Thèse de Doctorat

Présentée à

l'Université Paul Verlaine-Metz

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paul Verlaine-Metz
Spécialité : Mathématiques fondamentales

par

Mathieu MOLITOR

Grassmanniennes non-linéaires, groupes de difféomorphismes unimodulaires et quelques équations hamiltoniennes en dimension infinie

---

Soutenue publiquement le 27 juin 2007

Professeurs membres du jury :

Laboratoire de Mathématiques et Applications de Metz
UMR 7122 du CNRS et de l'Université Paul Verlaine-Metz
Ile du Saulcy, F-57045 Metz Cedex 1

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement mon directeur de thèse Monsieur Tilmann Wurzbacher pour sa disponibilité durant ces années, son professionnalisme et aussi et surtout, pour ses qualités humaines qui en font plus qu'un directeur de thèse ou qu'un collègue à mes yeux.

Je n'oublie pas tous mes collègues et amis des universités de Metz et de Paderborn.

Enfin, une pensée toute particulière pour mes parents qui m'ont toujours donné un foyer chaleureux et le soutien nécessaire pour le bon accomplissement de mes études.

Table des matières

Introduction et résumé de la thèse

Le présent travail s'articule de façon générale autour du lien profond découvert par Arnold dans les années 60 (voir [Arn66]) entre mécanique des fluides et géométrie de dimension infinie. Dans son travail, Arnold interprète l'équation d'un fluide parfait imcompressible (aussi appelée équation d'Euler imcompressible), évoluant sur une variété riemannienne compacte et orientée (M, g) munie d'une forme de volume μ, comme étant une équation décrivant les géodésiques du groupe de Lie fréchétique $\mathrm{SDiff}(M, \mu) = \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \,|\, \varphi^* \mu = \mu\}$ des difféomorphismes "unimodulaires" de M par rapport à une certaine métrique naturelle invariante à droite. L'équation d'Euler incompressible s'écrit classiquement :

$$\frac{d}{dt} X + \nabla_X X = \nabla p \,, \tag{1}$$

où $X \in \mathcal{X}(M, \mu) := \{Y \in \mathcal{X}(M) \,|\, \mathrm{div}_\mu(Y) = 0\}$ est le champ de vecteurs de M dépendant du temps et à divergence nulle (la divergence par rapport à μ étant définie par la relation $\mathcal{L}_X \, \mu = \mathrm{div}_\mu(X) \cdot \mu$) qui décrit la vélocité des particules du fluide considéré à un instant t et où $p \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ est interprétée comme la pression du fluide et est déterminée par la décomposition de Helmholtz-Hodge via la condition $\mathrm{div}_\mu(X) = 0$ (voir [Arn66], page 341 ou [dR84] pour la décomposition de Helmholtz-Hodge) . Pour Arnold, l'espace $\mathcal{X}(M, \mu)$ est simplement l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{SDiff}(M, \mu)$ et l'équation (1) peut être obtenue comme équation d'Euler sur le "dual régulier" de $\mathcal{X}(M, \mu)$ (voir [AK98]).

Les travaux d'Arnold furent l'une des motivations pour de nombreuses recherches visant à élaborer la théorie des variétés de dimension infinie. Citons pour exemple [Pal68] et [Lan02] pour le cadre banachique, [Omo97] pour les variétés ILH ("inverse limit of Hilbert spaces"), [Ham82] dont la théorie des variétés fréchétiques modérées ("tame" en anglais) s'inspire des travaux de [Ser72], [KM97] pour les variétés convenables et [Mil84] pour les variétés modelées sur des espaces vectoriels topologiques localement convexes. La première de ces théories qui fut assez développée pour rendre complètement rigoureuses les idées d'Arnold, fut celle d'Omori (voir [Omo97] et [EM70]), suivie de la théorie des variétés modérées d'Hamilton. Ces deux théories sont (à notre connaissance), les seules pouvant prouver l'existence d'une structure de groupe de Lie fréchétiques sur $\mathrm{SDiff}(M, \mu)$. La raison en est que pour construire une structure différentiable sur $\mathrm{SDiff}(M, \mu)$, un théorème d'inversion local est nécessaire sur les espaces modèles des théories considérées, théorèmes d'inversion qui ne sont disponibles que pour les espaces ILH et les espaces modérés (rappelons que les groupes de difféomorphismes nécessitent de travailler dans un cadre non-banachique).

Parallèlement à ces travaux sur les fondements de la géométrie en dimension infinie, d'autres études plus ou moins formelles, continuèrent d'explorer les liens entre mécanique des fluides et géométrie de dimension infinie. C'est dans ce contexte, une avancée notable eu lieu en 1983 lorsque Marsden et Weinstein (voir [MW83]) montrèrent que l'équation d'un filament de vorticité (qui est une équation bien connue en mécanique des fluides, voir par exemple, [Ric96] pour une introduction historique de cette équation), pouvait s'interpréter comme une équation hamiltonienne sur certaines orbites coadjointes du groupe SDiff$(\mathbb{R}^3, \mu)$ (μ étant la forme de volume canonique de $\mathbb{R}^3$). Cette équation s'écrit :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \kappa \cdot B\,, \tag{2}$$

où $\alpha\,:\,S^1 \to \mathbb{R}^3$ est un plongement dépendant du temps dont l'image est appelé "filament", κ est la courbure de α et B la binormale associée à α. La généralisation directe de (2) au cas général d'un plongement dont l'image est une sous-variété de codimension deux est apparue à notre connaissance pour la première fois en 2004 dans les travaux d'Haller et Vizman (voir [HV04]). Cette généralisation utilise pour objet central une variété fréchétique appelée "grassmannienne non-linéaire" et est notée $Gr_k(M)$. Cette objet, qui se définit comme étant l'ensemble des sous-variétés compactes, orientées et de dimension k d'une variété M donnée, fut introduit par Hamilton qui lui donna notamment une structure de variété fréchétique (voir [Ham82]). Parallèlement, Marsden et Weinstein, mirent en évidence une structure presque-complexe sur la grasmannienne non-linéaire dans le cas spécial des sous-variétés de dimension un de $\mathbb{R}^3$ (ou plus justement, ils introduisirent une structure presque-complexe sur l'espace des lacets de $\mathbb{R}^3$, voir [MW83]). En 1996, Ismagilov définit une structure presque-complexe sur la grassmannienne non-linéaire pour des sous-variétés de codimension deux d'une variété riemannienne M quelconque (voir [Ism96]).

Dans le cas spécial où les sous-variétés considérées de la grassmannienne non-linéaire sont de codimension deux, l'équation (2) se généralise à :

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma_t = J\,\mathrm{Trace}(\Pi_{\Sigma_t})\,, \tag{3}$$

où $\Sigma_t \subseteq M$ est une sous-variété compacte orientée de M, de codimension 2 et dépendant du temps, $\mathrm{Trace}(\Pi_{\Sigma_t})$ désigne la trace de la seconde forme fondamentale Π_{Σ_t} de Σ_t dans M et où J correspond à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur les fibres normales de Σ_t (qui sont de codimension 2, voir Chapitre 1 pour plus de détails sur l'opérateur J). De plus, Haller et Vizman interprètent certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$ comme des orbites coadjointes du groupe SDiff(M, μ), ce qui leur permet de voir l'équation d'un filament de vorticité (3) comme une équation hamiltonienne.

Une autre variante de l'équation (3) (qui lui est équivalente), est l'équation

$$\frac{d\,f}{dt} = J\,\mathrm{Trace}(\Pi_{f(\Sigma)})\,, \tag{4}$$

où Σ est une vatiété orientée compacte sans bord, dont la dimension est par deux inférieure à celle de M et où $f \in Emb(\Sigma, M)$ est un plongement dépendant du temps (ici, $Emb(\Sigma, M)$ désigne l'espace des plongements de Σ dans M).

La présente thèse a pour objet d'étude l'équation d'un filament de vorticité dans ses diverses formes, l'équation d'un fluide parfait imcompressible lorsque ce dernier est invariant par rapport à l'action d'un groupe de Lie compact ainsi que l'étude des variétés fréchétiques qui "gravitent" autour de l'équation d'un filament de vorticité, notamment certains sous-groupes du groupe des difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte donnée et bien entendu, la grassmannienne non-linéaire. Deux appendices suivent notre étude. Le premier précise les notions de calcul différentiel que nous utilisons sur les espaces de Fréchet et le deuxième donne tous les détails techniques de la démonstration du fait qu'il existe une structure de groupe de Lie fréchétique sur le groupe des difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte. Le corps de notre étude se découpe en trois chapitres que nous détaillons ci-dessous.

Le premier chapitre de cette thèse, s'attache à décrire de façon analytique, l'équation d'un filament de vorticié dans sa forme la plus simple (équation (4)). Pour ce faire, sont introduits dans la section 1.1.1 les outils algébriques nécéssaires pour comprendre l'opérateur J , ce dernier étant soigneusement étudié en (1.1.2) . Nous trouvons alors que la forme locale de l'équation d'un filament de vorticité est donnée par la formule :

$$\frac{\partial f^l}{\partial t} = (-1)^{n+l} \frac{1}{\sqrt{\det(\Psi)}} \frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n-2} \Psi^{ij} \Big(\sum_{a,b=1}^{n} \partial_{x_i} f^a \partial_{x_j} f^b \Gamma^k_{ab} + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_j} \Big) \cdot \begin{vmatrix} \big(G\,\partial_{x_1} f\big)^1 & \cdots & \widehat{\big(G\,\partial_{x_1} f\big)^l} & \cdots & \big(G\,\partial_{x_1} f\big)^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^1 & \cdots & \widehat{\big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^l} & \cdots & \big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^n \\ G_{1k} & \cdots & \widehat{G_{lk}} & \cdots & G_{nk} \end{vmatrix} \tag{5}$$

pour $l \in \{1, ...n-2\}$ (voir section 1.1.3 pour les notations).

Dans la section 1.2, nous revenons sur l'astuce d'Hasimoto (voir [Has72]), qui permet dans le cas particulier d'un filament unidimensionnel de l'espace euclidien usuel, d'associer à un filament de vorticité, une fonction Ψ vérifiant l'équation d'évolution de Schrödinger non-linéaire :

$$-i\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\,\Psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\,|\Psi|^2 \cdot \Psi \tag{6}$$

(voir section 1.2). La clef de cette astuce réside dans la fonction Ψ que définit Hasimoto et dont l'origine est plutôt intriguante. C'est dans ce contexte que nous proposons dans la section 1.2.1, une interprétation de la fonction Ψ basée sur la notion de repère mobile, et de montrer dans la section 1.2.2, que l'astuce d'Hasimoto se généralise au cas des filaments unidimensionnels plongés dans une variété riemannienne tridimensionnelle à courbure constante.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous proposons un autre espace de configuration que celui suggéré par Arnold pour étudier l'équation d'Euler incompressible lorsque certaines symétries sont présentes. Notre point de départ est de supposer que le fluide évolue sur l'espace total d'un fibré principal $G \hookrightarrow P \rightarrow B$ (P étant connexe et orientable) et que la métrique h^P de P, et donc aussi $\mu^P := d\,\mathrm{vol}_{h^P}$, la forme volume de P induite par h^P, est G-invariante. On est alors naturellement amené à considérer non pas $\mathrm{SDiff}\,(P, \mu^P)$, mais plutôt le groupe $\mathrm{SAut}\,(P, \mu^P)$ des automorphismes de P qui préservent μ^P. En d'autres termes, on suppose initialement que le champ de vecteurs décrivant la vélocité du fluide est G-invariant. Cette approche nous permet notamment dans la section 2.3 d'écrire les équation d'Euler (lorsqu'il y a des symétries), comme un système de deux équations couplées, l'une vivant sur l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle (pour une certaine forme volume) de B, l'autre vivant sur l'algèbre de Lie (ou plus exactement sont dual) du groupe de jauges $\mathrm{Gau}\,(P)$ de P. Le système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{lcc} \dfrac{d}{dt}X & = & -\nabla_X X - \widetilde{(\xi, df)}^{\flat} + \widetilde{(\xi, i_{X^*}\Omega)}^{\flat} + \nabla p \; ; \\ \dfrac{d}{dt}\xi & = & -\mathrm{ad}^*(f)\,\xi - X^*(\xi) \end{array} \right. \tag{7}$$

(voir 2.3.3 pour les notations). Il semble que ces équations aient une signification physique (voir [Viz01b] qui traite le cas particulier où $G = S^1$ et qui met en évidence un champ magnétique dont l'origine semble être lié à la présence d'un monopole magnétique de Dirac).
La première partie de ce deuxième chapitre décrit la structure de groupe de Lie fréchétique du groupe $\mathrm{SDiff}(M, \mu)^G$ des difféomorphismes G-équivariants d'une variété compacte M qui préservent une forme de volume μ. Les arguments utilisés reprennent pour la plupart ceux de Hamilton (voir [Ham82], Theorem 2.5.3.) et consistent essentiellement à vérifier que les constructions nécessitant le théorème d'inversion de Nash-Moser soient compatibles avec les symétries. Dans la section 2.2, l'étude détaillée de la "structure" d'une forme de volume μ^P G-invariante sur un fibré principal $G \hookrightarrow P \longrightarrow B$, nous permet de donner une formule d'intégration (Proposition 2.16) nécessaire pour la détermination des équations d'Euler du groupe $\mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ (Théorème 2.37). Enfin dans la section 2.4, nous montrons, dans un esprit proche de [ACMM89] où est montré que $\mathrm{Aut}(P)$ est un $\mathrm{Gau}(P)$-fibré principal, que $\mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ est aussi un $\mathrm{Gau}(P)$-fibré principal dont la base $\mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B)$ est une collection de composantes connexes de $\mathrm{SDiff}(B, V\mu^B)$ où $V\mu^B$ est une certaine forme de volume de B. On obtient ainsi (voir Théorème 2.50), une suite exacte de groupes de Lie fréchétiques :

$$\{e\} \longrightarrow \mathrm{Gau}(P) \longrightarrow \mathrm{SAut}(P, \mu^P) \longrightarrow \mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B) \longrightarrow \{e\}\ . \tag{8}$$

Enfin dans le troisième et dernier chapitre de cette thèse, nous abordons une étude détaillée de la grassmannienne non-linéaire qui se découpe en trois parties :

– dans la première, nous portons notre attention sur le fait qu'il existe deux points de vue permettant de définir $Gr_k(M)$:

- le premier, qui est amplement développé dans [KM97], consiste à prendre $\Sigma \in Gr_k(M)$ et à considérer l'espace des plongements lisses $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$. On peut alors identifier $Gr_k(M)$ (ou plutôt la réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$) comme étant le quotient de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ par rapport à l'action naturelle du groupe $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ des difféomorphismes de Σ qui préservent une forme de volume donnée, sur $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$. On obtient ainsi un fibré principal $\mathrm{Diff}^+(\Sigma) \hookrightarrow \mathrm{Emb}\,(\Sigma, M) \to \mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ (voir Theorem 44.1., page 474 de [KM97]).
- Le deuxième, plus intuitif, consiste à modeler directement $Gr_k(M)$ sur des espaces de sections $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ où $\Sigma \in Gr_k(M)$ et $N\Sigma$ désigne le fibré normal de Σ dans M. Cette approche est esquissée dans [Ham82].

La section 3.1.1 s'attache à décrire très explicitement la construction ébauchée par Hamilton dans la catégorie des variétés fréchétiques modérées. La section 3.1.2 fait le lien entre les deux points de vue cités. Nous y montrons notamment un théorème analogue au Theorem 44.1. de [KM97], c'est-à-dire, nous montrons que l'espace des plongements $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ est un fibré principal, de groupe de structure $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ et dont la base est une réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$. Enfin dans la section 3.1.3, nous montrons que les composantes connexes de $Gr_k(M)$ sont homogènes sous l'action naturelle (et lisse) de $\mathrm{Diff}^0(M)$, la composante connexe en l'élément neutre du groupe des difféomorphismes de M. Cette homogénéité est déjà mentionnée, mais admise sans preuve, dans [Ism96]. En revanche, en adoptant le point de vue de [KM97] qui définit la Grassmannienne non-linéaire comme le quotient de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ par l'action de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$, l'homogénéité des composantes connexes de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ sous $\mathrm{Diff}^0(M)$ implique automatiquement l'homogénéité des composantes connexes correspondantes du quotient $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$. C'est cette approche qui est utilisée dans [HV04]. Ici encore, et contrairement à cette dernière, nous utilisons l'approche de [Ham82] et regardons $Gr_k(M)$ comme une collection de sous-variétés dont la structure différentielle est celle expliquée dans la section 3.1.1. Ce faisant, un travail supplémentaire est nécessaire pour montrer l'homogénéité des composantes connexes de la grassmannienne non-linéaire.

– Dans la deuxième partie, nous revenons sur certains résultats, plus ou moins présents dans la littérature, qui concernent de façon générale le calcul différentiel et les diverses structures géométriques que l'on peut considérer sur $Gr_k(M)$. De façon plus détaillée, dans la section 3.2.1, nous montrons le "Lemma 1" de [HV04]. Ce lemme, qui est énoncé sans démonstration dans l'article [HV04], donne des formules utiles pour certaines formes différentielles de $Gr_k(M)$ construites à partir de formes différentielles de M (voir Proposition 3.23). Dans la section 3.2.2, nous montrons brièvement que dans le cas particulier de sous-variétés de codimension deux, la grassmannienne non-linéaire munie de sa métrique naturelle et de sa structure presque complexe J (correspondant à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur les fibres normales), est une variété fréchétique faiblement presque-kählérienne. Ce résultat est connu depuis 1983 dans la cas des filaments de $\mathbb{R}^3$ (voir [MW83]) . Dans le cas d'une variété riemannienne M quelconque, ce résultat fut mentionné pour la première fois par Ismagilov dans [Ism96], et montré dans [HV04]. C'est parce que la démonstration de Haller et Vizman utilise le "Lemma 1" mentionné ci-dessus, que nous avons jugé utile d'inclure dans la section 3.2.2, une démonstration sur le fait que $Gr_k(M)$ soit une variété fréchétique faiblement presque-kählérienne. Dans le section 3.2.3, pour un certain $\mathcal{L} \in C^\infty(TM, \mathbb{R})$, nous définissons un Lagrangien $\mathcal{L}^\flat$ sur $TEmb(\Sigma, M)$ en posant :

$$\mathcal{L}^\flat(f,h) := \int_{f(\Sigma)} (\mathcal{L} \circ h \circ f^{-1}) \cdot \mu^{f(\Sigma)} = \int_\Sigma (\mathcal{L} \circ h) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)} \,, \tag{9}$$

pour $f \in Emb(\Sigma, M)$ et $h \in T_f Emb(\Sigma, M) \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$ (on regarde ici $Emb(\Sigma, M)$ comme un ouvert de la variété fréchétique $C^\infty(\Sigma, M)$) .
Le but de la section 3.2.3, dont l'esprit est très proche de [MM05], est de déterminer les équation d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien $\mathcal{L}^\flat$.
Avec les notations introduites en 3.2.3, ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
&(\nabla^h \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}} - \Big(div^{f_t(\Sigma)}(\partial_t^\top f) \circ f_t\Big) \cdot (\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}} \\
&+ \Big(h^M\big(\partial_t^\perp f, \operatorname{Trace} \Pi_{f_t(\Sigma)}\big) \circ f_t\Big) \cdot (\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}} - \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \operatorname{Trace} \Pi_{f_t(\Sigma)} \\
&- \nabla^{f_t(\Sigma)} \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t} \circ f_t^{-1}\Big)_{f_t} - \nabla^M_{\frac{\partial f}{\partial t}} \big(\nabla^v \mathcal{L}\big)_{\frac{\partial f}{\partial t}} = 0 \,,
\end{aligned} \tag{10}$$

où f_t est un chemin lisse de $Emb(\Sigma, M)$. Enfin dans la section 3.2.4, nous montrons que l'équation d'un filament de vorticité peut être vue comme une équation hamiltonienne sur la grassmannienne non-linéaire par rapport à la structure symplectique canoniquement induite par la structure de variété fréchétique faiblement presque-kählérienne de $Gr_k(M)$, l'hamiltonien utilisé étant simplement le volume des sous-variétés. Ce résultat apparait déjà dans [HV04], mais nous espérons l'avoir rendu plus rigoureux, ou à défaut, plus clair.

– Dans la troisième partie, nous suivont la philosophie du deuxième chapitre de cette thèse et introduisons, étant donné un fibré principal $G \hookrightarrow P \to B$, la grassmannienne non-linéaire G-invariante $Gr_k(P)^G$ que l'on définit par $Gr_k(P)^G := \{\Sigma \in Gr_k(P) \,|\, \vartheta_g(\Sigma) = \Sigma, \forall g \in G\}$ ($\vartheta : P \times G \to P$ étant l'action à droite du groupe G sur P) . On montre alors qu'il existe un symplectomorphisme naturel entre $\big(Gr^2(P)^G, \widetilde{\mu^P}\big)$ et $\big(Gr^2(B), \widetilde{V\mu^B}\big)$ (voir section 3.3.1 pour les notations) , ce qui nous permet heuristiquement de dire que "l'équation d'un filament de vorticité avec symétrie est équivalente à l'équation d'un filament de vorticité en dimension plus basse". En particulier, on en déduit que lorsque la dimension de la variété base B est deux, alors l'équation d'un filament de vorticité avec symétrie se réduit à l'étude du flot d'un champ de vecteurs sur une surface.

Finalement, cette thèse contient deux appendices A et B. L'appendice A a pour objet de préciser les notions de calcul différentiel que nous utilisons sur des espaces fréchétiques. Nous y montrons que les deux notions de calcul différentiel les plus courantes sur un espace de Fréchet (celle développée par exemple dans

[Ham82], et celle utilisant la notion de courbes lisses qui est développée dans [KM97]), sont équivalentes, ce qui nous permet de les utiliser indifféremment dans ce texte.
L'appendice B a pour but de compléter quelques détails techniques de l'article "The inverse function theorem of Nash-Moser" de Richard Hamilton ([Ham82]), où est, entre autre, introduit la catégorie des variétés fréchétiques modérées.
Plus précisément, nous y détaillons la démonstration de Hamilton donnant l'existence d'une structure de variété fréchétique modérée sur le groupe des difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte orientée. Nous complétons ainsi certaines constructions et arguments concernant la catégorie des espaces et des variétés modérés en utilisant très explicitememt des espaces de sections lisses d'un fibré vectoriel sur une variété compacte. Parmi les variétés considérées, sont traités le groupe de tous les difféomorphismes ainsi que celui de tous les difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte.

Chapitre 1

L'équation d'un filament de vorticité

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation d'un filament de vorticité dans sa forme la plus basique, c'est-à-dire en terme d'équation d'évolution d'une application entre deux variétés. Pour (M, g) une variété riemannienne orientée de dimension $n \geqslant 2$ et Σ une variété orientée de dimension $n-2$, l'équation s'écrit $\frac{\partial f}{\partial t} = J \operatorname{Trace} \Pi_{f(\Sigma)}$ où $f : \Sigma \to M$ est un plongement dépendant du temps et où $\Pi_{f(\Sigma)}$ désigne la seconde forme fondamentale de la sous-variété plongée $f(\Sigma)$. L'opérateur J correspond à la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ sur les fibres normales de $f(\Sigma)$ (qui sont de dimension deux). Remarquons que le fibré normal de $f(\Sigma)$ est canoniquement orienté (voir 1.1.2).

L'équation d'un filament de vorticité étant de nature géométrique, i.e globale, nous nous efforçerons d'en donner aussi une description en coordonnées locales (voir (1.6)). Pour ce faire, sont introduits dans la section 1.1.1 les outils algébriques nécéssaires pour comprendre l'opérateur J, ce dernier étant soigneusement étudié en (1.1.2). La forme locale de l'équation d'un filament de vorticité est alors donnée en (1.1.3).

Dans la section 1.2, nous revenons sur l'astuce d'Hasimoto, qui permet dans le cas particulier d'un filament unidimensionnel de l'espace euclidien usuel, d'associer au filament en question, une fonction Ψ vérifiant l'équation d'évolution de Schrödinger non-linéaire (voir section 1.2). La clef de cette astuce réside dans la fonction Ψ que définit Hasimoto et dont l'origine est plutôt intriguante. C'est dans ce contexte que nous nous proposons dans la section 1.2.1, de donner une interprétation de la fonction Ψ, et de montrer dans la section 1.2.2, que l'astuce d'Hasimoto se généralise au cas des filaments unidimensionnel plongés dans une variété riemannienne tridimensionnelle à courbure constante.

1.1 La forme locale de l'équation d'un filament de vorticité

1.1.1 Préliminaires algébriques

Soient $(E, <\,,\,>)$ un espace vectoriel euclidien orienté et $\mathcal{E} := \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de E orientée positivement. Pour $v_1, ..., v_{n-1} \in E$, on définit le vecteur $\wedge(v_1, ..., v_n) \in E$ par :

$$\wedge(v_1, ..., v_n) := \sharp^{-1} *^{-1} (\sharp\, v_1 \wedge \cdots \wedge \sharp\, v_{n-1}) \tag{1.1}$$

où $\sharp\ :\ E \to E^*,\ v \mapsto <v, \cdot>$ est l'opérateur de "dualisation" et $*\ :\ E^* \to \Lambda^{n-1}(E^*)$, l'opérateur de Hodge.

Remarque 1.1 *Dans un esprit plus algébrique, nous pourrions définir le vecteur $\wedge(v_1, ..., v_n)$ comme étant l'unique vecteur de E vérifiant pour tout $w \in E$ la relation suivante :*

$$<w, \wedge(v_1, ..., v_n)> \cdot\ \Omega = w \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{n-1}\,, \tag{1.2}$$

où $\Omega := e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \in \Lambda^n E$. On peut montrer (voir le point (i) de la Proposition 1.5), que cette définition est indépendante de la base orthonormée $\mathcal{E}$ choisie et qu'elle est équivalente à la définition (1.1) *. Par la suite, nous utiliserons de préférence la définition* (1.1) *qui est plus naturelle du point de vue riemannien.*

Lemme 1.2 *Pour $v_1, ..., v_{n-1} \in E$, on a la formule suivante :*

$$\begin{aligned}&\wedge(v_1, ..., v_{n-1})\\ =\ & \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ v_1^1 & & v_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & \widehat{v_1^i} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & \widehat{v_{n-1}^i} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} e_i\end{aligned}$$

(ici "$\widehat{\ }$" signifie que l'on omet le symbole correspondant et pour $i \in \{1, ..., n-1\}$ et $j \in \{1, ..., n\}$, v_i^j désigne la $j-$ième coordonnée du vecteur v_i dans la base $\mathcal{E}$).

Démonstration. Notons $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ la base duale associée à $\{e_1, ..., e_n\}$ (i.e $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$) . On a :

$$\begin{aligned} *\sharp \wedge (v_1, ..., v_{n-1}) &= \sharp\, v_1 \wedge \cdots \wedge \sharp\, v_{n-1} \\ &= \sum_{i_1, ..., i_{n-1}=1}^{n} v_1^{i_1} \cdots v_{n-1}^{i_{n-1}}\, e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_{n-1}}^*\,. \end{aligned}$$

Ici pour faciliter le calcul, introduisons, pour $i \in \{1, ..., n\}$, les notations suivantes :

$$\alpha_1^i = 1,\ ...,\ \ \alpha_{i-1}^i = i-1,\ \ \alpha_i^i = i+1,\ ...,\ \ \alpha_{n-1}^i = n$$

(en particulier $\{\alpha^i_1, ..., \alpha^i_{n-1}\} = \{1, ..., \widehat{i}, ..., n\}$). On a alors :

$$
\begin{aligned}
& * \sharp \wedge (v_1, ..., v_{n-1}) \\
= & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in \mathbb{S}_{n-1}} v_1^{\alpha^i_{\tau(1)}} \cdots v_{n-1}^{\alpha^i_{\tau(n-1)}} \, e^*_{\alpha^i_{\tau(1)}} \wedge \cdots \wedge e^*_{\alpha^i_{\tau(n-1)}} \\
= & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in \mathbb{S}_{n-1}} (-1)^\tau \, v_1^{\alpha^i_{\tau(1)}} \cdots v_{n-1}^{\alpha^i_{\tau(n-1)}} \, e^*_{\alpha^i_1} \wedge \cdots \wedge e^*_{\alpha^i_{n-1}} \\
= & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau \in \mathbb{S}_{n-1}} (-1)^\tau \, v_1^{\alpha^i_{\tau(1)}} \cdots v_{n-1}^{\alpha^i_{\tau(n-1)}} \, e^*_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_i} \wedge \cdots \wedge e^*_{n-1} \\
= & \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} v_1^{\alpha^i_1} & \cdots & v_1^{\alpha^i_{n-1}} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^{\alpha^i_1} & \cdots & v_{n-1}^{\alpha^i_{n-1}} \end{vmatrix} \underbrace{e^*_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e^*_i} \wedge \cdots \wedge e^*_{n-1}}_{=(-1)^{i+1} * e^*_i} \\
= & \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & \widehat{v_1^i} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & \widehat{v_{n-1}^i} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} (-1)^{i+1} \, * \, e^*_i \\
= & * \sharp \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & \widehat{v_1^i} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & \widehat{v_{n-1}^i} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} e_i \, .
\end{aligned}
$$

□

Soient $\mathcal{A} := \{a_1, ..., a_n\}$ une base positive de E et $v_1, ..., v_{n-1} \in E$. Pour $v \in E$, notons $v^{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ constitué des coordonnées de v dans la base $\mathcal{A}$. Posons aussi :

- $A := (<a_i, a_j>)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$;
- P : matrice de passage de $\mathcal{A}$ à $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, $v^{\mathcal{E}} = P\, v^{\mathcal{A}}$ pout tout $v \in E$.

Remarquons que :

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= <a_i, a_j> = \Big\langle \sum_{l=1}^{n} P_{li}\, e_l, \sum_{k=1}^{n} P_{kj}\, e_k \Big\rangle \\
&= \sum_{l,k=1}^{n} P_{li}\, P_{kj}\, \delta_{lk} = \sum_{k=1}^{n} P_{ki}\, P_{kj} = \left({}^tP\, P\right)_{ij} .
\end{aligned}
$$

Ainsi $A = {}^tP\, P$.

Lemme 1.3 *Pour $v_1, ..., v_{n-1} \in E$, on a la formule :*

$$
\wedge(v_1, ..., v_{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{det(A)}} \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \left(A\, v_1^{\mathcal{A}}\right)^1 & & \left(A\, v_1^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \vdots & & \vdots \\ \left(A\, v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \left(A\, v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^n \end{vmatrix} . \qquad (1.3)
$$

Démonstration. Notons β le déterminant apparaissant dans la formule (1.3). En développant ce déterminant, on obtient :

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \widehat{\left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^k} & \cdots & \left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \widehat{\left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^k} & \cdots & \left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^n \end{vmatrix} a_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} \left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \widehat{\left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^k} & \cdots & \left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \widehat{\left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^k} & \cdots & \left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^n \end{vmatrix} \sum_{l=1}^{n} P_{lk}\, e_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \begin{vmatrix} P_{l1} & \cdots & P_{ln} \\ \left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^1 & & \left(A\,v_1^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \vdots & & \vdots \\ \left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \left(A\,v_{n-1}^{\mathcal{A}}\right)^n \end{vmatrix} e_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \begin{vmatrix} \left({}^tP\,a_l^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \left({}^tP\,a_l^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \left({}^tP\,v_1^{\mathcal{E}}\right)^1 & \cdots & \left({}^tP\,v_1^{\mathcal{E}}\right)^n \\ \vdots & & \vdots \\ \left({}^tP\,v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^1 & \cdots & \left({}^tP\,v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^n \end{vmatrix} e_l$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \det\left({}^tP\right) \begin{vmatrix} \delta_{1l} & \cdots & \delta_{nl} \\ \left(v_1^{\mathcal{E}}\right)^1 & & \left(v_1^{\mathcal{E}}\right)^n \\ \vdots & & \vdots \\ \left(v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^1 & \cdots & \left(v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^n \end{vmatrix} e_l\,.$$

Il en résulte, étant donné la relation $\det\left({}^tP\right) = \sqrt{\det(A)}$, que

$$\beta = \sqrt{\det(A)} \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+1} \begin{vmatrix} \left(v_1^{\mathcal{E}}\right)^1 & \cdots & \widehat{\left(v_1^{\mathcal{E}}\right)^l} & \cdots & \left(v_1^{\mathcal{E}}\right)^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \left(v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^1 & \cdots & \widehat{\left(v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^l} & \cdots & \left(v_{n-1}^{\mathcal{E}}\right)^n \end{vmatrix} e_l$$

$$= \sqrt{\det(A)}\,\big(\wedge(v_1, ..., v_{n-1})\big)\,.$$

□

Remarque 1.4 *Pour $E = \mathbb{R}^3$ muni de la métrique et de l'orientation canonique, $\wedge$ est le produit vectoriel usuel.*

Proposition 1.5 *Pour $v_1, ..., v_{n-1} \in E$, on a les propriétés et formules suivantes :*

(i) $<\wedge(v_1, ..., v_{n-1}), v> = det(v, v_1, ..., v_{n-1})$ *pour tout* $v \in E$.

(ii) La famille $\{v_1,...,v_{n-1}\}$ *est liée si et seulement si* $\wedge(v_1,..., v_{n-1}) = 0$.

(iii) $\wedge(v_1,...,v_{n-1})$ *est perpendiculaire à* v_i *pour tout* $i \in \{1,..., n-1\}$.

(iv) Si $\{v_1,...,v_{n-1}\}$ *est une famille libre de* E *, alors la famille de vecteurs* $\{v_1,...,v_{n-1}, (-1)^{n+1} \wedge (v_1,...,v_{n-1})\}$ *est une base positivement orientée de* E *.*

(v) Si $v \in Vect\{e_1,...,e_{n-2}\}^{\perp}$ *, alors* $\| \wedge (e_1,...,e_{n-2}, v)\| = \| v\|$ *.*

Démonstration. Montrons (i) . Pour $v = \sum_{i=1}^n v^i e_i \in E$, on a :

$$
\begin{aligned}
<\wedge (v_1,..., v_{n-1}), v> &= \Big\langle \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & \widehat{v_1^i} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & \widehat{v_{n-1}^i} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} e_i \, , v \Big\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & \widehat{v_1^i} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & \widehat{v_{n-1}^i} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} v^j \, \delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} v_1^1 & \cdots & \widehat{v_1^i} & \cdots & v_1^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n-1}^1 & \cdots & \widehat{v_{n-1}^i} & \cdots & v_{n-1}^n \end{vmatrix} v^i \\
&= \det (v, v_1,..., v_{n-1}) \, .
\end{aligned}
$$

Les points (ii) et (iii) découlent de (i) .

Montrons (iv) . Le fait que $\{v_1,...,v_{n-1}, (-1)^{n+1} \wedge (v_1,...,v_{n-1})\}$ soit une base de E découle de (ii) et (iii) . Pour montrer que cette base est positivement orientée, prenons $v_n \in E$ tel que :

- $\mathcal{V} := \{v_1,...,v_n\}$ soit une base positive de E ;
- $v_n \in \{v_1,...,v_{n-1}\}^{\perp}$;
- $\|v_n\| = 1$.

Pour un vecteur u de E , notons $u^{\mathcal{V}}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ constitué des coordonnées de u dans la base $\mathcal{V}$.

