur un opérateur de Dirac D. Nous nous intéressons au bimodule $\mathcal{M} = \Omega^1_D$. Ce bimodule est un sous-bimodule de $M_{2+1} \otimes M_{2+1} = M^e_{2+1}$ pour l'injection qui à toute 1-forme $\xi \in \Omega^1_D$ écrite sous la forme

$$\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_{13} \\ 0 & 0 & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

associe

$$\begin{pmatrix} 0 & \xi_{13} & 0 \\ 0 & \xi_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \xi_{31} & \xi_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2+1} \otimes M_{2+1}$$

Le projecteur vaut

$$p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2+1} \otimes M_{2+1}$$

et permet d'identifier Ω^1_D à $M_{2+1} p M_{2+1}$. La construction de l'Exemple 8.85 fournit une connexion de $\mathcal{A}^e$-module sur Ω^1_D. Il est facile de montrer ici que $p(\theta \otimes_{M_{2+1}} p)$ et $p(p \otimes_{M_{2+1}} \theta)$ sont nuls. Dans ce cas, pour toute permutation généralisée σ, cette connexion fournit la connexion de bimodule (connexion linéaire) $\nabla\alpha = D \otimes \alpha - \sigma(\alpha \otimes D)$. C'est le seul type de connexion linéaire qui existe sur ce calcul différentiel (Proposition 8.63). $\diamondsuit$

Exemple 8.87 Considérons enfin dans le même esprit le calcul différentiel basé sur les dérivations sur l'algèbre $M(n, \mathbb{C})$. Nous avons vu (Remarque 5.20) que $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(M(n, \mathbb{C}))$ admet un bimodule complémentaire dans $M(n, \mathbb{C})^e$ sous la forme $M(n, \mathbb{C})e = M(n, \mathbb{C})eM(n, \mathbb{C})$. La construction de L'Exemple 8.85 s'applique donc ici encore, et fournit, pour toute permutation généralisée σ une connexion linéaire. $\diamondsuit$

Conclusions et perspectives

"Rien de ce qui est fini n'est complètement achevé tant que tout ce qui est entrepris n'est pas totalement terminé."

Pierre Dac

Cette thèse constitue un survol d'une partie de la géométrie non commutative et des nouvelles directions de recherche vers lesquelles elle peut évoluer. Dans ce qui suit, je voudrais considérer quelques-unes des perspectives qui se présentent dans ce contexte.

Comme je l'ai fait remarquer dans l'introduction, et comme nous avons pu le constater dans les chapitres précédents, il existe plusieurs généralisations non commutatives du complexe de de Rham. Il est utile, dans l'espoir de réaliser une éventuelle synthèse de ces constructions, de regarder les liens possibles entre ces approches. Pour l'instant, à ma connaissance, peu de travaux ont été consacrés à ces considérations. Dans ce qui suit, je voudrais montrer que de tels liens semblent exister, au moins dans des situations favorables.

Nous avons déjà rencontré un exemple de calcul différentiel qui pouvait être construit en utilisant deux approches différentes (à part bien sûr le cas commutatif, où toutes les approches doivent donner le complexe de de Rham). Au Chapitre 6, nous avons constaté que le calcul différentiel $\Omega_{\mathrm{Der}}(M(n,\mathbb{C}))$, construit à partir des dérivations, pouvait aussi être obtenu à l'aide d'un opérateur de Dirac. Dans [101], nous exposons une méthode similaire pour ce même calcul différentiel, utilisant un autre opérateur de Dirac. Cet exemple constitue donc un pont entre ces deux approches. Il faut remarquer que toute dérivation X d'une algèbre associative $\mathcal{A}$ peut être vue comme une dérivation intérieure dans une algèbre plus grande $\mathcal{B}$ contenant $\mathcal{A}$. Il suffit de construire $\mathcal{B}$ en ajoutant à $\mathcal{A}$ un générateur b_X avec les relations $[b_X, a] = Xa$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. C'est ce type de construction qui permet dans les deux exemples cités ci-dessus, de considérer la différentielle d sur les formes différentielles comme une dérivation (graduée) intérieure.

Je voudrais maintenant établir un lien entre le calcul différentiel introduit sur le plan quantique et les dérivations. Pour cela, considérons l'algèbre $\mathcal{A}_q$ du plan quantique (définie en 7.3.3, avec ici $p = q$) comme une algèbre "commutative" dans une catégorie tressée. En effet, pour l'application tresse

$$\mathcal{R} : \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q$$

engendrée par $x^i \otimes x^j \mapsto q^{-1} R^{ij}_{k\ell} x^k \otimes x^\ell$, nous avons $\mu \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$ où $\mu : \mathcal{A}_q \otimes \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_q$ est le produit de l'algèbre. Ceci remplace la commutativité habituelle $\mu \circ \tau = \mu$ pour τ la transposition $a \otimes b \mapsto b \otimes a$. Nous dirons que $\mathcal{A}_q$ est "tressée commutative". Dans ce cadre des catégories tressées, on peut considérer les dérivations tressées de $\mathcal{A}_q$. On note $\mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)$ l'espace vectoriel de ces dérivations tressées. Ce sont des applications linéaires $X : \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_q$ vérifiant une relation du type

$$X(ab) = X(a)b + a'(X'b)$$

où $X \otimes a \mapsto a' \otimes X'$ est l'application tresse $\mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q) \otimes \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_q \otimes \mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)$.

Prenons par exemple l'application $\partial_i : \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_q$ telle que $\partial_i(x^k) = \delta^k_i$. Il est possible de prolonger cette application à l'algèbre $\mathcal{A}_q$ tout entière en utilisant la relation de Leibniz tressée ci-dessus pour l'application tresse $\partial_i \otimes x^k \mapsto q R^{kj}_{i\ell} x^\ell \otimes \partial_j$. Il est alors facile de voir que l'on a la relation

$$\partial_i(x^k x^\ell) = \delta^k_i x^\ell + q R^{k\ell}_{ij} x^j$$

et que ∂_i est compatible avec les relations de l'algèbre. Ce type de dérivation utilisant une règle de Leibniz modifiée a été considéré depuis longtemps [121].

En géométrie différentielle ordinaire, nous savons que les dérivations forment un module sur l'algèbre (commutative) des fonctions. Ici, il est facile de vérifier que c'est aussi le cas, c'est-à-dire que $\mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)$ est un module sur l'algèbre tressée commutative $\mathcal{A}_q$ pour la structure $(x^v X)(a) = x^v(Xa)$ et pour l'application tresse prolongée sur les $x^{v_1} \dots x^{v_n} \partial_i$ en posant $x^v \otimes x^k \mapsto q^{-1} R^{vk}_{\ell u} x^\ell \otimes x^u$.

Soit maintenant $(\Omega_U(\mathcal{A}_q), d_U)$ le calcul différentiel universel de $\mathcal{A}_q$. Pour toute dérivation $X \in \mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)$, on définit l'application $i_X : \Omega^1_U(\mathcal{A}_q) \to \mathcal{A}_q$ en posant $i_X(a\alpha) = a'(i_{X'}\alpha)$, $i_{aX}\alpha = a i_X \alpha$ et $i_{\partial_i}(d_U x^k) = \delta^k_i$, où $X \otimes a \mapsto a' \otimes X'$ est l'application tresse sur $\mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q) \otimes \mathcal{A}_q$ comme ci-dessus. Il est facile de voir que ces règles sont compatibles entre elles et définissent complètement i_X.