Nous devons montrer que le déterminant suivant est positif :

$$
\alpha := \begin{vmatrix} \big(v_1^{\mathcal{V}}\big)^1 & \cdots & \big(v_{n-1}^{\mathcal{V}}\big)^1 & (-1)^{n+1} \big(\wedge (v_1,...,v_{n-1})^{\mathcal{V}}\big)^1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \big(v_1^{\mathcal{V}}\big)^n & \cdots & \big(v_{n-1}^{\mathcal{V}}\big)^n & (-1)^{n+1} \big(\wedge (v_1,...,v_{n-1})^{\mathcal{V}}\big)^n \end{vmatrix} .
$$

Or,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n+1} \big(\wedge (v_1,...,v_{n-1})^{\mathcal{V}}\big)^1 \\ 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & (-1)^{n+1} \big(\wedge (v_1,...,v_{n-1})^{\mathcal{V}}\big)^n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n+1} \big(\wedge (v_1,...,v_{n-1})^{\mathcal{V}}\big)^n .
\end{aligned}
$$

D'après le Lemme 1.3 page 17 , α est la n-ième composante du vecteur

$$(-1)^{n+1}\,\frac{1}{\sqrt{\det(A)}}\begin{vmatrix} v_1 & \cdots & v_{n-1} & v_n \\ A_{11} & \cdots & A_{n-1n} & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1n-1} & \cdots & A_{n-1n-1} & A_{nn-1} \end{vmatrix}$$

où $A_{ij} := <v_i,\, v_j>$ pour $i, j \in \{1, ..., n\})$.
En utilisant la relation $<v_n,\, v_i> \; = \; \delta_{ni}$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} \alpha &= (-1)^{n+1}\,\frac{1}{\sqrt{\det(A)}}\,(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n-1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n-1} & \cdots & A_{n-1n-1} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}\begin{vmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n-1n} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{1n-1} & \cdots & A_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det(A)}}\,\det(A) \\ &= \sqrt{\det(A)} > 0\,. \end{aligned}$$

Montrons (v) . Prenons $v = \sum_{i=1}^{n} v^i\, e_i \in E$ tel que $v \in \{e_1, ..., e_{n-2}\}^{\perp}$. On a :

$$\begin{aligned} \wedge(e_1, ..., e_{n-2}, v) &= \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_{n-2} & e_{n-1} & e_n \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & v^{n-1} & v^n \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n \begin{vmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & v^n \end{vmatrix} e_{n-1} + (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & v^{n-1} \end{vmatrix} e_n\,. \end{aligned}$$

Donc $\wedge(e_1, ..., e_{n-2}, v) = (-1)^n\big[v^n\, e_{n-1} - v^{n-1}\, e_n\big]$ dont la norme est bien celle de v . □

1.1.2 L'opérateur J

Soit P un sous-espace vectoriel orienté de E de codimension 2 . On peut orienter $P^{\perp}$ de la façon suivante : si $\{v_1, ..., v_{n-2}\}$ est une base positive de P , alors on décrète que $\{v_{n-1}, v_n\}$ est une base positive de $P^{\perp}$ si et seulement si $\{v_1, ..., v_n\}$ est une base positive de E . Cela permet de définir un opérateur $J\,:\,P^{\perp} \to P^{\perp}$ correspondant à la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Nous voulons exprimer J à l'aide de $\wedge$. Pour cela, nous pouvons remarquer que le vecteur

$$\xi := \frac{1}{\sqrt{\det\left(<v_i,\, v_j>\right)_{1\leq i,j\leq n-2}}}\;\wedge(v_1, ..., v_{n-2}, u)$$

(pour $u \in P^{\perp}$) ne dépend pas de la base positive $\{v_1, ..., v_{n-2}\}$ choisie sur P . En effet, prenons $\{e_1, ..., e_{n-2}\}$ une base orthonormée positive de P et L

un isomorphime de P préservant l'orientation. Notons A la matrice définie par $A_{ij} := <L\,v_j,\, e_i>$ pour $i, j \in \{1, ..., n{-}2\}$. On a :

$$\begin{aligned}
& \wedge(L\,v_1, ..., L\,v_{n-2}, u) \\
= \;& \wedge(\sum_{l_1=1}^{n-2} A_{l_1 1} \cdot e_{l_1}, ..., \sum_{l_{n-2}=1}^{n-2} A_{l_{n-2} n-2} \cdot e_{l_{n-2}}, u) \\
= \;& \sum_{l_1, ..., l_{n-2}=1}^{n-2} A_{l_1 1} \cdots A_{l_{n-2} n-2} \cdot \wedge(e_{l_1}, ..., e_{l_{n-2}}, u) \\
= \;& \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-2}} A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n-2)n-2} \cdot \wedge(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n-2)}, u) \\
= \;& \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n-2}} (-1)^{\sigma}\, A_{\sigma(1)1} \cdots A_{\sigma(n-2)n-2} \cdot \wedge(e_1, ..., e_{n-2}, u) \\
= \;& \det(A) \cdot \wedge(e_1, ..., e_{n-2}, u)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{\det\left(<L\,v_i,\, L\,v_j>\right)_{1 \le i,j \le n-2}}} \wedge (L\,v_1, ..., L\,v_{n-2}, u) \\
= \;& \frac{\det(A)}{\sqrt{\det\left(<L\,v_i,\, L\,v_j>\right)_{1 \le i,j \le n-2}}} \wedge (e_1, ..., e_{n-2}, u) \\
= \;& \frac{\det(A)}{\sqrt{\det\left({}^t A A\right)}} \wedge (e_1, ..., e_{n-2}, u) \\
= \;& \wedge(e_1, ..., e_{n-2}, u)\,.
\end{aligned}$$

Donc ξ ne dépend pas de la base positive choisie sur P . De plus, d'après le point (v) de la Proposition 1.5, on sait que $\|\,\xi\| = \|u\|$. Enfin, pour $u \neq 0 \in P^{\perp}$, d'après le point (iv) de la Proposition 1.5, $\{u, (-1)^{n+1}\,\xi\}$ est une base positive de $P^{\perp}$. On en déduit l'expression de J :

$$J\,u = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\det(V)}} \right) \cdot \wedge(v_1, ..., v_{n-2}, u) \tag{1.4}$$

où $V_{ij} := <v_i,\, v_j>$ pour tout $i, j \in \{1, ..., n-2\}$ et $u \in P^{\perp}$. Remarquons que l'on peut étendre J sur E en posant $J\,u = 0$ pour $u \in P$, la formule ci-dessus est alors toujours vraie.
Enfin, si $\{a_1, ..., a_n\}$ est une base positive de E , et en notant $A_{ij} := <a_i,\, a_j>$, on en déduit d'après le Lemme 1.3 :

$$J\,u = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\det(V)}} \frac{1}{\sqrt{\det(A)}} \begin{vmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ \left(A\, v_1^{\mathcal{A}}\right)^1 & & \left(A\, v_1^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \vdots & & \vdots \\ \left(A\, v_{n-2}^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \left(A\, v_{n-2}^{\mathcal{A}}\right)^n \\ \left(A\, u^{\mathcal{A}}\right)^1 & \cdots & \left(A\, u^{\mathcal{A}}\right)^n \end{vmatrix} . \tag{1.5}$$

1.1.3 La forme locale

Soient $(M, g =< , >)$ une variété riemannienne orientée de dimension $n \geq 2$, Σ une variété orientée de dimension $n-2$ et $f : \Sigma \to M$ un plongement de Σ dans M. Prenons aussi (U, φ) une carte positive de Σ de coordonnées locales associées $\{x_1, ..., x_{n-2}\}$. Pour $i \in \{1, ..., n-2\}$, on note $\partial_{x_i} f := \dfrac{\partial f}{\partial x_i} := f_* \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in \mathcal{X}(f(U))$.

Il s'ensuit que $\left\{ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_{n-2}} \right\}$ forme un repère positivement orienté de l'espace $T_{f(x)} f(\Sigma)$ pour chaque point $f(x)$ de $f(U) \subseteq f(\Sigma) \simeq \Sigma$. Soit aussi une carte positive (V, ψ) de M de coordonnées locales $\{y_1, ..., y_n\}$ et telle que $f(U) \subseteq V$. Notons

- $\Psi_{ij}(f(x)) := \left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, \dfrac{\partial f}{\partial x_j} \right\rangle_{f(x)}$ pour $i, j \in \{1, ..., n-2\}$ et $x \in U$ (par la suite nous noterons Ψ^{ij} pour désigner les coefficients de la matrice inverse de $(\Psi_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-2})$;
- $G_{ij}(p) := \left\langle \dfrac{\partial}{\partial y_i}, \dfrac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle_p$ pour $i, j \in \{1, ..., n\}$ et $p \in V$.

On a alors, d'après les formules (1.3), (1.4) et en utilisant la Proposition 1.5 :

$$
\begin{aligned}
J \operatorname{Trace} \Pi_{f(\Sigma)} &= (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\det(\Psi)}} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}, \operatorname{Trace} \Pi_{f(\Sigma)} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{\det(\Psi)}} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}, \sum_{i,j=1}^{n-2} \Psi^{ij} \, \Pi_{f(\Sigma)} \Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j} \Big) \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{i,j=1}^{n-2} \frac{\Psi^{ij}}{\sqrt{\det(\Psi)}} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}, \nabla^M_{\partial_{x_i} f} \, \partial_{x_j} f - \nabla^{f(\Sigma)}_{\partial_{x_i} f} \, \partial_{x_j} f \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{i,j=1}^{n-2} \frac{\Psi^{ij}}{\sqrt{\det(\Psi)}} \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}, \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{a,b=1}^{n} \Gamma^k_{ab} \, \partial_{x_i} f^a \partial_{x_j} f^b \right. \\
&\qquad \left. + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_j} \Big) \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n-2} \frac{\Psi^{ij}}{\sqrt{\det(\Psi)}} \Big(\sum_{a,b=1}^{n} \Gamma^k_{ab} \, \partial_{x_i} f^a \partial_{x_j} f^b + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_j} \Big) \\
&\qquad \wedge \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \\
&= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n-2} \frac{\Psi^{ij}}{\sqrt{\det(\Psi)}} \Big(\sum_{a,b=1}^{n} \Gamma^k_{ab} \, \partial_{x_i} f^a \partial_{x_j} f^b + \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_j} \Big) \cdot A_k(f)
\end{aligned}
$$

où $A_k(f) \in \mathrm{Mat}\,(n \times n,\, \mathbb{R})$ est donnée pour $k \in \{1, ..., n\}$ par :

$$A_k(f) = \frac{1}{\sqrt{\det(G)}} \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial y_n} \\ \big(G\,\partial_{x_1} f\big)^1 & \cdots & \big(G\,\partial_{x_1} f\big)^n \\ \vdots & & \vdots \\ \big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^1 & \cdots & \big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^n \\ \big(G\,\partial_{y_k}\big)^1 & \cdots & \big(G\,\partial_{y_k}\big)^n \end{vmatrix}.$$

On en déduit l'équation d'un filament de vorticité en coordonnées locales :

$$\frac{\partial f^l}{\partial t} = (-1)^{n+l}\, \frac{1}{\sqrt{\det(\Psi)}}\, \frac{1}{\sqrt{\det(G)}}\, \sum_{k=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n-2} \Psi^{ij} \Big(\sum_{a,b=1}^{n} \Gamma^k_{ab}\, \partial_{x_i} f^a \partial_{x_j} f^b$$

$$+ \frac{\partial^2 f^k}{\partial x_i \partial x_j} \Big) \cdot \begin{vmatrix} \big(G\,\partial_{x_1} f\big)^1 & \cdots & \widehat{\big(G\,\partial_{x_1} f\big)^l} & \cdots & \big(G\,\partial_{x_1} f\big)^n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^1 & \cdots & \widehat{\big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^l} & \cdots & \big(G\,\partial_{x_{n-2}} f\big)^n \\ G_{1k} & \cdots & \widehat{G_{lk}} & \cdots & G_{nk} \end{vmatrix}$$

$$\text{pour } \; l \in \{1, ... n-2\}. \tag{1.6}$$

Remarque 1.6 *Haller et Vizman ont remarqué dans [HV04] que l'on peut supposer* $det(\Psi) \equiv 1$. *Cela revient dans le cas d'une courbe, à paramétrer par la longueur d'arc (voir aussi la Remarque 3.40 dans ce texte).*

Remarque 1.7 *Il est montré dans [Koi03], que pour un filament unidimensionnel, l'équation d'un filament de vorticité admet une unique solution définie à court temps (voir aussi [NT]).*

Illustrons le système d'équations (1.6) dans des situations simples. Prenons $\Sigma = S^1$ et $M = \Phi^{-1}(\{0\})$ une sous-variété plongée orientée de $\mathbb{R}^4$ ($\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ étant une submersion). Notons $n := \nabla\Phi / \|\nabla\Phi\|$ le vecteur normal unitaire de M. Dans cette situation, J s'écrit facilement. Pour $f : S^1 \to M$ un plongement de S^1 dans M, on a :

$$J\,\mathrm{Trace}\,\Pi^M_{f(S^1)} = \pm \wedge \Big(\frac{\partial f}{\partial s}, \mathrm{Trace}\,\Pi^M_{f(S^1)}, n \Big) \cdot \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-1}$$

où f est vue comme une application 2π-périodique et où le signe dépend de l'orientation sur S^1 (par la suite, nous mettrons $+$). Or,

$$\begin{aligned} \mathrm{Trace}\,\Pi^M_{f(S^1)} &= \Pi^M_{f(S^1)} \Big(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial s} \Big) \cdot \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-2} \\ &= \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-2} \cdot \Big(\nabla^M_{\partial_s f}\, \partial_s f - \nabla^{f(S^1)}_{\partial_s f}\, \partial_s f \Big) \\ &= \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-2} \cdot \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} - \Big\langle \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, n \Big\rangle \cdot n - \nabla^{f(S^1)}_{\partial_s f}\, \partial_s f \Big) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} J\,\mathrm{Trace}\,\Pi^M_{f(S^1)} &= \wedge \Big(\frac{\partial f}{\partial s}, \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, n \Big) \cdot \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-1} \\ &= \Big\| \frac{\partial f}{\partial s} \Big\|^{-3} \wedge \Big(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, n \Big). \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation d'un filament de vorticité s'écrit dans ce contexte :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^{-3} \wedge \Big(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, n \Big) . \tag{1.7}$$

Donnons quelques exemples.

- Si $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_4) \mapsto x_4$, alors $M = \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$, $n = (0, 0, 0, 1)$ et après calculs, on trouve que l'équation (1.7) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^{-3} \frac{\partial f}{\partial s} \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} . \tag{1.8}$$

  Il s'agit de la forme classique (pas forcément paramétrée par la longueur d'arc) de l'équation d'un filament de vorticité .

- Si $\Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $(x_1, ..., x_4) \mapsto x_1^2 + \cdots + x_4^2 - 1$, alors $M = S^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ et $n_{(x_1,...,x_4)} = (x_1, ..., x_4)$. Dans ce cas, l'équation (1.7) s'écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left\| \frac{\partial f}{\partial s} \right\|^{-3} \wedge \Big(f, \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \Big) . \tag{1.9}$$

  On peut vérifier par exemple que l'application

$$f : \mathbb{R} \times S^1 \to S^3, \, (t, s) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\cos(s), \sin(s), \sin(\sqrt{2}t), \cos(\sqrt{2}t) \big)$$

  est une solution périodique dans le temps de l'équation (1.9) .

1.2 L'astuce d'Hasimoto

Dans le cas particulier d'un filament unidimensionnelle $\Sigma = \alpha(S^1)$ (pour α un chemin lisse de $Emb(S^1, \mathbb{R}^3)$) évoluant dans $\mathbb{R}^3$ selon l'équation d'un filament de vorticité, Hasimoto a remarqué dans [Has72], qu'il était judicieux de considérer la fonction $\Psi : S^1 \to \mathbb{C}$, fonction qui est définie, à une phase près, par $\kappa(s) \cdot e^{i \int_0^s \tau(x) dx}$ où κ et τ désignent respectivement la courbure et la torsion de la courbe Σ (voir [BG92] , chapitre 8) . L'observation remarquable d'Hasimoto est que la fonction Ψ vérifie l'équation de Schrödinger non-linéaire :

$$-i \, \frac{\partial \, \Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \, \Psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \, |\Psi|^2 \cdot \Psi . \tag{1.10}$$

Tout aussi remarquable que cette correspondance entre l'équation d'un filamant de vorticité et l'équation de Schrödinger non-linéaire est certainement la définition de Ψ qui nous semble pour le moins mystérieuse. Dans la section 1.2.1, nous nous proposons de donner une interprétation de la fonction Ψ au moyen d'un fibré de repères complexe naturel au-dessus de Σ et d'interpréter Ψ comme étant la mesure de la "rotation instantanée" d'un certain repère mobile naturel au-dessus de Σ grâce à la connection d'Ehresmann (voir [Spi79]) .
Dans la section 1.2.2, nous montrons que l'astuce d'Hasimoto s'étend aussi au cas d'un filament plongé dans une variété riemannienne tridimensionnelle à courbure constante.

1.2.1 Interprétation de ψ

Soient $E \overset{\pi^E}{\longrightarrow} M$ un fibré vectoriel (réel ou complexe) au-dessus d'une variété M de rang (réel ou complexe) k , et h^E une structure euclidienne ou hermitienne (selon que E soit réel ou complexe) sur le fibré E . Pour fixer les idées, nous supposerons E réel. Rappelons que nous pouvons définir le fibré des repères orthonormés $\mathcal{R}E$ du fibré E par rapport à la structure euclidienne h^E et obtenir ainsi un $O(k)-$fibré principal

$$O(k) \hookrightarrow \mathcal{R}E \overset{\pi^{\mathcal{R}E}}{\longrightarrow} M\,, \tag{1.11}$$

une fibre $(\mathcal{R}E)_x$ de $\mathcal{R}E$ en un point $x \in M$ étant constitué de tous les repères orthonormés possibles de $E_x := (\pi^E)^{-1}(\{x\})$ (voir [KN96b]) .

Lemme 1.8 *Soit ∇^E une connection du fibré E compatible avec la structure euclidienne h^E et soient aussi $\mathcal{R}$ et $\widetilde{\mathcal{R}}$ deux courbes lisses de $\mathcal{R}E$ telles que $\mathcal{R}(t_0) = \widetilde{\mathcal{R}}(t_0)$. On a l'équivalence suivante :*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \mathcal{R}(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \widetilde{\mathcal{R}}(t) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}(t_0) = (\dot{\widetilde{\alpha}})(t_0) \\ et \\ \nabla^E_{\dot{\alpha}(t_0)} \mathcal{R}^j(t) = \nabla^E_{(\dot{\widetilde{\alpha}})(t_0)} (\widetilde{\mathcal{R}})^j(t) \\ pour\ tout\ j \in \{1, ..., k\}\,, \end{array} \right.$$

où $\alpha(t) := \pi^{\mathcal{R}E}(\mathcal{R}(t))$ et où l'on note $\mathcal{R}(t) = \{\mathcal{R}^1(t), ..., \mathcal{R}^k(t)\}$, $\mathcal{R}^i(t)$ étant un élément de $E_{\alpha(t)}$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $t_0 = 0$. Rappelons comment construire une carte trivialisante du fibré principal $\mathcal{R}E$. Prenons (U, φ) une carte de M et $\mathcal{E}_U := \{\mathcal{E}_U^1, ..., \mathcal{E}_U^k\}$ une collection ordonnée de sections locales de U formant en chaque point x de U une base orthonormée de E_x . On peut définir une trivialisation $\Phi\,:\,(\pi^{\mathcal{R}E})^{-1}(U) \to U \times O(k)$ du fibré $\mathcal{R}E$ en posant $\Phi(R) := (\pi^{\mathcal{R}E}(R), Mat(R, \mathcal{E}_U))$ pour $R \in (\pi^{\mathcal{R}E})^{-1}(U)$ et où $Mat(R, \mathcal{E}_U)_{ij} := h^E_{\pi^{\mathcal{R}E}(R)}(R^j, \mathcal{E}_U^i)$ pour tout $i, j \in \{1, ..., k\}$. Si le domaine U contient le point $\alpha(0)$, alors,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Phi(\mathcal{R}(t)) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \Big(\pi^{\mathcal{R}E}\big(\mathcal{R}(t)\big), Mat\big(\mathcal{R}(t), \mathcal{E}_U\big(\alpha(t)\big)\big)\Big) \\ &= \Big(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \pi^{\mathcal{R}E}(\mathcal{R}(t)), \left.\frac{d}{dt}\right|_0 Mat\big(\mathcal{R}(t), \mathcal{E}_U\big(\alpha(t)\big)\big)\Big) \\ &= \Big(\dot{\alpha}(0), \left.\frac{d}{dt}\right|_0 Mat\big(\mathcal{R}(t), \mathcal{E}_U\big(\alpha(t)\big)\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

De plus, par compatibilité de la connexion ∇^E ,

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\right|_0 Mat\big(\mathcal{R}(t), \mathcal{E}_U\big(\alpha(t)\big)\big)_{ij} = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 h^E_{\alpha(t)}\big(\mathcal{R}(t)^j, \mathcal{E}_U^i\big(\alpha(t)\big)\big) \\ = \;& h^E_{\alpha(0)}\big(\nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{R}^j(t), \mathcal{E}_U^i\big(\alpha(0)\big)\big) + h^E_{\alpha(0)}\big(\mathcal{R}^j(0), \nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{E}_U^i\big(\alpha(t)\big)\big)\,. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
& \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \mathcal{R}(t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \widetilde{\mathcal{R}}(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{cc} & \dot{\alpha}(0) = (\dot{\widetilde{\alpha}})(0) \\ & \text{et} \\ & h^E_{\alpha(0)}\big(\nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{R}^j(t), \mathcal{E}^i_U\big(\alpha(0)\big)\big) + h^E_{\alpha(0)}\big(\mathcal{R}^j(0), \nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{E}^i_U\big(\alpha(t)\big)\big) \\ = & h^E_{\alpha(0)}\big(\nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}(\widetilde{\mathcal{R}})^j(t), \mathcal{E}^i_U\big(\alpha(0)\big)\big) + h^E_{\alpha(0)}\big((\widetilde{\mathcal{R}})^j(0), \nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{E}^i_U\big(\alpha(t)\big)\big) \\ & \text{pour tout } \ i, j \in \{1, ..., k\}\,, \end{array} \right. \\
\Leftrightarrow \quad & \left\{ \begin{array}{c} \dot{\alpha}(0) = (\dot{\widetilde{\alpha}})(0) \\ \text{et} \\ h^E_{\alpha(0)}\big(\nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{R}^j(t) - \nabla^E_{\dot{\alpha}(0)}(\widetilde{\mathcal{R}})^j(t), \mathcal{E}^i_U\big(\alpha(0)\big)\big) = 0 \\ \text{pour tout } \ i, j \in \{1, ..., k\}\,. \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit. □

A partir du Lemme 1.8, il est facile de définir une 1-forme de connection $\theta^E \in \Omega^1(\mathcal{R}E, \mathfrak{o}(k))$ en posant :

$$\theta^E_{\mathcal{R}(0)}\Big(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \mathcal{R}(t)\Big) := \Big(h^M_{\alpha(0)}\big(\nabla_{\dot{\alpha}(0)}\mathcal{R}^j(t), \mathcal{R}^i(t)\big)\Big)_{0 \le i,j \le k}\,, \tag{1.12}$$

où $\mathcal{R}(t) = \{\mathcal{R}^1(t), ..., \mathcal{R}^k(t)\}$ est un chemin lisse de $\mathcal{R}E$ et où $\alpha(t) := \pi^{\mathcal{R}E}\big(\mathcal{R}(t)\big)$. La forme θ^E n'est autre que la forme de connection d'Ehresmann qui est bien connue en géométrie riemannienne (voir [KN96a], [KN96b], [Pet06] appendix B, [Spi79],...). En un certain sens, cette connection mesure "la rotation instantanée" d'un repère orthonormé mobile.

Considérons à présent un filament d'une variété riemannienne orientée (M, h^M) de dimension 3, c'est-à-dire, un plongement $\alpha\,:\,S^1 \to M$ (on note $\Sigma := \alpha(S^1)$). Supposons de plus que pour tout $s \in S^1$, $(Trace\,\Pi_\Sigma)\big(\alpha(s)\big) \neq 0$, de telle sorte que l'on puisse considérer en tout point $\alpha(s)$ de Σ le repère de Frenet associé :

$$\alpha^{Fr}(s) := (T, N, B) \in \big(\mathcal{R}TM|_\Sigma\big)_{\alpha(s)} \ \text{ où } \ \left\{ \begin{array}{ccc} T & := & \dfrac{\dot{\alpha}(s)}{\|\dot{\alpha}(s)\|}\,; \\ N & := & \dfrac{\big(Trace\,\Pi_\Sigma\big)(\alpha(s))}{\|\big(Trace\,\Pi_\Sigma\big)(\alpha(s))\|}\,; \\ B & := & T \times N\,, \end{array} \right.$$

et où $TM|_\Sigma$ correspond au fibré $j^*_\Sigma TM$, $j_\Sigma\,:\,\Sigma \hookrightarrow M$ étant l'inclusion canonique. On définit ainsi une courbe lisse $\alpha^{Fr}\,:\,S^1 \to \mathcal{R}TM|_\Sigma$ qui donne elle-même lieu à une courbe lisse $\alpha^{\mathfrak{o}(3)}\,:\,S^1 \to \mathfrak{o}(3)$ par la formule :

$$\alpha^{\mathfrak{o}(3)}(s_0) := \theta^{TM}_{\alpha^{Fr}(s_0)}\Big(\left.\frac{d}{ds}\right|_{s_0} \alpha^{Fr}(s)\Big)\,, \tag{1.13}$$

pour $s_0 \in S^1$. En particulier, si α est paramétrée par la longueur d'arc, on peut facilement voir en utilisant la formule (1.12), que $\alpha^{\mathfrak{o}(3)}(s)$ est de la forme

$$\alpha^{\mathfrak{o}(3)}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

où $\kappa, \tau : S^1 \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions lisses sur S^1. Dans le cas où $M = \mathbb{R}^3$ muni de la métrique et de l'orientation canoniques, la formule (1.14) correspond simplement aux formules de Frenet et κ et τ représentent respectivement la courbure et la torsion de Σ (voir [BG92], chapitre 8).

De façon générale, nous voyons que la donnée d'un fibré vectoriel réel (resp. complexe) au-dessus de Σ de rang réel (resp. complexe) k, d'une structure euclidienne (resp. hermitienne), d'une connection compatible ainsi que d'un repère mobile (par "repère mobile", on entend un chemin lisse, ou plus justement, un lacet ici, dans le fibré des repères associés), il est possible d'associer un élément de $L\mathfrak{o}(k) := C^\infty(S^1, \mathfrak{o}(k))$ (resp. $L\mathfrak{u}(k)$).
Dans cet ordre d'idée, le fibré vectoriel (complexe) au-dessus de Σ qui soit le plus simple et qui prenne en compte la géométrie du fibré normal $N\Sigma$ de Σ dans M est certainement donné par le fibré en droite complexe $E \xrightarrow{\pi^E} \Sigma$ dont la fibre est définie pour $\alpha(s) \in \Sigma$ par

$$E_{\alpha(s)} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{N + iB\} \subseteq T_{\alpha(s)}M^{\mathbb{C}}, \tag{1.15}$$

où $T_{\alpha(s)}M^{\mathbb{C}}$ désigne le complexifié de $T_{\alpha(s)}M$. Remarquons, en notant $J^{\mathbb{C}} : (N\Sigma)^{\mathbb{C}}_{\alpha(s)} \to (N\Sigma)^{\mathbb{C}}_{\alpha(s)}$ la $\mathbb{C}-$extension de J sur le complexifié $(N\Sigma)^{\mathbb{C}}_{\alpha(s)}$ de $(N\Sigma)_{\alpha(s)}$, que $N + iB$ est un vecteur propre de $J^{\mathbb{C}}$ par rapport à la valeur propre $-i$. La métrique h^M de M et la connection de Levi-Civita ∇ induisent canoniquement une structure hermitienne h^E sur E ainsi qu'une connection ∇^E sur E compatible avec h^E, et d'après la "version complexe" du Lemme 1.8, on a donc une 1-forme de connection $\theta^E \in \Omega^1(\mathcal{R}E, \mathfrak{u}(1))$. Prenons alors une courbe lisse $\mathcal{R} : S^1 \to \mathcal{R}E$ de $\mathcal{R}E$ telle que $\pi^E(\mathcal{R}(s)) = \alpha(s)$ pour tout $s \in S^1$. La courbe $\mathcal{R}$ est forcément de la forme

$$\mathcal{R}(s) = \left\{ e^{i\rho(s)} \frac{N + iB}{\sqrt{2}} \right\} \tag{1.16}$$

pour tout $s \in S^1$ et où $\rho : S^1 \to \mathbb{R}$ est une certaine application lisse. Un calcul simple montre alors que pour $s_0 \in S^1$,

$$\theta^E_{\mathcal{R}(s_0)}\Big(\frac{d}{ds}\Big|_{s_0} \mathcal{R}(s)\Big) = \Big(i\big(\dot\rho(s_0) - \tau(s_0)\big)\Big) \in \mathfrak{u}(1). \tag{1.17}$$

En particulier, la courbe $\mathcal{R}$ a une rotation instantannée nulle si et seulement si $\dot\rho - \tau = 0$, c'est-à-dire, si $\rho(s) = \int_0^s \tau(x)dx$ (à une constante additive près). Remarquons qu'il n'est pas très surprenant que la courbure κ n'apparaisse pas dans la formule (1.17) puisque le fibré E n'est qu'une autre forme du fibré normal de Σ, et ce dernier décrit le défaut de planéité de Σ, défaut qui se mesure par la torsion τ (voir [BG92], page 338). Si l'on veut considérer un fibré vectoriel à géométrie plus riche qui prenne aussi en compte la courbure κ de Σ, il semble naturel de regarder le fibré vectoriel complexe $F \xrightarrow{\pi^F} \Sigma$ dont la fibre est définie pour $\alpha(s) \in \Sigma$ par

$$F_{\alpha(s)} := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{T, N + iB\} \subseteq T_{\alpha(s)}M^{\mathbb{C}}. \tag{1.18}$$

De nouveau, nous avons une structure hermitienne h^M, une connection compatible ∇^F, et une 1-forme de connection $\theta^F \in \Omega^1(\mathcal{R}F, \mathfrak{u}(2))$. Compte tenu de ce qui précède, notons $\mathcal{R}^F : S^1 \to \mathcal{R}F$ l'application définie par

$$\mathcal{R}^F\big(\alpha(s)\big) := \left\{T, \big(e^{i\int_0^s \tau(x)dx}\big)\frac{N+iB}{\sqrt{2}}\right\}, \tag{1.19}$$

pour $s \in S^1$. A nouveau, un calcul simple montre que

$$\theta^F_{\mathcal{R}^F(s_0)}\Big(\frac{d}{ds}\Big|_{s_0}\mathcal{R}^F(s)\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}0 & -\psi\\ \psi & 0\end{pmatrix} \in \mathfrak{u}(2)\,, \tag{1.20}$$

où ψ est la fameuse fonction d'Hasimoto, c'est-à-dire, $\psi(s) = \kappa(s)\cdot e^{i\int_0^s \tau(x)dx}$. Ainsi, la fonction ψ d'Hasimoto mesure la rotation instantanée du repère mobile naturel $\mathcal{R}^F$ au-dessus de Σ .

1.2.2 Généralisation de l'astuce d'Hasimoto au cas des variétés à courbure constante

Soient (M, g) une variété riemannienne orientée de dimension trois et $\alpha_t : S^1 \to M$ un plongement dépendant du temps (on suppose que $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$), tel que :

- $(Trace\, \Pi_{\Sigma_t})\big(\alpha_t(s)\big) \neq 0$, pour tout $s \in S^1$ et pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (ici $\Sigma_t := \alpha_t(S^1)$) ;
- α_t soit paramétré par la longueur d'arc, c'est-à-dire, $\|\frac{d}{ds}\,\alpha_t(s)\| = 1$ pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et pour tout $s \in S^1$;
- α_t soit une solution de l'équation d'un filament de vorticité, c'est-à-dire, $\frac{d}{dt}\,\alpha_t = \kappa \cdot B$ (voir section 1.2.1 pour les notations) .

Remarque 1.9 *La première condition ci-dessus garantit l'existence du repère de Frenet associé à la courbe α_t pour tout $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.*

Remarque 1.10 *L'équation apparaissant dans le troisième point ci-dessus est bien l'équation d'un filament de vorticité telle que formulée en 1.1. En effet, si $\beta : S^1 \to M$ est un plongement vérifiant les deux premiers points ci-dessus, alors par définition de la courbure κ, du vecteur tangent unitaire T et de la binormale B de β, on a $\nabla_T T = \kappa \cdot N$ et $J N = B$ ce qui implique :*

$$\begin{aligned} J\, Trace\, \Pi_{\beta(S^1)} &= J\,\Pi(T,T) = J\left(\nabla_T T - \nabla_T^{\beta(S^1)} T\right) \\ &= J\big(\nabla_T T - \underbrace{g(\nabla_T T, T)}_{=0}\cdot T\big) = J\,(\kappa\cdot N) = \kappa \cdot B\,. \end{aligned}$$

Nous allons à présent suivre de près [Bry93] et déterminer les équations d'évolution de la courbure κ et de la torsion τ de Σ_t . Pour cela, nous allons utiliser les dérivées covariantes $\frac{D}{\partial s}$ et $\frac{D}{\partial t}$ le long de la surface paramétrée $(-\varepsilon, \varepsilon) \times S^1 \to M$, $(t, s) \mapsto \alpha_t(s)$ (voir [dC92], page 68) . D'après le Lemma 4.1 de [dC92], on a :

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t}(\kappa\cdot N) = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}T &= \left(\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t} + R\Big(\underbrace{\frac{\partial\,\alpha}{\partial s}}_{=T}, \underbrace{\frac{\partial\,\alpha}{\partial t}}_{=\kappa\cdot B}\Big)\right)\cdot T \\ &= \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\,\alpha}{\partial s} + \kappa\cdot R\big(T,B\big)\,T = \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\,\alpha}{\partial t} + \kappa\cdot R\big(T,B\big)\,T \\ &= \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}(\kappa\cdot B) + \kappa\cdot R\big(T,B\big)\,T\,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

où R désigne le tenseur de courbure de M . Or,

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}(\kappa\cdot B) = \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial\,\kappa}{\partial s}\cdot B + \kappa\cdot\frac{D}{\partial s}B\right) = \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial\,\kappa}{\partial s}\cdot B - \tau\kappa\cdot N\right) \\
= \;& \frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2}\cdot B + \frac{\partial\,\kappa}{\partial s}\cdot\frac{D}{\partial s}B - \frac{\partial\,(\tau\kappa)}{\partial s}\cdot N - \tau\kappa\cdot\frac{D}{\partial s}N \\
= \;& \frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2}\cdot B - \tau\frac{\partial\,\kappa}{\partial s}\cdot N - \frac{\partial\,(\tau\kappa)}{\partial s}\cdot N - \tau\kappa\big(-\kappa\cdot T + \tau\cdot B\big) \\
= \;& \big(\tau\kappa^2\big)\cdot T + \left(-\tau\frac{\partial\,\kappa}{\partial s} - \frac{\partial\,(\tau\kappa)}{\partial s}\right)\cdot N + \left(\frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\kappa\right)\cdot B\,. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

En considérant l'expression (1.22) dans (1.21) , on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial t}(\kappa\cdot N) = \big(\tau\kappa^2\big)\cdot T + \left(-\tau\frac{\partial\,\kappa}{\partial s} - \frac{\partial\,(\tau\kappa)}{\partial s}\right)\cdot N + \\
+\left(\frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\kappa\right)\cdot B + \kappa\cdot R\big(T,B\big)\,T\,, \qquad (1.23)
\end{aligned}$$

et puisque

$$\frac{D}{\partial t}(\kappa\cdot N) = \frac{\partial\,\kappa}{\partial t}\cdot N + \kappa\cdot\frac{D}{\partial t}N\,, \qquad (1.24)$$

par identification on trouve :

$$\boxed{\frac{\partial\,\kappa}{\partial t} = -2\tau\frac{\partial\,\kappa}{\partial s} - \kappa\,\frac{\partial\,\tau}{\partial s} + \kappa\,\big(T,B,T,N\big)}\,, \qquad (1.25)$$

où $\big(T,B,T,N\big) := h^M\Big(R\big(T,B\big)\,T,N\Big)$.

Déterminons l'équation d'évolution de la torsion τ . En comparant (1.23) et (1.24), et parce que le vecteur $\frac{D}{\partial t}N$ n'a pas de composante portée par N , on a :

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial t}N = \tau\kappa\cdot T + \left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\right)\cdot B + \big(T,B,T,T\big)\cdot T \\
+\big(T,B,T,B\big)\cdot B \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Si on dérive l'expression (1.26) par rapport à s , alors :

$$\begin{aligned}
\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}N = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\right)\cdot B + \frac{\partial}{\partial s}\Big(\big(T,B,T,B\big)\Big)\cdot B \\
+\gamma_1\cdot T + \gamma_2\cdot N\,. \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
& \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}N = \left(\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s} + \kappa\cdot R\big(B,T\big)\right)N \\
= \;& \frac{D}{\partial t}\big(-\kappa\cdot T + \tau\cdot B\big) + \kappa\cdot R\big(B,T\big)\,N
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\kappa\, h^M\Big(\frac{D}{\partial t}T, B\Big)\cdot B + \frac{\partial\,\tau}{\partial t}\cdot B + \kappa\cdot\big(B,T,N,B\big)\cdot B + \zeta_1\cdot T + \zeta_2\cdot N \\
&= -\kappa\, h^M\Big(\frac{\partial\,\kappa}{\partial s}\cdot B - \kappa\tau\cdot N, B\Big)\cdot B + \frac{\partial\,\tau}{\partial t}\cdot B + \kappa\cdot\big(B,T,N,B\big)\cdot B \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +\zeta_1\cdot T + \zeta_2\cdot N \\
&= -\kappa\,\frac{\partial\,\kappa}{\partial s}\cdot B + \frac{\partial\,\tau}{\partial t}\cdot B + \kappa\cdot\big(B,T,N,B\big)\cdot B + \zeta_1\cdot T + \zeta_2\cdot N\,. \qquad (1.28)
\end{aligned}
$$

En comparant (1.27) et (1.28), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2} - \tau^2\Big) + \frac{\partial}{\partial s}\Big(\big(T,B,T,B\big)\Big) = -\kappa\,\frac{\partial\,\kappa}{\partial s} + \frac{\partial\,\tau}{\partial t} + \kappa\cdot\big(B,T,N,B\big) \\
\Rightarrow\ &\boxed{\frac{\partial\,\tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\,\kappa}{\partial s^2} - \tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^2 + \big(T,B,T,B\big)\Big) - \kappa\cdot\big(B,T,N,B\big)} \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

Supposons à présent que (M, h^M) soit à courbure constante K_0 . Dans ce cas, le tenseur de courbure de M s'écrit très simplement (voir [dC92], Lemma 3.4 page 96) :

$$
\big(X,Y,W,Z\big) := K_0\Big(h^M(X,W)\cdot h^M(Y,Z) - h^M(X,Z)\cdot h^M(Y,W)\Big)\,, \qquad (1.30)
$$

pour $X, Y, W, Z \in \mathcal{X}(M)$. En particulier, il est immédiat que $\big(T,B,T,B\big) = K_0$ et que $\big(B,T,N,B\big) = \big(T,B,T,N\big) = 0$.

Dans ce contexte, c'est-à-dire en supposant que κ et τ soient associées à une courbe α_t vérifiant l'équation d'un filament de vorticité, considérons $\psi_t\,:\,S^1 \to \mathbb{C}$, $s \mapsto \kappa\cdot e^{i\int_0^s \tau(x)dx}$. Exactement de la même manière que dans la démonstration du Theorem 3.5.8 de [Bry93], on montre par un calcul directe en utilisant les équations d'évolutions (1.25) et (1.29), que

$$
-i\,\frac{\partial\,\psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\,\psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\,|\psi|^2\cdot\psi - \psi\cdot A(t)\,, \qquad (1.31)
$$

où $A(t) := \big(\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2\kappa}{\partial s^2} - \tau^2 + \frac{1}{2}\kappa^2\big)(s)\,\big|_{s=0}$. Posons alors $\Psi_t(s) := e^{i\int_0^t A(x)dx}\cdot\psi_t(s)$ pour $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ et $s \in S^1$. De nouveau par un calcul directe, on montre que Ψ_t vérifie l'équation de Schrödinger non-linéaire :

$$
\boxed{-i\,\frac{\partial\,\Psi}{\partial t} = \frac{\partial^2\,\Psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\,|\Psi|^2\cdot\Psi}\,. \qquad (1.32)
$$

Chapitre 2

Le groupe des automorphismes unimodulaires d'un fibré principal et les équations d'Euler associées

Il est bien connu depuis [Arn66] , qu'un espace de configuration approprié pour l'étude des équations de la mécanique des fluides (plus précisément l'équation d'Euler pour un fluide incompressible) sur une variété riemannienne (M, g) munie d'une forme de volume μ (μ pouvant être indépendante de la métrique g), est donné par le groupe des difféomorphismes unimodulaires $\mathrm{SDiff}\,(M,\mu) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}\,(M) \,|\, \varphi^*\mu = \mu\}$ de M . L'équation d'Euler incompressible se lit alors comme une équation d'évolution sur l'algèbre de Lie de $\mathrm{SDiff}\,(M,\mu)$: $\frac{d}{dt}X + \nabla_X X = \nabla p$; où $X \in \mathcal{X}(M,\mu) := \{X \in \mathcal{X}(M) \,|\, \mathrm{div}_\mu\,(X) = 0\}$ est l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{SDiff}\,(M,\mu)$. Cette équation caractérise les géodésiques de $\mathrm{SDiff}\,(M,\mu)$ par rapport à la métrique naturelle invariante à droite de $\mathrm{SDiff}\,(M,\mu)$ (voir [EM70]) , et peut être obtenue comme équation d'Euler sur le "dual régulier" de $\mathcal{X}(M,\mu)$ (voir [AK98]).
Dans ce chapitre, nous proposons un autre espace de configuration pour étudier l'équation d'Euler incompressible lorsque certaines symétries sont présentes. Notre point de départ est de supposer que le fluide évolue sur l'espace total d'un fibré principal $G \hookrightarrow P \to B$ (P étant connexe et orientable) et que la métrique h^P de P , et donc aussi $\mu^P := d\,\mathrm{vol}_{h^P}$, la forme volume de P induite par h^P , est G-invariante. On est alors naturellement amené à considérer non pas $\mathrm{SDiff}\,(P,\mu^P)$, mais plutôt le groupe $\mathrm{SAut}\,(P,\mu^P)$ des automorphismes de P qui préservent μ^P . En d'autres termes, on suppose initialement que le champ de vecteurs décrivant la vélocité du fluide est G-invariant. Cette approche nous permet notamment dans la section 2.3 d'écrire les équation d'Euler (lorsqu'il y a des symétries), comme un système de deux équations couplées, l'une vivant sur l'espace des champs de vecteurs à divergence nulle (pour une certaine forme

volume) de B, l'autre vivant sur l'algèbre de Lie du groupe de jauges Gau (P) de P. Il semble que ces équations aient une signification physique (voir [Viz01b] qui traite le cas particulier où $G = S^1$ et qui met en évidence un champ magnétique dont l'origine semble être lié à la présence d'un monopole magnétique de Dirac).

La première partie de ce chapitre décrit la structure de groupe de Lie fréchétique du groupe $\mathrm{SDiff}(M,\mu)^G$ des difféomorphismes G-équivariants d'une variété compacte M qui préservent une forme de volume μ. Les arguments utilisés reprennent pour la plupart ceux de Hamilton (voir [Ham82], Theorem 2.5.3.) et consistent essentiellement à vérifier que les constructions nécessitant le théorème d'inversion de Nash-Moser "respectent les symétries" . Dans la section 2.2, l'étude détaillée de la "structure" d'une forme de volume μ^P G-invariante sur un fibré principal $G \hookrightarrow P \longrightarrow B$, nous permet de donner une formule d'intégration (Proposition 2.16) nécessaire pour la détermination des équations d'Euler du groupe $\mathrm{SAut}(P,\mu^P)$ (Théorème 2.37) . Enfin dans la section 2.4, nous suivons de près l'article [ACMM89] et montrons (voir Théorème 2.50), que $\mathrm{SAut}(P,\mu^P)$ est un $\mathrm{Gau}(P)$-fibré principal dont la base est une collection de composantes connexes de $\mathrm{SDiff}(B, V\mu^B)$ où $V\mu^B$ est une certaine forme de volume de B.

2.1 Le groupe SDiff $(M,\mu)^G$ en tant que groupe de Lie fréchétique modéré

Soient M une variété compacte et G un groupe de Lie compacte connexe agissant sur M. On note $\vartheta \,:\, G\times M \to M$ l'action de G sur M et pour $g\in G$, on note $\vartheta_g \,:\, M \to M\,, x \mapsto \vartheta(g,x)$.

Proposition 2.1 *Le groupe* $\mathit{Diff}(M)^G := \{\varphi \in \mathit{Diff}(M)\,|\,\vartheta_g\circ\varphi = \varphi\circ\vartheta_g,\, \forall g \in G\}$ *est un sous-groupe de Lie modéré du groupe* $\mathit{Diff}(M)$ *dont l'algèbre de Lie est* $\mathcal{X}(M)^G := \{X \in \mathcal{X}(M)\,|\,\vartheta_{g_*}X = X\,, \forall g\in G\}$.

Démonstration. Construisons dans un premier temps, une métrique sur M qui soit G-invariante. Pour cela, nous pouvons prendre une métrique quelconque $\tilde{h}$ sur M et poser pour $x\in M,\; X_x, Y_x \in T_xM$:

$$h_x(X_x,\,Y_x) := \int_G (\vartheta_g^*h)_x(X_x,\,Y_x)\,\nu^G\,,$$

où ν^G est une forme de volume G-invariante sur G. On obtient ainsi une métrique h qui est G-invariante.
Considérons alors l'application $pr \,:\, \Omega^1(M) \to \Omega^1(M),\, \theta \mapsto \theta^G$ avec

$$\theta^G_x(X_x) := \frac{1}{\mathrm{Vol}(G)}\int_G (\vartheta_g^*\theta)_x(X_x)\,\nu^G$$

pour $X_x \in T_xM$. Il apparait que pr est une projection continue. Ceci nous permet donc d'écrire la somme topologique suivante :

$$\Omega^1(M) = \Omega^1(M)^G \oplus \ker(pr),$$

et puisque h est G-invariant,

$$\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M)^G \oplus \ker(\widetilde{pr}), \tag{2.1}$$

où $\widetilde{pr} : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)^G$ est la projection obtenue à partir de pr en utilisant la dualité entre TM et T^*M via la métrique h. Remarquons que la décomposition (2.1) entraine que $\mathcal{X}(M)^G$ est un espace de Fréchet modéré (c'est un espace de Fréchet car $\mathcal{X}(M)^G$ est fermé dans $\mathcal{X}(M)$ et c'est aussi un espace modéré car $\mathcal{X}(M)$ est modéré).

Prenons $(\mathcal{U}, \varphi)$ la carte "standard" de $\mathrm{Diff}\,(M)$ en l'élément neutre Id construite à partir de la métrique h, c'est-à-dire (voir la démonstration de la Proposition B.29 ainsi que la Proposition B.34), $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}(M)$ et $\varphi^{-1}(X)(x) = \exp_x(X_x)$ pour $X \in \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}(M)$ et $x \in M$.
En restreignant $\mathcal{U}$ si nécessaire, nous pouvons supposer que $\varphi(\mathcal{U}) = U_1 \times U_2$ où U_1 est un ouvert de $\mathcal{X}(M)^G$ et U_2 un ouvert de $\ker(\widetilde{pr})$. Faisons deux remarques liées au fait que la métrique h soit G-invariante :

(*i*) si $X \in U_1$, alors $\varphi^{-1}(X) \in \mathrm{Diff}\,(M)^G$;

(*ii*) $\exp_{\vartheta_g(x)}(\vartheta_g)_{*x}X_x = \vartheta_g\big(\exp_x(X_x)\big)$ pour tout $x \in M$, pour tout $X_x \in T_xM$ et pour tout $g \in G$.

On en déduit facilement d'après (*i*) que $\varphi^{-1}(U_1 \times \{0\}) \subseteq \mathcal{U} \cap \mathrm{Diff}\,(M)^G$. Réciproquement, si $X \in \varphi(\mathcal{U})$ est tel que $\varphi^{-1}(X) \in \mathcal{U} \cap \mathrm{Diff}\,(M)^G$, alors pour $g \in G$:

$$
\begin{aligned}
& \vartheta_g \circ \big(\varphi^{-1}(X)\big) = \big((\varphi^{-1}(X)\big) \circ \vartheta_g \\
\Rightarrow \quad & \vartheta_g(\exp_x(X_x)) = \exp_{\vartheta_g(x)} X_{\vartheta_g(x)} \ \ \forall x \in M .
\end{aligned}
$$

En utilisant (*ii*), on obtient finalement

$$
X_{\vartheta_g(x)} = (\vartheta_g)_{*x}\, X_x \ \ \forall g \in G ,
$$

c'est-à-dire, $X \in \mathcal{X}(M)^G$. Ainsi $\varphi^{-1}(U_1 \times \{0\}) = \mathcal{U} \cap \mathrm{Diff}\,(M)^G$. Le groupe $\mathrm{Diff}\,(M)^G$ est donc une sous-variété modérée de $\mathrm{Diff}\,(M)$ en Id_M et par translation, $\mathrm{Diff}\,(M)^G$ devient un sous-groupe de Lie modéré de $\mathrm{Diff}\,(M)^G$. □

Proposition 2.2 *Si μ est une forme de volume G-invariante sur M, alors le groupe $SDiff(M,\mu)^G := \{\varphi \in SDiff(M,\mu) \,|\, \vartheta_g \circ \varphi = \varphi \circ \vartheta_g, \forall g \in G\}$ est un sous-groupe de Lie modéré des groupes $Diff(M)^G$ et $SDiff(M,\mu)$, d'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M,\mu)^G := \mathcal{X}(M,\mu) \cap \mathcal{X}(M)^G$.*

Pour montrer cette proposition, nous avons besoin de trois lemmes.

Lemme 2.3 (Décomposition de Helmholtz-Hodge) *Soit (M,h) une variété riemannienne compacte, connexe sans bord et orientée, de forme vomule $\mu = d\,vol_h$, la forme volume induite par la métrique h. On a la décomposition suivante :*

$$
\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M,\mu) \oplus \nabla\Omega^0(M) . \tag{2.2}
$$

On peut trouver une démonstration du Lemme 2.3 dans [Arn66], page 341 ou [dR84]. Remarquons que dans la décomposition (2.2), l'espace $\nabla\Omega^0(M)$ est isomorphe à $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ où $C_0^\infty(M,\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) \,|\, \int_M f\,\mu = 0\}$.

Lemme 2.4 *Soit G un groupe de Lie compacte, connexe, qui agit par isométries sur une variété riemannienne (M,h). On suppose que M est compacte, connexe, orientée et que l'orientation est donnée par $\mu := d\,vol_h$.*
Si $X = X^\mu + \nabla f$ est la décomposition de Helmholtz-Hodge d'un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ (i.e. $X^\mu \in \mathcal{X}(M,\mu)$ et $f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R})$), alors on a l'équivalence suivante :

$$X \in \mathcal{X}(M)^G \Leftrightarrow X^\mu \in \mathcal{X}(M,\mu)^G \text{ et } f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R})^G.$$

En d'autres termes,

$$\mathcal{X}(M)^G = \mathcal{X}(M,\mu)^G \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})^G, \tag{2.3}$$

où $C_0^\infty(M,\mathbb{R})^G := \{f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}) \mid f \circ \vartheta_g = f, \forall g \in G\}$ (on note $\vartheta : G \times M \to M$ l'action de G sur M).

Démonstration. Soit $X = X^\mu + \nabla f \in \mathcal{X}(M)^G$. Pour $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}(X) = \operatorname{div}(X^\mu) + \triangle f \\ \Rightarrow\ & \operatorname{div}(X) = \triangle f \qquad (2.4) \\ \Rightarrow\ & \operatorname{div}(X) \circ \vartheta_g = \triangle f \circ \vartheta_g. \qquad (2.5) \end{aligned}$$

D'autre part, comme X est G-invariant ainsi que la métrique h, on a pour tout $g \in G$, les relations suivantes :

$$\operatorname{div}(X) \circ \vartheta_g = \operatorname{div}(X) \quad \text{et} \quad (\triangle f) \circ \vartheta_g = \triangle(f \circ \vartheta_g).$$

On en déduit d'après (2.5) que

$$\operatorname{div}(X) = \triangle(f \circ \vartheta_g). \tag{2.6}$$

Il en résulte d'après (2.4) et (2.6) que f et $f \circ \vartheta_g$ vérifient la même équation elliptique sur une variété compacte connexe, et nous savons d'après [Jos02] que le noyau du Laplacien $\triangle$ sur l'espace $C^\infty(M,\mathbb{R})$ est réduit aux fonctions constantes. On en déduit que $f \circ \vartheta_g = f + c(g)$ où $c(g) \in \mathbb{R}$. Or, comme $\int_M f\,\mu = 0$, on doit avoir $c(g) = 0$ pour tout $g \in G$, c'est-à-dire $f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R})^G$. Il en résulte que $X^\mu = X - \nabla f \in \mathcal{X}(M,\mu)^G$ puisque X et ∇f sont G-invariant.
L'autre implication étant évidente, le lemme est démontré. □

Introduisons quelques éléments supplémentaires avant de donner le deuxième lemme. Soit $(\mathcal{U}, \varphi)$ la carte "standard" de Diff (M) en l'élément neutre Id_M telle que définie dans la démonstration de la Propostion 2.1, construite à partir d'une métrique G-invariante h (remarquons que l'on peut prendre h telle que $\mu = d\,\mathrm{vol}_h$). Pour $X \in \varphi(\mathcal{U})$, définissons $P(X) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ par

$$\left(\varphi^{-1}(X)\right)^* \mu = P(X) \cdot \mu.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer la forme volume μ normalisée et prendre $\mathcal{U}$ telle que $\int_M P(X)\,\mu = 1$ pour tout $X \in \mathcal{U}$. D'après la décomposition de Helmholtz-Hodge, nous avons la relation

$$\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M,\mu) \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})$$

qui nous permet de définir une application

$$Q\ :\ \begin{cases} \varphi(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M,\mu) \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(M,\mu) \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})\,; \\ \qquad\qquad (X,f) \mapsto (X,\ P(X+\nabla f)-1)\,. \end{cases}$$

Nous savons par application du Théorème d'inversion de Nash-Moser (voir la démonstration du Théorème B.41), que Q est inversible au voisinage de 0 dans $\mathcal{X}(M)$. Le lemme suivant montre de plus que Q est compatible avec les symétries de M.

Lemme 2.5 *Pour tout voisinage K de 0 dans $\mathcal{X}(M)$ suffisamment petit, on a la relation :*

$$Q\Big(K \cap \mathcal{X}(M)^G\Big) = Q(K) \cap \mathcal{X}(M)^G\,. \tag{2.7}$$

Démonstation. D'après le Théorème d'inversion de Nash-Moser, nous pouvons trouver $W \subseteq \mathcal{X}(M)$ un voisinage de 0 dans $\mathcal{X}(M)$, V_1 un voisinage de 0 dans $\mathcal{X}(M,\mu)$ et V_2 un voisinage de 0 dans $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ tels que

$$Q\big|_{V_1\times V_2}\ :\ V_1 \times V_2 \to W$$

soit un difféomorphisme. Faisons deux observations :

- en restreignant $\mathcal{U}$ si nécessaire, nous pouvons supposer que $\varphi(\mathcal{U}) = V_1 \times V_2$;
- par compacité du groupe G et continuité de l'application $G \times V_2 \to C_0^\infty(M,\mathbb{R})\,,(g,f) \mapsto f\circ\vartheta_g$, nous pouvons trouver $\widetilde{V}_2 \subseteq V_2$ un voisinage de 0 dans $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ tel que si $f \in \widetilde{V}_2$, alors $f\circ\vartheta_g \in V_2$ pour tout $g \in G$.

Montrons que l'application Q se restreint en un difféomorphisme entre $(V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G$ et $Q(V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G$. Pour cela, il suffit de montrer que

$$Q\big((V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G\big) = Q(V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G\,. \tag{2.8}$$

D'après le Lemme (2.4) et parce que la métrique h est G-invariante, l'inclusion de gauche à droite est évidente. Montrons donc que $Q\big((V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G\big) \supseteq Q(V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G$. Prenons $(X,\ P\big(X+\nabla f)-1\big) \in Q(V_1 \times \widetilde{V}_2) \cap \mathcal{X}(M)^G$. D'après le Lemme (2.4), on a

$$X \in \mathcal{X}(M,\mu)^G \quad\text{et}\quad P(X+\nabla f)-1 \in C_0^\infty(M,\mathbb{R})^G\,.$$

On a donc, pour $g \in G$:

$$\begin{aligned}
& \Big(P(X+\nabla\, f)-1\Big)\circ\vartheta_g = P(X+\nabla\, f)-1 \\
\Rightarrow\quad & P(X+\nabla\, f)\circ\vartheta_g - 1 = P(X+\nabla\, f)-1 \\
\Rightarrow\quad & P\Big((\vartheta_g)_*(X+\nabla\, f)\Big) = P(X+\nabla\, f) \qquad \text{(car } P \text{ est } G\text{-invariant)} \\
\Rightarrow\quad & P\Big((X+\nabla\,(f\circ\vartheta_g))\Big) = P(X+\nabla\, f) \\
\Rightarrow\quad & Q(\underbrace{X}_{\in V_1},\ \underbrace{f\circ\vartheta_g}_{\in V_2}) = Q(X,\ f) \\
\Rightarrow\quad & f\circ\vartheta_g = f
\end{aligned}$$

car Q est un difféomorphisme sur $V_1 \times V_2$. Donc $(X,\, f) \in \big(V_1 \times \widetilde{V_2}\big) \cap \mathcal{X}(M)^G$ et la relation (2.8) est donc vraie. Par suite, on en déduit que la relation (2.7) est vraie pour tout voisinage K de 0 dans $\mathcal{X}(M)$ suffisamment petit. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.2. Rappelons comment construire une carte de $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)$ en l'identité Id_M à partir de l'application Q . D'après la démonstration du Théorème B.41, nous pouvons choisir le domaine de la carte $(\mathcal{U}, \varphi)$ suffisamment petit pour qu'il existe $K_1 \subseteq \mathcal{X}(M, \mu)$ et $K_2 \in C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ deux voisinages de 0 dans $\mathcal{X}(M, \mu)$ et $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ respectivement, tels que Q : $\varphi(\mathcal{U}) \to K_1 \times K_2$ soit un difféomorphisme. En notant $\mathcal{U}^S := \mathcal{U} \cap \mathrm{SDiff}\,(M, \mu)$, on vérifie alors que $\Big(\mathcal{U}^S,\, \big(Q\big|_{\varphi(\mathcal{U}^S)}\big) \circ \big(\varphi\big|_{\mathcal{U}^S}\big)\Big)$ est une carte de $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)$, c'est-à-dire, $\Big(\big(Q\big|_{\varphi(\mathcal{U}^S)}\big) \circ \big(\varphi\big|_{\mathcal{U}^S}\big)\Big)^{-1}(K_1 \times \{0\}) = \mathcal{U}^S$. D'autre part, si l'on choisit $\mathcal{U}$ suffisamment petit, alors d'après le Lemme 2.5, nous pouvons de plus supposer que $Q(\varphi(\mathcal{U}) \cap \mathcal{X}(M)^G) = Q(\varphi(\mathcal{U})) \cap \mathcal{X}(M)^G$. On obtient ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}^S \arrow[r, "\varphi|_{\mathcal{U}^S}", "\cong"'] \arrow[rr, bend left, "(Q\circ\varphi)\,|_{\mathcal{U}^S}"] \arrow[d, hook] & \varphi(\mathcal{U}^S) \arrow[r, "Q|_{\varphi(\mathcal{U}^S)}", "\cong"'] \arrow[d, hook] & K_1 \times \{0\} \arrow[d, hook] \\
\mathcal{U} \arrow[r, "\varphi", "\cong"'] & \varphi(\mathcal{U}) \arrow[r, "Q", "\cong"'] & K_1 \times K_2 \\
\mathcal{U}^G \arrow[r, "\varphi|_{\mathcal{U}^G}", "\cong"'] \arrow[rr, bend right, "(Q\circ\varphi)\,|_{\mathcal{U}^G}"'] \arrow[u, hook] & \varphi(\mathcal{U})^G \arrow[r, "Q|_{\varphi(\mathcal{U})^G}", "\cong"'] \arrow[u, hook] & K_1^G \times K_2^G \arrow[u, hook]
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

les notations étant évidentes, par exemple, $\mathcal{U}^G := \mathcal{U} \,\cap\, \mathrm{Diff}\,(M)^G$. Il apparait alors clairement que

$$\Big(\mathcal{U}^{S,G},\, \big(Q\big|_{\varphi(\mathcal{U}^{S,G})}\big) \circ \big(\varphi\big|_{\mathcal{U}^{S,G}}\big) = (Q \circ \varphi)\,\big|_{\mathcal{U}^{S,G}}\Big)$$

est une carte de $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)^G$ (où $\mathcal{U}^{S,G} := \mathcal{U}^S \cap \mathcal{U}^G$) et que $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)^G$ est une sous-variété de $\mathrm{Diff}\,(M)^G$ en l'identité. Par translation, $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)^G$ est aussi un sous-groupe de Lie modéré de $\mathrm{Diff}\,(M)^G$.

Le fait que $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)^G$ soit un sous-groupe de Lie de $\mathrm{SDiff}\,(M, \mu)$ se montre en utilisant les mêmes techniques utilisées ici et dans la Proposition (2.1). $\square$

2.2 Quelques formules d'intégration sur un fibré principal

Soient $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$ un fibré principal et h^P une métrique sur P qui soit G-invariante (on suppose G et P compactes et connexes). Dans cette section nous adopterons les notations suivantes :

- $\vartheta \,:\, P \times G \to P$ est l'action à droite du groupe de structure G sur l'espace total P ;
- $\mathcal{O}_x$ est l'orbite du point $x \in P$ par rapport à l'action du groupe G ;
- pour $g \in G$ fixé, on note $\vartheta_g \,:\, P \to P\,,\, x \mapsto \vartheta(g,x)$;
- pour $x \in P$ fixé, on note $\vartheta_x \,:\, G \overset{\cong}{\to} \mathcal{O}_x \subseteq P\,,\, g \mapsto \vartheta(g,x)$ (remarquons que ϑ_x est un difféomorphisme de G sur $\mathcal{O}_x$ ce qui nous permet de considérer $\vartheta_x^{-1} \,:\, \mathcal{O}_x \to G$ dès qu'on a fixé un point x de l'orbite considérée) ;
- si $X_x \in T_xP$ pour un certain $x \in P$, alors on note X^v la projection orthogonale de X_x sur $T_x\mathcal{O}_x$ et X^h la composante de X_x perpendiculaire à $T_x\mathcal{O}_x$;
- l'algèbre de Lie du groupe G est notée $\mathfrak{g}$.

La métrique h^p étant G-invariante, cette dernière induit naturellement une 1-forme de connection $\theta \in \Omega^1(P,\, \mathfrak{g})$ qui est définie, pour $x \in P$ et $X_x \in T_xP$, par :

$$\theta_x(X_x) := (\vartheta_x^{-1})_{*_x}\, X_x^v \in \mathfrak{g}\,. \tag{2.10}$$

En particulier, on peut vérifier que

$$(\vartheta_g)^*\, \theta = Ad(g^{-1})\, \theta\,, \tag{2.11}$$

pour tout $g \in G$. Notons aussi que pour tout champ de vecteurs $Z \in \mathcal{X}(B)$, il existe un unique relevé horizontale, que nous noterons $Z^* \in \mathcal{X}(P)^G$, vérifiant $\pi_{*_x}\, Z_x^* = Z_{\pi(x)}$ pour tout $x \in P$ (voir [KN96a]).
Le lemme suivant décrit plus en détails la métrique h^P.

Lemme 2.6 *Il existe h^B une métrique sur B et $h^{\mathfrak{g}}$ une structure euclidienne sur le fibré trivial $P \times \mathfrak{g}$ telles que :*

(i) $h_x^P(X_x, Y_x) = (\pi^*\, h^B)_x(X_x, Y_x) + h_x^{\mathfrak{g}}(\theta_x(X_x), \theta_x(Y_x))$ *pour tout* $x \in P$ *et pour tout* $X_x, Y_x \in T_xP$;

(ii) $\pi \,:\, (P, h^P) \to (B, h^B)$ *est une submersion riemannienne ;*

(iii) $h^{\mathfrak{g}}_{\vartheta_g(x)}(\xi, \zeta) = h_x^{\mathfrak{g}}(Ad(g)\, \xi, Ad(g)\, \zeta)$ *pour tout* $g \in G$, $x \in P$ *et* $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$.

Remarque 2.7 *Le point (i) du Lemme 2.6 donne une décomposition de la métrique h^P par rapport aux vecteurs horizontaux et verticaux de P.*

Remarque 2.8 *Pour $x \in P$, $ker(\pi_{*_x}) = T_x\mathcal{O}_x$ et l'application $\pi_{*_x}\big|_{(T_x\mathcal{O}_x)^\perp} :$ $(T_x\mathcal{O}_x)^\perp \to T_{\pi(x)}B$ est un isomorphisme linéaire (voir [KN96a]). En particulier, il existe un isomorphisme canonique entre les champs de vecteurs horizontaux G-invariants de P et les champs de vecteurs de B.*

Démonstration du Lemme 2.6. Pour $X, Y \in \mathcal{X}(P)$ et $x \in P$, on a :

$$\begin{aligned} & h_x^P(X_x,\, Y_x) = h_x^P(X_x^h + X_x^v,\, Y_x^v + Y_x^v) \\ = \; & h_x^P(X_x^h,\, Y_x^h) + \underbrace{h_x^P(X_x^h,\, Y_x^v)}_{=0} + \underbrace{h_x^P(X_x^v,\, Y_x^h)}_{=0} + h_x^P(X_x^v,\, Y_x^v) \\ = \; & h_x^P(X_x^h,\, Y_x^h) + h_x^P(X_x^v,\, Y_x^v)\,. \end{aligned}$$

Au vu de la Remarque 2.8, on définit alors la métrique h^B sur B par :

$$h_b^B(u,u') := h_x^P\Big(\big(\pi_{*_x}\,|_{(T_x\mathcal{O}_x)^\perp}\big)^{-1}(u),\ \big(\pi_{*_x}\,|_{(T_x\mathcal{O}_x)^\perp}\big)^{-1}(u')\Big) \tag{2.12}$$

où $b \in B$, $u, u' \in T_bB$ et où $x \in P$ est choisi de telle sorte que $\pi(x) = b$ (on peut vérifier que h^B est bien définie). La formule (2.12) et la Remarque 2.8 nous donnent alors :

$$\begin{aligned} h_x^P(X_x^h,\, Y_x^h) &= h_{\pi(x)}^B(\pi_{*_x}X_x^h,\, \pi_{*_x}Y_x^h) \\ &= h_{\pi(x)}^B(\pi_{*_x}X_x,\, \pi_{*_x}Y_x) \\ &= (\pi^*h^B)_x(X_x,\, Y_x)\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

On en déduit en particulier que $\pi\ :\ (P, h^P) \to (B, h^B)$ est une submersion riemannienne.
Sur la partie verticale, nous avons :

$$h_x^P\big(X_x^v,\, Y_x^v\big) = h_x^P\Big(\big(\vartheta_x\big)_{*_e}\theta_x(X_x^v),\ \big(\vartheta_x\big)_{*_e}\theta_x\big(Y_x^v\big)\Big)\,.$$

Pour $x \in P$, définissons $h_x^{\mathfrak{g}}$ par :

$$h_x^{\mathfrak{g}}(\xi,\, \zeta) := h_x^P\Big(\big(\vartheta_x\big)_{*_e}\xi,\ \big(\vartheta_x\big)_{*_e}\zeta\Big)\,,$$

où $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$ (on peut voir $h^{\mathfrak{g}}$ comme une structure euclidienne sur le fibré $P \times \mathfrak{g}$). Ainsi,

$$h_x^P\big(X_x^v,\, Y_x^v\big) = h_x^{\mathfrak{g}}\Big(\,\theta_x(X_x^v),\, \theta_x\big(Y_x^v\big)\Big) = h_x^{\mathfrak{g}}\Big(\,\theta_x(X_x),\, \theta_x(Y_x)\Big)\,. \tag{2.14}$$

Des formules (2.14) et (2.13), on en déduit (i).
Montrons (iii). L'invariance de h^P et la formule (2.11) impliquent, pour $x \in P$ et $g \in G$, les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} & h_{\vartheta_g(x)}^P\Big((\vartheta_g)_{*_x}X_x^v,\, (\vartheta_g)_{*_x}Y_x^v\Big) = h_x^P\big(X_x^v,\, Y_x^v\big) \\ \Leftrightarrow\quad & h_{\vartheta_g(x)}^{\mathfrak{g}}\Big(\theta_{\vartheta_g(x)}\big((\vartheta_g)_{*_x}X_x^v\big),\, \theta_{\vartheta_g(x)}\big((\vartheta_g)_{*_x}Y_x^v\big)\Big) = h_x^{\mathfrak{g}}\Big(\theta_x\big(X_x^v\big),\, \theta_x\big(Y_x^v\big)\Big) \\ \Leftrightarrow\quad & h_x^{\mathfrak{g}}\Big(Ad(g^{-1})\theta_x\big(X_x^v\big),\, Ad(g^{-1})\theta_x\big(Y_x^v\big)\Big) = h_x^{\mathfrak{g}}\Big(\theta_x\big(X_x^v\big),\, \theta_x\big(Y_x^v\big)\Big)\,. \end{aligned}$$

Par suite, $h^{\mathfrak{g}}$ vérifie :

$$h_{\vartheta_g(x)}^{\mathfrak{g}}(\xi,\, \zeta) = h_x^{\mathfrak{g}}(Ad(g)\,\xi,\, Ad(g)\,\zeta)$$

pour tout $\xi, \zeta \in \mathfrak{g}$. □

A présent, supposons que P et B soient orientées, nous pouvons considérer μ^P, la forme volume induite sur P par la métrique h^P ainsi que μ^B, la forme volume de B induite par h^B. Tout comme pour la métrique h^P, nous allons détailler la forme volume μ^P.

Lemme 2.9 *Soit (E, h) un espace euclidien de dimension finie orienté. On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$ et que $h = p_1^* h^{E_1} + p_2^* h^E$ où h^{E_i} est une métrique de E_i et $p_i\,:\,E_1 \oplus E_2 \to E_i$ la projection canonique. Alors, si E_1 est muni d'une certaine orientation, on a :*

$$\mu^E = p_1^*\,\mu^{E_1} \wedge p_2^*\,\mu^{E_2}$$

où $\mu^E\,,\mu^{E_i}$ désignent les formes volumes associées aux métriques h, h^{E_i} (par convention, une base $\{f_1, ..., f_m\}$ de E_2 est positive si et seulement si la famille $\{e_1, ..., e_n, f_1, ..., f_m\}$ est une base positive de E dès que $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base positive de E_1).

Démonstration. Soient $\{e_1, ..., e_n\}$ une base positive de E_1 et $\{f_1, ..., f_m\}$ une base positive de E_2 dont les bases duales canoniquement associées sont respectivement $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ et $\{f_1^*, ..., f_m^*\}$. Notons $h_{ij}^{E_1} := h^{E_1}(e_i, e_j)$ pour $i, j \in \{1, ..., n\}$ et $h_{ij}^{E_2} := h^{E_2}(f_i, f_j)$ pour $i, j \in \{1, ..., m\}$. On a d'une part

$$\mu^E = \left(\det(h_{ij}^{E_1})\right)^{\frac{1}{2}} \left(\det(h_{ij}^{E_2})\right)^{\frac{1}{2}} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge f_1^* \wedge \cdots \wedge f_m^*\,.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} & \mu^{E_1} = \det(h_{ij}^{E_1})^{\frac{1}{2}}\, e_1^*\big|_{E_1} \wedge \cdots \wedge e_n^*\big|_{E_1} \\ \Rightarrow\quad & p_1^*\,\mu^{E_1} = \det(h_{ij}^{E_1})^{\frac{1}{2}}\, e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\,. \end{aligned}$$

De même, $p_2^*\,\mu^{E_2} = \det(h_{ij}^{E_2})^{\frac{1}{2}}\, f_1^* \wedge \cdots \wedge f_n^*$. Ainsi,

$$p_1^*\,\mu^{E_1} \wedge p_2^*\,\mu^{E_2} = \left(\det(h_{ij}^{E_1})\right)^{\frac{1}{2}} \left(\det(h_{ij}^{E_2})\right)^{\frac{1}{2}} e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* \wedge f_1^* \wedge \cdots \wedge f_m^* = \mu^E$$

ce qui prouve le lemme. □

Appliquons le Lemme 2.9 à μ^P. Prenons $x \in P$ et notons :

- $E_1 := (T_x\mathcal{O}_x)^{\perp}\,;\quad E_2 := T_x\mathcal{O}_x\,;$
- $h_x^{E_1}(\xi_1, \xi_2) := (\pi^* h^M)_x(\xi_1, \xi_2)$ pour $\xi_1, \xi_2 \in E_1\,;$
- $h_x^{E_2}(\xi_1, \xi_2) := h_x^{\mathfrak{g}}(\theta_x(\xi_1), \theta_x(\xi_2))$ pour $\xi_1, \xi_2 \in E_2\,.$

Pour $i \in \{1, 2\}$, h^{E_i} est une métrique sur E_i et l'on a $h_x^P = p_1^* h^{E_1} + p_2^* h^E$ où $p_i\,:\,E_1 \oplus E_2 \to E_i$ est la projection canonique. Puisque l'on suppose la variété B orientée, l'espace E_1 est aussi orienté par l'isomorphisme $\pi_{*_x}\big|_{E_1} \to T_{\pi(x)}B$. On oriente E_2 comme dans le Lemme 2.9. On a alors :

$$\mu_x^P = p_1^*\,\mu^{E_1} \wedge p_2^*\,\mu^{E_2}\,. \tag{2.15}$$

Remarque 2.10 *La donnée d'une orientation sur P ainsi que d'une orientation sur B induit une orientation sur G de la façon suivante : pour $x \in P$, les espaces $T_x\mathcal{O}_x$ et $\mathfrak{g}$ sont isomorphes via l'application $\theta_x\big|_{T_x\mathcal{O}_x}\,:\,T_x\mathcal{O}_x \to \mathfrak{g}$. Or l'espace $T_x\mathcal{O}_x$ étant orienté (voir ci-dessus), l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est aussi orientée et induit une orientation sur G. Cette orientation ne dépend pas du point $x \in P$. En effet, si $\mu_x^{\mathfrak{g}}$ désigne la forme volume de $\mathfrak{g}$ induite par la métrique $h_x^{\mathfrak{g}}$, il est clair que $\mu_x^{\mathfrak{g}}$ dépend de façon continue de $x \in P$ et l'orientation induite par $\mu_x^{\mathfrak{g}}$ ne peut donc pas être inversée.*

Lemme 2.11 *Avec les notations introduites ci-dessus, on a la formule :*

$$p_1^* \,\mu^{E_1} = (\pi^* \mu^B)_x \,. \tag{2.16}$$

Démonstration. Prenons (U, φ) une carte positive en $\pi(x)$ de B de coordonnées locales $\{x_1, ..., x_n\}$. On en déduit une base positive de E_1 :

$$\left\{ \left(\pi_{*_x}\big|_{E_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\pi(x)} \,, \;\; i = 1, ..., n \right\} .$$

Pour $i \in \{1, ..., n\}$, notons

$$e_i := \left(\pi_{*_x}\big|_{E_1} \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\pi(x)} .$$

On a alors :

$$\mu^{E_1} = \det \, (h_{ij}^{E_1})^{\frac{1}{2}} \, e_1^*\big|_{E_1} \wedge \cdots \wedge e_n^*\big|_{E_1}$$

avec

$$\begin{aligned} h_{ij}^{E_1} &= h^{E_1}(e_i, \, e_j) = h^B_{\pi(x)}(\pi_{*_x} e_i, \, \pi_{*_x} e_j) \\ &= h^B_{\pi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{\pi(x)} , \, \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{\pi(x)} \right) = (h_{ij}^B \circ \pi)(x) \,. \end{aligned}$$

Ainsi, $p_1^* \,\mu^{E_1} = (\det \, (h_{ij}^B)^{\frac{1}{2}} \circ \pi)(x) \, e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$.
D'autre part,

$$\begin{aligned} (\pi^* \mu^B)_x(e_1, ..., e_n) &= \mu^B_{\pi(x)}(\pi_{*_x} e_1, ..., \pi_{*_x} e_n) \\ &= \mu^B_{\pi(x)}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\bigg|_{\pi(x)} , ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\bigg|_{\pi(x)} \right) \\ &= (\det \, (h_{ij}^B)^{\frac{1}{2}} \circ \pi)(x) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$(\pi^* \mu^B)_x = (\det \, (h_{ij}^B)^{\frac{1}{2}} \circ \pi)(x) \, e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^* = p_1^* \, \mu^B \,,$$

et donc $p_1^* \,\mu^{E_1} = (\pi^* \mu^B)_x$. □

Lemme 2.12 *Avec les notations introduites avant le Lemme 2.11, on a la formule :*

$$p_2^* \,\mu^{E_2} = \theta_x^* \, \mu_x^{\mathfrak{g}} \,, \tag{2.17}$$

où $\mu_x^{\mathfrak{g}}$ est la forme volume sur $\mathfrak{g}$ induite par la métrique $h_x^{\mathfrak{g}}$ (voir Remarque 2.10) et où $\theta_x^* \, \mu_x^{\mathfrak{g}}$ est le tiré en arrière de $\mu_x^{\mathfrak{g}}$ par l'application linéaire $\theta_x : T_xP \to \mathfrak{g}$.