On peut alors facilement montrer que

$$\bigcap_{X \in \mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)} \mathrm{Ker}\, i_X$$

est le sous-bimodule de $\Omega^1_U(\mathcal{A}_q)$ engendré par les $x^i d_U x^j - qR^{ij}_{k\ell}(d_U x^k)x^\ell$. On peut définir $\Omega^1_{\mathrm{TDer}}(\mathcal{A}_q)$ comme le quotient de $\Omega^1_U(\mathcal{A}_q)$ par ce bimodule, et poser $d : \mathcal{A}_q \to \Omega^1_{\mathrm{TDer}}(\mathcal{A}_q)$ la dérivation induite par d_U. On constate alors que $(\Omega^1_{\mathrm{TDer}}(\mathcal{A}_q), d)$ est exactement l'espace des 1-formes différentielles introduites sur le plan quantique. Remarquons que $\Omega^1_{\mathrm{TDer}}(\mathcal{A}_q)$ peut être considéré comme un $\mathcal{A}_q$-module dans la catégorie tressée, car il existe une application tresse $\Omega^1_{\mathrm{TDer}}(\mathcal{A}_q) \otimes \mathcal{A}_q \to \mathcal{A}_q \otimes \Omega^1_{\mathrm{TDer}}(\mathcal{A}_q)$, $\alpha \otimes a \mapsto a' \otimes \alpha'$, telle que $\alpha a = a'\alpha'$.

Cette situation est presque l'équivalent tressé de la Proposition 5.6 qui permet de définir $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ comme quotient de $\Omega_U(\mathcal{A})$. Cependant, il faut noter que dans la situation ci-dessus, il manque une structure d'algèbre de Lie tressée à $\mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)$ et la notion d'opération de Cartan correspondante. Il existe bien un crochet sur $\mathrm{TDer}(\mathcal{A}_q)$, mais pour le moment nous n'avons pas d'identité de Jacobi.

Cet exemple montre qu'il existe peut-être une généralisation de la construction du Chapitre 5 dans le cadre “tressé commutatif”.

Je voudrais maintenant revenir sur certains problèmes liés à la définition des connexions de bimodule du Chapitre 8.

La courbure constitue pour l'instant un des problèmes les plus intrigants dans ce contexte. En effet, partant d'un $\mathcal{A}$-bimodule $\mathcal{M}$ et d'une connexion de bimodule (∇, σ), avec $\sigma : \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$, nous pouvons introduire une application $\nabla^2 : \mathcal{M} \to \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ en prolongeant ∇ par la relation habituelle en une application $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \to \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$. ∇^2 est un homomorphisme de module à gauche, mais ne semble pas avoir de bonnes propriétés à droite. La structure de module à droite est bien sûr prise en compte (voir Remarque 8.58 dans le cas des connexions linéaires).

Plusieurs propositions ont été faites récemment dans [87] pour extraire d'une connexion de bimodule un homomorphisme de bimodules.

La première idée consiste à quotienter l'espace d'arrivée par un sous-bimodule. En effet, avec les notations ci-dessus, on remarque que le sous-espace J de $\Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}$ engendré par les expressions $\nabla^2(ma) - (\nabla^2 m)a$ pour $m \in \mathcal{M}$ et $a \in \mathcal{A}$, est un sous-bimodule. On a alors une projection de bimodules

$$\Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \xrightarrow{p} \big(\Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}\big) / J$$

On peut définir une “courbure” $\mathcal{R}$ en posant $\mathcal{R} = p \circ \nabla^2$. Par construction, c'est un homomorphisme de bimodules. Dans le cas commutatif, cette définition coïncide avec la courbure habituelle.

Malheureusement, cette façon de procéder semble éliminer trop d'informations sur ∇^2. Par exemple, dans le cas de l'algèbre M_{2+1} munie de son calcul différentiel basé sur un opérateur de Dirac D, la construction de $\mathcal{R}$ ci-dessus pour les connexions linéaires de la Proposition 8.63 donne 0 [87].

Par contre, dans le cas des connexions linéaires (pour σ défini en 8.4.3) sur l'algèbre $M(n,\mathbb{C})$ munie de son calcul différentiel basé sur les dérivations, J est réduit à $\{0\}$.

Dans le cas de l'algèbre du plan quantique, cette approche n'est pas du tout adaptée. Nous pensons qu'il faut reconsidérer la courbure, et plus généralement les connexions, en termes d'objets tressés, comme nous avons tenté de le faire ci-dessus.

Une autre proposition a été faite dans [87] pour résoudre ce problème de la courbure, valable seulement pour les connexions de bimodule obtenues comme dans le Lemme 8.83. Dans ce cas, on a $\nabla = \nabla_L + \sigma \circ \nabla_R$, et il est possible de considérer

$$(\nabla_L + \nabla_R)^2 : \mathcal{M} \to \Omega^2(\mathcal{A})^e \otimes_{\mathcal{A}^e} \mathcal{M}$$

qui se décompose en trois homomorphismes de bimodules que nous écrivons symboliquement sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla_L^2 : \mathcal{M} &\to \Omega^2(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \\ \nabla_R^2 : \mathcal{M} &\to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^2(\mathcal{A}) \\ (\nabla_L \otimes \mathrm{Id})\nabla_R - (\mathrm{Id} \otimes \nabla_R)\nabla_L : \mathcal{M} &\to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \end{aligned}$$

Chacun de ces trois homomorphismes de bimodules donne une information sur la courbure de ∇.

Dans le cas particulier où $d : \mathcal{A} \to \Omega^1(\mathcal{A})$ est intérieure, $da = [\theta, a]$, et où $\nabla_L m = \theta \otimes m$ et $\nabla_R m = -m \otimes \theta$, on a

$$\begin{aligned} \nabla_L^2 m &= (d\theta - \theta^2) \otimes m \\ \nabla_R^2 m &= -m \otimes (d\theta - \theta^2) \\ (\nabla_L \otimes \mathrm{Id})\nabla_R - (\mathrm{Id} \otimes \nabla_R)\nabla_L m &= 0 \end{aligned}$$

Ces applications sont bien des homomorphismes de bimodules puisque $da = [\theta, a]$ et $d^2 = 0$ impliquent $[d\theta - \theta^2, a] = 0$. Il reste à comprendre la pertinence de cette construction.

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que les connexions linéaires seules. Or, on sait que dans le cas de la géométrie différentielle ordinaire, et en particulier dans la théorie d'Einstein de la gravitation, les connexions compatibles avec une métrique jouent un rôle considérable. Dans le cas de la géométrie différentielle non commutative, plusieurs définitions de cette notion de métrique ont déjà été considérées. En général, ce sont des variantes de la définition suivante : un homomorphisme de bimodules $g : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$. Cependant, il manque à cette définition ce qui semble le plus difficile à caractériser, c'est-à-dire la symétrie et la non-dégénérescence d'une telle application.

En ce qui concerne la symétrie, une proposition d'une telle définition a été faite dans [94] qui prend en compte la présence d'une permutation généralisée $\sigma : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$. En effet, pour certains calculs différentiels, comme par exemple celui du plan quantique ou celui du groupe quantique $GL_q(n, \mathbb{C})$ que nous avons considéré, il existe un homomorphisme de bimodules $\Lambda : \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A}) \to \Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$ tel que

$$(\Lambda - 1)(\sigma + 1) = 0$$

Comme il est remarqué dans [94], les vecteurs propres de σ pour la valeur propre -1 correspondent aux 2-formes différentielles. Il est alors naturel de considérer les vecteurs propres de Λ pour la valeur propre 1 comme les éléments symétriques de $\Omega^1(\mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \Omega^1(\mathcal{A})$. La symétrie d'une métrique est donc imposée par la relation $g \circ \Lambda = g$. Par exemple, dans le cas du plan quantique, de telles métriques existent (alors qu'il n'y en aurait aucune pour la relation $g \circ \sigma = g$).

Pour l'instant, aucune définition satisfaisante de la non-dégénérescence n'a été donnée pour une métrique, sauf dans le cadre du calcul différentiel basé sur les dérivations, comme nous l'avons vu. Dans le cas général, c'est un problème qui n'admet pas encore de réponse définitive.