Démonstration. Soit $\{\xi_1, ..., \xi_m\}$ une base positive de $\mathfrak{g}$ (voir la Remarque 2.10 pour la question de l'orientation de $\mathfrak{g}$). La famille $\{(\vartheta_x)_{*_e} \xi_1, ..., (\vartheta_x)_{*_e} \xi_m\}$ est une base positive de E_2 et on a la formule :

$$\mu^{E_2} = \det \, (h_{ij}^{E_2})^{\frac{1}{2}} \left((\vartheta_x)_{*_e} \, \xi_1 \right)^{\sharp} \wedge \cdots \wedge \left((\vartheta_x)_{*_e} \, \xi_1 \right)^{\sharp} \tag{2.18}$$

où "$\sharp$" : $E_2 \to E_2^*$ désigne l'opérateur de dualisation via la métrique $h_x^{E_2}$. Or,

$$\begin{aligned} h_{ij}^{E_2} &= h^{E_2}\Big((\vartheta_x)_{*_e}\,\xi_i,\,(\vartheta_x)_{*_e}\,\xi_j\Big) \\ &= h_x^{\mathfrak{g}}\Big(\theta_x\big((\vartheta_x)_{*_e}\,\xi_i\big),\,\theta_x\big((\vartheta_x)_{*_e}\,\xi_j\big)\Big) \\ &= h_x^{\mathfrak{g}}(\xi_i,\xi_j) = (h_x^{\mathfrak{g}})_{ij} \end{aligned} \tag{2.19}$$

et on peut vérifier, pour $u \in E_2$, que

$$\Big((\vartheta_x)_{*_e}\,\xi_j\Big)^{\sharp} u = \xi_j^{\sharp}\big(\theta_x(u)\big) \Rightarrow \Big((\vartheta_x)_{*_e}\,\xi_j\Big)^{\sharp} = \Big((\vartheta_x^{-1})_{*_e}\Big)^{*}\,\xi_j^{\sharp}\,. \tag{2.20}$$

Des formules (2.19) et (2.20) appliquées à (2.18), on en déduit :

$$\begin{aligned} \mu^{E_2} &= \det\Big((h_x^{\mathfrak{g}})_{ij}\Big)^{\frac{1}{2}}\left(\Big((\vartheta_x^{-1})_{*_e}\Big)^{*}\xi_1^{\sharp}\right)\wedge\cdots\wedge\left(\Big((\vartheta_x^{-1})_{*_x}\Big)^{*}\xi_m^{\sharp}\right) \\ &= \det\Big((h_x^{\mathfrak{g}})_{ij}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big((\vartheta_x^{-1})_{*_e}\Big)^{*}\,(\xi_1^{\sharp}\wedge\cdots\wedge\xi_m^{\sharp}) \\ &= \Big((\vartheta_x^{-1})_{*_e}\Big)^{*}\,\mu_x^{\mathfrak{g}}\,. \end{aligned}$$

Par suite,

$$p_2^*\,\mu^{E_2} = p_2^*\Big((\vartheta_x^{-1})_{*_e}\Big)^{*}\mu_x^{\mathfrak{g}} = \Big((\vartheta_x^{-1})_{*_e}\circ p_2\Big)^{*}\mu_x^{\mathfrak{g}} = \theta_x^*\,\mu_x^{\mathfrak{g}}$$

ce qui est la formule cherchée. $\square$

Des lemmes 2.11 et 2.12, on en déduit grâce à la formule (2.15) que

$$\mu_x^P = (\pi^*\mu^B)_x \wedge \theta_x^*\,\mu_x^{\mathfrak{g}}\,. \tag{2.21}$$

Introduisons une forme volume ν^G sur G qui soit bi-invariante et normalisée (c'est possible car G est compact et connexe). Pour $x \in P$, notons $\widetilde{V}(x)$ l'unique réel vérifiant $\widetilde{V}(x)\cdot\nu_e^G = \mu_x^{\mathfrak{g}}$. La G-invariance de μ^P implique que $\widetilde{V} = V\circ\pi$ pour un certain $V \in \mathrm{C}^\infty(B,\mathbb{R}_+^*)$. En résumé,

Proposition 2.13 *Il existe $V \in C^\infty(B,\mathbb{R}_+^*)$ telle que*

$$\mu^P = \pi^*(V\mu^B)\wedge\theta^*\,\nu_e^G\,, \tag{2.22}$$

où $\theta^*\,\nu_e^G \in \Omega^m(P)$ $(m = dim(G))$ est définie par

$$(\theta^*\,\nu_e^G)_x(X_1,...,X_m) = \nu_e^G\Big(\theta_x(X_1),...,\theta_x(X_m)\Big)\,,$$

pour $x \in P$ et $X_1,...,X_m \in T_xP$.

Pour donner une interprétation géométrique de la fonction V , faisons la remarque suivante.

Remarque 2.14 *Pour $x \in P$, l'orbite $\mathcal{O}_x$ de P passant par x est canoniquement orientée via l'application orbitale $\vartheta_x : G \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_x$. Cette orientation sur $\mathcal{O}_x$ ne dépend pas de l'application orbitale utilisée car pour $g \in G$, la connexité de G implique que l'application $\vartheta_{\vartheta_g(x)} : G \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_x$ induise la même orientation. On peut donc considérer sans ambiguïtés la forme volume $\mu^{\mathcal{O}_x}$ de $\mathcal{O}_x$ induite par la restriction de la métrique h^P à $\mathcal{O}_x$.*

Lemme 2.15 *Pour $x \in P$, on a la formule :*

$$\mu^{\mathcal{O}_x} = (V \circ \pi)(x) \cdot (\vartheta_x^{-1})^* \, \nu^G \, . \tag{2.23}$$

En particulier, $V\big(\pi(x)\big) = Vol(\mathcal{O}_x)$.

Démonstration. Notons $f \in C^\infty(\mathcal{O}_x, \mathbb{R})$ l'unique application vérifiant

$$(V \circ \pi)(x) \cdot (\vartheta_x^{-1})^* \, \nu^G = f \cdot \mu^{\mathcal{O}_x} \, . \tag{2.24}$$

Prenons $g \in G$. Les formes ν^G et $\mu^{\mathcal{O}_x}$ étant G-invariantes, on a :

$$\begin{aligned}
& (V \circ \pi)(x) \cdot (\vartheta_x^{-1})^* \, \nu^G = f \cdot \mu^{\mathcal{O}_x} \\
\Rightarrow \quad & \vartheta_g^*\Big((V \circ \pi)(x) \cdot (\vartheta_x^{-1})^* \, \nu^G\Big) = \vartheta_g^*\Big(f \cdot \mu^{\mathcal{O}_x}\Big) \\
\Rightarrow \quad & (V \circ \pi)(x) \cdot (\, \underbrace{\vartheta_x^{-1} \circ \vartheta_g}_{= L_g \circ \vartheta_x^{-1}} \,)^* \, \nu^G = f \circ \vartheta_g \cdot \mu^{\mathcal{O}_x} \\
\Rightarrow \quad & (V \circ \pi)(x) \cdot (\vartheta_x^{-1})^* \, \nu^G = f \circ \vartheta_g \cdot \mu^{\mathcal{O}_x} \, .
\end{aligned} \tag{2.25}$$

D'après les relations (2.24) et (2.25), on en déduit que $f \circ \vartheta_g = f$ pour tout $g \in G$. Ceci implique que f est constante sur $\mathcal{O}_x$. Montrons de plus que $f(x) = 1$. Prenons $\{u_1, ..., u_m\}$ une base orthonormée positive de $T_x\mathcal{O}_x$ (on suppose la dimension de G égale à m). Faisons deux observations concernant l'application $\theta_x\big|_{T_x\mathcal{O}_x} = (\vartheta_x^{-1})_{*_x} \; : \; \big(T_x\mathcal{O}_x, \, h^P\big|_{T_x\mathcal{O}_x}\big) \to (\mathfrak{g} \, , \, h_x^{\mathfrak{g}})$. Cette application est :

- une isométrie d'après le point (i) du Lemme 2.6 ;
- un isomorphisme qui préserve l'orientation d'après la Remarque 2.10.

On en déduit que $\big\{(\vartheta_x^{-1})_{*_x} \, u_1, ..., (\vartheta_x^{-1})_{*_x} \, u_m\big\}$ est une base orthonormée positive de $\mathfrak{g}$. Par suite,

$$\begin{aligned}
& \Big(f(x) \cdot \mu^{\mathcal{O}_x}\Big)_x (u_1, ..., u_m) = \Big((V \circ \pi)(x) \cdot (\vartheta_x^{-1})^* \, \nu^G\Big)_x (u_1, ..., u_m) \\
\Rightarrow \quad & f(x) = (V \circ \pi)(x) \cdot \nu_e^G \Big((\vartheta_x^{-1})_{*_x} \, u_1, ..., (\vartheta_x^{-1})_{*_x} \, u_m\Big) \\
\Rightarrow \quad & f(x) = \mu_x^{\mathfrak{g}} \Big((\vartheta_x^{-1})_{*_x} \, u_1, ..., (\vartheta_x^{-1})_{*_x} \, u_m\Big) \\
\Rightarrow \quad & f(x) = 1
\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. □

Pour finir cette section, donnons une formule d'intégration.

Proposition 2.16 *Pour $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$, on a la formule suivante :*

$$\int_P (f \circ \pi) \cdot \mu^P = \int_B f \cdot V \mu^B \, . \tag{2.26}$$

La Proposition 2.16 se montre au moyen de deux lemmes.

Lemme 2.17 *Soient E_1, E_2 deux espaces vectoriels de dimension respectives n et m, $\mu \in (\Lambda^n E_1^*)\backslash\{0\}$ et $p_i : E := E_1 \times E_2 \to E_i$ la projection canonique associée $(i = 1, 2)$. Pour $\alpha \in \Lambda^m E^*$, on a la formule :*

$$p_1^* \mu \wedge \alpha = p_1^* \mu \wedge \widetilde{\alpha}\,, \tag{2.27}$$

où $\widetilde{\alpha} \in \Lambda^m E^*$ est définie, pour $(u_1, v_1), ..., (u_m, v_m) \in E$, par :

$$\widetilde{\alpha}\Big((u_1, v_1), ..., (u_m, v_m)\Big) := \alpha\Big((0, v_1), ..., (0, v_m)\Big)\,. \tag{2.28}$$

Démonstration. Prenons $\{x_1, ..., x_n\}$ une base de E_1, $\{y_1, ..., y_m\}$ une base de E_2 et notons $\{z_1, ..., z_{n+m}\} := \{(x_1, 0), ..., (x_n, 0), (0, y_1), ..., (0, y_m)\}$ la base de E canoniquement associée. Notons aussi

- $\mu = \kappa \cdot x_1^* \wedge \cdots \wedge x_n^*,\ \kappa \in \mathbb{R}^*$;
- $\alpha = \displaystyle\sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n+m} \alpha_{i_1 \ldots i_m} \cdot z_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge z_{i_m}^*$.

On a alors,

$$\begin{aligned}
p_1^* \mu \wedge \alpha &= \kappa \cdot z_1^* \wedge \cdots \wedge z_n^* \wedge \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n+m} \alpha_{i_1 \ldots i_m}\, z_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge z_{i_m}^* \\
&= \kappa \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n+m} \alpha_{i_1 \ldots i_m} \cdot z_1^* \wedge \cdots \wedge z_n^* \wedge z_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge z_{i_m}^* \\
&= \kappa\, \alpha_{n+1 \ldots n+m} \cdot z_1^* \wedge \cdots \wedge z_n^* \wedge z_{n+1}^* \wedge \cdots \wedge z_{n+m}^* \\
&= \kappa\, \alpha\Big((0, y_1), ..., (0, y_m)\Big) \cdot z_1^* \wedge \cdots \wedge z_{n+m}^*\,.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

D'autre part, si

$$\widetilde{\alpha} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_m \le n+m} \widetilde{\alpha}_{i_1 \ldots i_m} \cdot z_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge z_{i_m}^*\,,$$

alors d'après la formule (2.28),

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\alpha}_{i_1 \ldots i_m} = \widetilde{\alpha}\Big(z_{i_1}, ..., z_{i_m}\Big) = \\
&\quad \begin{cases} \alpha\Big((0, y_1), ..., (0, y_m)\Big)\,, & \text{pour } (i_1, ..., i_m) = (1, ..., m)\,; \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

De (2.30), on en déduit que (2.29) est bien égale à $p_1^* \mu \wedge \widetilde{\alpha}$. $\square$

Pour le deuxième lemme, introduisons (U, φ) une carte trivialisante de B :

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times G \arrow[dl, "pr_1"] \\
& U &
\end{tikzcd}\,,$$

(l'application Ψ étant G-équivariante).

Lemme 2.18 *On a la formule :*

$$(\Psi^{-1})^*\mu^P = (V\circ pr_1)\cdot\big(pr_1^*\,\mu^B\big)\wedge\big(pr_2^*\,\nu^G\big)\,. \tag{2.31}$$

Démonstration. D'après la formule (2.22), on a :

$$\begin{aligned}(\Psi^{-1})^*\mu^P &= (\Psi^{-1})^*\Big((V\circ\pi)\cdot\pi^*\mu^B\wedge\theta^*\,\nu_e^G\Big)\\ &= (V\circ\pi\circ\Psi^{-1})\cdot\bigg(\Big((\Psi^{-1})^*\pi^*\mu^B\Big)\wedge\Big((\Psi^{-1})^*\theta^*\,\nu_e^G\Big)\bigg)\\ &= (V\circ pr_1)\cdot\bigg(\Big(pr_1^*\,\mu^B\Big)\wedge\Big((\Psi^{-1})^*\theta^*\,\nu_e^G\Big)\bigg)\,. \end{aligned}\tag{2.32}$$

Prenons $(x,g)\in U\times G$, $u_1,...,u_m\in T_xB$ et $\xi_1,...,\xi_m\in T_gG$ (on suppose la dimension de G égale à m) afin d'effectuer le calcul suivant :

$$\begin{aligned}&\Big((\Psi^{-1})^*\theta^*\,\nu_e^G\Big)_{(x,g)}\Big((u_1,\xi_1),...,(u_m,\xi_m)\Big)\\ =\;&\Big(\theta^*\,\nu_e^G\Big)_{(\Psi^{-1})(x,g)}\Big(\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(u_1,\xi_1),...,\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(u_m,\xi_m)\Big) \qquad (2.33)\\ =\;&\nu_e^G\bigg(\theta_{(\Psi^{-1})(x,g)}\Big(\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(u_1,\xi_1)\Big),...,\theta_{(\Psi^{-1})(x,g)}\Big(\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(u_m,\xi_m)\Big)\bigg)\,.\end{aligned}$$

Prenons la section locale $s\,:\,U\to P$ qui caractérise la trivialisation Ψ, c'est-à-dire :

$$\Psi^{-1}(x,g)=\vartheta_g\big(s(x)\big)=\vartheta\big(s(x),g\big)\,,$$

pour tout $(x,g)\in U\times G$. Prenons $i\in\{1,...,m\}$. On a :

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(u_i,\xi_i) &= \begin{bmatrix}(\vartheta_g)_*s_{*_x} & (\vartheta_{s(x)})_{*_g}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_i\\ \xi_i\end{bmatrix}\\ &= (\vartheta_g)_*s_{*_x}u_i+(\vartheta_{s(x)})_{*_g}\xi_i\;,\end{aligned}$$

et donc d'après la formule (2.11) ,

$$\begin{aligned}\theta_{(\Psi^{-1})(x,g)}\Big(\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(u_i,\xi_i)\Big) &= \theta_{\vartheta_g\left(s(x)\right)}\Big((\vartheta_g)_*s_{*_x}u_i\Big)+\theta_{\vartheta_g\left(s(x)\right)}\Big((\vartheta_{s(x)})_{*_g}\xi_i\Big)\\ &= Ad(g^{-1})\,\theta_{s(x)}\Big(s_{*_x}u_i\Big)+\theta_{\vartheta_g\left(s(x)\right)}\Big((\vartheta_{s(x)})_{*_g}\xi_i\Big)\,. \end{aligned}\tag{2.34}$$

On peut remarquer dans la formule (2.34) , que

$$\begin{aligned}\theta_{\vartheta_g\left(s(x)\right)}\Big((\vartheta_{s(x)})_{*_g}\xi_i\Big) &= (\vartheta^{-1}_{\vartheta_{s(x)}(g)})_{*_{\vartheta_g(s(x))}}(\vartheta_{s(x)})_{*_g}\xi_i\\ &= \Big(\underbrace{\vartheta^{-1}_{\vartheta_{s(x)}(g)}\circ\vartheta_{s(x)}}_{=L_{g^{-1}}}\Big)_{*_g}\xi_i=(L_{g^{-1}})_{*_g}\xi_i\,. \end{aligned}\tag{2.35}$$

Par suite, en prenant $u_i=0$ dans la formule (2.33), on obtient :

$$\begin{aligned}&\nu_e^G\bigg(\theta_{(\Psi^{-1})(x,g)}\Big(\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(0,\xi_1)\Big),...,\theta_{(\Psi^{-1})(x,g)}\Big(\Psi^{-1}_{*_{(x,g)}}(0,\xi_m)\Big)\bigg)\\ =\;&\nu_e^G\Big((L_{g^{-1}})_{*_g}\xi_1,...,(L_{g^{-1}})_{*_g}\xi_m\Big)=\nu_g^G\Big(\xi_1,...,\xi_m\Big)\\ =\;&\Big(pr_2^*\,(\nu^G)\Big)_{(x,g)}\Big((0,\xi_1),...,(0,\xi_m)\Big)\end{aligned}$$

et le Lemme 2.17 permet de conclure. $\square$

Démonstration de la Proposition 2.16. Soit $\big\{(U_i, \varphi_i)\,\big|\, i \in \{1, ..., s\}\big\}$ un atlas de B tel que chaque carte (U_i, φ_i) soit positive et trivialisante :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U_i) \arrow[rr, "\Psi_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U_i \times G \arrow[dl, "pr_1^i"] \\ & U_i & \end{tikzcd}\;.$$

Soit aussi $\Big\{\Big(\big(U_i, \varphi_i\big), \alpha_i\Big)\,\Big|\, i \in \{1, ..., s\}\Big\}$ une partition de l'unité de B subordonnée au recouvrement $\big\{U_i \,\big|\, i \in \{1, ..., s\}\big\}$.
On oriente $U_i \times G$ en prenant la classe d'orientation de la forme $\big((pr_1^i)^*(V\mu^B)\big) \wedge \big((pr_2^i)^*\,\nu^G\big)$. Pour cette orientation, Ψ_i est un difféomorphisme qui préserve l'orientation et on a d'après le Lemme 2.18 :

$$\begin{aligned} \int_P (f\circ\pi)\cdot\mu^P &= \sum_{i=1}^s \int_P (\alpha_i\circ\pi)\cdot(f\circ\pi)\cdot\mu^P \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{\pi^{-1}(U_i)} (\alpha_i\circ\pi)\cdot(f\circ\pi)\cdot\mu^P \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{U_i\times G} \big((\alpha_i\cdot f)\circ\pi\circ\Psi_i^{-1}\big)\cdot(\Psi_i^{-1})^*\mu^P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^s \int_{U_i\times G} \big((\alpha_i\cdot f)\circ pr_1^i\big)\cdot(\Psi_i^{-1})^*\mu^P \\ &= \sum_{i=1}^s \int_{U_i\times G} \big((\alpha_i\cdot f)\circ pr_1^i\big)\cdot\Big((pr_1^i)^*\,(V\mu^B)\Big)\wedge\Big((pr_2^i)^*\,\nu^G\Big) \\ &= \sum_{i=1}^s \text{Volume}\,(G)\int_{U_i} \alpha_i\cdot f\cdot V\mu^B = \int_B f\cdot V\mu^B\,. \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée. $\square$

2.3 Les équations d'Euler de SAut (P, μ^P)

Cette section est le coeur de ce chapitre. Pour une algèbre de Lie fréchétique $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ munie d'une forme bilinéaire continue, symétrique, faiblement non-dégénérée et définie positive $<\,,\,>$, on peut définir le dual régulier $\mathfrak{g}^*_{reg} \subseteq \mathfrak{g}^*$ de $\mathfrak{g}$ comme étant l'image de l'opérateur injectif continu $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}^*$, $\xi \to <\xi, .>$, et ainsi considérer, pour $\xi \in \mathfrak{g}$, l'opérateur $ad^*(\xi)\,:\,\mathfrak{g}^*_{reg} \to \mathfrak{g}^*$ défini pour $\alpha \in \mathfrak{g}^*_{reg}$ et $\xi' \in \mathfrak{g}$ par :

$$(ad^*(\xi)\,\alpha, \xi') := -(\alpha, ad(\xi)\,\xi')\,. \tag{2.36}$$

Remarquons que $ad^*(\xi)$ n'est pas forcément à valeurs dans $\mathfrak{g}^*_{reg}$ (c'est le cas si par exemple, $ad(\xi)$ admet une application transposée par rapport à la métrique $<\,,\,>$).

Définition 2.19 *Dans le cas où $ad^*(\xi)$ est à valeurs dans $\mathfrak{g}^*_{reg}$ pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, l'équation d'Euler associée à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par rapport à la métrique $<,>$ est par définition :*

$$\frac{d}{dt}\eta = -ad^*(\eta^\flat)\,\eta\,, \tag{2.37}$$

où η est un chemin lisse de $\mathfrak{g}^*_{reg}$ et où " $\flat$ " : $\mathfrak{g}^*_{reg} \to \mathfrak{g}$ désigne l'opérateur canonique induit par la métrique $<,>$.

Remarque 2.20 *En dimension finie, l'équation* (2.37) *est un cas particulier de l'équations de Lie-Poisson que l'on peut naturellement considérer sur le dual d'une algèbre de Lie munie de sa structure canonique de variété de Poisson (voir [MR99], [AK98]). Si G est un groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$ et possédant une métrique $G-$invariante, le cas* (2.37) *correspond à l'équation de Lie-Poisson par rapport à l'énergie $H : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$, $\alpha \to \frac{1}{2}<\alpha^\flat, \alpha^\flat>$ et l'on montre que cette équation décrit les géodésiques du groupe de Lie G (voir [AMR88]).*

Cette section va s'attacher à déterminer les équations d'Euler de l'algèbre de Lie du groupe $\mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ par rapport à une métrique naturelle (voir (2.46)).

2.3.1 L'identification des espaces $\mathcal{X}(P, \mu^P)^G$ et $\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$

Notons

$$C^\infty(P, \mathfrak{g})^G := \{f \in C^\infty(P, \mathfrak{g}) \,\big|\, f \circ \vartheta_g = Ad(g^{-1})\, f \;, \forall g \in G\}$$

et définissons $\Phi : \mathcal{X}(P)^G \to \mathcal{X}(B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ par :

$$\Phi(X) := \Big(\pi_* X^h,\, \theta(X^v)\Big)\,, \tag{2.38}$$

où $X \in \mathcal{X}(P)^G$ et où l'on note $\pi_* X^h \in \mathcal{X}(B)$ le champ de vecteurs définie pour $x = \pi(y) \in B$, par $(\pi_* X^h)_x := \pi_{*_y} X^h_y$. On peut vérifier par la Remarque 2.8 page 36 et la formule (2.11) que l'application Φ est bien définie et est inversible, l'inverse étant $\big(\Phi^{-1}(X, f)\big)_x = X^*_x + (\vartheta_x)_{*_e} f(x)$, où $X \in \mathcal{X}(B)$, $f \in C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ et $x \in P$. L'espace $\mathcal{X}(P)^G$ étant une algèbre de Lie, $\mathcal{X}(B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ devient naturellement une algèbre de Lie. Plus précisément,

Proposition 2.21 *Le crochet de Lie de l'algèbre $\mathcal{X}(B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ est donné par la formule suivante :*

$$\begin{aligned}&\big[(Z, f), (Z', f')\big] \\ &\qquad = -\Big([Z, Z'],\, [f, f'] + Z^*(f') - (Z')^*(f) + \Omega\Big(Z^*,\, (Z')^*\Big)\Big)\end{aligned} \tag{2.39}$$

où $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ est la courbure de la connection θ, c'est-à-dire, $\Omega_x(X, Y) = \theta_x([X^h, Y^h])$ pour $x \in P$ et $X, Y \in T_x P$.

Remarque 2.22 *Le signe "$-$" qui apparait devant le terme* (2.39) *provient du fait que l'on considère sur $\mathcal{X}(P)^G$ le crochet de Lie induit par la structure de groupe de Lie de $Aut(P)$ (voir aussi le point (ii) de la Proposition* (B.35)*).*

Donnons quelques lemmes pour montrer ce résultat.

Lemme 2.23 *Soient $X, Y \in \mathcal{X}(P)^G$ tel que Y soit vertical. Alors,*

$$[X,Y]_x = (\vartheta_x)_{*_e} X_x\Big(\theta(Y)\Big)\,, \tag{2.40}$$

où $x \in P$.

Démonstration. On a :

$$[X,Y]_x = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\varphi^X_{-t})_{*_{\varphi^X_t(x)}} Y_{\varphi^X_t(x)}\,. \tag{2.41}$$

D'autre part, Y étant vertical,

$$Y_{\varphi^X_t(x)} = \frac{d}{ds}\Big|_0 \vartheta\Big(\varphi^X_t(x),\, \exp\big(s\,\theta_{\varphi^X_t(x)}(Y)\big)\Big)\,. \tag{2.42}$$

En utilisant l'invariance de X et la formule (2.42) dans (2.41), on obtient donc :

$$\begin{aligned}
[X,Y]_x &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{d}{ds}\Big|_0 (\varphi^X_{-t})\Bigg(\vartheta\Big(\varphi^X_t(x),\, \exp\big(s\,\theta_{\varphi^X_t(x)}(Y)\big)\Big)\Bigg)\\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \frac{d}{ds}\Big|_0 \vartheta\Big(x,\, \exp\big(s\,\theta_{\varphi^X_t(x)}(Y)\big)\Big) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\vartheta_x)_{*_e}\theta_{\varphi^X_t(x)}(Y)\\
&= (\vartheta_x)_{*_e}\frac{d}{dt}\Big|_0 \theta_{\varphi^X_t(x)}(Y) = (\vartheta_x)_{*_e} X_x\Big(\theta(Y)\Big)\,,
\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. □

Le lemme suivant est montré dans [KN96a].

Lemme 2.24 *Soient $X, Y \in \mathcal{X}(P)^G$ et $x \in P$. On a la formule :*

$$[X^h, Y^h]_x = [(\pi_* X^h),\, (\pi_* Y^h)]^*_x + (\vartheta_x)_{*_e}\Omega_x(X^h, Y^h)\,. \tag{2.43}$$

Démonstration de la Proposition 2.21 Soient $X, Y \in \mathcal{X}(P)^G$ et $x \in P$. D'après les lemmes 2.23 et 2.24, on a :

$$\begin{aligned}
[X,Y]_x &= [X^h, Y^h]_x + [X^h, Y^v]_x + [X^v, Y^h]_x + [X^v, Y^v]_x\\
&= \Big[(\pi_* X^h),\, (\pi_* Y^h)\Big]^*_x + (\vartheta_x)_{*_e}\Omega_x(X^h, Y^h) + (\vartheta_x)_{*_e} X^h_x\Big(\theta(Y^v)\Big)\\
&\quad -(\vartheta_x)_{*_e} Y^h_x\Big(\theta(X^v)\Big) + \underbrace{\Big[\,(\vartheta_x)_{*_e}\theta(X^v)\,,\,(\vartheta_x)_{*_e}\theta(Y^v)\,\Big]_x}_{=(\vartheta_x)_{*_e}[\theta(X^v)\,,\,\theta(Y^v)]}\\
&= \Bigg(\Phi^{-1}\Bigg(\Big[(\pi_* X^h),\, (\pi_* Y^h)\Big]\,,\, \Big[\theta(X^v)\,,\,\theta(Y^v)\Big] +\\
&\qquad\qquad X^h_x\Big(\theta(Y^v)\Big) - Y^h_x\Big(\theta(X^v)\Big) + \Omega_x(X^h, Y^h)\Bigg)\Bigg)_x\,,
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule cherchée. □

A présent, si l'on s'intéresse plus particulièrement aux champs de vecteurs de P G-invariant et à divergence nulle par rapport à la forme de volume μ^P, alors on a la proposition suivante.

Proposition 2.25 *L'application Φ induit un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire :*

$$\mathcal{X}(P,\mu^P)^G \cong \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G\,, \tag{2.44}$$

c'est-à-dire, si $X \in \mathcal{X}(P)^G$, alors $X \in \mathcal{X}(P,\mu^P)^G$ si et seulement si $\Phi(X) \in \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$.

Pour montrer ce résultat, donnons le lemme suivant :

Lemme 2.26 *Pour $X \in \mathcal{X}(P)^G$, on a :*

(i) $X(V\circ\pi) = \Big((\pi_* X)(V)\Big)\circ\pi\,;$

(ii) $\mathcal{L}_X(\pi^*\mu^B) = \pi^*\Big(\mathcal{L}_{\pi_* X}(\mu^B)\Big) = \big(div_{\mu^B}\,(\pi_* X)\circ\pi\big)\cdot\pi^*\mu^B\,;$

(iii) $(\pi^*\mu^B)\wedge\mathcal{L}_X(\theta^*\nu_e^G) = 0\,.$

Démonstration. Le point (i) est évident. Montrons (ii). En utilisant la relation $\pi\circ\varphi_t^X = \varphi_t^{\pi_* X}\circ\pi$, on constate que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\pi^*\mu^B) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\varphi_t^X)^*\pi^*\mu^B = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\pi\circ\varphi_t^X)^*\mu^B \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\varphi_t^{\pi_* X}\circ\pi)^*\mu^B = \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi^*(\varphi_t^{\pi_* X})^*\mu^B \\
&= \pi^*\,\frac{d}{dt}\Big|_0 (\varphi_t^{\pi_* X})^*\mu^B = \pi^*\Big(\mathcal{L}_{\pi_* X}(\mu^B)\Big)\,.
\end{aligned}$$

Montrons (iii). Prenons $x \in P$ et $X, Y \in \mathcal{X}(P)^G$ tel que Y soit vertical. Alors,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X\theta)_x(Y_x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \Big((\varphi_t^X)^*\theta\Big)_x(Y_x) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \theta_{\varphi_t^X(x)}\Big((\varphi_t^X)_{*_x}Y_x\Big) \\
= \frac{d}{dt}\Big|_0 (\vartheta^{-1}_{\varphi_t^X(x)})_{*_{\varphi_t^X(x)}}\,(\varphi_t^X)_{*_x}Y_x\,.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Si dans l'équation (2.45), on regarde Y_x comme un élément de $T_x\mathcal{O}_x$ et φ_t^X comme un difféomorphisme entre $\mathcal{O}_x$ et $\mathcal{O}_{\varphi_t^X(x)}$, alors,

$$(\mathcal{L}_X\theta)_x(Y_x) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\underbrace{\vartheta^{-1}_{\varphi_t^X(x)}\circ\varphi_t^X}_{=\,\vartheta_x^{-1}})_{*_x}Y_x = \frac{d}{dt}\Big|_0 (\vartheta_x^{-1})_{*_x}Y_x = 0\,.$$

Par suite, la forme $\mathcal{L}_X(\theta^*\nu_e^G)$ ne dépend que des champs de vecteurs horizontaux de P ce qui, d'après le Lemme 2.17, implique (iii). □

Démonstration de la Proposition 2.25. Soit $X \in \mathcal{X}(P)^G$. D'après la formule (2.22) page 40 et le Lemme 2.26 , on a :

$$\mathcal{L}_X\mu^P \;=\; \mathcal{L}_X\Big((V\circ\pi)\cdot\pi^*\mu^B\wedge\theta^*\,\nu_e^G\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= X(V\circ\pi)\cdot\pi^*\mu^B\wedge\theta^*\,\nu_e^G + (V\circ\pi)\cdot\mathcal{L}_X(\pi^*\mu^B)\wedge\theta^*\,\nu_e^G \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (V\circ\pi)\cdot\pi^*\mu^B\wedge\mathcal{L}_X(\theta^*\,\nu_e^G) \\
&= \Big((\pi_*X)(V)\Big)\circ\pi\cdot\frac{1}{V\circ\pi}\cdot\mu^P + \big(\operatorname{div}_{\mu^B}(\pi_*X)\circ\pi\big)\cdot\mu^P \\
&= \left(\Big((\pi_*X)(V)\Big)\cdot\frac{1}{V} + \operatorname{div}_{\mu^B}(\pi_*X)\right)\circ\pi\cdot\mu^P \\
&= \Big(\operatorname{div}_{V\mu^B}(\pi_*X)\Big)\circ\pi\cdot\mu^P\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$
\operatorname{div}_{\mu^P}(X) = \Big(\operatorname{div}_{V\mu^B}(\pi_*X)\Big)\circ\pi\,,
$$

ce qui montre la proposition. □

Enfin, les espaces $\mathcal{X}(B, V\mu^B)$ et $C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$ étant fermés dans les espaces de Fréchet $\mathcal{X}(B)$ et $C^\infty(P,\mathfrak{g})$, on obtient naturellement une structure d'espace fréchétique sur $\mathcal{X}(B, V\mu^B)\oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$. Notons alors $\widetilde{\Phi} : \mathcal{X}(P,\mu^P)^G \to \mathcal{X}(B, V\mu^B)\oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$ la restriction de Φ à $\mathcal{X}(P,\mu^P)$.

Lemme 2.27 *L'application $\widetilde{\Phi}$ est un isomorphisme $\mathbb{R}-$linéaire continu entre espaces de Fréchet.*

Démonstration. Nous savons déjà par la Proposition 2.25, que $\widetilde{\Phi}$ est une bijection. Montrons que $\widetilde{\Phi}$ est continue. Si nous prenons α un chemin lisse de $\mathcal{X}(P,\mu^P)^G$, alors d'après la caractérisation des courbes lisses d'un espace de sections et d'après la définition de Φ (voir la formule (2.38)), il apparait que $\Phi\circ\alpha$ est un chemin lisse de $\mathcal{X}(B, V\mu^B)\oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$. Ceci implique que $\widetilde{\Phi}$ est lisse, et en particulier, $\widetilde{\Phi}$ est continue. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à $\widetilde{\Phi}^{-1}$, le lemme s'en déduit. □

Remarque 2.28 *De la Proposition 2.21 et du Lemme 2.27, on en déduit que les espaces $\mathcal{X}(P,\mu^P)^G$ et $\mathcal{X}(B, V\mu^B)\oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$ sont isomorphes dans la catégorie des algèbres de Lie fréchétiques.*

2.3.2 Le dual régulier de $\mathcal{X}(P,\mu^P)^G$

Considérons le produit scalaire suivant sur l'espace $\mathcal{X}(P,\mu^P)^G$:

$$
<X, Y> := \int_P h_x^P(X_x, Y_x)\cdot\mu^P\,, \tag{2.46}
$$

pour $X, Y\in\mathcal{X}(P,\mu^P)^G$. Ce produit scalaire induit une métrique sur l'espace $\mathcal{X}(B, V\mu^B)\oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$ via l'application Φ (voir Proposition 2.25) :

$$
<(X,f),(X',f')> := \int_P h_x^P(\Phi^{-1}(X,f)_x,\,\Phi^{-1}(X',f')_x)\cdot\mu^P\,,
$$

pour $(X,f),(X',f')\in\mathcal{X}(B, V\mu^B)\oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$. Si l'on détaille cette formule en utilisant la forme explicite de la métrique h^P (voir Lemme 2.6), ainsi que la

Proposition 2.16, on obtient :

$$
\begin{aligned}
&<(X,f),(X',f')> \\
&\quad = \int_P h_x^P\Big(X_x^* + (\vartheta_x)_{*_x} f(x),\, (X')_x^* + (\vartheta_x)_{*_x} f'(x)\Big) \cdot \mu^P \\
&\quad = \int_P (\pi^* h^B)_x\Big(X_x^*, (X')_x^*\Big) \cdot \mu^P + \int_P h_x^{\mathfrak{g}}(f(x), f'(x)) \cdot \mu^P \\
&\quad = \int_P h_{\pi(x)}^B\Big(X_{\pi(x)}, (X')_{\pi(x)}\Big) \cdot \mu^P + \int_P h_x^{\mathfrak{g}}(f(x), f'(x)) \cdot \mu^P \\
&\quad = \int_B h_x^B\Big(X_x, (X')_x\Big) \cdot V\mu^B + \int_P h_x^{\mathfrak{g}}(f(x), f'(x)) \cdot \mu^P . \qquad (2.47)
\end{aligned}
$$

Notons $X^\sharp := h^B(X, \,.\,) \in \Omega^1(B)$ la forme différentielle “duale” de X et $f^\sharp := h^{\mathfrak{g}}(f, \,.\,) \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G = \{f \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*) \,|\, f \circ \vartheta_g = \mathrm{Ad}^*(g^{-1})\, f \,, \forall g \in G\}$. Avec ces notations, la formule (2.47) s'écrit :

$$
<(X,f),(X',f')> = \int_B X^\sharp(X') \cdot V\mu^B + \int_P (f^\sharp(x), f'(x)) \cdot \mu^P \,, \qquad (2.48)
$$

où $(\,.\,,\,.\,)$ désigne l'accouplement entre $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$.
Notons alors $A \;:\; \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G \;\to\; \Big(\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G\Big)^*$, (“ * ” désignant le dual topologique), l'opérateur continu et injectif de dualisation qui est défini par $A\big((X,f)\big) := <(X,f)\,,\,.>$.

Définition 2.29 *Le dual régulier* $\Big(\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G\Big)^*_{reg}$ *de* $\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ *est par définition l'image de l'opérateur* A *dans le dual topologique de* $\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$.

Proposition 2.30 *On a un isomorphisme entre espaces fréchétiques*

$$
\Big(\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G\Big)^*_{reg} \underset{\cong}{\xrightarrow{\Psi}} \frac{\Omega^1(B)}{d\,\Omega^0(B)} \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G \,, \qquad (2.49)
$$

où Ψ *est définie pour* $(X, f) \in \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ *par :*

$$
\Psi\Big(A\big((X,f)\big)\Big) := \Big([X^\sharp], f^\sharp\Big) . \qquad (2.50)
$$

Nous allons montrer la Proposition 2.30 au moyen de deux lemmes, le premier étant une légère généralisation de la décomposition de Helmholtz-Hodge (voir Lemme 2.3) .

Lemme 2.31 (Décomposition de Helmholtz-Hodge) *Soit* (M, g) *une variété riemannienne, compacte, sans bord, connexe, orientable et orientée par la forme de volume* μ *induite par la métrique* g . *Pour* $f \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$, *on a la décomposition suivante :*

$$
\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M, \mu) \oplus f \nabla \Omega^0(M) . \qquad (2.51)
$$

Démonstration. Prenons $X \in \mathcal{X}(M)$ et supposons que la décomposition (2.51) existe. On peut alors écrire $X = X^\mu + f\nabla p$ pour $X^\mu \in \mathcal{X}(M, \mu)$, $p \in \Omega^0(M)$, et l'on a :

$$
\mathrm{div}_\mu(X) = \mathrm{div}_\mu(f\nabla p) = (df)(\nabla p) + f \triangle p . \qquad (2.52)
$$

Considérons alors un chemin continu $\tilde{f} : [0,1] \to C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$ tel que $\tilde{f}_0 \equiv 1$ et $\tilde{f}_1 = f$. Notons aussi pour $t \in [0,1]$, $I_t : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C_0^\infty(M,\mathbb{R}) := \{h \in C^\infty(M,\mathbb{R}) \mid \int_M h \cdot \mu = 0\}$ l'opérateur défini par $I_t(p) := (d\tilde{f}_t)(\nabla p) + \tilde{f}_t \triangle p$ pour $p \in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Sans entrer dans les détails des espaces de Sobolev, il apparait que I_t est un chemin continu d'opérateurs elliptiques, et pour tout $t \in [0,1]$, le noyau de I_t est de dimension 1 (cela provient du fait que localement I_t est sans terme constant, et pour un tel opérateur elliptique, le noyau est toujours constitué des fonctions constantes, voir [Jos02] ou le Lemme B.40). De plus, d'après un résultat classique sur le laplacien d'une variété riemannienne compacte orientable, l'opérateur $\Delta : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ est surjectif (voir par exemple [Heb96]). Ceci implique que $Ind(I_1) = Ind(I_0) = 1 - 0 = 1$. On en déduit que I_1 est surjectif, en particulier, l'équation (2.52) admet une unique solution définie à une constante réelle près. Si l'on prend une fonction p solution de (2.52), on constate alors que $X = (X - f\nabla p) + f\nabla p$ est la décomposition de X cherchée. $\square$

Le deuxième lemme concerne la topologie d'espace fréchétique que l'on peut mettre sur $\big(\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)\big) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$.

Lemme 2.32 *L'espace* $d\,\Omega^0(B)$ *est fermé dans* $\Omega^1(B)$ *. En particulier, le quotient* $\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)$ *est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Prenons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\Omega^0(B)$ telle que $df_n \to \alpha \in \Omega^1(B)$ pour un certain $\alpha \in \Omega^1(B)$. Nous devons montrer que la forme α est exacte. Pour ce faire, il nous suffit de montrer que l'intégrale de α sur tout chemin lisse fermé de B est nulle.
Soit alors $c : S^1 \to B$ un chemin lisse fermé de B . Par continuité de l'intégration (curviligne) sur l'espace $\Omega^1(B)$, on a :

$$\int_c \alpha = \int_c \lim_{n\to\infty} (df_n) = \lim_{n\to\infty} \int_c df_n = 0\,,$$

ce qui montre le lemme. $\square$

L'ensemble $C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$ étant fermé dans l'espace de Fréchet $C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)$, il en résulte que $C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$ est naturellement un espace de Fréchet et on en déduit d'après le Lemme 2.32, que la somme directe $\big(\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)\big) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$ est un espace de Fréchet.

Remarque 2.33 *Le Lemme 2.32 implique que la somme apparaissant en* (2.51) *est topologique.*

Démonstration de la Proposition 2.30. Nous allons construire explicitement un inverse de $\Psi \circ A$. Pour ce faire, nous pouvons remarquer que les relations $\mathcal{X}(B, V\mu^B) = (1/V)\,\mathcal{X}(B, \mu^B)$ et $\mathcal{X}(B) = \mathcal{X}(B, \mu^B) \oplus V\nabla\Omega^0(B)$ (voir Lemme 2.31) impliquent la décomposition $\mathcal{X}(B) = \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus \nabla\Omega^0(B)$. Notons alors $\mathbb{P} : \mathcal{X}(B) \to \mathcal{X}(B, V\mu^B)$ la projection associée. On peut vérifier que l'application $\Big(\Omega^1(B)/d\Omega^0(B)\Big) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G \to \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$, $([\alpha], \zeta) \mapsto (\mathbb{P}(\alpha^\flat), \zeta^\flat)$ est l'inverse de l'application $\Psi \circ A$ (ici “ $\flat$ ” désigne l'opérateur inverse de dualisation “ $\sharp$ ”) .

Pour la continuité de $\Psi \circ A$ et de son inverse, on peut utiliser des arguments similaires à ceux utilisés dans le Lemme 2.27. $\square$

Remarque 2.34 *Les deux espaces vectoriels* $\Big(\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G\Big)^*_{reg}$ *et* $\Big(\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)\Big) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$ *étant linéairement isomorphes via l'application* Ψ , *il en résulte que* $\mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ *et* $\Big(\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)\Big) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$ *sont naturellement couplés, l'accouplement étant donné d'après la relation* (2.48) *par la formule :*

$$\Big(([\alpha], \xi),\, (X, f)\Big) := \int_B \alpha(X) \cdot V\mu^B + \int_P (\xi, f) \cdot \mu^P\,, \tag{2.53}$$

pour $\alpha \in \Omega^1(B)$, $\xi \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$, $X \in \mathcal{X}(B, V\mu^B)$ *et* $f \in C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$.

Donnons un diagramme pour résumer la situation :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}(P,\mu^P)^G \arrow[r, "\widetilde{\Phi}", "\cong"'] \arrow[dd, "\widetilde{A}", "\cong"'] \arrow[dd, dotted, bend right] & \mathcal{X}(B,V\mu^B) \oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G \arrow[d, "A"', "\cong"] \arrow[d, dotted, bend left] \arrow[dd, dotted, bend left=60] \\
 & \Big(\mathcal{X}(B,V\mu^B) \oplus C^\infty(P,\mathfrak{g})^G\Big)^*_{reg} \arrow[d, "\Psi"', "\cong"] \\
\big(\mathcal{X}(P,\mu^P)^G\big)^*_{reg} \arrow[r] & \Big(\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)\Big) \oplus C^\infty(P,\mathfrak{g}^*)^G \quad .
\end{tikzcd} \tag{2.54}$$

Ici, $\widetilde{A}$ correspond à l'opérateur de dualisation associé à la métrique $<.\,,.>$ définie en (2.46) sur $\mathcal{X}(P, \mu^P)^G$ et $\big(\mathcal{X}(P, \mu^P)^G\big)^*_{reg}$ désigne l'image de l'opérateur $\widetilde{A}$ dans l'espace $\big(\mathcal{X}(P, \mu^P)^G\big)^*$. Les flèches en pointillé indiquent les espaces couplés.

2.3.3 Détermination des équations d'Euler

Avec les différentes identifications montrées précédemment, $\mathcal{X}(P, \mu^P)^G \cong \mathcal{X}(B, V\mu^B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$ et $\big(\mathcal{X}(P, \mu^P)^G\big)^*_{reg} \cong \Big(\Omega^1(B)/d\,\Omega^0(B)\Big) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$, nous pouvons donner une réalisation géométrique de l'application ad^* associée à l'algèbre de Lie $\mathcal{X}(P, \mu^P)^G$:

Proposition 2.35 *Pour* $X \in \mathcal{X}(B, V\mu^B)$, $f \in C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$, $\alpha \in \Omega^1(B)$ *et* $\xi \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$, *on a la formule*

$$\begin{aligned} &ad^*(X, f)([\alpha], \xi) = \\ &\Big(\big[-\mathcal{L}_X\alpha - \widetilde{(\xi, df)} + \widetilde{(\xi, i_{X^*}\Omega)}\big]\,,\, -ad^*(f)\,\xi - X^*(\xi)\Big)\,, \end{aligned} \tag{2.55}$$

où $\widetilde{(\xi, df)}$ *et* $\widetilde{(\xi, i_{X^*}\Omega)}$ *sont deux 1-formes de* B *définies pour* $b \in B$, $Z \in \mathcal{X}(B)$ *et* $x \in P$ *tel que* $\pi(x) = b$ *par :*

$$\widetilde{(\xi, df)}_b(Z_b) := \Big(\xi(x),\, (df)_x Z^*_x\Big) \tag{2.56}$$

$$\text{et} \qquad \widetilde{(\xi, i_{X^*}\Omega)}_b(Z_b) := \Big(\xi(x),\, \Omega(X^*_x, Z^*_x)\Big)\,. \tag{2.57}$$

Remarque 2.36 *On peut vérifier que les formes définies en* (2.56) *et en* (2.57) *sont bien définies.*

Démonstration de la Proposition 2.35. Prenons $X, X' \in \mathcal{X}(B, V\mu^B)$, $f, f' \in C^\infty(P, \mathfrak{g})^G$, $\alpha \in \Omega^1(B)$ et $\xi \in C^\infty(P, \mathfrak{g}^*)^G$. D'après les formules (2.39), (2.48) et la Remarque 2.34, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathrm{ad}^*(X,f)([\alpha],\xi),\, (X',f')\Big) = -\Big(([\alpha],\xi),\, \mathrm{ad}(X,f)(X',f')\Big) \\
&= \Big(([\alpha],\xi),\, \Big([X,X'],\, [f,f'] + X^*(f') - (X')^*(f) + \Omega(X^*,(X')^*)\Big)\Big) \\
&= \int_B \alpha([X,X'])\cdot V\mu^B + \\
&\qquad\qquad \int_P \Big(\xi,\, [f,f'] + X^*(f') - (X')^*(f) + \Omega(X^*,(X')^*)\Big)\cdot\mu^P\,.
\end{aligned}$$

Nous allons calculer chaque terme séparément. On a :

- $$\begin{aligned}
&\int_B \alpha([X,X'])\cdot V\mu^B = \int_B \alpha\wedge i_{[X,X']}(V\mu^B) = \int_B \alpha\wedge[\mathcal{L}_X, i_{X'}](V\mu^B) \\
&= \int_B \alpha\wedge\mathcal{L}_X\, i_{X'}(V\mu^B) - \int_B \alpha\wedge i_{X'}\underbrace{\mathcal{L}_X(V\mu^B)}_{=0} \\
&= -\int_B (\mathcal{L}_X\alpha)(X')\cdot V\mu^B\,. \qquad (2.58)
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&\int_P (\xi,[f,f'])\cdot\mu^P = \int_P (\xi,\mathrm{ad}(f)(f'))\cdot\mu^P \\
&= -\int_P (\mathrm{ad}^*(f)\,\xi, f')\cdot\mu^P\,. \qquad (2.59)
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&\int_P (\xi, X^*(f'))\cdot\mu^P = \int_P X^*(\xi,f')\cdot\mu^P - \int_P (X^*(\xi),f')\cdot\mu^P \\
&= -\int_P (X^*(\xi),f')\cdot\mu^P\,. \qquad (2.60)
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&-\int_P (\xi,(X')^*(f))\cdot\mu^P = -\int_P (\xi, df\big((X')^*)\big)\cdot\mu^P \\
&= -\int_B \widetilde{(\xi,df)}(X')\cdot V\mu^B\,. \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
&\int_P \Big(\xi,\Omega(X^*,(X')^*)\Big)\cdot\mu^P = \int_P \Big(\xi,(i_{X^*}\Omega)((X')^*)\Big)\cdot\mu^P \\
&= \int_B \widetilde{(\xi,i_{X^*}\Omega)}(X')\cdot V\mu^B\,. \qquad (2.62)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{ad}^*(X,f)([\alpha],\xi),\,(X',f')\Big) &= \int_B \Big(-\mathcal{L}_X\alpha - \widetilde{(\xi,df)} + \widetilde{(\xi,i_{X^*}\Omega)}\Big)(X')\cdot V\mu^B \\ &\qquad + \int_P \Big(-\mathrm{ad}^*(f)\,\xi - X^*(\xi), f'\Big)\cdot\mu^P \\ &= \bigg(\Big(\big[-\mathcal{L}_X\alpha - \widetilde{(\xi,df)} + \widetilde{(\xi,i_{X^*}\Omega)}\big], -\mathrm{ad}^*(f)\,\xi - X^*(\xi)\Big), (X',f')\bigg),\end{aligned}$$

ce qui montre la proposition. □

Théorème 2.37 *Les équations d'Euler du groupe $SAut(P,\mu^P)$ sur le dual régulier de $\mathcal{X}(P,\mu^P)^G$ s'écrivent :*

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{d}{dt}[\alpha] &=& \big[-\mathcal{L}_X\alpha - \widetilde{(\xi,df)} + \widetilde{(\xi,i_{X^*}\Omega)}\big]\ ; \\ \dfrac{d}{dt}\xi &=& -ad^*(f)\,\xi - X^*(\xi)\,,\end{array}\right. \tag{2.63}$$

où $X \in \mathcal{X}(B,V\mu^B)$, $\alpha \in \Omega^1(B)$, $f \in C^\infty(P,\mathfrak{g})^G$, $\xi \in C^\infty(P,\mathfrak{g}^*)^G$ (ces quantités étant dépendantes du temps) et où

$$\left\{\begin{array}{l} f^\sharp = \xi\,,\ \text{c'est-à-dire, } \xi(x) := h^{\mathfrak{g}}_x(f(x),\,.\,)\ \text{pour } x\in P\,; \\ \quad [X^\sharp] = [\alpha]\ \text{où } X^\sharp_x := h^B_x(X_x,\,.\,)\ \text{pour } x\in B\,.\end{array}\right.$$

Remarque 2.38 *Si la structure euclidienne $h^{\mathfrak{g}}$ sur $P\times\mathfrak{g}$ est constante (i.e. indépendante des fibres), alors :*

- $\widetilde{(\xi,df)} = \frac{1}{2}d\Big(\|f\|^2\Big)$, *et donc* $[\widetilde{(\xi,df)}] = 0$;
- *la fonction $V\in C^\infty(B,\mathbb{R}^*_+)$ est constante et $\mathcal{X}(B,V\mu^B) = \mathcal{X}(B,\mu^B)$.*

Remarque 2.39 *Si la structure euclidienne $h^{\mathfrak{g}}$ sur $P\times\mathfrak{g}$ est indépendante des fibres et si la courbure Ω du fibré $G \hookrightarrow P \to B$ est nulle, alors la première équation du système (2.63) se réduit à l'équation autonome :*

$$\frac{d}{dt}[\alpha] \quad = \quad \big[-\mathcal{L}_X\alpha\big]\,. \tag{2.64}$$

Le système (2.63) décrit dans ce cas le mouvement passif d'un fluide idéal (voir [Viz01a], [Hat94]).

Remarque 2.40 *En utilisant la formule $\mathcal{L}_X(X^\sharp) = (\nabla_X X)^\sharp + \frac{1}{2}d(h^B(X,X))$ pour $X\in\mathcal{X}(B)$ (voir [AK98]), on constate que la première équation du système (2.63) est équivalente à :*

$$\frac{d}{dt}X = -\nabla_X X - \widetilde{(\xi,df)}^{\flat} + \widetilde{(\xi,i_{X^*}\Omega)}^{\flat} + \nabla p\,, \tag{2.65}$$

où $p\in C^\infty(B,\mathbb{R})$ est déterminée par la condition $div_{V\mu^B}(X) = 0$.

Si l'on spécialise le cas où P est un fibré en cercle avec $\dim(B) = 3$, et si $h^{\mathfrak{g}}$ est donnée par la formule $h^{\mathfrak{g}}_x(\rho,\varrho) := \rho\varrho$ pour $x\in P$ et $\rho,\varrho\in\mathbb{R}$ (on identifie l'algèbre de Lie de S^1 avec $\mathbb{R}$), alors :

- la courbure Ω se projette en une 2-forme $\widetilde{\Omega} \in \Omega^2(B)$. De même, toute fonction $f \in C^\infty(P, \mathfrak{g})^{S^1}$ se projette en une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(B, \mathfrak{g})$.
- On peut définir un champ de vecteurs $\mathfrak{B} \in \mathcal{X}(B, \mu^B)$ par la relation $i_{\mathfrak{B}}\, \mu^B = \widetilde{\Omega}$;
- on a la formule $X \times \mathfrak{B} = \big(i_X\, \widetilde{\Omega}\big)^\flat$ pour tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(B)$.

Dans ces conditions, il est facile de voir que le système (2.63) se réécrit :

$$\left\{\begin{array}{c} X = -\nabla_X X + \tilde{f}\, X \times \mathfrak{B} + \nabla p\,; \\ \dfrac{d}{dt}\tilde{f} = -X(\tilde{f})\,. \end{array}\right. \tag{2.66}$$

Il s'agit des équations de superconductivité qui décrivent l'évolution d'un fluide parfait chargé en présence d'un champ magnétique $\mathfrak{B}$. Le champ de vecteurs X décrit la vélocité des particules du gaze chargé et $\tilde{f}$ représente la densité de charge (voir [Viz01b]).

Remarque 2.41 *L'apparition d'un champ magnétique* $\mathfrak{B}$ *dans le système* (2.66) *n'est pas surprenant car en théorie de jauge, un champ électromagnétique est complètement décrit par la courbure de la 1-forme de connection associée à un* S^1-*fibré principal. Le cas où n'apparait qu'un champ magnétique (comme dans le système* (2.66)*) semble relever plus particulièrement du cas lié à la présence d'un monopole magnétique de Dirac (voir [Nab00], chapter 2).*

2.4 Le groupe SAut (P, μ^P) en tant qu'espace total d'un Gau(P)-fibré principal

2.4.1 La structure de fibré principal de SAut (P, μ^P)

Pour $\varphi \in \mathrm{Aut}(P)$, notons $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Diff}(B)$ l'unique difféomorphisme de B vérifiant :

$$\widetilde{\varphi} \circ \pi = \pi \circ \varphi\,. \tag{2.67}$$

Nous pouvons remarquer que l'application $\overline{p}\,:\,\mathrm{Aut}(P) \to \mathrm{Diff}(B)\,, \varphi \to \widetilde{\varphi}$ est un morphisme de groupes.

Proposition 2.42 *Un automorphisme* $\varphi \in Aut(P)$ *appartient à* $SAut(P, \mu^P)$ *si et seulement si* $\widetilde{\varphi} \in SDiff(B, V\mu^B)$.

Démonstration. D'après la formule (2.22) page 40, on a :

$$\begin{aligned} \varphi^*\mu^P &= \varphi^*\Big((V \circ \pi)\cdot \pi^*\mu^B \wedge \theta^*\,\nu_e^G\Big) \\ &= (V \circ \pi \circ \varphi)\cdot \Big(\varphi^*\pi^*\mu^B\Big) \wedge \Big(\varphi^*\theta^*\nu_e^G\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Afin de faciliter le calcul, pour $\varphi \in \mathrm{Aut}(P)$, notons $f^\varphi \in C^\infty(B, \mathbb{R}^*)$, la fonction déterminée par la relation $\widetilde{\varphi}^*\mu^B = f^\varphi \cdot \mu^B$. On a alors :

$$\begin{aligned} (V \circ \pi \circ \varphi)\cdot\Big(\varphi^*\pi^*\mu^B\Big) &= (V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi)\cdot\big(\pi \circ \varphi\big)^*\mu^B = (V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi)\cdot\big(\widetilde{\varphi} \circ \pi\big)^*\mu^B \\ &= (V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi)\cdot \pi^*\widetilde{\varphi}^*\mu^B = (V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi)\cdot \pi^*\big(f^\varphi \cdot \mu^B\big) \\ &= (V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi)\cdot (f^\varphi \circ \pi)\cdot \pi^*\mu^B\,. \end{aligned} \tag{2.69}$$

D'autre part, pour $x \in P$, et pour des vecteurs tangents verticaux $u_1, ..., u_m \in T_xP$ (on suppose $\dim(G) = m$), on a :

$$\begin{aligned}
\Big(\varphi^*(\theta^*\nu_e^G)\Big)_x(u_1, ..., u_m) &= (\theta^*\nu_e^G)_{\varphi(x)}(\varphi_{*_x}u_1, ..., \varphi_{*_x}u_m) \\
&= (\nu_e^G)\Big(\theta_{\varphi(x)}(\varphi_{*_x}u_1), ..., \theta_{\varphi(x)}(\varphi_{*_x}u_m)\Big) \\
&= (\nu_e^G)\Big((\varphi^*\theta)_x(u_1), ..., (\varphi^*\theta)_x(u_m)\Big) .
\end{aligned}$$

Le difféomorphisme φ étant G-équivariant, on peut montrer que $\varphi^*\theta$ est une forme de connexion. En particulier, les vecteurs u_i étant verticaux, $(\varphi^*\theta)_x(u_i) = \theta_x(u_i)$ pour $i \in \{1, ..., m\}$, et ainsi

$$\begin{aligned}
\Big(\varphi^*(\theta^*\nu_e^G)\Big)_x(u_1, ..., u_m) &= (\nu_e^G)\Big(\theta_x(u_1), ..., \theta_x(u_m)\Big) \\
&= (\theta^*\nu_e^G)_x(u_1, ..., u_m) . \qquad (2.70)
\end{aligned}$$

Etant donnés le Lemme 2.17 et les formules (2.70) et (2.69) , on obtient alors :

$$\varphi^*\mu^P = (V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi) \cdot (f^\varphi \circ \pi) \cdot \pi^*\mu^B \wedge \theta^*\nu_e^G = \frac{V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi \cdot f^\varphi \circ \pi}{V \circ \pi} \cdot \mu^P$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\varphi^*\mu^P = \mu^P \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{V \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi \cdot f^\varphi \circ \pi}{V \circ \pi} = 1 \ \Leftrightarrow \ f^\varphi \circ \pi = \left(\frac{V}{V \circ \widetilde{\varphi}}\right) \circ \pi \\
&\Leftrightarrow \quad f^\varphi = \frac{V}{V \circ \widetilde{\varphi}} \ \Leftrightarrow \ \widetilde{\varphi}^*\mu^B = \frac{V}{V \circ \widetilde{\varphi}} \cdot \mu^B \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{\varphi}^*(V\mu^B) = V\mu^B
\end{aligned}$$

ce qui montre la proposition. □

Avant de montrer que $\mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ est un $\mathrm{Gau}(P)$-fibré principal, où $\mathrm{Gau}(P) := \{\varphi \in \mathrm{Aut}(P) \,|\, \tilde{\varphi} = Id_B\}$, nous allons d'abord montrer que $\mathrm{Aut}(P)$ est un $\mathrm{Gau}(P)$-fibré principal. Nous verrons alors par la suite comment utiliser la Proposition 2.42 afin d'obtenir un résultat similaire sur le groupe $\mathrm{SAut}(P, \mu^P)$.

Rappelons tout d'abord quelques propriétés essentielles du groupe $\mathrm{Gau}(P)$, propriétés qui sont développées, ou alors que l'on peut déduire, de [ACMM89] et [KM97] :

Proposition 2.43 ([ACMM89]) *On a :*

(*i*) *Le groupe $Gau(P) = \{\varphi \in Aut(P) \,|\, \tilde{\varphi} = Id_B\}$ est un sous-groupe de Lie fréchétique fermé et plongé du groupe $Aut(P)$ dont l'algèbre de Lie s'identifie aux champs de vecteurs verticaux de P (voir Theorem 3.1 et Theorem 3.7 de [ACMM89]) ;*

(*ii*) *L'ensemble $\{f \in C^\infty(P, G) \,|\, f \circ \vartheta_g = c_{g^{-1}} \circ f \,, \forall g \in G\} =: C^\infty(P, G)^G$ (où $c_g : G \to G, h \to ghg^{-1}$), est un sous-groupe de Lie fréchétique fermé du groupe de courants $C^\infty(P, G)$ muni de la multiplication ponctuelle (voir [PS86]), et dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'espace fréchétique $C^\infty(P, \mathfrak{g})^G := \{f \in C^\infty(P, \mathfrak{g}) \,\big|\, f \circ \vartheta_g = Ad(g^{-1})\, f \,, \forall g \in G\}$;*

(iii) on a un isomorphisme de groupes de Lie fréchétiques :

$$C^\infty(P,G)^G \to Gau(P)\,,\ \ f \mapsto \vartheta_{f(\,.\,)}(\,.\,)\,. \tag{2.71}$$

Par la suite, nous identifierons souvent $\mathrm{Gau}(P)$ avec $C^\infty(P,G)^G$ via l'isomorphisme défini en (2.71) . Notons aussi :

- $\lambda\,:\,\mathrm{Aut}(P)\times\mathrm{Gau}(P)\to\mathrm{Aut}(P)$ l'action à droite du groupe $\mathrm{Gau}(P)$ sur $\mathrm{Aut}(P)$, définie par :

$$\Big(\lambda(\varphi,f)\Big)(x) := \vartheta_{f(x)}\big(\varphi(x)\big)\,, \tag{2.72}$$

  pour $\varphi\in\mathrm{Aut}(P)$, $f\in\mathrm{Gau}(P)$ et $x\in P$;
- pour $X\in\mathcal{X}(P)^G$, $\widetilde{X}\in\mathcal{X}(B)$ le champ de vecteur défini par $\widetilde{X}_b := {\pi_*}_x X_x$ pour $b\in B$ et où $x\in P$ est tel que $\pi(x)=b$;
- $\mathrm{Diff}^\sim(B) := \{\widetilde{\varphi}\in\mathrm{Diff}(B)\,|\,\varphi\in\mathrm{Aut}(P)\}$ (remarquons d'après la relation (2.67), que $\mathrm{Diff}^\sim(B)$ est un groupe) .

Lemme 2.44 *Le groupe $Diff^\sim(B)$ est une réunion de composantes connexes de $Diff(B)$ contenant $Diff^0(B)$. En particulier, $Diff^\sim(B)$ est naturellement un groupe de Lie fréchétique modéré.*

Démonstration. Soient $\varphi\in\mathrm{Aut}(P)$ et ψ un élément de la composante connexe de $\mathrm{Diff}(B)$ contenant $\widetilde{\varphi}$. Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $\psi\in\mathrm{Diff}^\sim(B)$.
Soit ψ_t un chemin lisse de $\mathrm{Diff}(B)$ joignant $\widetilde{\varphi}$ et ψ , c'est-à-dire :

$$\psi_0=\widetilde{\varphi} \quad \text{et} \quad \psi_1=\psi\,.$$

Notons :

$$(X_{t_0})_{x_0} := \frac{d}{dt}\bigg|_{t_0} \psi_t\Big(\psi_{t_0}^{-1}(x_0)\Big)\,,$$

pour $t_0\in[0,1]$ et $x_0\in B$. Il apparait que X est un champ de vecteurs de B dépendant du temps et le flot $\varphi_t^{X_t^*}$ de X_t^* vérifie :

$$\widetilde{\big(\varphi_t^{X_t^*}\big)} = \varphi_t^{\widetilde{X}_t^*} = \varphi_t^{X_t} = \psi_t\circ\widetilde{\varphi}^{-1}\,.$$

D'où,

$$\widetilde{\big(\varphi_t^{X_t^*}\circ\varphi\big)} = \widetilde{\varphi_t^{X_t^*}}\circ\widetilde{\varphi} = \psi_t\circ\widetilde{\varphi}^{-1}\circ\widetilde{\varphi} = \psi_t\,.$$

On en déduit que $\psi=\psi_1=\widetilde{\big(\varphi_1^{X_1^*}\circ\varphi\big)}$ appartient bien à $\mathrm{Diff}^\sim(B)$. □

Lemme 2.45 *Si $\varphi,\psi\in Aut(P)$ sont tels que $\widetilde{\varphi}=\widetilde{\psi}$, alors l'application*

$$\Lambda(\varphi,\psi)\,:\,P\to G\,,\,x\mapsto \big(\vartheta_{\varphi(x)}^{-1}\big)(\psi(x))\,, \tag{2.73}$$

est lisse.

Démonstration. Prenons U et V deux domaines de cartes trivialisantes de B :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Psi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times G \arrow[dl, "pr_1^U"] \\ & U & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[rr, "\Psi_V"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V \times G \arrow[dl, "pr_1^V"] \\ & V & \end{tikzcd} \quad ;$$

et tels que $\widetilde{\varphi}(U) \subseteq V$. Etant donné que φ et ψ sont G-équivariants, il existe s^φ, $s^\psi \in C^\infty(U, G)$ telles que pour tout $(x, g) \in U \times G$, $(\Psi_V \circ \varphi \circ \Psi_U^{-1})(x, g) = (\widetilde{\varphi}(x), s^\varphi(x) \cdot g)$ et $(\Psi_V \circ \psi \circ \Psi_U^{-1})(x, g) = (\widetilde{\varphi}(x), s^\psi(x) \cdot g)$. On a alors, en reprenant la formule (2.73) de $\Lambda(\varphi, \psi)$ appliquée en un point $\Psi_U^{-1}(x, g) \in \pi^{-1}(U)$:

$$\begin{aligned} & \Big(\Lambda(\varphi, \psi) \circ \Psi_U^{-1}\Big)(x, g) = \Big(\vartheta^{-1}_{\left(\varphi \circ \Psi_U^{-1}\right)(x,g)}\Big)\Big((\psi \circ \Psi_U^{-1})(x, g)\Big) \\ \Rightarrow \quad & \vartheta\bigg(\big(\varphi \circ \Psi_U^{-1}\big)(x, g), \, \big(\Lambda(\varphi, \psi) \circ \Psi_U^{-1}\big)(x, g)\bigg) = \Big(\psi \circ \Psi_U^{-1}\Big)(x, g) \\ \Rightarrow \quad & \vartheta_{\left(\Lambda(\varphi,\psi) \circ \Psi_U^{-1}\right)(x,g)}\bigg(\Big(\Psi_V \circ \varphi \circ \Psi_U^{-1}\Big)(x, g)\bigg) = \Big(\Psi_V \circ \psi \circ \Psi_U^{-1}\Big)(x, g) \\ \Rightarrow \quad & \vartheta_{\left(\Lambda(\varphi,\psi) \circ \Psi_U^{-1}\right)(x,g)}\Big(\widetilde{\varphi}(x), \, s^\varphi(x) \cdot g\Big) = (\widetilde{\varphi}(x), \, s^\psi(x) \cdot g) \\ \Rightarrow \quad & \Big(\widetilde{\varphi}(x), \, s^\varphi(x) \cdot g \cdot (\Lambda(\varphi, \psi) \circ \Psi_U^{-1})(x, g)\Big) = (\widetilde{\varphi}(x), \, s^\psi(x) \cdot g) \, . \end{aligned}$$

On en déduit que $(\Lambda(\varphi, \psi) \circ \Psi_U^{-1})(x, g) = g^{-1} \cdot s^\varphi(x)^{-1} \cdot s^\psi(x) \cdot g$. Par suite, $\Lambda(\varphi, \psi)$ est lisse. $\square$

Lemme 2.46 *L'action $\lambda : Aut(P) \times Gau(P) \to Aut(P)$ est libre et pour tout $\varphi \in Aut(P)$, $(\overline{p})^{-1}(\overline{p}(\varphi)) = \mathcal{O}_\varphi$ (ici $\mathcal{O}_\varphi$ désigne l'orbite de φ pour l'action λ).*

Démonstration. La liberté de λ est évidente.
Soit alors $\phi \in (\overline{p})^{-1}(\overline{p}(\varphi))$. Puisque $\widetilde{\phi} = \widetilde{\varphi}$, nous pouvons définir une application $f \in C^\infty(P, G)$ par la relation $f(x) := \vartheta^{-1}_{\varphi(x)}\big(\phi(x)\big)$ pour tout $x \in P$. Cette application est lisse d'après le Lemme 2.45 et l'on peut vérifier que $f \in \mathrm{Gau}(P)$ et que $\phi = \lambda(\varphi, f)$. Ainsi, $\phi \in \mathcal{O}_\varphi$ et $(\overline{p})^{-1}(\overline{p}(\varphi)) \subseteq \mathcal{O}_\varphi$. L'inclusion inverse étant évidente, le lemme est démontré. $\square$

Lemme 2.47 *L'application $Aut(P) \xrightarrow{\overline{p}} Diff^\sim(B)$ est lisse et admet des sections locales.*

Démonstration. L'application $\overline{p}$ étant un morphisme, il suffit de montrer que cette application possède une section locale au voisinage de Id_B dans $\mathrm{Diff}(B)$. Rappelons que $\pi : (P, h^P) \to (B, h^B)$ est une submersion riemannienne (Lemme 2.6) . On a donc la relation :

$$\pi\big(\exp(X_x)\big) = \exp_{\pi(x)}\big(\widetilde{X}_{\pi(x)}\big) \, , \tag{2.74}$$

pour tout $X \in \mathcal{X}(P)^G$ et $x \in P$. Prenons alors $X \in \mathcal{X}(P)^G$ suffisamment proche de 0 pour que l'application $\varphi : P \to P, \, x \mapsto \exp_x(X_x)$ soit un difféomorphisme de P (remarquons, puisque X et h^P sont $G-$invariants, que φ est $G-$équivariant, c'est-à-dire, $\varphi \in \mathrm{Aut}(P)$) . On constate d'après la relation (2.74), que $\overline{p}(\varphi)$ est l'application $B \to B$, $x \to \exp_x(\widetilde{X}_x)$. On en déduit que l'expression locale de $\overline{p}$ dans les "cartes standard" de $\mathrm{Aut}(P)$ et $\mathrm{Diff}^{\sim}(B)$, est simplement la projection $\mathcal{X}(P)^G \cong \mathcal{X}(B) \oplus C^\infty(P, \mathfrak{g})^G \to \mathcal{X}(B)$ sur le premier facteur (voir formule (2.38)). Cette application est donc lisse et admet clairement des sections locales. $\square$

Théorème 2.48 ([ACMM89]) *On a un fibré principal*

$$\mathit{Gau}(P) \hookrightarrow \mathit{Aut}(P) \xrightarrow{\overline{p}} \mathit{Diff}^{\sim}(B) \tag{2.75}$$

ainsi qu'une suite exacte de groupes de Lie fréchétiques modérés :

$$\{e\} \longrightarrow \mathit{Gau}(P) \longrightarrow \mathit{Aut}(P) \longrightarrow \mathit{Diff}^{\sim}(B) \longrightarrow \{e\}\,. \tag{2.76}$$

Démonstration. Soit $(\Phi(\mathcal{U}), \Phi^{-1})$ la carte standard de $\mathrm{Diff}^{\sim}(B)$ en l'identité, c'est-à-dire, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}(B)$ et Φ^{-1} est définie par $\Phi^{-1}(X)(x) := \exp_x(X_x)$. Prenons aussi $\sigma : \Phi(\mathcal{U}) \to \mathrm{Aut}(P)$ une section de $\overline{p}$. Nous allons construire une carte trivialisante de $\mathrm{Aut}(P)$ au-dessus de $\Phi(\mathcal{U})$. Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \overline{p}^{-1}(\Phi(\mathcal{U})) \arrow[rr, "\Psi_{\Phi(\mathcal{U})}"] \arrow[dr, "\overline{p}"'] & & \Phi(\mathcal{U}) \times \mathrm{Gau}(P) \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \Phi(\mathcal{U})) & \end{tikzcd}$$

où $\Psi_{\Phi(\mathcal{U})}$ est définie par $\Psi_{\Phi(\mathcal{U})}(\varphi) := \Big(\widetilde{\varphi}, \Lambda\big(\sigma(\widetilde{\varphi}), \varphi\big)\Big)$ pour $\varphi \in \mathrm{Aut}(P)$ (voir le Lemme 2.45 pour la définition de Λ). Il apparait que l'application $\Psi_{\Phi(\mathcal{U})}$ est :

- lisse d'après le Lemme 2.45 et la caractérisation des courbes lisses d'un espace de sections ;
- bijective, l'inverse étant donné par l'application

$$\Phi(\mathcal{U}) \times \mathrm{Gau}(P) \to (\overline{p})^{-1}(\Phi(\mathcal{U})), \quad (\chi, f) \mapsto \lambda(\sigma(\chi),\, f)\,;$$

- $\mathrm{Gau}(P)$-équivariante.

On en déduit que $\Big((\overline{p})^{-1}(\Phi(\mathcal{U})),\, \Psi_{\Phi(\mathcal{U})}\Big)$ est une carte trivialisante de $\mathrm{Aut}(P)$. Par suite, en utilisant les translations, $\mathrm{Aut}(P)$ devient un $\mathrm{Gau}(P)$-fibré principal au-dessus de $\mathrm{Diff}^{\sim}(B)$. $\square$

Revenons à présent au cas des automorphismes de P qui préservent μ^P. Notons $p : \mathrm{SAut}(P, \mu^P) \to \mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B) := \{\widetilde{\varphi} \in \mathrm{SDiff}(B, V\mu^B) \,|\, \varphi \in \mathrm{SAut}(P, \mu^P)\}$, $\varphi \to \widetilde{\varphi}$.

Lemme 2.49 *Le groupe $\mathit{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B)$ est une réunion de composantes connexes de $\mathit{SDiff}(B, V\mu^B)$ contenant la composante $\mathit{SDiff}^0(B, V\mu^B)$. En particulier, $\mathit{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B)$ est un groupe de Lie fréchétique modéré.*

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ et ψ un élément de la composante connexe de $\mathrm{SDiff}(B, V\mu^B)$ contenant $p(\varphi)$. Comme $\mathrm{SDiff}(B, V\mu^B) \subseteq \mathrm{Diff}(B)$, on peut, comme dans le Lemme 2.44, trouver $\psi_1 \in \mathrm{Aut}(P)$ tel que $\widetilde{\psi_1} = \psi$. Mais comme $\psi \in \mathrm{SDiff}(B, V\mu^B)$, la Proposition 2.42 implique que $\psi_1 \in \mathrm{SAut}(P, \mu^P)$

et donc $\psi \in \mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B)$. $\square$

Remarquons que l'action λ se restreint en une action sur $\mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ car pour $f \in \mathrm{Gau}(P)$ et $\varphi \in \mathrm{SAut}(P, \mu^P)$,

$$\widetilde{\lambda(\varphi, f)} = (\widetilde{\vartheta_{f(\,.\,)} \circ \varphi}) = \widetilde{\vartheta_{f(\,.\,)}} \circ \widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi} \in \mathrm{SDiff}(B, V\mu^B)\,,$$

ce qui veut dire d'après la Proposition 2.42, que $\lambda(\varphi, f) \in \mathrm{SAut}(P, \mu^P)$. Dans ce contexte, les analogues de tous les lemmes précédents restent valables. Par exemple, l'existence de sections locales de l'application $p\ :\ \mathrm{SAut}(P, \mu^P) \to \mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B)$ se déduit du Lemme 2.47 (il suffit de prendre des sections locales données par le Lemme 2.47 et de les retreindre à $\mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B)$). Par suite,

Théorème 2.50 *On a un fibré principal*

$$\mathit{Gau}(P) \hookrightarrow \mathit{SAut}(P, \mu^P) \xrightarrow{\ p\ } \mathit{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B) \tag{2.77}$$

ainsi qu'une suite exacte de groupes de Lie fréchétiques modérés :

$$\{e\} \longrightarrow \mathit{Gau}(P) \longrightarrow \mathit{SAut}(P, \mu^P) \longrightarrow \mathit{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B) \longrightarrow \{e\}\ . \tag{2.78}$$

Remarque 2.51 *On pourrait retrouver le Théorème 2.37 à partir du Théorème 2.50 et en utilisant la description que donne [Viz01b] des géodésiques de l'extension d'un groupe de Lie muni d'une métrique invariante.*

2.4.2 Le cas d'un fibré principal trivial

Abordons à présent le cas où le fibré P est trivial, c'est-à-dire $P = B \times G$. Dans cette situation, nous pouvons observer que,

- (i) $\mathrm{SDiff}^{\sim}(B, V\mu^B) = \mathrm{SDiff}\,(B, V\mu^B)$;
- (ii) $\mathrm{Gau}(P) \cong C^\infty(B, G)$;
- (iii) l'application $\sigma\ :\ \mathrm{SDiff}(B, V\mu^B) \to \mathrm{SAut}(P, \mu^P)$ définie par :

$$\sigma(\varphi)(b, g) := \big(\varphi(b), g\big)\,, \tag{2.79}$$

pour $(b, g) \in B \times G$, est une section globale du fibré (2.77).