Il faut remarquer que nous ne savons pas encore très bien ce que doit représenter une métrique dans le cadre non commutatif ! Il est certain qu'un tel objet doit pouvoir être relié à la notion de connexion (quelle qu'elle soit). D'autre part, une utilisation classique de la métrique consiste à construire une algèbre de Clifford. Cela semble encore possible dans le cas non commutatif avec la notion ci-dessus de métrique, mais pour l'instant peu d'exemples convaincants ont été développés. En particulier, nous souhaitons vivement disposer un jour d'une définition satisfaisante de la notion de spineur en géométrie différentielle non commutative. En effet, comme nous avons pu le voir, jusqu'ici la géométrie différentielle non commutative s'est révélée utile surtout pour restructurer les champs de jauge. Il reste à découvrir ce qu'elle peut apporter pour les champs de matière.

On sait qu'en géométrie différentielle ordinaire, on peut associer à des fibrés vectoriels des classes caractéristiques en utilisant des connexions. Il serait souhaitable de pouvoir faire de même en géométrie différentielle non commutative. Pour le moment, ce programme n'a pas encore été concrétisé dans le cadre des connexions de bimodule. Ce problème est en fait relié au problème de la définition d'une bonne courbure.

Pour terminer, je voudrais évoquer certains problèmes généraux qui ne constituent que de très vagues projets de recherche, et qui ne sont formulés jusqu'ici que sous forme de questions.

En physique théorique, la notion de symétrie est bien souvent codée en utilisant une algèbre de Lie et non un groupe de Lie. Nous avons constaté dans ce travail (en 2.4 par exemple, et en 5.7.2 et 5.7.3) que nous pouvions considérer cette algèbre de Lie des symétries comme sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre associative intervenant dans le problème. Cette algèbre de Lie des dérivations fournit elle-même un calcul différentiel dont on a pu constater la richesse. Il est naturel de se demander si cette situation peut être généralisée à des symétries quantiques. Rappelons que nombre de "groupes quantiques" sont définis comme déformations de l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie classique. Peut-on espérer établir un lien entre cette algèbre et une algèbre de Lie quantique de "dérivations quantiques" que l'on pourrait associer à certaines algèbres associatives ? De plus, peut-on espérer une définition de formes différentielles non commutatives utilisant ces "dérivations quantiques", généralisant celle du Chapitre 5 ? Ce problème rejoint en certains points celui posé ci-dessus sur les algèbres tressées commutatives, où de telles "dérivations quantiques" existent.

Enfin, terminons par le problème qui semble conceptuellement le plus intéressant en géométrie différentielle non commutative, et qui se place dans la continuité des préoccupations du Chapitre 1. Existe-t-il une bonne catégorie d'algèbre (si oui, laquelle ?) telle que les algèbres commutatives de cette catégorie coïncident exactement avec les algèbres de fonctions C^∞ sur les variétés différentiables ? Pour l'instant, cette question n'admet bien sûr aucune réponse définitive. A. Connes propose, dans le cadre de son approche, de considérer les algèbres vérifiant ce qu'il appelle la *dualité de Poincaré* (dualité entre la K-théorie et la K-homologie de l'algèbre). Dans le cadre d'une approche basée sur les dérivations, on peut tout d'abord demander à l'algèbre d'avoir de telles dérivations (ce qui, pour les algèbres non commutatives, est toujours le cas !). Ensuite, il semble qu'il faille imposer de bonnes propriétés sur $\Omega_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$ et $\underline{\Omega}_{\mathrm{Der}}(\mathcal{A})$. Ceci n'est pour le moment qu'une intuition qu'il faudra un jour préciser.

Annexe A

Compléments algébriques

A.1 Homologies et Cohomologies

A.1.1 Définitions générales

Espaces vectoriels différentiels

DÉFINITION A.1 *Un espace vectoriel différentiel est un espace vectoriel V muni d'un endomorphisme d tel que $d^2 = 0$, appelé différentielle sur V.*

Nous associons alors à d deux sous-espaces vectoriels de V

• $B(V) = \operatorname{Im} d$

• $Z(V) = \operatorname{Ker} d = \{v \in V / dv = 0\}$

Nous dirons que les éléments de $B(V)$ sont les *bords* et les éléments de $Z(V)$ les *cycles* de V.

Comme $d^2 = 0$, nous avons $B(V) \subset Z(V)$. Nous pouvons donc former le quotient d'espaces vectoriels

$$H(V) = Z(V)/B(V)$$

DÉFINITION A.2 *L'espace vectoriel $H(V)$ est appelé l'homologie de (V, d).*

Si (V, d) et (V', d') sont deux espaces vectoriels différentiels, un *morphisme d'espaces vectoriels différentiels* entre V et V' est une application linéaire $f : V \to V'$ telle que $d' \circ f = f \circ d$.

Nous avons alors $f(Z(V)) \subset Z(V')$ et $f(B(V)) \subset B(V')$, donc f passe au quotient, et définit une application linéaire

$$f^\sharp : H(V) \to H(V')$$

Suites exactes

Soit $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces vectoriels, et soient $f_n : V^n \to V^{n+1}$ une suite d'applications linéaires.

DÉFINITION A.3 *Nous dirons que la suite*

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-1}} V^n \xrightarrow{f_n} V^{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

est exacte en V^n si

$$\operatorname{Im} f_{n-1} = \operatorname{Ker} f_n$$

Nous dirons que c'est une suite exacte si elle est exacte en tout V^n.

Notons 0 l'espace vectoriel réduit à l'élément nul. Pour tout espace vectoriel V, il existe une unique application linéaire $0 \to V$, celle qui envoie 0 sur $0 \in V$, et il existe une unique application linéaire $V \to 0$, celle qui envoie tout $v \in V$ sur 0.

Alors la suite $0 \to U \xrightarrow{i} V$ est exacte si et seulement si i est injective, et la suite $V \xrightarrow{\pi} W \to 0$ est exacte si et seulement si π est surjective.

Par conséquent, la suite $0 \to V \xrightarrow{f} W \to 0$ est exacte si et seulement si f est un isomorphisme.

DÉFINITION A.4 *Nous dirons que $0 \to U \xrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} W \to 0$ est une suite exacte courte si elle est exacte.*

L'exactitude en U signifie que i est injective, donc que U est isomorphe à $i(U) \subset V$. L'exactitude en W signifie que π est surjective, donc que W est isomorphe à $V/\operatorname{Ker}\pi$. Or, l'exactitude en V signifie $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Im} i = i(U) \simeq U$, donc on a un isomorphisme

$$W \simeq V/U$$

Une suite exacte courte comme ci-dessus est dite *scindée*, s'il existe un morphisme $\phi : W \to V$ tel que $\pi \circ \phi = \mathrm{Id}_W$. Dans ce cas, tout élément $v \in V$ s'écrit de façon unique $v = \phi \circ \pi(v) + v_U$ avec $v_U \in \operatorname{Ker}\pi$, donc $v_U = i(u)$ pour un $u \in U$. Nous avons donc la décomposition $V \simeq U \oplus W$.

Complexes

DÉFINITION A.5 *Un complexe est une suite d'espaces vectoriels $(V^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'applications linéaires $d_n : V^n \to V^{n+1}$ telles que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ pour tout entier n. Les applications d_n sont appelées différentielles du complexe. On note (V^*, d) ce complexe.*

Il est aussi possible d'introduire des complexes décroissants, c'est-à-dire des applications linéaires $d_n : V_n \to V_{n-1}$, avec $d_n \circ d_{n+1} = 0$. Il est alors d'usage d'indicer en bas les espaces vectoriels. On note (V_*, d) ce complexe.

Un complexe définit en particulier un espace vectoriel différentiel, en posant

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V^n$$

et $d = d_n$ sur V^n.

Dans chaque espace vectoriel V^n, nous avons les sous-espaces $Z^n(V) = \operatorname{Ker} d_n$ et $B^n(V) = \operatorname{Im} d_{n-1}$. Les éléments de $Z^n(V)$ sont appelés les *n-cocycles* et les éléments de $B^n(V)$ les *n-cobords*.

Si la suite (V^n, d_n) est exacte, nous avons, par définition, $\operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Im} d_{n-1}$, c'est-à-dire $Z^n(V) = B^n(V)$ pour tout n.