L'existence d'une section globale σ nous donne de suite,

Proposition 2.52 *On a un isomorphisme de groupes de Lie fréchétiques :*

$$\mathit{SDiff}(B, V\mu^B) \ltimes C^\infty(B, G) \xrightarrow[\cong]{\ \Xi\ } \mathit{SAut}(P, \mu^P)\,, \tag{2.80}$$

l'application Ξ étant définie, pour $(\varphi, f) \in \mathit{SDiff}(B, V\mu^B) \times C^\infty(B, G)$ et $(b, g) \in B \times G$, par

$$\Big(\Xi(\varphi, f)\Big)(b, g) := \Big(\varphi(b),\ f(b) \cdot g\Big)\,. \tag{2.81}$$

Démonstration. Le seul point à vérifier est la structure de produit semi-directe de groupes de Lie fréchétiques sur le produit de variétés $\mathrm{SDiff}(B, V\mu^B) \times C^\infty(B,G)$. Prenons (φ, f), $(\varphi', f') \in \mathrm{SDiff}(B, V\mu^B) \times C^\infty(B,G)$ et $(b,g) \in B \times G$. On a :

$$\Big(\Xi(\varphi, f) \circ \Xi(\varphi', f')\Big)(b,g) = \Xi(\varphi, f)\Big(\varphi'(b),\ f'(b)\cdot g\Big)$$
$$= \bigg((\varphi \circ \varphi'(b)),\ (f\circ\varphi')(b)\cdot f'(b)\cdot g\bigg) = \Xi\Big(\varphi\circ\varphi',\ (f\circ\varphi')\cdot f'\Big)(b,g)\,.$$

Or $(\varphi, f)\cdot(\varphi', f') = \big(\varphi\circ\varphi',\ (f\circ\varphi')\cdot f'\big)$ pour la structure naturelle de produit semi-directe sur $\mathrm{SDiff}(B, V\mu^B) \ltimes C^\infty(B,G)$. Il s'ensuit que Ξ est bien un isomorphisme de groupes de Lie fréchétiques. $\square$.

Remarque 2.53 *Pour $P = B \times G$ avec $B = S^1$ et $V \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ constante, on a donc $SAut(P, \mu^P) \cong S^1 \ltimes LG$, où $LG := C^\infty(S^1, G)$ est le groupe de lacets du groupe G (voir [PS86]).*

Chapitre 3

La Grassmannienne non-linéaire et l'équation d'un filament de vorticité

3.1 La Grassmannienne non-linéaire comme variété fréchétique homogène

Pour une variété M donnée, l'étude des sous-variétés de M, du point de vue de la géométrie de dimension infinie, amène très naturellement à considérer l'ensemble des sous-variétés compactes, connexes et orientées de M comme une variété fréchétique. Cet ensemble est appelé la Grassmannienne non-linéaire et est notée $Gr_k(M)$ (k étant la dimension des sous-variétés considérées). Il y a essentiellement deux façons d'appréhender $Gr_k(M)$:

- la première, qui est amplement développée dans [KM97], consiste à prendre $\Sigma \in Gr_k(M)$ et à considérer l'espace des plongements lisses $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$. On peut alors identifier $Gr_k(M)$ (ou plutôt la réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$) comme étant le quotient de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ par rapport à l'action naturelle du groupe $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ des difféomorphismes de Σ qui préservent une orientation donnée, sur $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$. On obtient ainsi un fibré principal dans la catégorie des variétés fréchétiques $\mathrm{Diff}^+(\Sigma) \hookrightarrow \mathrm{Emb}\,(\Sigma, M) \to \mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ (voir Theorem 44.1., page 474 de [KM97]).
- La deuxième approche, plus intuitive, consiste à modeler directement $Gr_k(M)$ sur des espaces de sections $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ où $\Sigma \in Gr_k(M)$ et $N\Sigma$ désigne le fibré normal de Σ dans M. Cette approche est esquissée dans [Ham82].

La première partie de cet article s'attache à décrire très explicitement la construction ébauchée par Hamilton dans la catégorie des variétés fréchétiques modérées ("tame" en anglais, voir [Ham82]). La deuxième partie fait le lien entre les deux points de vue cités. Nous y montrons notamment un théorème analogue au Theorem 44.1. de [KM97], c'est-à-dire, nous montrons que l'espace des plongements $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ est un fibré principal, de groupe de structure $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ et dont la base est une réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$. Enfin dans la troisième partie, nous montrons que les composantes connexes de $Gr_k(M)$ sont homogènes sous l'action naturelle (et lisse) de $\mathrm{Diff}^0(M)$, la composante connexe en l'élément neutre du groupe des difféomorphismes de M. Cette homogénéité est déjà mentionnée, mais admise sans preuve, dans [Ism96]. En revanche, en adoptant le point de vue de [KM97] qui définit la Grassmannienne non-linéaire comme le quotient de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ par l'action de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$, l'homogénéité des composantes connexes de $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)$ sous $\mathrm{Diff}^0(M)$ implique automatiquement l'homogénéité des composantes connexes correspondantes du quotient $\mathrm{Emb}\,(\Sigma, M)/\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$. C'est cette approche qui est utilisée dans [HV04]. Ici encore, et contrairement à cette dernière, nous utilisons l'approche de [Ham82] et regardons $Gr_k(M)$ comme une collection de sous-variétés dont la structure différentielle est celle expliquée dans la section 3.1.1. Ce faisant, un travail supplémentaire est nécessaire pour montrer l'homogénéité des composantes connexes de $Gr_k(M)$ sous l'action de $\mathrm{Diff}^0(M)$.

3.1.1 La structure de variété de $Gr_k(M)$

Pour munir $Gr_k(M)$ d'une structure de variété, nous allons construire explicitement un atlas sur $Gr_k(M)$. Pour ce faire, prenons $\Sigma \in Gr_k(M)$ et introduisons les notations et objets suivants :

- Θ_Σ un ouvert contenant la section nulle du fibré normal $N\Sigma$ de Σ dans M, convexe fibre par fibre et tel que l'application

$$\tau_\Sigma \,:\, \Theta_\Sigma \to M\,, v \in N\Sigma_x \mapsto \exp_x(v)$$

soit un difféomorphisme de Θ_Σ sur son image ;

- $\mathcal{U}_\Sigma := \{s \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)\,|\, s(\Sigma) \subseteq \Theta_\Sigma\}$;

- $\varphi_\Sigma \,:\, \mathcal{U}_\Sigma \to Gr_k(M)$, application définie par $\varphi_\Sigma(s) = \tau_\Sigma\big(s(\Sigma)\big)$, cette dernière sous-variété étant munie de l'orientation induite par le difféomorphisme $\Sigma \to \tau_\Sigma\big(s(\Sigma)\big), x \mapsto \tau_\Sigma\big(s(x)\big)$.

Montrons que $\{(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma), \varphi_\Sigma^{-1})\,|\,\Sigma \in Gr_k(M)\}$ est un atlas différentiable de $Gr_k(M)$ au moyen des deux lemmes suivants.

Lemme 3.1 *Pour $\Sigma_1, \Sigma_2 \in Gr_k(M)$, l'ensemble $\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$.*

Démonstration. Montrons le par l'absurde en supposant que $\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ ne soit pas un ouvert de l'espace métrique $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$. On peut alors trouver une section $s \in \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ et une suite de sections $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $s_n \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ et $s_n \notin \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Prenons aussi U un voisinage ouvert de $\Sigma := \varphi_{\Sigma_1}(s)$ inclu dans $\tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1}) \cap \tau_{\Sigma_2}(\Theta_{\Sigma_2})$. L'ouvert U peut être vu simultanément comme une fibration (non-linéaire) au-dessus de Σ_1 et de Σ_2 munie des projections π_1 et π_2 :

$$\pi_i \,:\, U \to \Sigma_i\,.$$

Remarquons que $\pi_i|_\Sigma : \Sigma \to \Sigma_i$ est un difféomorphisme et que pour $x \in U$ on a :

$$\pi_i(x) = \pi_{\mathrm{N}\Sigma_i}\left(\tau_{\Sigma_i}^{-1}(x)\right),$$

où $\pi_{\mathrm{N}\Sigma_i} : N\Sigma_i \to \Sigma_i$ est la projection canonique. Nous allons montrer que l'application

$$\Sigma_1 \to \Sigma_2,\ m \mapsto (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(m)$$

est un difféomorphisme pour n assez grand. Remarquons déjà que puisque $s_n \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$, $\tau_{\Sigma_1}\big(s_n(\Sigma_1)\big) \subseteq U$ pour n assez grand, et donc l'application ci-dessus a un sens. Nous allons travailler localement, prenons $x \in \Sigma_1$. Puisque $s_n \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$, il existe $y \in \Sigma_2$ tel que $(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x) \to y$. Prenons alors des cartes trivialisantes :

$$\begin{tikzcd} \pi_{N\Sigma_1}^{-1}(W) \arrow[rr, "\Psi_W"] \arrow[dr, "\pi_{N\Sigma_1}"'] & & W \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & W & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_{N\Sigma_2}^{-1}(\Omega) \arrow[rr, "\Psi_\Omega"] \arrow[dr, "\pi_{N\Sigma_2}"'] & & \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \arrow[dl, "pr_1"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

avec $x \in W \subseteq \Sigma_1$, $y \in \Omega \subseteq \Sigma_2$ et telle que $(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(W) \subseteq \Omega$ à partir d'un certain rang.
Nous avons alors :

$$(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x) = \Big(\underbrace{\pi_{N\Sigma_2} \circ \Psi_\Omega^{-1}}_{(z,w)\mapsto z} \circ \underbrace{\Psi_\Omega \circ \tau_{\Sigma_2}^{-1} \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \Psi_W^{-1}}_{(y,v)\mapsto(\tau^1(y,v),\tau^2(y,v))} \circ \underbrace{\Psi_W \circ s_n}_{x\mapsto(x,\tilde{s}_n(x))}\Big)(x).$$

Cette application a pour différentielle :

$$\begin{aligned} (Id\ 0)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tau^1}{\partial x} & \dfrac{\partial \tau^1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \tau^2}{\partial x} & \dfrac{\partial \tau^2}{\partial y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Id \\ (\tilde{s}_n)_{*_x} \end{pmatrix} &= (Id\ 0)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tau^1}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau^1}{\partial y}(\tilde{s}_n)_{*_x} \\ \dfrac{\partial \tau^2}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau^2}{\partial y}(\tilde{s}_n)_{*_x} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^1}{\partial y}(\tilde{s}_n)_{*_x} \\ &\to \frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^1}{\partial y}(\tilde{s})_{*_x}. \end{aligned}$$

La flèche ci-dessus signifie uniquement que nous avons convergence dans un espace de matrices vers la matrice $\frac{\partial \tau^1}{\partial x} + \frac{\partial \tau^1}{\partial y}(\tilde{s})_{*_x}$ qui est inversible puisque cette matrice représente la différentielle du difféomorphisme $\big(\pi_2|_\Sigma\big) \circ \big(\pi_1|_\Sigma\big)^{-1} : \Sigma_1 \to \Sigma_2$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang, l'application $\Sigma_1 \to \Sigma_2$, $m \mapsto (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(m)$ est partout un difféomorphisme local. Pour montrer que c'est un difféomorphisme globale, il suffit de montrer que cette application est injective. Si ce n'était jamais le cas, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pourrait trouver $x_n, y_n \in \Sigma_1$, $x_n \neq y_n$ tels que :

$$(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x_n) = (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(y_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par compacité, nous pouvons supposer que $x_n \to x \in \Sigma_1$ et $y_n \to y \in \Sigma_1$. En utilisant les semi-normes qui définissent la topologie de

$\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ (voir par exemple [Die72], page 236 ou alors le Lemme B.1 de l'Appendice B), on constate facilement que :

$$s_n(x_n) \to s(x) \quad \text{et} \quad s_n(y_n) \to s(y)$$

et donc

$$\begin{array}{rrcl} & (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x_n) & = & (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(y_n) \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & \big(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(x)\big) & = & \big(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(y)\big) \\ \Rightarrow & \big(\pi_2|_\Sigma \circ \tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(x)\big) & = & \big(\pi_2|_\Sigma \circ \tau_{\Sigma_1}\big)\big(s(y)\big) \\ \Rightarrow & s(x) & = & s(y) \\ \Rightarrow & x & = & y\,. \end{array}$$

Ici on a utilisé le fait que $\pi_2|_\Sigma\,:\,\Sigma \to \Sigma_2$ et τ_{Σ_1} sont des difféomorphismes.

De plus, nous pouvons supposer (voir Appendice A, Lemme A.4), qu'il existe une courbe lisse $\sigma\,:\,\mathbb{R} \to \Theta_{\Sigma_1} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ telle que $\sigma_{\frac{1}{n}} = s_n$ et $\sigma_0 = s$.
Considérons alors l'application suivante :

$$\Lambda\,:\,\mathbb{R} \times \Sigma_1 \to \mathbb{R} \times \Sigma_2\,,\; (t,x) \mapsto \big(t,\,(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \sigma_t)(x)\big)\,.$$

On a que

$$\Lambda_{*(0,x)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} & 0 \\ * & (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s)_{*_x} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme puisque l'application $\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s = \big(\pi_2|_\Sigma\big) \circ \big(\pi_1|_\Sigma\big)^{-1}$ est un difféomorphisme. On en déduit que Λ est un difféomorphisme local en $(0,x)$.
Mais alors, de part l'équivalence suivante :

$$(\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(x_n) = (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)(y_n) \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda\left(\frac{1}{n}, x_n\right) = \Lambda\left(\frac{1}{n}, y_n\right),$$

il en résulte que pour n assez grand, $x_n = y_n$, Λ devenant injective au voisinage de $(0,x) = (0,y)$, d'où une contradiction. On en déduit donc que pour n assez grand, $\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n\,:\,\Sigma_1 \to \Sigma_2$ est un difféomorphisme.
Ce dernier résultat entraine que $\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ car

$$\begin{array}{rl} & \varphi_{\Sigma_1}(s_n) = \varphi_{\Sigma_2}\big(\tau_{\Sigma_2}^{-1} \circ \tau_{\Sigma_1} \circ (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ s_n)^{-1}\big) \in \varphi_{\Sigma_2}\big(U_{\Sigma_2}\big) \\ \Rightarrow & s_n \in \varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big) \end{array}$$

ce qui est une contradiction avec notre hypothèse. □

Lemme 3.2 *L'application*

$$\varphi_{\Sigma_2}^{-1} \circ \varphi_{\Sigma_2}\,:\,\varphi_{\Sigma_1}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big) \to \varphi_{\Sigma_2}^{-1}\big(\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2})\big)$$

est lisse modérée ("tame" en anglais, voir par exemple [Ham82]).

Démonstration. Prenons $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma := \varphi_{\Sigma_1}(s)$ et U comme dans le Lemme 3.1 . Nous allons montrer que l'application ci-dessus est lisse modérée sur un voisinage de s dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$. En fait, nous avons déjà vu qu'il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de s dans $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ tel que l'application $\sigma \in \mathcal{W} \mapsto \pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \sigma \in C^\infty(\Sigma_1, \Sigma_2)$ soit à valeurs dans $\mathrm{Diff}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ et forme ainsi une application lisse modérée de $\mathcal{W} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma_1, N\Sigma_1)$ dans $\mathrm{Diff}(\Sigma_1, \Sigma_2)$. Il en résulte que l'application $\mathcal{W} \to \Gamma_{C^\infty}(\Sigma_2, N\Sigma_2)$, $\sigma \mapsto \tau_{\Sigma_2}^{-1} \circ \tau_{\Sigma_1} \circ (\pi_2 \circ \tau_{\Sigma_1} \circ \sigma)^{-1}$ est bien définie et est lisse modérée puisque l'inversion et la composition sont des applications lisses modérées dans le contexte fréchétique. On en déduit que l'application que nous considérons est bien lisse modérée. □

Ainsi $\{(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma), \varphi_\Sigma^{-1}) \mid \Sigma \in Gr_k(M)\}$ est un atlas différentiable de $Gr_k(M)$ et induit canoniquement une topologie $\mathcal{T}$ sur $Gr_k(M)$. Montrons que cette topologie est de Hausdorff.

Lemme 3.3 *La topologie $\mathcal{T}$ de $Gr_k(M)$ est de Hausdorff.*

Démonstration. Prenons $\Sigma_1, \Sigma_2 \in Gr_k(M)$ tels que $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Si ces deux sous-variétés orientées se confondent en tant que sous-variétés, mais possèdent une orientation différente, alors $\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2}) = \emptyset$. En effet, supposons que Σ appartienne à cette intersection. Alors Σ serait munie de l'orientation induite par le difféomorphisme $\Sigma_1 \to \Sigma$, $x \mapsto \tau_{\Sigma_1}(s(x))$ où s est une certaine section du fibré normal de Σ_1 . De plus, Σ serait aussi munie de l'orientation induite par le difféomorphisme $\Sigma_2 \to \Sigma$, $x \mapsto \tau_{\Sigma_2}(s(x))$, avec Σ_1 et Σ_2 étant les mêmes sous-variétés mais orientées différemment et $\tau_{\Sigma_1} = \tau_{\Sigma_2}$, d'où la contradiction.

Si $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ en tant que sous-variété, il existe $x_1 \in \Sigma_1 \backslash \Sigma_2$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$\exp_{x_1}(\mathrm{B}(x_1, \varepsilon)) \cap \tau_{\Sigma_2}(\Theta_{\Sigma_2}) = \emptyset ,$$

où $\Theta_{\Sigma_2} \subseteq \{v \in N\Sigma_2 \mid \|x\| < \varepsilon\}$. Dès lors, si l'on choisit Θ_{Σ_1} tel que $\Theta_{\Sigma_1} \subseteq \{v \in N\Sigma_1 \mid \|x\| < \varepsilon\}$, alors on peut constater que $\varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1}) \cap \varphi_{\Sigma_2}(\mathcal{U}_{\Sigma_2}) = \emptyset$. □

En résumé,

Proposition 3.4 (*Hamilton*, [Ham82]) *L'ensemble $Gr_k(M)$ est une variété fréchétique lisse modérée et pour $\Sigma \in Gr_k(M)$, on a un isomorphisme canonique :*

$$T_\Sigma Gr_k(M) \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma) .$$

Remarque 3.5 *Tout comme la structure de variété de $C^\infty(N, M)$ ne dépend pas de la métrique que l'on utilise sur M, la structure de variété de $Gr_k(M)$ ne dépend pas non plus de la métrique g .*

Remarque 3.6 *Notons $Gr_k^\vee(M)$ l'ensemble des sous-variétés connexes, compactes, orientables et de dimension k de M. Alors, exactement de la même manière que pour $Gr_k(M)$, on montre que cet ensemble est muni d'une structure de variété modérée et il est clair que $Gr_k(M)$ est un revêtement à deux feuillets de $Gr_k^\vee(M)$.*

3.1.2 L'espace des plongements dans M comme fibré principal sur la Grassmannienne non-linéaire

Prenons $\Sigma \in Gr_k(M)$ et notons $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ l'espace des plongements de Σ dans M. Notons aussi

$$p : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr_k(M)\,,$$

l'application qui est définie pour $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ par $p(f) := f(\Sigma)$, cette dernière sous-variété de M étant munie de l'orientation naturellement induite par le difféomorphisme $f : \Sigma \to f(\Sigma)$. Grâce à la proposition suivante et à ses corollaires, nous allons montrer que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est une variété fréchétique lisse modérée et que l'application $p : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr_k(M)$ est lisse. Nous utiliserons pour cela le calcul convenable de Kriegl et Michor (voir [KM97]), car entre des variétés fréchétiques, une application est lisse au sens de Kriegl-Michor si et seulement si elle est lisse au sens de Hamilton (voir notre succinct appendice A). Cela nous amènera à montrer dans un deuxième temps que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est l'espace total d'un fibré principal ayant pour base la réunion de certaines composantes connexes de $Gr_k(M)$.

Proposition 3.7 *Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel de rang fini au-dessus de M et $f \in C^\infty\big((-\varepsilon, \varepsilon) \times M, E\big)$ une application telle que $f_0 : M \to E,\, x \mapsto f(0, x)$ soit la section nulle de E. Alors il existe $\eta > 0$ et $\varphi : (-\eta, \eta) \to \mathit{Diff}(M)$ un chemin lisse de $\mathit{Diff}(M)$ tel que :*

(i) $f_t \circ \varphi_t \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$ *pour tout* $t \in (-\eta, \eta)$ *(ici* $f_t(x) := f(t, x)$*) ;*
(ii) $\varphi_0 = Id$.

Démonstration. Posons $\psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to M,\, (t, x) \mapsto \pi\big(f(t, x)\big)$ et $\psi^\vee : (-\varepsilon, \varepsilon) \to C^\infty(M, M),\, t \mapsto \{M \ni x \mapsto \pi\big(f(t, x)\big) \in M\}$. Etant donné que $\psi = \pi \circ f$, l'application ψ est lisse, ce qui veut exactement dire que $\psi^\vee$ est une courbe lisse de $C^\infty(M, M)$ (Voir Appendice B, Lemme B.30). Or, le groupe de Lie $\mathrm{Diff}\,(M)$ étant ouvert dans $C^\infty(M, M)$ (voir [KM97], Theorem 43.1. ou l'Appendice B, Lemme B.34), et puisque $\psi^\vee(0) = Id$, on en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que $\psi^\vee$ restreint à $(-\eta, \eta)$ soit une courbe lisse de $\mathrm{Diff}\,(M)$.

Considérons alors le chemin lisse $\varphi : (-\eta, \eta) \to \mathrm{Diff}\,(M),\, t \mapsto \big(\psi^\vee(t)\big)^{-1}$. Pour $x = \big(\psi^\vee(t)\big)(y) \in M$, on constate que :

$$\pi\Big((f_t \circ \varphi_t)(x)\Big) = \pi\Big(f_t\Big((\psi_t^\vee)^{-1}(\psi_t^\vee(y))\Big)\Big) = \pi\Big(f_t(y)\Big) = \psi_t^\vee(y) = x\,.$$

Donc $\pi \circ (f_t \circ \varphi_t) = Id$ ce qui signifie que $f_t \circ \varphi_t$ est une section de E.

□

Remarquons que comme corollaire de cette proposition, on retrouve le résultat classique suivant (voir par exemple [Hir94], Theorem 1.4, page 37) :

Corollaire 3.8 *L'ensemble $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est ouvert dans $C^\infty(\Sigma, M)$. En particulier, $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est naturellement une variété fréchétique lisse modérée.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ ne soit pas ouvert dans $C^\infty(\Sigma, M)$. On peut donc trouver une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(\Sigma, M)\backslash\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ telle que

$f_n \to f$ pour un certain $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$. Soit alors $(\mathcal{U}_f, \varphi_f)$ une carte de $C^\infty(\Sigma, M)$ centrée en f et telle que $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ soit convexe. Rappelons que l'on peut construire la carte $(\mathcal{U}_f, \varphi_f)$ en prenons $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ un voisinage de 0 suffisamment petit de l'espace des sections $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma,\, f^*TM)$ et $\varphi_f^{-1} : \varphi_f(\mathcal{U}_f) \to \mathcal{U}_f \subseteq C^\infty(\Sigma, M)$, l'application qui est définie par $\varphi_f^{-1}(X)(x) := \exp_{f(x)}(X_x)$ pour $X \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma,\, f^*TM)$ et $x \in \Sigma$. Puisque $f_n \to f$, nous pouvons supposer que $f_n \in \mathcal{U}_f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi considérer la suite de sections $\big(\varphi_f(f_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\varphi_f(\mathcal{U}_f) \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$. Or, $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$ étant un espace de Fréchet, nous pouvons supposer (voir Appendice B, Lemme A.4 et la démonstraton du Lemme A.5), qu'il existe une courbe lisse de sections $s : \mathbb{R} \to \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$ telle que :

$$s_0 = s(0) = \varphi_f(f) \;\; et \;\; s\left(\frac{1}{n}\right) = \varphi_f(f_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si l'on construit s de la même manière que dans le "special curve lemma" de [KM97], on constate que s est à valeurs dans $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$. En effet, $s(\Sigma)$ est le polygone d'arrêtes les $\varphi_f(f_n)$ et l'on a choisit $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ convexe. Notons alors

$$g : \mathbb{R} \times \Sigma \to M,\; (t, x) \mapsto \varphi_f^{-1}(s_t)(x)\,.$$

Par construction on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$g_0 = f \;\text{ et }\; g_{\frac{1}{n}} = f_n\,.$$

Notons $W := f(\Sigma) = g_0(\Sigma)$. Pour t assez petit, $g_t(\Sigma) \subseteq \tau_W(\Theta_W)$ et nous pouvons dès lors considérer l'application $W \ni x \to (\tau_W^{-1} \circ g_t \circ g_0^{-1})(x) \in NW$. Cette dernière application vérifie les hypothèses de la Proposition 3.7, il existe donc une courbe φ_t de $\mathrm{Diff}(W)$ telle que :

$$\sigma_t : x \in W \mapsto (\tau_W^{-1} \circ g_t \circ g_0^{-1} \circ \varphi_t)(x) \in NW$$

soit une section du fibré normal de W. Mais alors, pour n assez grand,

$$f_n = g_{\frac{1}{n}} = \tau_W \circ \sigma_{\frac{1}{n}} \circ \varphi_{\frac{1}{n}}^{-1} \circ g_0$$

est un plongement de Σ dans M ce qui est une contradiction. Ainsi, $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est bien un ouvert de $C^\infty(\Sigma, M)$. □

Corollaire 3.9 *L'application $p : Emb(\Sigma, M) \to Gr_k(M)$ est lisse et pour un chemin lisse f_t de $Emb(\Sigma, M)$, on a la formule :*

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} p(f_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)^{\perp}$$

où $\big(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\big)^{\perp}$ est la section de $\Gamma_{C^\infty}(f_{t_0}(\Sigma), Nf_{t_0}(\Sigma))$ qui est définie pour $x \in \Sigma$ par $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)^{\perp}_{f_{t_0}(x)} := pr\big(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, x)\big)$, pr étant la projection orthogonale sur le fibré normal de $f_{t_0}(\Sigma)$.

Démonstration. Prenons f_t un chemin lisse de $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$. Nous devons montrer que $p(f_t)$ est un chemin lisse de $Gr_k(M)$ afin de vérifier la lissité de p au sens de Kriegl-Michor. Fixons $t_0 \in \mathbb{R}$ et notons $W := p(f_{t_0})$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, l'application $(t, x) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times W \mapsto (\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1})(x) \in NW$, satisfait les hypothèses de la Proposition 3.7 . Il existe donc un chemin lisse φ_t de difféomorphismes de W tel que

$$x \in W \mapsto (\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t)(x) \in NW$$

soit une section de $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ dès que t est suffisamment petit. Mais ceci nous donne justement la possibilité d'exprimer $p(f_t)$ au voisinage de t_0 dans la carte $\big(\varphi_W(\mathcal{U}_W), \varphi_W^{-1}\big)$:

$$\varphi_W^{-1}\big(p(f_t)\big) = \tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t \in \Gamma_{C^\infty}(W, NW)\,.$$

Cette dernière courbe de sections étant lisse, il en résulte que p est lisse.

Pour la formule de la différentielle de p, notons $W := f_{t_0}(\Sigma)$. En identifiant $\mathrm{T}_W Gr_k(M)$ à $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$, on a :

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} p(f_t) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \varphi_W^{-1}\big(p(f_t)\big) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \big(\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)$$

et pour $x \in W$,

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \big(\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)(x) &= (\tau_W^{-1})_{*_x} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \big(f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)(x) \\ &= (\tau_W^{-1})_{*_x} \Bigg[\underbrace{\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, f_{t_0}^{-1}(x))}_{\in \mathrm{T}_x M} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x)}_{\in \mathrm{T}_x W} \Bigg]. \end{aligned}$$

Par construction de φ_t, il vient :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, f_{t_0}^{-1}(x)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) \in N_x W$$

ce qui implique, puisque $\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) \in \mathrm{T}_x W$, que

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t_0, f_{t_0}^{-1}(x)) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, x) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \big(\tau_W^{-1} \circ f_t \circ f_{t_0}^{-1} \circ \varphi_t\big)(x) = (\tau_W^{-1})_{*_x} \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp} \\ =\ & \left.\frac{d}{du}\right|_0 \tau_W^{-1}\left[exp_x\left(u\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}\right)\right] = \left.\frac{d}{du}\right|_0 (\tau_W^{-1} \circ \tau_W)\left(x, u\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}\right) \\ =\ & \left.\frac{d}{du}\right|_0 \left(x, u\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)_x^{\perp}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} p(f_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_0)\right)^{\perp}.$$

$\square$

Remarque 3.10 *Au vu de la formule de la différentielle de* p*, il semblerait que cette dernière application dépende "plus" que de la structure différentiable de* $Gr_k(M)$ *puisque la métrique utilisée apparait dans la formule de la différentielle de* p*. En fait, il ne faut pas oublier que pour* $W \in Gr_k(M)$*,* $T_W Gr_k(M)$ *n'est pas égal à l'espace* $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ *mais lui est seulement isomorphe via une réalisation nécéssitant la métrique* g*.*

A présent, afin de pouvoir considérer certains fibrés principaux, introduisons, pour $\Sigma \in Gr_k(M)$, les notations suivantes :

(*i*) $p : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr_k(M),\ f \mapsto p(f)$ la projection canonique ;

(*ii*) $p_\Sigma : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M) := p(\mathrm{Emb}(\Sigma, M)),\ f \mapsto p(f)$;

(*iii*) $\lambda : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \times \mathrm{Diff}^+(\Sigma) \to \mathrm{Emb}(\Sigma, M),\ (f, \varphi) \mapsto f \circ \varphi$ l'action naturelle à droite de $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$ sur $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$.

Nous allons montrer par une série de lemmes que $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ est un $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$-fibré principal au-dessus de $Gr(\Sigma, M)$.

Lemme 3.11 *Soient* U, V *deux ouverts de* M *d'intersection non nulle et* Σ_0, Σ_1, W *trois sous-variétés de* M *telles que :*

$$\Sigma_0 \subseteq U,\ \ \Sigma_1 \subseteq V \quad \text{et} \quad W \subseteq U \cap V\,.$$

Soient aussi β *un chemin continu de* $Emb(\Sigma_0, U)$ *et* $\tilde{\beta}$ *un chemin continu de* $Emb(W, V)$ *tels que :*

$$\beta(0) = j_{\Sigma_0},\ \beta(1)(\Sigma_0) = W,\ \tilde{\beta}(0) = j_W \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}(1)(W) = \Sigma_1$$

où $j_{\Sigma_0} : \Sigma_0 \hookrightarrow M$ *et* $j_W : W \hookrightarrow M$ *sont les inclusions canoniques. Alors, l'application* $\gamma : [0,2] \to Emb(\Sigma_0, U \cup V)$ *définie par :*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{pour } t \in [0,1]\,; \\ \tilde{\beta}(t-1) \circ \beta(1) & \text{pour } t \in [1,2], \end{cases}$$

est un chemin continu de $Emb(\Sigma_0, U \cup V)$*.*

Démonstration. Considérons l'application

$$\vartheta : \mathrm{Emb}(W, V) \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, U \cup V),\ \ \rho \mapsto \rho \circ \beta(1)\,.$$

En utilisant les courbes lisses de $\mathrm{Emb}(W, V)$, il est immédiat que ϑ est une application lisse, en particulier, ϑ est continue. Mais alors :

(*i*) γ est clairement continue sur $[0,1]$;

(*ii*) $\gamma(t) = (\vartheta \circ \tilde{\beta})(t-1)$ pour $t \in [1,2]$ et donc γ est continue sur [1,2].

Il en résulte que $\gamma : [0,2] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, U \cup V)$ est bien un chemin continu de $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, U \cup V)$. □

Lemme 3.12 *Soient* Σ_0, Σ_1 *deux éléments de* $Gr_k(M)$ *et* $\alpha : [0,1] \to Gr_k(M)$ *un chemin continu tel que* $\alpha(0) = \Sigma_0$ *et* $\alpha(1) = \Sigma_1$ *. Alors il existe* $\beta : [0,1] \to$ *Emb*(Σ_0, M)*, un chemin continu de Emb*(Σ_0, M) *tel que :*

$$\beta(0) = j_{\Sigma_0}\,, \quad (p \circ \beta)(0) = \alpha(0) = \Sigma_0 \quad \textit{et} \quad (p \circ \beta)(1) = \alpha(1) = \Sigma_1$$

où p : *Emb*$(\Sigma_0, M) \to Gr_k(M)$ *est la projection canonique et* $j_{\Sigma_0} : \Sigma_0 \hookrightarrow M$ *l'inclusion canonique.*

Démonstration. Puisque α est continu, l'ensemble $\alpha([0,1])$ est compact et peut donc être recouvert par un nombre fini de carte. Pour simplifier, supposons que

$$\alpha([0,1]) \subseteq \varphi_{\Sigma_0}(\mathcal{U}_{\Sigma_0}) \cup \varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1})\,,$$

les notations étant celles précédement introduites. Prenons W un élément de $\varphi_{\Sigma_0}(\mathcal{U}_{\Sigma_0}) \cap \varphi_{\Sigma_1}(\mathcal{U}_{\Sigma_1})$. On a :

$$W = \varphi_{\Sigma_0}(s_0) \quad \text{et} \quad W = \varphi_{\Sigma_1}(s_1)$$

pour un certain $s_0 \in \mathcal{U}_{\Sigma_0}$ et un certain $s_1 \in \mathcal{U}_{\Sigma_1}$. On peut alors considérer les applications :

$$\beta : [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, \tau_{\Sigma_0}(\Theta_{\Sigma_0})),\; t \mapsto \{x \in \Sigma_0 \mapsto \exp_x(ts_0(x))\}$$

et

$$\tilde{\beta} : [0,1] \to \mathrm{Emb}(W, \tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1})),\; t \mapsto \{x \in W \mapsto \exp_{\tilde{p}(x)}((1-t)s_1(\tilde{p}(x)))\}\,.$$

où $\tilde{p} : \tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1}) \to \Sigma_1,\ \tau_{\Sigma_1}\big((x,v)\big) \mapsto x$ pour $(x,v) \in N\Sigma_1$ est la projection canonique. Ces deux applications, β et $\tilde{\beta}$, sont manifestement continues puisque l'on peut les étendre en des courbes lisses. Il en résulte par le Lemme 3.11 (et après reparamétrage), qu'il existe une courbe continue $\gamma : [0,1] \to$ $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, \tau_{\Sigma_0}(\Theta_{\Sigma_0}) \cup \tau_{\Sigma_1}(\Theta_{\Sigma_1})) \subseteq \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ telle que $\gamma(0) = \beta(0) = j_{\Sigma_0}$ et $\gamma(1) = \tilde{\beta}(1) \circ \beta(1)$. D'où :

$$(p \circ \gamma)(0) = p\big(\gamma(0)\big) = p(j_{\Sigma_0}) = \Sigma_0\,.$$

De plus, puisque

$$\gamma(1)(\Sigma_0) = \big(\tilde{\beta}(1) \circ \beta(1)\big)(\Sigma_0) = \tilde{\beta}(1)(W) = \Sigma_1\,,$$

il suffit pour montrer que $p(\gamma(1)) = \Sigma_1$, de vérifier que $[\gamma(1)^*\mu_1] = [\mu_0]$ où $[\mu_i]$ est l'orientation de Σ_i (i=0,1). Mais cela découle de la définition même des cartes $\varphi_{\Sigma_i}(\mathcal{U}_{\Sigma_i})$. En effet, d'après cette définition, l'orientation de W est donnée à la fois par $[(\beta(1)^{-1})^*\mu_0]$ et par $[\tilde{\beta}(1)^*\mu_1]$, et comme $\gamma(1) = \tilde{\beta}(1) \circ \beta(1)$, on en déduit que $p(\gamma(1)) = (\Sigma_1, [\mu_1]) = \Sigma_1$. □

Corollaire 3.13 *L'ensemble* $Gr(\Sigma, M)$ *est une réunion de composantes connexes de* $Gr_k(M)$ *. En particulier,* $Gr(\Sigma, M)$ *est une variété modérée.*

Démonstration. Soient $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ et $\Sigma_1 \in Gr_k(M)$ un élément appartenant à la même composante connexe dans $Gr_k(M)$ que $p_\Sigma(f) =: \Sigma_0$. Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que $\Sigma_1 \in Gr(\Sigma, M)$.

Prenons $\alpha : [0,1] \to Gr_k(M)$, un chemin continu de $Gr_k(M)$ tel que :

$$\alpha(0) = p_\Sigma(f) = \Sigma_0 \quad \text{et} \quad \alpha(1) = \Sigma_1 .$$

D'après le Lemme 3.12, il existe un chemin $\beta : [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ tel que :

$$\beta(0) = j_{\Sigma_0} , \quad (p_{\Sigma_0} \circ \beta)(0) = \alpha(0) = \Sigma_0 \ \text{ et } \ (p_{\Sigma_0} \circ \beta)(1) = \alpha(1) = \Sigma_1 .$$

Si l'on regarde f comme une application à valeurs dans $\Sigma_0 = p_\Sigma(f)$, alors on constate que

$$p_\Sigma(\beta(1) \circ f) = \Sigma_1 \quad \text{avec} \quad \beta(1) \circ f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M) .$$

Ainsi, $\Sigma_1 \in Gr(\Sigma, M)$. □

Lemme 3.14 *L'application $p_\Sigma : Emb(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M)$ admet des sections locales.*

Démonstration. Soit $W \in Gr(\Sigma, M)$ et soit $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ tel que $p_\Sigma(f) = W$. On peut constater que l'application $\sigma : \varphi_W(\mathcal{U}_W) \to \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ définie par

$$\sigma(\varphi_W(s))(x) := exp_{f(x)}\, s(f(x))$$

est une section locale de p_Σ . □

Lemme 3.15 *L'action $\lambda : Emb(\Sigma, M) \times Diff^+(M) \to Emb(\Sigma, M)$ est libre. De plus, pour $W \in Gr(\Sigma, M)$ et $f \in Emb(\Sigma, M)$ telle que $p_\Sigma(f) = W$, on a $p_\Sigma^{-1}(W) = \mathcal{O}_f$ où $\mathcal{O}_f$ est l'orbite de f pour l'action λ .*

Démonstration. La liberté de λ est évidente. Montrons que $p_\Sigma^{-1}(W) = \mathcal{O}_f$. Notons $[\mu]$ l'orientation de Σ . Par la suite, nous noterons f^{-1} l'unique application lisse de W dans Σ vérifiant $f^{-1} \circ f = id_\Sigma$ (et de même pour g) . On a :

$$\begin{aligned}
g \in p_\Sigma^{-1}(W) \quad &\Leftrightarrow \quad g(\Sigma) = f(\Sigma) \ \text{ et } \ [(g^{-1})^*\mu] = [(f^{-1})^*\mu] \\
&\Leftrightarrow \quad g = f \circ \varphi \ \text{ avec } \ \varphi = f^{-1} \circ g \in \mathrm{Diff}(\Sigma) \\
&\qquad\ \ \text{et } \ [(g^{-1})^*\mu] = [(f^{-1})^*\mu] \\
&\Leftrightarrow \quad g = f \circ \varphi \ \text{ avec } \ \varphi \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma) \\
&\Leftrightarrow \quad g = \lambda(f, \varphi) \ \text{ avec } \ \varphi \in \mathrm{Diff}^+(\Sigma) .
\end{aligned}$$

Ainsi, $p_\Sigma^{-1}(p_\Sigma(f)) = \mathcal{O}_f$. □

Lemme 3.16 *Pour $W \in Gr(\Sigma, M)$ et $f \in Emb(\Sigma, M)$ telle que $p_\Sigma(f) = \Sigma$, l'application*

$$\Lambda : p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W)) \longrightarrow Diff^+(\Sigma), \ \ g \mapsto \sigma\Big(p_\Sigma(g)\Big)^{-1} \circ g$$

est lisse modérée (ici σ correspond à la section construite dans le Lemme 3.14).