Dans le cas général où cette suite n'est pas exacte, nous n'avons, a priori, qu'une inclusion $\operatorname{Im} d_{n-1} \subset \operatorname{Ker} d_n$, c'est-à-dire $B^n(V) \subset Z^n(V)$. Nous pouvons alors former les quotients

$$H^n(V, d) = Z^n(V)/B^n(V)$$

qui mesurent, dans chaque V^n, l'écart à l'exactitude du complexe.

Définition A.6 *La suite d'espaces vectoriels $H^n(V, d)$ est appelée suite de cohomologie du complexe (V^*, d).*

Nous posons

$$H^*(V, d) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^n(V, d)$$

Cet espace vectoriel est la *cohomologie* du complexe (V^*, d).

Dans le cas d'un complexe décroissant, nous formons

$$H_n(V, d) = \text{Ker } d_n/\text{Im } d_{n+1}$$

Cette suite d'espaces vectoriels est la *suite d'homologie* du complexe (V_*, d). Dans ce cas, les éléments de $Z_n(V) = \operatorname{Ker} d_n$ sont appelés les *n-cycles*, et les éléments de $B_n(V) = \operatorname{Im} d_{n+1}$ les *n-bords* du complexe. Nous notons $H_*(V, d)$ son *homologie*.

Soient (V^*, d) et (V'^*, d') deux complexes (croissants). Nous dirons que l'application linéaire $f : V \to V'$ est un morphisme de complexes si pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $f : V^n \to V'^n$ et $d'_{n+1} \circ f = f \circ d_n$. Un tel morphisme de complexes définit des applications linéaires

$$f^\sharp : H^n(V, d) \to H^n(V', d')$$

Proposition A.7 *Soit une suite exacte courte de complexes*

$$0 \to (U^*, d_U) \xrightarrow{\varphi} (V^*, d_V) \xrightarrow{\psi} (W^*, d_W) \to 0$$

où les φ et ψ sont des morphismes de complexes.

Alors il existe un morphisme

$$\partial : H^*(W, d_W) \to H^*(U, d_U)$$

tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(U, d_U) & \xrightarrow{\varphi^\sharp} & H^*(V, d_V) \\ \partial \nwarrow & & \swarrow \psi^\sharp \\ & H^*(W, d_W) & \end{array}$$

avec

$$\partial : H^n(W, d_W) \to H^{n+1}(U, d_U)$$

Cohomologie d'algèbres différentielles graduées

Considérons le cas où le complexe est une algèbre différentielle graduée $(\mathcal{A}, d)$.

L'espace vectoriel $Z(\mathcal{A}) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} Z^n(\mathcal{A}) = \operatorname{Ker} d$ des cocycles, est une sous-algèbre graduée de $\mathcal{A}$, et l'espace vectoriel $B(\mathcal{A}) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} B^n(\mathcal{A}) = \operatorname{Im} d$ est un idéal bilatère gradué de $Z(\mathcal{A})$. C'est-à-dire que pour tout $dy \in B(\mathcal{A})$, et tout $x \in Z(\mathcal{A})$, nous avons $xdy \in B(\mathcal{A})$ et $(dy)x \in B(\mathcal{A})$. En effet, nous avons $d(xy) = (dx)y \pm xdy = \pm xdy$ puisque $x \in \operatorname{Ker} d$. Donc xdy est un cobord. Le même raisonnement vaut pour $(dy)x$.

Ceci implique que $H^*(\mathcal{A}, d) = Z(\mathcal{A})/B(\mathcal{A})$ est une algèbre graduée, appelée *algèbre cohomologique* de $\mathcal{A}$.

Si $(\mathcal{A}, d)$ est une algèbre différentielle graduée commutative, alors $H^*(\mathcal{A}, d)$ est une algèbre graduée commutative.

A.1.2 Exemples d'Homologies et de Cohomologies

Cohomologie de de Rham

Soit M une variété différentiable. Prenons pour complexe l'algèbre différentielle graduée commutative $(\Omega(M), d)$ des formes différentielles sur M, munie de la différentielle habituelle sur les formes.

Sa cohomologie, notée $H^*(M, \mathbb{R})$, est la *cohomologie de de Rham* de la variété M. C'est une algèbre graduée commutative.

Cohomologie des algèbres de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et η une représentation de $\mathfrak{g}$ sur un espace vectoriel V.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous posons $C^n(\mathfrak{g}, V)$ l'espace vectoriel des applications n-linéaires antisymétriques de $\mathfrak{g}$ dans V. Pour $n = 0$, nous prenons $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$. Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie, nous avons en fait $C^n(\mathfrak{g}, V) = \bigwedge^n \mathfrak{g}^* \otimes V$

Nous définissons une différentielle d sur l'espace $C^*(\mathfrak{g}, V) = \oplus_{n\in\mathbb{N}} C^n(\mathfrak{g}, V)$ en posant, pour tout $\alpha \in C^n(\mathfrak{g}, V)$ et tout $X_0, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \ldots, X_n) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \eta(X_i) \alpha(X_0, \ldots, \overset{i}{\vee}, \ldots, X_n) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], \ldots, \overset{i}{\vee}, \ldots, \overset{j}{\vee}, \ldots, X_n) \end{aligned}$$

Ceci définit une application linéaire

$$d : C^n(\mathfrak{g}, V) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$$

de carré nul

$$d^2 = 0$$

La cohomologie du complexe $(C^*(\mathfrak{g}, V), d)$, notée $H^*(\mathfrak{g}, V)$, est la *cohomologie de* $\mathfrak{g}$ *à valeurs dans* V.

Dans le cas particulier où $V = \mathbb{R}$ et η est la représentation nulle de $\mathfrak{g}$, supposée de dimension finie, nous avons $C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R}) = \bigwedge \mathfrak{g}^*$. Sa cohomologie est donc l'algèbre cohomologique de l'algèbre différentielle graduée commutative $\bigwedge \mathfrak{g}^*$, notée $H^*(\mathfrak{g})$.

Si G un groupe de Lie connexe (de dimension finie) et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, alors $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ est une sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega(G)$. L'inclusion

$$i : \bigwedge \mathfrak{g}^* \to \Omega(G)$$

définit un morphisme d'algèbres entre les algèbres cohomologiques

$$i^\sharp : H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(G, \mathbb{R})$$

Il a pu être démontré que dans le cas où G est un groupe de Lie compact, cette application est un isomorphisme.

Déformation d'un crochet de Lie

Prenons comme précédemment $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, et cette fois $V = \mathfrak{g}$ avec $\eta = ad$.

Nous allons nous intéresser aux déformations du crochet de Lie sur $\mathfrak{g}$. Une déformation de ce crochet est une série formelle

$$[X, Y]_\epsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \alpha_k(X, Y)$$

avec

$$\alpha_0(X, Y) = [X, Y]$$

et ϵ un paramètre petit. Pour $\epsilon = 0$, nous avons le crochet d'origine sur $\mathfrak{g}$. Les α_k sont donc des éléments de $C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$.

Intéressons-nous plus particulièrement à $k = 1$, c'est-à-dire au terme linéaire en ϵ. Posons $\alpha_1 = \alpha \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$. Si nous écrivons l'identité de Jacobi sur le crochet $[\cdot, \cdot]_\epsilon$ et que nous ne retenons que les termes linéaires en ϵ, alors α doit être un cocycle : $d\alpha = 0$.

Si maintenant $\alpha = d\beta$ est un cobord, alors la déformation du crochet est triviale, au sens où la nouvelle structure d'algèbre de Lie obtenue est isomorphe à l'ancienne, à l'ordre ϵ, par l'isomorphisme

$$X \mapsto X - \epsilon\beta(X)$$

Donc nous constatons que $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ donne des informations sur les déformations possibles (au premier ordre en ϵ) du crochet de Lie de $\mathfrak{g}$.

Homologie d'algèbre de Lie

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie. Sur l'espace vectoriel gradué $\bigwedge \mathfrak{g}$, on définit la différentielle

$$\partial : \bigwedge \mathfrak{g} \to \bigwedge \mathfrak{g}$$

qui prolonge de façon unique

$$\begin{aligned}\partial(X \wedge Y) &= [X, Y] \\ \partial(X) &= 0 \\ \partial(\lambda) &= 0\end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Alors $(\bigwedge \mathfrak{g}, \partial)$ est un complexe décroissant.

Son homologie, notée $H_*(\mathfrak{g})$, est l'*homologie de* $\mathfrak{g}$.

Il faut remarquer que ∂ n'est pas une antidérivation de l'algèbre $\bigwedge \mathfrak{g}$, il n'y a pas compatibilité avec le produit. Donc $H_*(\mathfrak{g})$ n'est pas une algèbre.

A.2 Opérations Algébriques

A.2.1 Opérations de Cartan

Définitions

Définition A.8 *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre différentielle graduée commutative, et $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Une opération de Cartan de $\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{A}$ est une application linéaire*

$$i : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{-1}(\mathcal{A}) = \{\textit{dérivations graduées de degré } -1 \textit{ de } \mathcal{A}\}$$

dérivations que nous noterons $i_X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, telle que $i_X i_Y + i_Y i_X = 0$ et telle que l'application $L_X = i_X d + d i_X : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ vérifie

$$\begin{aligned}[L_X, i_Y] &= i_{[X,Y]} \\ [L_X, L_Y] &= L_{[X,Y]}\end{aligned}$$

pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Il faut noter que L_X est une dérivation graduée de degré 0 sur $\mathcal{A}$ qui commute avec la différentielle $L_X d = d L_X$, puisque $d^2 = 0$.

On note $(\mathcal{A}, \mathfrak{g}, i)$ une telle opération.

Définition A.9 *Dans l'algèbre $\mathcal{A}$, nous avons alors des sous-espaces vectoriels canoniquement associés à cette opération :*

• $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \ / \ L_X a = 0 \ \forall X \in \mathfrak{g}\}$*, ensemble des éléments invariants de $\mathcal{A}$. C'est une sous-algèbre différentielle graduée de $\mathcal{A}$.*

• $\mathcal{H}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \ / \ i_X a = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\}$, *ensemble des éléments horizontaux de* $\mathcal{A}$*. C'est une sous-algèbre graduée invariante par* L_X*, mais a priori non munie d'une différentielle.*

• $\mathcal{B}(\mathcal{A}) = \{a \in \mathcal{A} \ / \ i_X a = 0$ *et* $L_X a = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\}$, *ensemble des éléments basiques de* $\mathcal{A}$*. C'est une sous-algèbre différentielle graduée de* $\mathcal{A}$*, et même plus précisément de* $\mathcal{I}(\mathcal{A})$*.*

Morphismes d'opérations

DÉFINITION A.10 *Soient* $(\mathcal{A}, \mathfrak{g}, i)$ *et* $(\mathcal{A}', \mathfrak{g}, i')$ *deux* $\mathfrak{g}$*-opérations.* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *est un homomorphisme de* $\mathfrak{g}$*-opérations si* φ *est un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées et si*

$$\varphi \circ i_X = i'_X \circ \varphi$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$*. Nous avons alors* $\varphi \circ L_X = L'_X \circ \varphi$ *pour tout* $X \in \mathfrak{g}$*.*

Cohomologies associées

DÉFINITION A.11 *Nous associons à une opération* $(\mathcal{A}, \mathfrak{g}, i)$ *trois cohomologies :*

• $H(\mathcal{A}, d)$ *la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée* $\mathcal{A}$*,*

• $H_I(\mathcal{A}, d)$ *la cohomologie invariante, qui est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée* $\mathcal{I}(\mathcal{A})$*,*

• $H_B(\mathcal{A}, d)$ *la cohomologie basique, qui est la cohomologie de l'algèbre différentielle graduée* $\mathcal{B}(\mathcal{A})$*.*

Lemme A.12 *Si* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *est un homomorphisme de* $\mathfrak{g}$*-opérations, alors* φ *induit des homomorphismes* $\varphi^\sharp$ *entre les diverses cohomologies introduites.*

A.2.2 Exemples

Algèbre des formes sur un fibré principal

Soit $P(M, G)$ un fibré principal, et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe de Lie G.

Soit $\mathcal{A} = \Omega(P)$ l'algèbre différentielle graduée commutative des formes différentielles sur P. Nous définissons une opération de $\mathfrak{g}$ dans $\Omega(P)$ en posant

$$i_X = i_{X^v}$$

pour tout $X \in \mathfrak{g}$, où X^v est le champ de vecteurs induit sur P par l'action de G sur P, et où i_{X^v} est l'opérateur d'insertion habituel sur les formes différentielles.

Alors $L_X = i_X d + d i_X$ est la dérivée de Lie habituelle L_{X^v} dans la direction du champ de vecteurs X^v.

Dans ce contexte, $\mathcal{H}(\Omega(P))$ est la sous-algèbre des formes horizontales sur P au sens habituel du terme sur un fibré, d'où le nom de l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{A})$.

Les formes invariantes $\mathcal{I}(\Omega(P))$ sont les formes invariantes par l'action induite de G sur les formes, d'où le nom de l'espace $\mathcal{I}(\mathcal{A})$.

Enfin, l'espace des formes basiques $\mathcal{B}(\Omega(P))$ s'identifie à l'algèbre différentielle graduée $\Omega(M)$ des formes différentielles sur la variété base M, d'où le nom de $\mathcal{B}(\mathcal{A})$.

La cohomologie basique de $\Omega(P)$ est donc la cohomologie de de Rham de la variété base M.

L'opération de $\mathfrak{g}$ dans $\bigwedge \mathfrak{g}^*$

Prenons l'algèbre différentielle graduée commutative $\mathcal{A} = \bigwedge \mathfrak{g}^*$, l'algèbre extérieure du dual d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, dont la différentielle est définie par dualité du crochet sur $\bigwedge^1 \mathfrak{g}^*$ et prolongé de façon unique en dérivation graduée de degré 1 et de carré nul sur $\bigwedge \mathfrak{g}^*$. On a donc explicitement

$$(d_{\mathfrak{g}}\alpha)(X, Y) = -\alpha([X, Y])$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ et tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, et

$$d_{\mathfrak{g}}(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge d_{\mathfrak{g}}\alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

pour tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathfrak{g}^*$.

Pour $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p \in \bigwedge^p \mathfrak{g}^*$ et $X \in \mathfrak{g}$, posons

$$i_X(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) = \sum_{q=1}^{p} (-1)^{q+1} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{q-1} \alpha_q(X) \wedge \alpha_{q+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p$$

i_X coïncide avec le produit intérieur du champ de vecteurs X sur une forme, si nous regardons $\mathfrak{g}$ comme l'espace des champs de vecteurs invariants à gauche sur un groupe de Lie, et $\bigwedge \mathfrak{g}^*$ comme l'espace des formes différentielles invariantes à gauche.

Alors il est facile de montrer que $L_X = ad^*_X$ sur $\mathfrak{g}^*$. i et L définissent une opération de $\mathfrak{g}$ dans $\bigwedge \mathfrak{g}^*$.

A.2.3 Filtration d'une opération

Soit $(\mathcal{A}, \mathfrak{g}, i)$ une opération.

Définition A.13 *La filtration associée à l'opération* $(\mathcal{A}, \mathfrak{g}, i)$ *est définie par*

$$F^p\mathcal{A}^q = \{a \in \mathcal{A} \; / \; i_{X_1} \dots i_{X_{q-p+1}} a = 0 \text{ pour tout } X_i \in \mathfrak{g}\}$$

Cette filtration est décroissante : $F^{p+1}\mathcal{A}^q \subset F^p\mathcal{A}^q$.
Nous posons $F^p\mathcal{A} = \oplus_{q \geq 0} F^p\mathcal{A}^q$.