Démonstration. Remarquons que Λ est bien définie et est l'unique application vérifiant $\lambda\Big(\sigma\big(p_\Sigma(g)\big),\, \Lambda(g)\Big) = g$ pour tout $g \in p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W))$.

Montrons que Λ est lisse modérée. Pour $g \in p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W))$ et $x \in \Sigma$ on a :

$$\Lambda(g)(x) = \Big(\Big(\sigma\big(p_\Sigma(g)\big)\Big)^{-1} \circ g\Big)(x) \quad \Rightarrow \quad \sigma\big(p_\Sigma(g)\big)\big(\Lambda(g)(x)\big) = g(x)\,.$$

Notons $s \in \Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ l'unique section de $\Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ vérifiant $p_\Sigma(g) = \varphi_W(s)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\sigma\big(\varphi_W(s)\big)\big(\Lambda(g)(x)\big) = g(x) \quad &\Rightarrow \quad \exp_{(f\circ\Lambda(g))(x)}\Big(\big(s \circ f \circ \Lambda(g)\big)(x)\Big) = g(x)\\
&\Rightarrow \quad \big(s \circ f \circ \Lambda(g)\big)(x) = \tau_W^{-1}\big(g(x)\big)\\
&\Rightarrow \quad \big(f \circ \Lambda(g)\big)(x) = \big(\pi_{NW} \circ \tau_W^{-1} \circ g\big)(x)\\
&\Rightarrow \quad \Lambda(g)(x) = \big(f^{-1} \circ \pi_{NW} \circ \tau_W^{-1} \circ g\big)(x)\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Lambda(g) = f^{-1} \circ \pi_{NW} \circ \tau_W^{-1} \circ g$, et l'on peut remarquer que l'application f étant fixée, f^{-1} est une application lisse indépendante de $g \in p_\Sigma^{-1}(\varphi_W(\mathcal{U}_W))$. On en déduit que Λ est bien une application lisse modérée.

$\square$

De cette succession de lemmes, on en déduit :

Théorème 3.17 *L'application p_Σ : $Emb(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M)$ est un $Diff^+(\Sigma)$-fibré principal modéré pour l'action λ.*

Démonstration. Prenons $W \in \mathrm{Gr}(\Sigma,\, M)$ et choisissons $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ telle que $p_\Sigma(f) = W$. On peut considérer le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
p_\Sigma^{-1}\big(\varphi_W(\mathcal{U}_W)\big) \arrow[rr, "\Psi"] \arrow[dr, "p_\Sigma"'] & & \varphi_W(\mathcal{U}_W) \times \mathrm{Diff}^+(\Sigma) \arrow[dl, "pr_1"] \\
& \varphi_W(\mathcal{U}_W) &
\end{tikzcd}$$

où $\Psi(g) := (p_\Sigma(g),\, \Lambda(g))$.
D'après le Lemme 3.16, Ψ est une application lisse modérée. Cette application est de plus $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$-équivariante, d'inverse lisse modérée $\Psi^{-1}\big(\varphi_W(s),\, \varphi\big) = \sigma\big(\varphi_W(s)\big) \circ \varphi$. On construit ainsi des trivialisations de $\mathrm{Emb}(\Sigma,\, M)$ faisant de $\mathrm{Emb}(\Sigma,\, M)$ un $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$-fibré principal au-dessus de $\mathrm{Gr}(\Sigma,\, M)$. $\square$

3.1.3 Homogénéité des composantes connexes de $Gr_k(M)$ sous l'action des difféomorphismes de M

Pour $\Sigma \in Gr_k(M)$, nous savons que la composante connexe $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ de $Gr_k(M)$ contenant Σ est connexe et localement connexe par arcs (l'espace modèle étant de Fréchet) et donc, $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ est aussi connexe par arcs. On a alors, tout comme en dimension finie :

Proposition 3.18 *La composante connexe $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ est connexe par arcs pour des arcs lisses.*

Pour montrer ce résultat, nous avons besoin d'un lemme que l'on peut déduire de [Hir94] (voir exercice 3.b, section 8.1, page 182 de [Hir94]).

Lemme 3.19 *Si $\beta : [0,1] \to Emb(\Sigma, M)$ est un chemin continu, alors il existe une application lisse $F : [0,1] \times \Sigma \to M$ telle que :*

(i) l'application $F_t : \Sigma \to M,\ x \mapsto F(t,x)$ soit un plongement pour tout $t \in [0,1]$;

(ii) $F_0(\Sigma) = \beta(0)(\Sigma)$ et $F_1(\Sigma) = \beta(1)(\Sigma)$.

Démonstration de la Proposition 3.18. Prenons $\alpha : [0,1] \to \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ un chemin continu de $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$. Notons $\Sigma_0 := \alpha(0)$ et $\Sigma_1 := \alpha(1)$. D'après le Lemme 3.12, il existe $\beta : [0,1] \to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ un chemin continu de $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ tel que :

$$(p \circ \beta)(0) = \alpha(0) \quad \text{et} \quad (p \circ \beta)(1) = \alpha(1)\,.$$

Mais alors, d'après le Lemme 3.19, nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ et une application lisse $F :]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\times \Sigma_0 \to M$ telle que :

(i) l'application $F_t : \Sigma_0 \to M,\ x \mapsto F(t,x)$ soit un plongement pour tout $t \in [0,1]$;

(ii) $F_0(\Sigma_0) = \beta(0)(\Sigma_0)$ et $F_1(\Sigma_0) = \beta(1)(\Sigma_0)$.

Il en résulte que l'application $t \in]-\varepsilon, 1+\varepsilon[\to \mathrm{Emb}(\Sigma_0, M),\ t \mapsto F_t$ est une courbe lisse de $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ pour ε suffisamment petit (car $\mathrm{Emb}(\Sigma_0, M)$ est ouvert dans $C^\infty(\Sigma_0, M)$).
Par suite, $p \circ F_t$ est une courbe lisse de $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ vérifiant :

$$p \circ F_0 = F_0(\Sigma_0) = \beta(0)(\Sigma_0) = \alpha(0) = \Sigma_0$$

$$\text{et} \quad p \circ F_1 = F_1(\Sigma_0) = \beta(1)(\Sigma_0) = \alpha(1) = \Sigma_1$$

ce qui montre la proposition. □

A présent, considérons $\mathrm{Diff}^0(M)$, la composante connexe de $\mathrm{Diff}(M)$ contenant l'élément neutre Id_M ainsi que son action naturelle sur $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$:

$$\vartheta : \mathrm{Diff}^0(M) \times \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma \to \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma\,,\ (\varphi, W) \to \varphi(W)\,.$$

On a alors le résultat d'homogénéité suivant :

Théorème 3.20 *L'action de $\mathit{Diff}^0(M)$ sur $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ est transitive.*

Démonstration. Soient Σ_0 et Σ_1 deux éléments de $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ et $\alpha : [0,1] \to \big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ une courbe continue joignant Σ_0 et Σ_1. Tout comme dans la démonstration de la Proposition 3.18, nous pouvons trouver une application lisse $F : [0,1] \times \Sigma_0 \to M$ telle que :

$$F_0(\Sigma_0) = \Sigma_0 \quad \text{et} \quad F_1(\Sigma_0) = \Sigma_1$$

et telle que F_t soit un plongement pour tout $t \in [0,1]$. Mais alors, d'après un résultat classique de topologie différentielle (voir Théorème 1.3, chapitre 8, page 180 de [Hir94]), nous pouvons trouver une application lisse $\widetilde{F} : [0,1] \times M \to M$ vérifiant pour tout $t \in [0,1]$:

(i) $\widetilde{F}_t \in \mathrm{Diff}(M)$;

(ii) $\widetilde{F}_0 = Id$ et $F_t = \widetilde{F}_t|_{\Sigma_0}$.

D'après la caractérisation des courbes lisses de Diff(M), on en déduit que $\widetilde{F}_t$ est une courbe lisse de Diff(M) joignant Id_M et $\widetilde{F}_1$ ce qui implique en particulier que $\widetilde{F}_1 \in \mathrm{Diff}^0(M)$. De plus, $\vartheta(\widetilde{F}_1, \Sigma_0) = \widetilde{F}_1(\Sigma_0) = F_1(\Sigma_0) = \Sigma_1$ ce qui prouve le théorème. $\square$

Remarque 3.21 *On pourrait montrer le Théorème 3.20 en utilisant le Théorème de Nash-Moser via le Théorème 2.4.1 de [Ham82].*

Remarque 3.22 *A partir du Théorème 3.20, on peut montrer que la composante connexe $\big(Gr_k(M)\big)_\Sigma$ de la Grassmannienne est aussi homogème sous l'action de la composante connexe contenant l'identité du groupe SDiff(M,μ) des difféomorphimes de M qui préservent une forme volume donnée μ (voir [HV04]).*

3.2 Structures géométriques et calcul différentiel sur la Grassmannienne non-linéaire

3.2.1 Le "tilde-calcul" de Haller-Vizman

Le but de cette partie est de montrer le "Lemma 1" de [HV04]. Ce lemme, qui est énoncé sans démonstration dans l'article [HV04], donne des formules utiles pour certaines formes différentielles de $Gr_k(M)$ construites à partir de formes différentielles de M (voir Proposition 3.23). Pour pouvoir énoncer ce lemme, introduisons quelques notations et définitions. Prenons (M,g) une variété riemannienne compacte de dimension n. Pour $k \in \{0,...,n\}$, $r \in \{k,...,n\}$ et $\alpha \in \Omega^r(M)$, on définit $\widetilde{\alpha} \in \Omega^{r-k}\big(Gr_k(M)\big)$ par :

$$\widetilde{\alpha}_\Sigma(X^1,...,X^{r-k}) := \int_\Sigma i_{X_\Sigma^{r-k}} \cdots i_{X_\Sigma^1}\, \alpha\,, \tag{3.1}$$

pour $X^1,...,X^{r-k} \in \mathcal{X}\big(Gr_k(M)\big)$ et $\Sigma \in Gr_k(M)$. Notons aussi

- $\vartheta : \mathrm{Diff}(M) \times Gr_k(M) \to Gr_k(M)$, $(\psi,\Sigma) \mapsto \psi(\Sigma)$ l'action naturelle à gauche de Diff(M) sur $Gr_k(M)$;
- $\vartheta_X \in \mathcal{X}(Gr_k(M))$ le champs de vecteurs fondamental de $Gr_k(M)$ associé à $X \in \mathcal{X}(M)$ pour l'action ϑ.

Proposition 3.23 (Haller-Vizman, [HV04]) *Etant donnés $k \in \{0,...,n\}$, $r \in \{k,...,n\}$, $\alpha \in \Omega^r(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$, $\psi \in$ Diff(M) et $\Sigma \in Gr_k(M)$, on a :*

(i) $(\vartheta_X)_\Sigma = (X\big|_\Sigma)^\perp$;

(ii) $\widetilde{d\alpha} = d\widetilde{\alpha}$;

(iii) $i_{\vartheta_X}\widetilde{\alpha} = \widetilde{i_X\alpha}$;

(iv) $(\vartheta_\psi)^*(\widetilde{\alpha}) = \widetilde{\psi^*\alpha}$.

Nous nous proposons dans ce qui suit, de montrer que pour $\alpha \in \Omega^*(M)$, $\widetilde{\alpha}$ est bien une forme différentielle (lisse) de $Gr_k(M)$, et aussi de montrer le point (ii) de la Proposition 3.23 (ce point étant le moins trivial à prouver).

Lemme 3.24 *La forme $\widetilde{\alpha}$ est bien une forme différentielle, c'est-à-dire, $\widetilde{\alpha}$ est lisse. De plus, si $(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma), \varphi_\Sigma^{-1})$ est une carte de $Gr_k(M)$ telle que définie dans la section 3.1.1 , alors, pour $s \in \mathcal{U}_\Sigma$ et $X^1, ..., X^{r-k} \in \mathcal{X}(\mathcal{U}_\Sigma)$, on a :*

$$\Big(\varphi_\Sigma^*\,\widetilde{\alpha}\Big)_s(X^1, ..., X^{r-k}) = \int_\Sigma s^*\Big(i_{X_s^{r-k}} \cdots i_{X_s^1}\,\tau_\Sigma^*\alpha\Big)\,, \tag{3.2}$$

où les X_s^i doivent être interprétés comme des champs de vecteurs sur $\Theta_\Sigma \subseteq N\Sigma$ constant sur les fibres (voir section 3.1.1 pour les notations).

Démonstration. Il suffit de montrer la formule (3.2) pour voir que $\widetilde{\alpha}$ est une forme différentielle lisse.
On a :

$$\begin{aligned}\Big(\varphi_\Sigma^*\,\widetilde{\alpha}\Big)_s(X^1, ..., X^{r-k}) &= \widetilde{\alpha}_{\varphi_\Sigma(s)}\Big((\varphi_\Sigma)_{*_s}X^1, ..., (\varphi_\Sigma)_{*_s}X^{r-k}\Big) \\ &= \int_{\varphi_\Sigma(s)} i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^{r-k}} \cdots i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^1}\,\alpha\,. \end{aligned}\tag{3.3}$$

Notons $\sigma : \mathcal{U}_\Sigma \to \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ l'application qui est définie par

$$\sigma(s)(x) := \exp_x\big(s(x)\big)\,, \tag{3.4}$$

pour $s \in \mathcal{U}_\Sigma$ et $x \in \Sigma$. Avec cette application, (3.3) se réécrit :

$$\Big(\varphi_\Sigma^*\,\widetilde{\alpha}\Big)_s(X^1, ..., X^{r-k}) = \int_\Sigma \sigma(s)^*\Big(i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^{r-k}} \cdots i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^1}\,\alpha\Big)\,, \tag{3.5}$$

(ici on regarde $\sigma(s)$ comme un difféomorphisme de Σ sur $\varphi_\Sigma(s)$) . Prenons $x \in \Sigma$ et $u_1, ..., u_k \in T_x\Sigma$. On a :

$$\begin{aligned}&\bigg(\sigma(s)^*\Big(i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^{r-k}} \cdots i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^1}\,\alpha\Big)\bigg)_x(u_1, ..., u_k) \\ &= \bigg(i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^{r-k}} \cdots i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^1}\,\alpha\bigg)_{\sigma(s)(x)}\Big(\sigma(s)_{*_x}u_1, ..., \sigma(s)_{*_x}u_k\Big) \\ &= \alpha_{\sigma(s)(x)}\Big((\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^1, ..., (\varphi_\Sigma)_{*_s}X_s^{r-k}, \sigma(s)_{*_x}u_1, ..., \sigma(s)_{*_x}u_k\Big)\,. \end{aligned}\tag{3.6}$$

De plus,

- $\sigma(s)(x) = \exp_x\big(s(x)\big) = \tau_\Sigma\big(s(x)\big)$;
- $\sigma(s)_{*_x}u_i = (\tau_\Sigma \circ s)_{*_x}u_i = (\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}}s_{*_x}u_i$;

et

$$\begin{aligned}
(\varphi_\Sigma)_{*_s} X_s^i &= \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 \varphi_\Sigma(s + tX_s^i)\right)_{\sigma(s)(x)} = \left(\frac{d}{dt}\bigg|_0 p_\Sigma\Big(\tau_\Sigma \circ (s + tX_s^i)\Big)\right)_{\sigma(s)(x)} \\
&= \Big((p_\Sigma)_{*_{\tau_\Sigma \circ s}} (\tau_\Sigma)_{*_s} X_s^i\Big)_{\sigma(s)(x)} = \Big((\tau_\Sigma)_{*_s} X_s^i\Big)^{\perp}_{\sigma(s)(x)} \\
&= \Big((\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}} (X_s^i)_x\Big)^{\perp}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Ici $p_\Sigma : \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \to Gr(\Sigma, M)$ est la projection lisse définie après la Remarque 3.10 et "$\perp$" désigne la partie perpendiculaire du vecteur $(\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}}(X_s^i)_x \in T_{\tau_\Sigma(s(x))}M$ par rapport à $T_{\tau_\Sigma(s(x))}\varphi_\Sigma(s)$ (voir aussi Corollaire 3.9) . Remarquons que dans la formule (3.7), on regarde X_s^i comme un champ de vecteurs sur $N\Sigma$ constant sur les fibres. Si l'on revient à la formule (3.6) , on obtient alors :

$$\begin{aligned}
&\Big(\sigma(s)^*\Big(i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s} X_s^{r-k}} \cdots i_{(\varphi_\Sigma)_{*_s} X_s^1}\, \alpha\Big)\Big)_x (u_1, ..., u_k) \\
&= \alpha_{\tau_\Sigma(s(x))}\bigg(\Big((\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}}(X_s^1)_x\Big)^{\perp}, ..., \Big((\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}}(X_s^{r-k})_x\Big)^{\perp}, \\
&\qquad\qquad (\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}} s_{*_x} u_1, ..., (\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}} s_{*_x} u_k\bigg) \\
&= \alpha_{\tau_\Sigma(s(x))}\bigg((\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}}(X_s^1)_x, ..., (\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}}(X_s^{r-k})_x, \\
&\qquad\qquad (\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}} s_{*_x} u_1, ..., (\tau_\Sigma)_{*_{s(x)}} s_{*_x} u_k\bigg) \\
&= \Big(i_{X_s^{r-k}} \cdots i_{X_s^1}\, \tau_\Sigma^*\, \alpha\Big)_{s(x)} (s_{*_x} u_1, ..., s_{*_x} u_k) \\
&= \Big(s^*\big(i_{X_s^{r-k}} \cdots i_{X_s^1}\, \tau_\Sigma^*\, \alpha\big)\Big)_x (u_1, ..., u_k)\,.
\end{aligned}$$

Par suite, on en déduit la formule (3.2) . $\square$

Avant de montrer le point (*ii*) de la Proposition 3.23, donnons un lemme qui généralise légèrement la formule de Cartan.

Lemme 3.25 *Soient $X^0, ..., X^k$ des champs de vecteurs d'une variété M qui commutent deux à deux (i.e. $[X^i, X^j] = 0$ pour tout $i, j \in \{0, ..., k\}$). Alors on a l'identité suivante entre opérateurs sur les formes différentielles de M :*

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mathcal{L}_{X^j}\, i_{X^0} \cdots \widehat{i_{X^j}} \cdots i_{X^k} = (-1)^k i_{X^0} \cdots i_{X^k} \circ d + d \circ i_{X^0} \cdots i_{X^k} \qquad (3.8)$$

(ici "$\widehat{\ }$" signifie que l'on omet le symbole correspondant) .

Démonstration. Nous allons faire une récurrence sur k en utilisant le fait que pour deux champs de vecteurs A et B de M qui commutent, on la relation $[\mathcal{L}_A, i_B] = i_{[A,B]} = 0$.

Pour $k = 0$, la formule (3.8) est vraie car il s'agit simplement de la formule de Cartan. Supposons donc la formule (3.8) vraie jusqu'à un certain rang k. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \, \mathcal{L}_{X^j} \, i_{X^j} \cdots \widehat{i_{X^j}} \cdots i_{X^{k+1}} \\
= \;& \Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \, \mathcal{L}_{X^j} \, i_{X^j} \cdots \widehat{i_{X^j}} \cdots i_{X^k} \Big) \circ i_{X^{k+1}} \\
& \qquad + (-1)^{k+1} \, \mathcal{L}_{X^{k+1}} \, i_{X^0} \cdots i_{X^k} \\
= \;& \Big((-1)^k i_{X^0} \cdots i_{X^k} \circ d + d \circ i_{X^0} \cdots i_{X^k} \Big) \circ i_{X^{k+1}} \\
& \qquad + (-1)^{k+1} \, \mathcal{L}_{X^{k+1}} \, i_{X^0} \cdots i_{X^k} \\
= \;& (-1)^k i_{X^0} \cdots i_{X^k} \circ \underbrace{d \circ i_{X^{k+1}}}_{= \mathcal{L}_{X^{k+1}} - i_{X^{k+1}} \circ d} + d \circ i_{X^0} \cdots i_{X^{k+1}} \\
& \qquad + (-1)^{k+1} \, \mathcal{L}_{X^{k+1}} \, i_{X^0} \cdots i_{X^k} \\
= \;& -(-1)^k i_{X^0} \cdots i_{X^k} \, i_{X^{k+1}} \circ d + d \circ i_{X^0} \cdots i_{X^{k+1}} \, .
\end{aligned}$$

La formule (3.8) est donc vraie au rang $k+1$. □

Remarque 3.26 *Sous les mêmes hypothèses que dans le Lemme 3.25, il est clair que l'on a aussi la formule suivante :*

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mathcal{L}_{X^j} \, i_{X^k} \cdots \widehat{i_{X^j}} \cdots i_{X^0} = i_{X^k} \cdots i_{X^0} \circ d + (-1)^k d \circ i_{X^k} \cdots i_{X^0} \, . \quad (3.9)$$

Démonstration du point (ii) de la Proposition 3.23 Nous allons montrer le point (ii) de la Proposition 3.23 en effectuant un calcul local via une carte $(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma), \varphi_\Sigma^{-1})$ de $Gr_k(M)$. Prenons $X^0, ..., X^{r-k} \in \mathcal{X}(\mathcal{U}_\Sigma)$ et $s \in \mathcal{U}_\Sigma$. On a :

$$\begin{aligned}
\Big(d \, \varphi_\Sigma^* \, \widetilde{\alpha} \Big)_s (X^0, ..., X^{r-k}) &= \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i X_s^i \Big(\Big(\varphi_\Sigma^* \, \widetilde{\alpha} \Big) (X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., X^{r-k}) \Big) \\
& + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Big(\varphi_\Sigma^* \, \widetilde{\alpha} \Big)_s ([X^i, X^j], X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., \widehat{X^j}, ..., X^{r-k}) \, .
\end{aligned}$$

Prenons $i \in \{0, ..., r-k\}$ et notons s_t^i un chemin lisse de $\mathcal{U}_\Sigma$ tel que $s_0^i = s$ et $\frac{d}{dt}\big|_0 \, s_t^i = X_s^i$. On a d'après la formule (3.2) :

$$\begin{aligned}
X_s^i \Big(\Big(\varphi_\Sigma^* \, \widetilde{\alpha} \Big) (X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., X^{r-k}) \Big) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Big(\varphi_\Sigma^* \, \widetilde{\alpha} \Big)_{s_t^i} (X^0_{s_t^i}, ..., \widehat{X^i_{s_t^i}}, ..., X^{r-k}_{s_t^i}) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_\Sigma (s_t^i)^* \Big(i_{X^{r-k}_{s_t^i}} \cdots \widehat{i_{X^i_{s_t^i}}} \cdots i_{X^0_{s_t^i}} \, \tau_\Sigma^* \, \alpha \Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_\Sigma (s_t^i)^* \Big(i_{X_s^{r-k}} \cdots \widehat{i_{X_s^i}} \cdots i_{X_s^0} \, \tau_\Sigma^* \, \alpha \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_\Sigma s^* \left(i_{X^{r-k}_{s^i_t}} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \right) + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_\Sigma s^* \left(i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^0_{s^i_t}} \tau^*_\Sigma \alpha \right) \\
&= \int_\Sigma s^* \mathcal{L}_{X^i_s} i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \\
&\quad + \sum_{j=0}^{r-k} \int_\Sigma s^* \Big(i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^i_s(X^j)} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \Big) , \qquad (3.10)
\end{aligned}
$$

où $X^i_s(X^j) := X^j_{*_s} X^i_s \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ (on utilise évidemment l'identification $T\mathcal{U}_\Sigma \cong \mathcal{U}_\Sigma \times \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ qui permet de voir le champ de vecteurs $X^j \in \mathcal{X}(\mathcal{U}_\Sigma)$ comme étant une application de l'ouvert $\mathcal{U}_\Sigma$ à valeurs dans l'espace vectoriel $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$). Ainsi, d'après la formule (3.9),

$$
\begin{aligned}
&\Big(d\, \varphi^*_\Sigma \widetilde{\alpha} \Big)_s (X^0, ..., X^{r-k}) = \sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \Bigg[\int_\Sigma s^* \mathcal{L}_{X^i_s} i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \\
&\quad + \sum_{j=0}^{r-k} \int_\Sigma s^* \Big(i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^i_s(X^j)} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \Big) \Bigg] \\
&\qquad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Big(\varphi^*_\Sigma \widetilde{\alpha} \Big)_s ([X^i, X^j], X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., \widehat{X^j}, ..., X^{r-k}) \\
&= \int_\Sigma s^* \Bigg(\sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \mathcal{L}_{X^i_s} i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \Bigg) \\
&\quad - \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Big(\varphi^*_\Sigma \widetilde{\alpha} \Big)_s \big(\underbrace{X^i(X^j) - X^j(X^i)}_{=[X^i, X^j]}, X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., \widehat{X^j}, ..., X^{r-k} \big) \\
&\qquad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \Big(\varphi^*_\Sigma \widetilde{\alpha} \Big)_s ([X^i, X^j], X^0, ..., \widehat{X^i}, ..., \widehat{X^j}, ..., X^{r-k}) \\
&\\
&\qquad = \int_\Sigma s^* \Bigg(\sum_{i=0}^{r-k} (-1)^i \mathcal{L}_{X^i_s} i_{X^{r-k}_s} \cdots \widehat{i_{X^i_s}} \cdots i_{X^0_s} \tau^*_\Sigma \alpha \Bigg) . \\
&\qquad = \int_\Sigma s^* \Big(i_{X^{r-k}_s} \cdots i_{X^0_s} d\, \tau^*_\Sigma \alpha \Big) = \Big(\varphi^*_\Sigma \widetilde{d\alpha} \Big)_s (X^0_s, ..., X^{r-k}_s) . \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Par suite, $d\widetilde{\alpha} = \widetilde{d\alpha}$. □

3.2.2 La structure de variété faiblement presque-kählérienne de $Gr^2(M)$

Spécialisons nous au cas de la codimension 2 qui se révèle être riche en structure. Par la suite, nous noterons $Gr^k(M) := Gr_{\dim(M)-k}$ lorsque nous préfèrerons prendre en considération la codimension des sous-variétés de M plutôt que leurs dimension. Fixons h^M une métrique sur M . Pour $\Sigma \in Gr^2(M)$, $X, Y \in T_\Sigma Gr^2(M)$ et $x \in \Sigma$, notons :

- μ^{Σ} la forme volume de Σ induite par la métrique $h^{\Sigma} := h^M\big|_{\Sigma}$;
- $\tilde{h}^M_{\Sigma}(X,Y) := \int_{\Sigma} h^M(X,Y)\cdot\mu^{\Sigma}$;
- $J_x : N\Sigma_x \to N\Sigma_x$, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- $h^{N\Sigma} \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma^* \otimes N\Sigma^*)$, la section définie par $h^{N\Sigma}_x(u_x,v_x) := h^M_x(u_x,v_x)$ pour $u_x, v_x \in N\Sigma_x$.
- $\mu^{N\Sigma} \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, \Lambda^2 N\Sigma^*)$ la section telle que $\mu^{N\Sigma}_x$ corresponde à la forme volume de $N\Sigma_x$ induite par la métrique $h^{N\Sigma}_x$.

Remarque 3.27 (i) *On peut remarquer que $\tilde{h}^M$ définit bien une métrique sur $Gr^2(M)$ et évidemment la définition de $\tilde{h}^M$ a aussi un sens pour des co-dimensions différentes de 2 (voir [MM05]).*

(ii) *Rappelons comment est orienté $N\Sigma_x$. Pour $\{f_1, f_2\}$ une base de $N\Sigma_x$ et $\{e_1, ..., e_{n-2}\}$ une base positive de $T_x\Sigma$, on dit que $\{f_1, f_2\}$ est positive si et seulement si $\{e_1, ..., e_{n-2}, f_1, f_2\}$ est une base positive de T_xM .*

Nous avons de plus l'observation suivante qui est évidente :

Lemme 3.28 *L'opérateur J définit une structure presque-complexe sur $Gr^2(M)$.*

Proposition 3.29 (Marsden-Weinstein, [MW83]) *La forme différentielle $\widetilde{\mu^M} \in \Omega^2(Gr^2(M))$ est une forme symplectique (faiblement non-dégénérée) sur $Gr^2(M)$, compatible avec la métrique $\tilde{h}^M$, c'est-à-dire,*

$$(\widetilde{\mu^M})_{\Sigma}(X,Y) = \tilde{h}^M_{\Sigma}(JX,\, Y)\,, \tag{3.12}$$

pour $\Sigma \in Gr^2(M)$ et $X, Y \in T_{\Sigma}Gr^2(M)$.

Le fait que $\widetilde{\mu^M}$ soit une 2-forme lisse et fermée découle de la Proposition 3.23 . Pour montrer la formule (3.12), donnons les deux lemmes suivants.

Lemme 3.30 *Pour $X, Y \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$, on a la formule :*

$$i_X i_Y\, \mu^M = \mu^{N\Sigma}(Y,X)\cdot\mu^{\Sigma}\,. \tag{3.13}$$

Démonstration. Soient $x \in \Sigma$, $u_1, ..., u_{n-2} \in T_x\Sigma$ (on suppose que $\dim(\Sigma) = n-2$) et $\{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée positive de T_xM telle que $\{e_1, ..., e_{n-2}\}$ soit une base positive de $T_x\Sigma$ (en particulier, $\{e_{n-1}, e_n\}$ est donc une base positive de $(N\Sigma)_x)$. On a :

$$\begin{aligned}
&\Big(i_X i_Y\,\mu^M\Big)_x(u_1, ..., u_{n-2}) = \mu^M(Y_x, X_x, u_1, ..., u_{n-2})\\
=\;& e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*\Big(Y_x, X_x, u_1, ..., u_{n-2}\Big)\\
=\;& \begin{vmatrix} 0 & & (u^i_j) \\ Y^1 & X^1 & \\ Y^2 & X^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y^1 & X^1 \\ Y^2 & X^2 \end{vmatrix}\cdot \underbrace{\det(u^i_j)}_{=(\mu^{\Sigma})_x(u_1,...,u_{n-2})}\\
=\;& (\mu^{N\Sigma})_x(Y,X)\cdot(\mu^{\Sigma})_x(u_1, ..., u_{n-2})
\end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. □

Lemme 3.31 *Soient (E, h^E) un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2 et μ^E la forme volume induite sur E par la métrique h^E. Si J est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de E, alors on a :*

$$h^E(JX, Y) = \mu^E(X, Y), \tag{3.14}$$

pour tout $X, Y \in E$.

Démonstration. Soit $\{e_1, e_2\}$ une base positive orthonormée de E. On a :

$$\begin{aligned} h^E(JX, Y) &= h^E\Big(J(X^1e_1 + X^2e_2),\, Y^1e_1 + Y^2e_2\Big) \\ &= h^E\Big(X^1e_2 - X^2e_1,\, Y^1e_1 + Y^2e_2\Big) \\ &= X^1Y^2 - X^2Y^1 = e_1^* \wedge e_2^*\ (X, Y) \\ &= \mu^E(X, Y)\,, \end{aligned}$$

ce qui est la formule cherchée. □

Démonstration de la Proposition 3.29. Pour $\Sigma \in Gr^2(M)$ et $X, Y \in T_\Sigma Gr^2(M)$, on a d'après les lemmes 3.30 et 3.31 :

$$\begin{aligned} (\widetilde{\mu^M})_\Sigma(X, Y) &= \int_\Sigma i_Y i_X\, \mu^M = \int_\Sigma \Big(\mu^{N\Sigma}(X, Y)\Big) \cdot \mu^\Sigma \\ &= \int_\Sigma h^{N\Sigma}(JX, Y) \cdot \mu^\Sigma = \tilde{h}^M_\Sigma(JX, Y) \end{aligned}$$

ce qui prouve la formule (3.12). □

Remarque 3.32 *D'après la Proposition 3.29, le triplet $\big(Gr^2(M), \tilde{h}^M, J\big)$ est donc une variété lisse fréchétique faiblement presque-kählérienne (voir aussi [HV04], [Bry93]).*

3.2.3 Equations d'Euler-Lagrange

Considérons $\mathcal{L} \in C^\infty(TM, \mathbb{R})$ un lagrangien d'une variété riemannienne compacte (M, h^M) et $\Sigma \in Gr_k(M)$. En s'inspirant du calcul différentiel développé par Haller et Vizman sur $Gr_k(M)$ (voir section 3.2.1), on peut définir un Lagrangien $\mathcal{L}^\flat$ sur $TEmb(\Sigma, M)$ en posant :

$$\mathcal{L}^\flat\big(f, h\big) := \int_{f(\Sigma)} (\mathcal{L} \circ h \circ f^{-1}) \cdot \mu^{f(\Sigma)} = \int_\Sigma (\mathcal{L} \circ h) \cdot f^*\mu^{f(\Sigma)}\,, \tag{3.15}$$

pour $f \in Emb(\Sigma, M)$ et $h \in T_f Emb(\Sigma, M) \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$.

Le but de cette section est de déterminer les équation d'Euler-Lagrange associées au Lagrangien $\mathcal{L}^\flat$. Pour ce faire, introduisons quelques notations. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, f_t un chemin lisse de $Emb(\Sigma, M)$ et $x \in f_{t_0}(\Sigma)$, notons :

- $(\partial^\top_{t_0} f)_x := pr^{f_{t_0}(\Sigma)} \dfrac{d}{ds}\Big|_{s=t_0} f_s\big(f_{t_0}^{-1}(x)\big)\,;$
- $(\partial^\perp_{t_0} f)_x := pr^{Nf_{t_0}(\Sigma)} \dfrac{d}{ds}\Big|_{s=t_0} f_s\big(f_{t_0}^{-1}(x)\big)\,,$

où $pr^{f_{t_0}(\Sigma)}$ et $pr^{Nf_{t_0}(\Sigma)}$ désignent les projections canoniques sur $Tf_{t_0}(\Sigma)$ et $Nf_{t_0}(\Sigma)$ respectivement. Nous pouvons observer que $\partial_{t_0}^{\top} f \in \mathcal{X}\big(f_{t_0}(\Sigma)\big)$ et que $\partial_{t_0}^{\perp} f \in \Gamma_{C^\infty}(f_{t_0}(\Sigma), Nf_{t_0}(\Sigma))$.

Lemme 3.33 *Soit $f_t \in Emb(\Sigma, M)$ un chemin lisse de $Emb(\Sigma, M)$. On a la formule suivante :*

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} f_t^* \mu^{f_t(\Sigma)} = \Big(div^{f_{t_0}(\Sigma)}(\partial_{t_0}^{\top} f) - h^M(\partial_{t_0}^{\perp} f, Trace\, \Pi_{f_{t_0}(\Sigma)})\Big) \circ f_{t_0} \cdot f_{t_0}^* \mu^{f_{t_0}(\Sigma)} , \qquad (3.16)$$

où $Trace\, \Pi_{f_{t_0}(\Sigma)}$ désigne la trace de la seconde forme fondamentale $\Pi_{f_{t_0}(\Sigma)}$ de la sous-variété $f_{t_0}(\Sigma)$.