Proposition A.14 *[21]* $F^p\mathcal{A}$ *est stable par* i_X, L_X *et* d, *et*

$$F^p\mathcal{A} \cdot F^q\mathcal{A} \subset F^{p+q}\mathcal{A}$$

pour tout $p, q \geq 0$. $F^p\mathcal{A}$ *définit donc une filtration d'algèbre différentielle graduée.*

Démonstration : On a trivialement $i_X : F^p\mathcal{A}^q \to F^p\mathcal{A}^{q-1}$. Donc $F^p\mathcal{A}$ est stable par i_X. De $[L_X, i_Y] = i_{[X,Y]}$, on a immédiatement que $F^p\mathcal{A}$ est stable par L_X. Enfin, de $di_X + i_X d = L_X$, on a la stabilité par d.

Soient $a \in F^p\mathcal{A}^q$ et $b \in F^r\mathcal{A}^s$. Alors $i_{X_1} \dots i_{X_{q+s-p-r+1}}(ab)$ est une somme de termes du type

$$\left(i_{X_{i_1}} \dots i_{X_{i_u}} a\right) \left(i_{X_{j_1}} \dots i_{X_{j_v}} b\right)$$

avec $u + v = q + s - p - r + 1$. Donc on a $u \geq q - p + 1$ ou $v \geq s - r + 1$. Cela implique que l'un des deux facteurs est nul. □

Corollaire A.15 $F^p\mathcal{A}$ *est un idéal de* $\mathcal{A}$.

Démonstration : On a $\mathcal{A} = F^0\mathcal{A}$, d'où le résultat. □

A.3 Groupe de Grothendieck

La construction suivante est très classique et se trouve exposée dans de nombreux ouvrages, comme par exemple [27, 35, 61].

Proposition A.16 *Soit* M *est un monoïde abélien associatif (additif). Alors il existe un groupe abélien* $\mathfrak{G}(M)$ *et un homomorphisme de monoïdes* $\gamma : M \to \mathfrak{G}(M)$ *ayant la propriété universelle suivante : si* $\lambda : M \to G$ *est un homomorphisme de monoïdes avec* G *un groupe abélien, alors il existe un unique homomorphisme de groupes* $\overline{\lambda} : \mathfrak{G}(M) \to G$ *tel que* $\overline{\lambda} \circ \gamma = \lambda$.

Le groupe $\mathfrak{G}(M)$ est appelé le groupe de Grothendieck de M, ou encore le groupe universel enveloppant de M.
Démonstration : Soit $F_{\text{ab}}(M)$ le groupe abélien libre engendré par M. On note $[x]$ l'élément de $F_{\text{ab}}(M)$ correspondant à $x \in M$. Soit B le sous-groupe de $F_{\text{ab}}(M)$ engendré par les éléments de la forme $[x + y] - [x] - [y]$ pour tout

$x, y \in M$. Alors $\mathfrak{G}(M) = F_{\mathrm{ab}}(M)/B$ et γ est obtenue par composition de l'injection $M \to F_{\mathrm{ab}}(M)$ et du quotient par B. □

On dira que la relation d'annulation a lieu dans M si $x + z = y + z$ dans M implique $x = y$. On a alors

Lemme A.17 $\gamma : M \to \mathfrak{G}(M)$ *est injective si et seulement si la relation d'annulation a lieu dans* M*.*

Il existe une autre construction du groupe de Grothendieck. $\mathfrak{G}(M)$ est le quotient de l'ensemble des couples $(x, y) \in M \times M$ par la relation

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow \exists z \in M,\ x + y' + z = x' + y + z$$

Si on note $[(x, y)]$ la classe du couple (x, y), la loi de composition dans $\mathfrak{G}(M)$ est définie par la relation

$$[(x, y)] + [(x', y')] = [(x + x', y + y')]$$

L'élément neutre est $[(x, x)]$ et l'opposé de $[(x, y)]$ est $[(y, x)]$. L'application γ est donnée par $\gamma(x) = [(x + y, y)]$ pour n'importe quel $y \in M$.

De cette définition, on tire immédiatement que tout élément de $\mathfrak{G}(M)$ s'écrit comme une différence : $\gamma(x) - \gamma(y) = [(x, y)]$.

Exemple A.18 On a $\mathfrak{G}(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$. ♢

Bibliographie

[1] M.F. Atiyah : *Geometry of Yang-Mills Fields*, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore, Pisa 1979.

[2] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne : *Heat Kernels and Dirac Operators*, Grundlehren der mathematischen Wissenschften 298, Springer Verlag, 1992.

[3] B. Booss, D.D. Bleecker : *Topology and Analysis. The Atiyah-Singer Index Formula and Gauge-Theoretic Physics*, Universitext, Springer Verlag, 1985.

[4] N. Bourbaki : *Éléments de mathématique, Algèbre*, Hermann, 1962.

[5] O. Bratteli, D.W. Robinson : *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics I*, Texts and Monographs in Physics, Springer Verlag, 1979.

[6] H. Cartan, S. Eilenberg : *Homological Algebra*, Princeton University Press, 1956.

[7] V. Chari, A. Pressley : *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, 1994.

[8] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette : *Analysis, Manifolds and Physics*, North-Holland, 1982.

[9] M. Chouchan : *Nicolas Bourbaki, Faits et légendes*, Éditions du Choix, 1995.

[10] A. Connes : *Noncommutative Differential Geometry*, Publ. IHES 62, 1985.

[11] A. Connes : *Géométrie non commutative*, InterÉditions, Paris, 1990.

[12] A. Connes : *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1995.

[13] R. Coquereaux, M. Dubois-Violette, P. Flad (Eds.) : *Infinite Dimensional Geometry, Noncommutative Geometry, Operator Algebras, Fundamental Interactions*, First Caribbean Spring School of Mathematics and Theoretical Physics, Saint-François, Guadeloupe, World Scientific, 1995.

[14] J.F. Cornwell : *Group Theory in Physics*, Techniques in Physics, Vol 1 & 2, Academic Press, 1989.

[15] F. DeMeyer, E. Ingraham : *Separable Algebras Over Commutative Ring*, Lecture Notes in Mathematics 181, Springer-Verlag, 1971.

[16] P.A.M. Dirac : *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford Science Publications, Fourth Edition, 1958.

[17] J. Dixmier : *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*, Gauthier-Villars, 1957.

[18] J. Dixmier : *Les C^*-algèbres et leurs représentations*, Gauthier-Villars, 1964.

[19] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko : *Géométrie contemporaine méthodes et applications*, Mir, 1982.

[20] M. Göckeler, T. Schücker : *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, 1989.

[21] W. Greub, S. Halperin, R. Vanstone : *Connections, Curvature, and Cohomology*, vol. 3, Academic Press, 1976.

[22] A. Guichardet : *Algèbres d'observables associées aux relations de commutation*, Armand Collin, 1968.

[23] A. Guichardet : *Groupes quantiques, Introduction au point de vue formel*, InterÉdition / CNRS Éditions, 1995.

[24] S.W. Hawking, G.F. Ellis : *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, 1973.

[25] C. Itzykson, J.-B. Zuber : *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill International Editions, 1985.

[26] N. Jacobson : *Basic Algebra I & II*, Freeman, 1985.

[27] M. Karoubi : *K-Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, 1978.

[28] M. Karoubi : *Homologie cyclique et K-théorie*, Astérisque 149, SMF, 1987.

[29] C. Kassel : *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics 155, Springer-Verlag, 1995.

[30] S. Kobayashi, K. Nomizu : *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, Vol. I 1963, Vol. II 1969.

[31] I. Kolář, P.W. Michor, J. Slovák : *Natural Operations in Differential Geometry*, Springer Verlag, 1993.

[32] J.-L. Koszul : *Fibre Bundles and Differential Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1960.

[33] T.Y. Lam : *A First Course in Noncommutative Rings*, Graduate Texts in Mathematics, 131, Springer Verlag, 1991.

[34] O.E. Lanford : *Selected Topics in Functional Analysis*, Statistical Mechanics and Quantum Field Theory, Les Houches 1970, C. DeWitt and R. Stora, éds, Gordon & Breach, 1971.

[35] S. Lang : *Algebra*, Addison Wesley, 1984.

[36] H.B. Lawson, M.-L. Michelsohn : *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.

[37] P. Libermann, C.-M. Marle : *Géométrie symplectique, Bases théoriques de la mécanique*, Publications Mathématiques de l'Université Paris VII.

[38] J.-L. Loday : *Cyclic Homology*, Springer-Verlag, 1992.

[39] S. Mac Lane : *Homology*, Springer Verlag, 1975.

[40] J. Madore : *Noncommutative Differential Geometry and its Physical Applications*, Cambridge University Press, 1995.

[41] J. Milnor : *Introduction to Algebraic K-theory*, Annals of Math. Studies 72, Princeton University Press, 1971.

[42] J. Milnor, J. Stasheff : *Characteristic Classes*, Annals of Math. Studies 76, Princeton University Press, 1974.

[43] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler : *Gravitation*, W.H. Freeman and Company, 1973.

[44] M. Nakahara : *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Adam Hilger, 1990.

[45] M. Naïmark, A. Stern : *Théorie des représentations des groupes*, Mir, 1979.

[46] D. Perrin : *Géométrie algébrique, une introduction*, InterÉditions / CNRS Éditions, 1995.

[47] R.S. Pierce : *Associative Algebras*, Graduate Texts in Mathematics 88, Springer Verlag, 1982.

[48] M. Postnikov : *Leçons de géométrie, groupes et algèbres de Lie*, Mir, 1985.

[49] D.W. Robinson : *Algebraic Aspects of Relativistic Quantum Field Theory*, dans Axiomatic Field Theory, Brandeis 1965, éd. Chretien & Deser, Gordon & Breach, 1965.

[50] S. Sakai : *C^*-Algebras and W^*-Algebras*, Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, Band 60, Springer-Verlag, 1971.

[51] H. Samelson : *Notes on Lie Algebras*, Universitext, Springer-Verlag, 1990.

[52] D.H. Sattinger, O.L. Weaver : *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics*, Springer-Verlag, 1986.

[53] S.S. Schweber : *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, Princeton University Press, 1994.

[54] J.-P. Serre : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.

[55] S. Sternberg : *Lectures on Differential Geometry*, Prentice Hall.

[56] R.F. Streater, A.S Wightman : *PCT, Spin and Statistics and All That*, Benjamin, New-York, 1964.

[57] M. Takesaki : *Theory of Operator Algebra I*, Springer Verlag, 1979.

[58] W. Thirring : *A Course in Mathematical Physics 3, Quantum Mechanics of Atoms and Molecules*, Springer Verlag.

[59] V.S. Varadarajan : *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Springer-Verlag, 1984.

[60] F.W. Warner : *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag.

[61] N.E. Wegge-Olsen : *K-Theory and C^*-Algebras*, Oxford University Press, 1993.

[62] S. Weinberg : *Gravitation and Cosmology : Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, John Wiley & Sons, 1972.

Articles

[63] P. Aschieri, L. Castellani : *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry on Quantum Groups*, Int. Journ. Mod. Phys. A, Vol 8, No 10, p. 1667, 1993.

[64] J. Bellisard : *K-theory of C^*-algebras in Solid State Physics*, Statistical Mechanics and Field Theory: Mathematical Aspects, p. 99, Lecture Notes in Physics, 257, Springer-Verlag, 1986.

[65] J. Bellisard : *Ordinary Quantum Hall Effect and Noncommutative Cohomology*, Proc. on Localization in Disordered Systems, Bad Schandau 1986, Teubner 1988.

[66] H.J. Borchers : *Algebraic Aspects of Wightman Field Theory*, dans Statistical Mechanics and Field Theory, 1971 Haifa Summer School, R.N. Sen et C. Weil, Ed., Halsted Press 1972.

[67] K. Bresser : *All Bicovariant Differential Calculi on $GL_q(3,\mathbb{C})$ and $SL_q(3,\mathbb{C})$*, J. Phys. A28, p. 2545, 1995.

[68] K. Bresser, F. Müller-Hoissen, A. Dimakis, A. Sitarz : *Noncommutative Geometry of Finite Groups*, Preprint GOET-TP 95/95, q-alg/9509004.

[69] A. Cap, A. Kriegl, P. Michor, J. Vanžura : *The Frölicher-Nijenhuis Bracket in Non Commutative Differential Geometry*, Acta Math. Univ. Comenianiae, 62, p17-49, 1993.

[70] A.H. Chamseddine, G. Felder, J. Fröhlich : *Gravity in Noncommutative Geometry*, Comm. Math. Phys., 155, p. 205, 1993.

[71] A. Connes : *Spectral Sequence and Homology of Currents for Operator Algebras*, Math. Forschubgsinstitut Oberwolfach Tagungsbericht 41/81, Funktionalanlysis und C^*-Algebren, 27-9/3-10, 1981.

[72] A. Connes : *Noncommutative Differential Geometry, Part I, The Chern Character in K-homology, Part II, de Rham Homology and Noncommutative Algebra*, Preprint IHES, 1983.

[73] A. Connes : *Noncommutative Geometry and Reality*, preprint IHES/M/95/52.

[74] A. Connes, J. Lott : *Particle Models and Noncommutative Geometry*, Recent Advances in Field Theory, Nucl. Phys. Proc. Suppl. B18, p. 29, 1990.

[75] A. Connes, J. Lott : *The Metric Aspect of Noncommutative Geometry*, Proceedings of the 1991 Cargèse Summer School, Plenum Press.

[76] R. Coquereaux : *Noncommutative Geometry and Theoretical Physics*, J. Geom. Phys. 6, p. 425, 1989.

[77] R. Coquereaux, G. Esposito-Farèse, G. Vaillant : *Higgs Fields as Yang-Mills Fields and Discrete Symmetries*, Nucl. Phys. B353, p. 689, 1991.

[78] J. Cuntz, D. Quillen : *Algebra Extensions and Nonsingularity*, J. Am. Math. Soc. 8, 2, p. 251, 1995.

[79] L. Dabrowski, P. Hajac, G. Landi, P. Siniscalco : *Biconnections on Quantum Spaces*, préprint SISSA & ICTP, 1995.

[80] M. Dubois-Violette : *The Weil-B.R.S. Algebra of a Lie Algebra and the Anomalous Terms in Gauge Theory*, J. Geom. Phys. 3, p. 525-565, 1986.

[81] M. Dubois-Violette : *Dérivations et calcul différentiel non commutatif*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série I, p. 403-408, 1988.

[82] M. Dubois-Violette : *Noncommutative Differential Geometry, Quantum Mechanics and Gauge Theory*, in Differential Geometric

Methods in Theoretical Physics, Proceedings Rapallo, 1990 (C. Bartocci, U. Bruzzo, R. Cianci, eds.), Lecture Notes in Physics 375, Springer Verlag, 1991.

[83] M. Dubois-Violette, R, Kerner, J. Madore : *Noncommutative Differential Geometry of Matrix Algebras*, J. Math. Phys. 31, p. 316, 1990.

[84] M. Dubois-Violette, R, Kerner, J. Madore : *Noncommutative Differential Geometry and New Models of Gauge Theory*, J. Math. Phys. 31, p. 323, 1990.

[85] M. Dubois-Violette, G. Launer : *The Quantum Group of a Non-degenerate Bilinear Form*, Phys. Lett. B245, p. 175, 1990.

[86] M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson, J. Mourad : *Linear Connections on the Quantum Plane*, Preprint LPTHE-Orsay 94/94, hep-th/9410199, Lett. Math. Phys. 35, p. 351-358, 1995.

[87] M. Dubois-Violette, J. Madore, T. Masson, J. Mourad : *On Curvature in Noncommutative Geometry*, Preprint LPTHE-Orsay 95/63, q-alg/9512004.

[88] M. Dubois-Violette, T. Masson : *Basic Cohomology of Associative Algebras*, Preprint LPTHE-Orsay 94/10, alg-geom/9404014, à paraître dans J. Pure Appl. Alg.

[89] M. Dubois-Violette, T. Masson : *On the First Order Operators in Bimodules*, Preprint LPTHE-Orsay 95/56, q-alg/9507028.

[90] M. Dubois-Violette, P.W. Michor : *Dérivations et calcul différentiel non commutatif II*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 927-931, 1994.

[91] M. Dubois-Violette, P.W. Michor : *Connections on central bimodules*, Preprint LPTHE-Orsay 94/100, ESI PREPRINT 210, q-alg/9503020.

[92] L. Faddeev : *Quantum Completely Integrable Models in Field Theory* Math. Phys. Rev. C : Math. Phys. Rev. 1, 107, Harwood Academic 1980.

[93] R. Feynman : *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics*, Rev. Mod. Phys. 20, 2, p. 367, 1948.

[94] Y. Georgelin, J. Madore, T. Masson, J. Mourad : *On the Noncommutative Riemannian Geometry of* $GL_q(n)$, Preprint LPTHE-Orsay 95/51, q-alg/9507002, 1995.

[95] Y. Georgelin, T. Masson, J.-C. Wallet : *Linear Connections on the Two Parameter Quantum Plane*, preprint IPNO-TH-9531, LPTHE-Orsay 95/43, q-alg/9507032, 1995.

[96] M. Gerstenhaber, S.D. Schack : *Algebraic Cohomology and Deformation Theory*, Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, M. Hazewinkel and M. Gerstenhaber, eds, Kluwer, Dordrecht, 1988, p. 11-264.

[97] M. Gerstenhaber, A. Giaquinto, S.D. Schack : *Quantum Symmetry*, Quantum Groups, Proceedings Leningrad, 1990 (P.P. Kulish eds), Lecture Notes in Mathematics 1510, Springer Verlag, 1992.

[98] R. Haag, D. Kastler : *An Algebraic Approach to Quantum Field Theory*, J. Math. Phys. 5, p. 848, 1964.

[99] G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg : *Differential Forms on Regular Affine Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 102, p. 383-408, 1962.

[100] D. Kastler : *A Detailed Account of Alain Connes' Version of the Standard Model in Noncommutative Geometry, I and II*, Rev. Math. Phys. 5, p. 477-532, 1993.

[101] D. Kastler, J. Madore, T. Masson : *On Finite Differential Calculi*, preprint LPTHE-ORSAY 95/68, 1995.

[102] D. Kastler, T. Schücker : *The Standard Model à la Connes-Lott*, Preprint-CPT-94/P.3091.

[103] P. Lecomte, P. Michor, H. Schicketantz : *The Multigraded Nijenhuis-Richarson Algebra, its Universal Property and Application*, J. Pure Appl. Alg., 77, p. 87-102, 1992.

[104] J. Madore : *Modification of Kaluza-Klein Theory*, Phys. Rev. D41, 3709, 1990.

[105] J. Madore : *The Fuzzy Sphere*, J. Class. Quant. Grav. 9, p. 69, 1992.

[106] J. Madore, J. Mourad : *Algebraic-Kaluza-Klein Cosmology*, J. Class. Quant. Grav. 10, p. 2157, 1993.

[107] J. Madore, T. Masson, J. Mourad : *Linear Connections on Matrix Geometries*, J. Class. Quant. Grav.12, p. 1429, 1995.

[108] T. Masson : *Submanifolds and Quotient Manifolds in Noncommutative Geometry*, preprint LPTHE 95/53, q-alg/9507030.

[109] L. Michel : *Applications of Group Theory to Quantum Physics. Algebraic Aspects*, Group Representations in Mathematics and Physics, Battelle Seattle 1969 Rencontres, Ed. V. Bargmann, Lecture Notes in Physics 6.

[110] J. Mourad : *Linear Connections in Noncommutative Geometry*, J. Class. Quant. Grav. 12, p. 965, 1995.

[111] J.E. Moyal : *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Camb. Phil. Soc. 45, p. 99, 1949.

[112] F. Müller-Hoissen : *Differential Calculi on the Quantum Group $GL_{p,q}(2)$*, J. Phys. A: Math. Gen. 25, p. 1703-1734, 1992.

[113] F. Müller-Hoissen : *Differential Calculi on Quantum (Sub-)Group and Their Classical Limit*, Proceedings of the International Symposium on "Generalized Symmetries in Physics", ASI Clausthal, July 1993.

[114] M. Schlichenmaier : *Some Concepts of Modern Algebraic Geometry: Point, Ideal and Homomorphism*, gk-mp-9403/3.

[115] K. Schmudgen, A. Schuler : *Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups of type A, B, C, and D*, Commun. Math. Phys. 167, p. 635-670, 1995.

[116] K. Schmudgen, A. Schuler : *Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups*, Comm. Math. Phys. 170, p. 315-335, 1995.

[117] P. Schupp, P. Watts, B. Zumino : *Differential Geometry on Linear Quantum Groups*, Lett. Math. Phys. 25, p. 139, 1992.

[118] E. Sklyanin, L. Takhtajan, L. Faddeev : Teor. Matem. Fiz. 40, N2, p. 194, 1979 (en russe).

[119] L. Takhtajan, L. Faddeev : Usp. Matem. Nauk. 34, N5, p. 13, 1979 (en russe).

[120] L. Takhtajan : *Introduction to Quantum Groups*, Quantum Groups, Proc. Clausthal, FRG 1989, Eds H.D. Doebner, J.D. Hennig, Lectures Notes in Physics 370.

[121] J. Wess, B. Zumino : *Covariant Differential Calculus on the Quantum Hyperplane*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 18B, p. 302, 1990.

[122] S.L. Woronowicz : *Compact Matrix Pseudogroups*, Comm. Math. Phys. 11, p. 613-665, 1987.

[123] S.L. Woronowicz : *Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups)*, Comm. Math. Phys. 122, p. 125-170, 1989.

Résumé

Dans cette thèse sont exposés des travaux récents dans le domaine de la géométrie différentielle non commutative.

Dans un premier temps, nous justifions l'introduction de la géométrie différentielle non commutative, aussi bien du point de vue mathématique que du point de vue de la physique théorique. Pour cela, nous rappelons ce que sont la "topologie non commutative" et la "théorie de la mesure non commutative", et nous faisons un bilan sommaire des outils mathématiques utilisés aujourd'hui en physique des particules.

Parmi les nombreux calculs différentiels non commutatifs déjà introduits dans la littérature, outre le calcul différentiel universel que nous rappelons dans un cadre très algébrique, nous avons choisi d'en présenter trois : le calcul différentiel basé sur les dérivations, pour lequel nous rappelons diverses structures associées récemment considérées ; le calcul différentiel basé sur un opérateur de Dirac ; la notion de calcul différentiel bicovariant sur les algèbres de Hopf.

Après avoir montré l'intérêt de la notion de connexion en géométrie différentielle non commutative, aussi bien en mathématiques qu'en physique des particules, nous utilisons ces calculs différentiels pour illustrer par des exemples concrets de nouvelles considérations sur cette notion de connexion. En particulier, sont reprises et illustrées les définitions récentes de bimodules centraux et diagonaux, de connexions linéaires et de connexions de bimodules, qui font encore l'objet de recherches.

Abstract

In this thesis are exposed recent works on noncommutative differential geometry.

First of all, we justify the introduction of noncommutative differential geometry, from the mathematical and theoretical physics point of view. In order to do this, we recall how one defines “noncommutative topology” and “noncommutative measure theory”, and we make a brief presentation of the mathematical objects used today in particle physics.

Among the many noncommutative differential calculi already introduced in the literature, except the universal one which we recall in a purely algebraic context, we have chosen to present three of them: the derivation-based differential calculus, for which we present various related recent structures; the differential calculus based on a Dirac operator and the notion of bicovariant differential calculi over Hopf algebras.

We then show the usefulness of the notion of a connection in noncommutative differential geometry both for mathematics and particle physics. We use the previously introduced differential calculi to give concrete examples of new considerations about connections. Particularly, we recall and illustrate the recent definitions of central and diagonal bimodules, linear connections and bimodule connections.

Table des matières