Démonstration. Notons $\rho_t^{\Sigma} \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ la fonction définie par :

$$f_t^*(\mu^{f_t(\Sigma)}) = \rho_t^{\Sigma} \cdot \mu^{\Sigma} . \qquad (3.17)$$

Fixons $x \in \Sigma$ et prenons $\{u_1, ..., u_k\}$ une base orthonormée positive de $T_x\Sigma$. Il est facile de voir que

$$\rho_t^{\Sigma}(x) = \Big(det\big(A(t)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} , \qquad (3.18)$$

où $A(t) \in \mathrm{Mat}(k \times k, \mathbb{R})$ est la matrice définie par la formule $\big(A(t)\big)_{ij} := h^M_{f_t(x)}\big((f_t)_{*_x} u_i, (f_t)_{*_x} u_j\big)$ pour $i, j \in \{1, ..., k\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \rho_t^{\Sigma}(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \Big(det\big(A(t)\big)\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} det\big(A(t)\big)\Big) \Big/ \Big(2\,\big(det\big(A(t_0)\big)\big)^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &= det\big(A(t_0)\big)\, Trace\Big(A(t_0)^{-1} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} A(t)\Big) \Big/ \Big(2\,\big(det\big(A(t_0)\big)\big)^{\frac{1}{2}}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(det\big(A(t_0)\big)\big)^{\frac{1}{2}}\, Trace\Big(A(t_0)^{-1} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} A(t)\Big) . \end{aligned} \qquad (3.19)$$

De plus, pour $i, j \in \{1, ..., k\}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} A(t)_{ij} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} h^M_{f_t(x)}\big((f_t)_{*_x} u_i, ..., (f_t)_{*_x} u_j\big) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f_t^* h^M)_x(u_i, u_j) . \end{aligned} \qquad (3.20)$$

Prenons $\varphi_t \in \mathrm{Diff}(M)$, une difféotopie de M qui étend l'isotopie $f_t \circ f_{t_0}^{-1} \in Emb(f_{t_0}(\Sigma), M)$, c'est-à-dire, $\varphi_{t_0} = Id_M$ et $f_t \circ f_{t_0}^{-1} = \varphi_t\big|_{f_{t_0}(\Sigma)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (voir [Hir94], chapter 8, page 180). Notons aussi $X \in \mathcal{X}(M)$ le champ de vecteurs défini par $X_z := \frac{d}{dt}\big|_{t_0} \varphi_t(z)$ pour $z \in M$. L'expression (3.20) est alors égale à :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} (f_t^* h^M)_x(u_i, u_j) = \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \Big((\varphi_t \circ f_{t_0})^* h^M\Big)_x(u_i, u_j) \\ &= f_{t_0}^*\Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t_0} \varphi_t^* h^M\Big)_x(u_i, u_j) = \Big(f_{t_0}^* \mathcal{L}_X h^M\Big)_x(u_i, u_j) \\ &= \big(\mathcal{L}_X h^M\big)_{f_{t_0}(x)}\big((f_{t_0})_{*_x} u_i, (f_{t_0})_{*_x} u_j\big) \end{aligned} \qquad (3.21)$$

(dans la deuxième ligne, on a utilisé la formule donnant la dérivée du tiré-en-arrière d'un tenseur par une famille de difféomorphismes dépendant du temps, voir par exemple [Laf96], page 175 pour le cas des formes différentielles). Pour $i \in \{1, ..., k\}$, prenons $\tilde{u}_i \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs de M telle que pour $z \in f_{t_0}(\Sigma)$ proche de $f_{t_0}(x)$, $\{(\tilde{u}_1)_z, ..., (\tilde{u}_k)_z\}$ soit une base de $T_z f_0(\Sigma)$ et telle que $(f_{t_0})_{*x} u_i = (\tilde{u}_i)_{f_{t_0}(x)}$. L'expression (3.21) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \big(\mathcal{L}_X h^M\big)_{f_{t_0}(x)}\big((\tilde{u}_i)_{f_{t_0}(x)}, (\tilde{u}_j)_{f_{t_0}(x)}\big) \\
= \;& X_{f_{t_0}(x)}\big(h^M(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)\big) - h^M_{f_{t_0}(x)}\big([X, \tilde{u}_i], \tilde{u}_j\big) - h^M_{f_{t_0}(x)}\big(\tilde{u}_i, [X, \tilde{u}_j],\big) \\
= \;& X_{f_{t_0}(x)}\big(h^M(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)\big) - h^M(\nabla_X \tilde{u}_i, \tilde{u}_j) + h^M(\nabla_{\tilde{u}_i} X, \tilde{u}_j) \\
& - h^M(\tilde{u}_i, \nabla_X \tilde{u}_j) + h^M(\tilde{u}_i, \nabla_{\tilde{u}_j} X) \\
= \;& X_{f_{t_0}(x)}\big(h^M(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)\big) - X_{f_{t_0}(x)}\big(h^M(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)\big) + h^M(\tilde{u}_i, \nabla_X \tilde{u}_j) \\
& + h^M(\nabla_{\tilde{u}_i} X, \tilde{u}_j) - h^M(\tilde{u}_i, \nabla_X \tilde{u}_j) + h^M(\tilde{u}_i, \nabla_{\tilde{u}_j} X) \\
= \;& h^M(\nabla_{\tilde{u}_i} X, \tilde{u}_j) + h^M(\tilde{u}_i, \nabla_{\tilde{u}_j} X) \,. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Prenons $X^\top, X^\perp \in \mathcal{X}(M)$ deux champs de vecteurs tels que :

- $X = X^\top + X^\perp$;
- $X^\top\big|_{f_{t_0}(\Sigma)} = \partial^\top_{t_0} f$ et $X^\perp\big|_{f_{t_0}(\Sigma)} = \partial^\perp_{t_0} f$

(cette décomposition n'étant pas unique). On a :

$$\begin{aligned}
& h^M_{f_{t_0}(x)}(\nabla_{\tilde{u}_i} X, \tilde{u}_j) = h^M_{f_{t_0}(x)}(\nabla_{\tilde{u}_i} X^\top, \tilde{u}_j) + h^M_{f_{t_0}(x)}(\nabla_{\tilde{u}_i} X^\perp, \tilde{u}_j) \\
= \;& h^M_{f_{t_0}(x)}(\nabla^{f_{t_0}(\Sigma)}_{\tilde{u}_i} X^\top, \tilde{u}_j) - h^M_{f_{t_0}(x)}(X^\perp, \nabla_{\tilde{u}_i} \tilde{u}_j) \\
= \;& h^M_{f_{t_0}(x)}(\nabla^{f_{t_0}(\Sigma)}_{u_i} X^\top, u_j) - h^M_{f_{t_0}(x)}(X^\perp, \nabla_{\tilde{u}_i} \tilde{u}_j) \,. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

En revenant à l'expression (3.19), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& Trace\Big(A(t_0)^{-1} \frac{d}{dt}\Big|_{t_0} A(t)\Big) \qquad (3.24) \\
= \;& 2\, Trace\Big(A(t_0)^{-1} \cdot \big(h^M_{f_{t_0}(x)}(\nabla^{f_{t_0}(\Sigma)}_{u_i} X^\top, u_j)\big)_{1 \le i,j \le k}\Big) \\
& -2\, Trace\Big(A(t_0)^{-1} \cdot \big(h^M_{f_{t_0}(x)}(X^\perp, \nabla_{\tilde{u}_i} \tilde{u}_j)\big)_{1 \le i,j \le k}\Big) \\
= \;& 2\, Trace_{T_{f_{t_0}(x)} f_{t_0}(\Sigma)}\Big(v \mapsto \nabla^{f_{t_0}(\Sigma)}_v X^\top\Big) \\
& -2\, h^M_{f_{t_0}(x)}\big(X^\perp, Trace(\Pi_{f_{t_0}(\Sigma)})\big) \\
= \;& 2\,\Big(div^{f_{t_0}(\Sigma)}(\partial^\top_{t_0} f) - h^M(\partial^\perp_{t_0} f, Trace\, \Pi_{f_{t_0}(\Sigma)})\Big)\big(f_{t_0}(x)\big) \,. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Ici $Trace_{T_{f_{t_0}(x)} f_{t_0}(\Sigma)}$ désigne l'opérateur prenant la trace des endomorphismes de $T_{f_{t_0}(x)} f_{t_0}(\Sigma)$ et pour le calcul de la divergence, on a utilisé une formule donnée dans [dC92], page 83, exercise 8. Par suite, on en déduit le lemme. □

Avant de donner les équations d'Euler-Lagrange associées à $\mathcal{L}^\flat$ sur $Emb(\Sigma, M)$, introduisons encore quelques notations. Rappelons que la métrique h^M induit un connecteur $K : T^2M \to TM$ (voir [Lan02], chapter 10, page 284) et que pour $v_x \in T_xM$, on a l'isomorphisme

$$T_{v_x}TM \xrightarrow{\cong} T_xM \oplus T_xM, \;\; \xi \mapsto (\pi^M_{*_x}\xi, K\xi)\,, \tag{3.26}$$

où $\pi^M : TM \to M$ est la projection canonique. Pour $\xi \in T_{v_x}TM$, on a donc une unique décomposition $\xi = \xi^h + \xi^v$ avec $K\xi^h = 0$ et $\pi^M_{*_x}\xi^v = 0$. Cette décomposition correspond à la décomposition du fibré T^2M en une somme directe $T^2M = HM \oplus VM$ où HM est le fibré des vecteurs horizontaux de T^2M et VM celui des vecteurs verticaux (voir [Lan02]) .

Avec ces notations, pour $v_x \in T_xM$, on a :

$$\mathcal{L}_{*_{v_x}}\big|_{(HM)_{v_x}} \in (HM)^*_{v_x} \cong T^*_xM \cong T_xM\,. \tag{3.27}$$

Il existe donc $(\nabla^h\mathcal{L})_{v_x} \in T_xM$ tel que

$$\mathcal{L}_{*_{v_x}}\xi^h = h^M\big((\nabla^h\mathcal{L})_{v_x}, \pi^M_{*_{v_x}}\xi^h\big)\,, \tag{3.28}$$

pour tout $\xi^h \in (HM)_{v_x}$. De même, il existe $(\nabla^v\mathcal{L})_{v_x} \in T_xM$ tel que

$$\mathcal{L}_{*_{v_x}}\xi^v = h^M\big((\nabla^v\mathcal{L})_{v_x}, K\xi^v\big)\,, \tag{3.29}$$

pour tout $\xi^v \in (VM)_{v_x}$. On définit ainsi deux applications lisses $\nabla^h\mathcal{L} \in C^\infty(TM,TM)$ et $\nabla^v\mathcal{L} \in C^\infty(TM,TM)$ qui respectent les fibres. Pour les calculs pratiques, notons " $\sharp$ " : $TM \to T^*M$ l'application canonique induite par la métrique. On peut montrer que pour $v_x \in T_xM$, on a :

- $\big((\nabla^v\mathcal{L})_{v_x}\big)^\sharp = \{T_xM \ni u_x \mapsto \frac{d}{dt}\big|_0 \mathcal{L}(v_x + t\cdot u_x) \in \mathbb{R}\}$;

- $\big((\nabla^h\mathcal{L})_{v_x}\big)^\sharp = \{T_xM \ni u_x \mapsto \frac{d}{dt}\big|_0 \mathcal{L}(U(t))$, où $\alpha := \pi^M \circ U$ est un chemin de M tel que $\alpha(0) = x$ et $\dot\alpha(0) = u_x$ et où U est un champ lisse de vecteurs parallèles le long de α tel que $U(0) = v_x\}$.

Par exemple, si $\mathcal{L} := \frac{1}{2}h^M(\,.\,,\,.\,) - V \circ \pi^M$ où V est une fonction sur M , alors $(\nabla^v\mathcal{L})_{v_x} = v_x$ et $(\nabla^h\mathcal{L})_{v_x} = -(\nabla V)_x$ pour tout $v_x \in T_xM$.

Remarque 3.34 *La connaissance de $\nabla^h\mathcal{L}$ et $\nabla^v\mathcal{L}$ pour un Lagrangien $\mathcal{L}$ donné, revient à connaitre la décomposition sur le fibré vertical et horizontal du gradient $\nabla^{TM}\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}$ par rapport à la métrique h^{TM} de Dombrowski sur la variété TM (voir [Lan02], page 285).*

Théorème 3.35 *Les équations d'Euler-Lagrange associées à $\mathcal{L}^\flat$ sur $Emb(\Sigma, M)$ s'écrivent :*

$$\begin{aligned}
&(\nabla^h\mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}} - \Big(div^{f_t(\Sigma)}(\partial_t^\top f)\circ f_t\Big)\cdot(\nabla^v\mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}\\
&+\Big(h^M\big(\partial_t^\perp f, Trace\,\Pi_{f_t(\Sigma)}\big)\circ f_t\Big)\cdot(\nabla^v\mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}} - \Big(\mathcal{L}\circ\frac{\partial f}{\partial t}\Big)\cdot Trace\,\Pi_{f_t(\Sigma)}\\
&-\nabla^{f_t(\Sigma)}\Big(\mathcal{L}\circ\frac{\partial f}{\partial t}\circ f_t^{-1}\Big)_{f_t} - \nabla^M_{\frac{\partial f}{\partial t}}\big(\nabla^v\mathcal{L}\big)_{\frac{\partial f}{\partial t}} = 0\,,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

où f_t est un chemin lisse de $Emb(\Sigma, M)$.

Démonstration. Soit f_t un chemin lisse de $Emb(\Sigma, M)$ et $\tilde{f}_s$ une variation du chemin f_t à extrémités fixés (voir [AM78] pour une introduction à la mécanique lagrangienne). On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\Big|_0 \int_a^b \mathcal{L}^\flat\Big(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\Big)\, dt = \frac{d}{ds}\Big|_0 \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\Big) \cdot \tilde{f}^* \mu^{\tilde{f}(\Sigma)}\, dt \\
= \;& \int_a^b \int_\Sigma \frac{d}{ds}\Big|_0 \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \qquad (3.31)\\
&+ \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \frac{d}{ds}\Big|_0 \Big(\tilde{f}^* \mu^{\tilde{f}(\Sigma)}\Big)\, dt\,. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Le terme (3.31) peut se réécrire :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_\Sigma \frac{d}{ds}\Big|_0 \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt = \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L}_{*\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
= \;& \int_a^b \int_\Sigma h_f^M\Big((\nabla^h \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \qquad (3.33)\\
&+ \int_a^b \int_\Sigma h_f^M\Big((\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \underbrace{K \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}}_{=\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}\big|_0 \tilde{f}}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt\,. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Pour le terme (3.34), on a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_\Sigma h_f^M\Big((\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
= \;& \int_a^b \int_\Sigma \Big(\frac{d}{dt} h_f^M\Big((\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \\
&\qquad - h_f^M\Big(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} (\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big)\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
= \;& \int_a^b \int_\Sigma \Big(- h_f^M\Big((\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \cdot \frac{d}{dt}\Big(f^* \mu^{f(\Sigma)}\Big) \\
&\qquad - h_f^M\Big(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} (\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\Big)\, dt \\
= \;& -\int_a^b \int_\Sigma h_f^M\Big((\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \cdot \Big(div^{f(\Sigma)}(\partial_t^\top f) \qquad (3.35)\\
&\qquad - h^M\Big(\partial_t^\perp f, Trace\, \Pi_{f(\Sigma)}\Big)\Big) \circ f \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \qquad (3.36)\\
&- \int_a^b \int_\Sigma h_f^M\Big(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t}} (\nabla^v \mathcal{L})_{\frac{\partial f}{\partial t}}, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big)\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt\,. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Concernant le terme (3.32), on a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \frac{d}{ds}\Big|_0 \Big(\tilde{f}^* \mu^{\tilde{f}(\Sigma)}\Big)\, dt &= \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \Big(div^{f(\Sigma)}(\partial_s^\top \tilde{f}\,|_{s=0}) \\
&\quad - h^M\Big(\partial_s^\perp \tilde{f}\,|_{s=0}, Trace\,\Pi_{f(\Sigma)}\Big)\Big) \circ f \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
= \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \Big(div^{f(\Sigma)}(\partial_s^\top \tilde{f}\,|_{s=0}) \circ f\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
\quad - \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \Big(h^M\Big(\partial_s^\perp \tilde{f}\,|_{s=0}, Trace\,\Pi_{f(\Sigma)}\Big) \circ f\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
= \int_a^b \int_{f(\Sigma)} \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t} \circ f^{-1}\Big) \cdot \mathcal{L}_{\partial_s^\top \tilde{f}\,|_{s=0}} \big(\mu^{f(\Sigma)}\big)\, dt \qquad (3.38) \\
\quad - \int_a^b \int_\Sigma \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t}\Big) \cdot \Big(h^M\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}, (Trace\,\Pi_{f(\Sigma)}) \circ f\Big)\Big) \cdot f^* \mu^{f(\Sigma)}\, dt\,. \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Pour le terme (3.38),

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \int_{f(\Sigma)} \Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t} \circ f^{-1}\Big) \cdot \mathcal{L}_{\partial_s^\top \tilde{f}\,|_{s=0}} \big(\mu^{f(\Sigma)}\big)\, dt \\
=\; & -\int_a^b \int_{f(\Sigma)} (\partial_s^\top \tilde{f}\,|_{s=0})\Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t} \circ f^{-1}\Big) \cdot \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
=\; & -\int_a^b \int_{f(\Sigma)} h^M\Big(\nabla^{f(\Sigma)}\Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t} \circ f^{-1}\Big), \partial_s^\top \tilde{f}\,|_{s=0}\Big) \cdot \mu^{f(\Sigma)}\, dt \\
=\; & -\int_a^b \int_{\Sigma} h^M\Big(\nabla^{f(\Sigma)}\Big(\mathcal{L} \circ \frac{\partial f}{\partial t} \circ f^{-1}\Big)_f, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_0 \tilde{f}\Big) \cdot f^*\mu^{f(\Sigma)}\, dt\,. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Par suite, en considérant la somme des termes (3.33), (3.35), (3.36), (3.37), (3.39) et (3.40), on en déduit le théorème. □

Remarque 3.36 *Pour $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, h^M(\,.\,,\,.\,)$, on retrouve l'équation des géodésiques de $Emb(\Sigma, M)$ telle que formulée dans [MM05]. Pour $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, h^M(\,.\,,\,.\,) - 1 \circ \pi^M$ et $dim(\Sigma) = 1$, le lagrangien $\mathcal{L}^\flat$ associé correspond à l'action de Nambu-Goto pour des cordes vibrantes non-relativistes (voir [Pol05], exercise 1.1.b où [Zwi04]). Le cas où $\mathcal{L} = 1 \circ \pi^M$ correspond lui aux cas des sous-variétés minimales de M.*

3.2.4 L'équation d'un filament de vorticité en tant qu'équation hamiltonienne

Une autre conséquence du Lemme 3.33 est la possibilité de calculer le gradient symplectique sur $\big(Gr^2(M), \widetilde{\mu^M}\big)$ de certains hamiltoniens naturels. Plus précisément, pour $V \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, on définit $\widetilde{V} \in C^\infty(Gr^2(M), \mathbb{R})$ par la formule :

$$\widetilde{V}(\Sigma) := \int_\Sigma V \mu^\Sigma\,, \qquad (3.41)$$

où $\Sigma \in Gr^2(M)$. On a alors,

Lemme 3.37 *Le gradient symplectique $X_{\widetilde{V}}$ de la fonction $\widetilde{V}$ sur la variété symplectique $\big(Gr^2(M), \widetilde{\mu^M}\big)$, est donné par*

$$\big(X_{\widetilde{V}}\big)_\Sigma = V \cdot J\,\big(Trace\,\Pi_\Sigma\big) - J\,\big(\nabla V\big)^\perp\,, \tag{3.42}$$

où $\big(\nabla V\big)^\perp$ correspond à la projection du vecteur ∇V sur le fibré normal de $\Sigma \in Gr^2(M)$.

Démonstration. Fixons $\Sigma \in Gr^2(M)$. Nous allons utiliser le fibré principal $\mathrm{Diff}^+(\Sigma) \hookrightarrow \mathrm{Emb}(\Sigma, M) \xrightarrow{p_\Sigma} Gr(\Sigma, M)$ apparaissant dans le Théorème 3.17. Prenons $W \in Gr(\Sigma, M)$, $f \in \mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ tel que $p_\Sigma(f) = W$ et $X \in T_f\mathrm{Emb}(\Sigma, M) \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$. Prenons aussi f_t un chemin lisse de $\mathrm{Emb}(\Sigma, M)$ tel que $f_0 = f$ et tel que $\frac{d}{dt}\big|_0 f = X^\perp$ où $X^\perp := pr \circ X$, pr est la projection sur le fibré normal NW de W dans M. On a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}_{*_W}(p_\Sigma)_{*_f}X &= \widetilde{V}_{*_W}(p_\Sigma)_{*_f}X^\perp = (\widetilde{V}\circ p_\Sigma)_{*_f}X^\perp \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_{f_t(\Sigma)} V\mu^{f_t(\Sigma)} = \frac{d}{dt}\Big|_0 \int_\Sigma (V\circ f_t)\cdot f_t^*\mu^{f_t(\Sigma)} \\
&= \int_\Sigma (V_*X^\perp)\cdot f^*\mu^W + \int_\Sigma (V\circ f)\cdot \frac{d}{dt}\Big|_0 f_t^*\mu^{f_t(\Sigma)} \\
&= \int_\Sigma (V_*X^\perp)\cdot f^*\mu^W + \int_\Sigma (V\circ f)\cdot \Big(div^W(\underbrace{\partial_0^\top f}_{=0}) \\
&\qquad -h^M(\underbrace{\partial_0^\perp f}_{=(p_\Sigma)_{*_f}X^\perp}, Trace\,\Pi_W)\Big)\circ f\cdot f^*\mu^W \\
&= \int_\Sigma h_f^M\big((X^\perp, (\nabla V)_f^\perp\big)\cdot f^*\mu^W \\
&\qquad -\int_\Sigma \Big(V\cdot h^M\big((p_\Sigma)_{*_f}X^\perp, Trace\,\Pi_W\big)\Big)\circ f\cdot f^*\mu^W
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_\Sigma \Big(h^M\big(((p_\Sigma)_{*_f}X^\perp, (\nabla V)^\perp\big)\Big)\circ f\cdot f^*\mu^W \\
&\qquad -\int_\Sigma \Big(V\cdot h^M\big((p_\Sigma)_{*_f}X^\perp, Trace\,\Pi_W\big)\Big)\circ f\cdot f^*\mu^W \\
&= -\int_\Sigma \Big(h^M\big(((p_\Sigma)_{*_f}X^\perp, J^2\,(\nabla V)^\perp\big)\Big)\circ f\cdot f^*\mu^W \\
&\qquad +\int_\Sigma \Big(V\cdot h^M\big((p_\Sigma)_{*_f}X^\perp, J^2\,Trace\,\Pi_W\big)\Big)\circ f\cdot f^*\mu^W \\
&= (\widetilde{\mu^M})_W\big(-J\,(\nabla V)^\perp + V\cdot(J\,Trace\,\Pi_W), (p_\Sigma)_{*_f}X\big)\,.
\end{aligned}$$

Le lemme s'en déduit. □

Remarque 3.38 *Du Lemme 3.37, il apparait que l'équation d'un filament de vorticité peut être vue comme une équation hamiltonnienne sur $(Gr^2(M), \widetilde{\mu^M})$ par rapport à l'hamiltonnien $\widetilde{1}$. Rappelons que dans le premier chapitre, nous avions considéré l'équation d'un filament de vorticité comme étant une équation* *vivant sur $Emb(\Sigma, M)$. Nous avons donc deux approches des cette équation, l'une en considérant $Gr^2(M)$ et l'autre en considérant $Emb(\Sigma, M)$. Ces deux points de vue sont en fait équivalents comme on peut le voir dans la remarque qui suit.*

Remarque 3.39 *Il existe, sur le fibré principal $Diff^+(\Sigma) \hookrightarrow Emb(\Sigma, M) \xrightarrow{p_\Sigma} Gr(\Sigma, M)$, une 1-forme de connection naturelle $\theta \in \Omega^1\big(Emb(\Sigma, M), \mathcal{X}(\Sigma)\big)$ définie pour $x \in \Sigma$, $f \in Emb(\Sigma, M)$ et $X \in T_f Emb(\Sigma, M) \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, f^*TM)$, par $\big(\theta_f(X)\big)_x := (f^{-1})_{*_x} X_x^\top$, où $X_x^\top \in T_{f(x)} f(\Sigma)$ correspond à la projection du vecteur $X_x \in T_{f(x)}M$ sur $T_{f(x)}f(\Sigma)$. L'existence de la connection θ et le fait que le groupe de structure $Diff^+(\Sigma)$ soit un groupe de Lie "régulier" ("regular" en anglais, voir [KM97], Chapter VIII), implique l'existence d'un relevé horizontal $X_{\tilde{1}}^* \in \mathcal{X}\big(Emb(\Sigma, M)\big)$ sur $Emb(\Sigma, M)$ du champ de vecteurs $X_{\tilde{1}}$. Ce relevé a pour expression $\big(X_{\tilde{1}}^*\big)_f = \big(J\, Trace\, \Pi_{f(\Sigma)}\big) \circ f$ pour $f \in Emb(\Sigma, M)$ et est donc invariant pour l'action du groupe $Diff^+(\Sigma)$.*

Remarque 3.40 *Haller et Vizman on remarqué dans [HV04], que si f_t est une courbe intégrale du champ de vecteurs $X_{\tilde{1}}^*$ (voir Remarque 3.39), alors $d\,vol_{f_t^* h^{f_t(\Sigma)}}$ est une forme de volume constante sur Σ.*

Remarque 3.41 *Pour $H \in C^\infty\big(Gr^2(M), \mathbb{R}\big)$, notons $\nabla^{\widetilde{\mu^M}} H \in \mathcal{X}(Gr^2(M))$ le gradient symplectique de H par rapport à la forme symplectique $\widetilde{\mu^M}$. Il est facile de voir, étant donné $V \in C^\infty(M, \mathbb{R}_+^*)$, que l'on a la relation $\nabla^{\widetilde{V \cdot \mu^M}} H = \frac{1}{V} \nabla^{\widetilde{\mu^M}} H$. En particulier, $\big(\nabla^{\widetilde{V\cdot\mu^M}} \widetilde{V}\big)_\Sigma = J\, Trace\, \Pi_\Sigma - J\left(\nabla \ln(V)\right)^\perp$ pour $\Sigma \in Gr^2(M)$.*

3.3 La Grassmannienne non-linéaire G-invariante et quelques propriétés du dual non-régulier de l'algèbre de Lie de SDiff(B)

3.3.1 La Grassmannienne non-linéaire G-invariante

Soit (M, h^M) une variété riemannienne orientée, compacte, de forme volume $\mu^M = dvol_{h^M}$, la forme volume induite par la métrique h^M. Soit aussi G, un groupe de Lie connexe, compacte et munie d'une forme de volume ν^G normalisée et bi-invariante. On suppose que le groupe G agit à droite sur M et que h^M est G-invariante pour cette action. Pour $k \in \{0, ..., \dim(M)\}$, notons :

- $\vartheta : M \times G \to M$, l'action à droite de G sur M ;
- $Gr_k(M)^G := \{\Sigma \in Gr_k(M) \,|\, \vartheta_g(\Sigma) = \Sigma, \forall g \in G\}$;
- $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G := \{s \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma) \,|\, (s \circ \vartheta_g)(x) = (\vartheta_g)_{*_x} s(x), \forall x \in M, \forall g \in G\}$.

Proposition 3.42 *L'ensemble $Gr_k(M)^G$ est une sous-variété modérée fermée de $Gr_k(M)$. Pour $\Sigma \in Gr_k(M)^G$, l'espace tangent de $Gr_k(M)^G$ en Σ s'identifie naturellement à l'espace $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G$.*

La Proposition 3.42 se montre facilement en reprenant la construction de la section 3.1 avec une métrique G-invariante, et en utilisant le lemme suivant :

Lemme 3.43 *Il existe une projection continue p sur l'espace de sections $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ telle que $Im(p) = \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G$. En particulier,*

$$\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma) = \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G \oplus ker(p) \tag{3.43}$$

et $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G$ est naturellement un espace fréchétique modéré.

Démonstration. Il suffit de considérer l'application continue $p : \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma) \to \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ qui est définie pour $s \in \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)$ par :

$$p(s) := \int_G \big((\vartheta_g)_* \circ s \circ \vartheta_{g^{-1}}\big) \cdot \nu^G .$$

Le lemme s'en déduit. □

Considérons à présent la cas d'un fibré principal $G \hookrightarrow P \xrightarrow{\pi} B$. Nous allons détailler certaines propriétés de $Gr^k(P)^G$.

Soit $\Sigma \in Gr^k(P)^G$. Comme $\vartheta_g(\Sigma) = \Sigma$ pout tout $g \in G$, le groupe G agit sur Σ et cette action est libre et propre. On a donc un G-fibré principal naturel :

$$G \hookrightarrow \Sigma \xrightarrow{\pi_\Sigma} \Sigma/G . \tag{3.44}$$

D'autre part, nous avons aussi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \Sigma \arrow[r, "\pi_\Sigma"] \arrow[d, "\pi|_\Sigma"'] & \Sigma/G \arrow[dl, "j"] \\ B & \end{tikzcd} \quad , \tag{3.45}$$

où $j : \Sigma/G \to B$ est définie par $j([x]) := \pi(x)$.

Lemme 3.44 *Le couple $(\Sigma/G, j)$ est une variété plongée de B.*

Démonstration. L'application j est clairement injective et lisse d'après la commutativité du diagramme (3.45). Montrons que j est une immersion. Pour ce faire, notons $\mathcal{O}_x^\Sigma \subseteq \Sigma$ l'orbite du point $x \in \Sigma$ pour l'action ϑ restreinte à Σ (remarquons que $T_x\mathcal{O}_x^\Sigma = T_x\mathcal{O}_x \cap T_x\Sigma$). Pour $x \in \Sigma$ et $v \in T_x\Sigma$, on a :

$$\begin{aligned} & j_{*_{\pi_\Sigma(x)}}(\pi_\Sigma)_{*_x} v = 0 \ \Rightarrow\ (j \circ \pi_\Sigma)_{*_x} v = 0 \\ \Rightarrow\quad & \left(\pi\big|_\Sigma\right)_{*_x} v = 0 \ \Rightarrow\ \pi_{*_x} v = 0 \\ \Rightarrow\quad & v \text{ est vertical pour le fibré } G \hookrightarrow P \to B \\ \Rightarrow\quad & v \in T_x\mathcal{O}_x \ \Rightarrow\ v \in T_x\mathcal{O}_x \cap T_x\Sigma = T_x\mathcal{O}_x^\Sigma \\ \Rightarrow\quad & v \text{ est vertical pour le fibré } G \hookrightarrow \Sigma \to \Sigma/G \\ \Rightarrow\quad & (\pi_\Sigma)_{*_x} v = 0 . \end{aligned}$$

L'application j est donc une immersion injective. Pour la question de la topologie, on peut remarquer que $j(\Sigma/G)$ est fermé dans B car $j(\Sigma/G) = \pi(\Sigma)$ est un compact d'un espace fermé. □

Remarque 3.45 *Du Lemme 3.44, on en déduit que pour $\Sigma \in Gr^k(P)^G$, l'ensemble $\pi(\Sigma)$ est une sous-variéte plongée de B de codimension k et l'on a une structure de fibré principal :*

$$G \hookrightarrow \Sigma \to \pi(\Sigma)\,. \tag{3.46}$$

Lemme 3.46 *Si le groupe de structure G du fibré principal $G \hookrightarrow P \to B$ est connexe, alors on a l'équivalence suivante :*

$$P \text{ est orientable} \quad \Leftrightarrow \quad B \text{ est orientable}. \tag{3.47}$$

Démonstration. Introduisons (pour fixer les notations), des cartes trivialisantes du fibré P :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Psi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U\times G \arrow[dl, "pr_1^U"] \\ & U & \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(V) \arrow[rr, "\Psi_V"] \arrow[dr, "\pi"'] & & V\times G \arrow[dl, "pr_1^V"] \\ & V & \end{tikzcd} \quad . \tag{3.48}$$

Notons

- $\Psi_U^{-1}(x,g) = \vartheta_g\big(s_U(x)\big)$, $\Psi_V^{-1}(y,g) = \vartheta_g\big(s_V(y)\big)$ pour $x \in U$, $y \in V$ et $g \in G$ (on définit ainsi des sections locales $s_U : U \to P$ et $s_V : V \to P$ du fibré P).
- $s_U(x) = \vartheta\big(s_V(x),\, c_{UV}(x)\big)$ (cela définit le "cocycle" $c_{UV} : U\cap V \to G$).

Avec ces notations, nous avons la relation :

$$(\Psi_V \circ \Psi_U^{-1})(x,g) = (x,\, c_{UV}(x)\cdot g)\,. \tag{3.49}$$

A l'aide des trivialisations (3.48), nous pouvons construire de "vraies cartes" de P de la façon suivante. On considère $\Theta \subseteq \mathfrak{g}$ un ouvert de $\mathfrak{g}$ tel que $\exp|_\Theta : \Theta \to \exp(\Theta)$ soit un difféomorphisme. Pour (U,φ) une carte trivialisante de P et $g \in G$, on définit alors

$$\Lambda_{U,g}^{-1} \;:\; \left\{ \begin{array}{l} \varphi(U)\times\Theta \to \Psi_U^{-1}\Big(U \times L_g(\exp(\Theta))\Big)\,; \\ (x,\xi) \mapsto \Psi_U^{-1}\Big(\varphi^{-1}(x),\, L_g(\exp(\xi))\Big)\,. \end{array} \right. \tag{3.50}$$

Le couple $\Big(\Psi_U^{-1}\big(U\times L_g(\exp(\Theta))\big),\, \Lambda_{U,g}\Big)$ est une carte de P et l'on a pour (V,ψ) une autre carte trivialisante de P et $h \in G$:

$$\begin{aligned} &(\Lambda_{V,h} \circ \Lambda_{U,g}^{-1})(x,\xi) = \Lambda_{V,h}\Big(\Psi_U^{-1}\big(\varphi^{-1}(x),\, L_g(\exp(\xi))\big)\Big) \\ =\;& \Lambda_{V,h}\Big(\Psi_V^{-1}\big(\varphi^{-1}(x),\, c_{UV}\big(\varphi^{-1}(x)\big)\cdot L_g(\exp(\xi))\big)\Big) \\ =\;& \Big[(\psi\circ\varphi^{-1})(x),\, \exp^{-1}\Big(L_{h^{-1}c_{UV}(\varphi^{-1}(x))\cdot g}\cdot \exp(\xi)\Big)\Big] \\ =\;& \Big[(\psi\circ\varphi^{-1})(x),\, \exp^{-1}\Big(L_z\cdot\exp(\xi)\Big)\Big] \end{aligned}$$

avec $z := h^{-1} c_{UV}(\varphi^{-1}(x)) \cdot g$. On en déduit que

$$(\Lambda_{V,h} \circ \Lambda_{U,g}^{-1})_{*(x,\xi)} = \begin{bmatrix} (\psi \circ \varphi^{-1})_{*x} & 0 \\ * & (\exp_*^{-1} L_{z_*} \exp)_{*\xi} \end{bmatrix} \quad . \tag{3.51}$$

Comme G est connexe, on peut trouver un chemin lisse z_t de G tel que $z_0 = e$ et $z_1 = z$. Ceci implique que le signe de $\det(\exp_*^{-1} L_{z_*} \exp)_{*\xi}$ soit égale au signe de $\det(Id_{\mathfrak{g}}) = 1$ qui est positif. Donc,

$$\det\Big((\Lambda_{V,h} \circ \Lambda_{U,g}^{-1})_{*(x,\xi)}\Big) > 0 \ \Leftrightarrow \det\Big((\psi \circ \varphi^{-1})_{*x}\Big) > 0 \tag{3.52}$$

ce qui prouve ce lemme. $\square$

A présent prenons $\Sigma \in Gr^k(P)^G$. On peut considérer sur Σ la métrique G-invariante $h^\Sigma := (h^P)\big|_\Sigma$ ainsi que $\mu^\Sigma := d\,\mathrm{vol}_{h^\Sigma}$. On a alors, d'après le Lemme 2.6 et la Remarque 3.45, une métrique $h^{\pi(\Sigma)}$ sur $\pi(\Sigma)$ telle que $\pi\big|_\Sigma : \Sigma \to \pi(\Sigma)$ soit une submersion riemannienne. Nous savons aussi de part le Lemme 3.46, que $\pi(\Sigma)$ est orientable. Prenons donc l'orientation de $\pi(\Sigma)$ telle que si $\mu^{\pi(\Sigma)}$ désigne le forme de volume associée à la métrique $h^{\pi(\Sigma)}$ par rapport à cette orientation, alors on ait la formule (voir aussi Proposition 2.13) :

$$\mu^\Sigma = \big(V^\Sigma \circ (\pi\,|_\Sigma)\big) \cdot (\pi\,|_\Sigma)^* \mu^{\pi(\Sigma)} \wedge \theta_\Sigma^* \, \nu_e^G \,, \tag{3.53}$$

où $V^\Sigma : \pi(\Sigma) \to \mathbb{R}$ désigne le volume des orbites de Σ et $\theta_\Sigma \in \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$ la 1-forme de connection canoniquement associée à la métrique h^Σ sur le fibré $G \hookrightarrow \Sigma \to \pi(\Sigma)$. On peut ainsi définir une application :

$$\Phi \ : \left\{ \begin{array}{c} Gr^k(P)^G \to Gr^k(B)\,; \\ \big(\Sigma, [\mu^\Sigma]\big) \mapsto \big(\pi(\Sigma), [\mu^{\pi(\Sigma)}]\big)\,. \end{array} \right. \tag{3.54}$$

Proposition 3.47 *L'application* $\Phi : Gr^k(P)^G \to Gr^k(B)$ *définie en (3.54) est un difféomorphisme modéré et pour* $\Sigma \in Gr^k(P)^G$ *et* $s \in T_\Sigma Gr^k(P)^G \cong \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G$ *, on a la formule :*

$$\Phi_{*\Sigma}\, s = \tilde{s}\,, \tag{3.55}$$

où $\tilde{s} \in T_{\Phi(\Sigma)} Gr^k(B) \cong \Gamma_{C^\infty}\big(\Phi(\Sigma), N\Phi(\Sigma)\big)$ *est définie par* $\tilde{s}(b) = \pi_{*x}\, s(x)$ *pour* $b \in \Phi(\Sigma)$ *et* $x \in \Sigma$ *tel que* $\pi(x) = b$ *.*

Nous allons montrer cette proposition par une serie de lemmes.

Lemme 3.48 *L'application* Φ *est une bijection.*

Démonstration. Nous allons montrer que l'application Φ possède un inverse. Prenons $W \in Gr^k(B)$ et $\mathcal{U} \subseteq B$ un ouvert trivialisant intersectant W :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[rr, "\Psi_U"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U \times G \arrow[dl, "pr_1^U"] \\ & U & \end{tikzcd} \quad .$$

Nous pouvons observer que

$$\Psi_U\big(\pi^{-1}(W) \cap \pi^{-1}(U)\big) = \Psi_U\big(\pi^{-1}(W \cap U)\big) = (W \cap U) \times G\,.$$

Il est alors facile de construire un atlas sur $\pi^{-1}(W)$ tel que $\pi^{-1}(W)$ soit une sous-variété plongée de P. Cette sous-variété est connexe (car W et G sont connexes) et l'on peut constater que $\pi^{-1}(W)$ est aussi orientable. L'orientabilité provient du Lemme 3.46 et de la G-invariance de $\pi^{-1}(W)$ qui implique l'existence d'une structure de fibré principal $G \hookrightarrow \pi^{-1}(W) \to W$. Enfin on peut munir $\pi^{-1}(W)$ de l'unique orientation $[\beta(W)]$ qui vérifie $\Phi\big(\pi^{-1}(W),\, [\beta(W)]\big) = W$. Ce faisant, on construit bien un inverse de l'application Φ. □

Lemme 3.49 *Les applications Φ et Φ^{-1} sont lisses modérées.*

Démonstration. Prenons $\Sigma = \Phi^{-1}(W) \in Gr^k(P)^G$, $\big(\varphi_W(\mathcal{U}_W),\, \varphi_W^{-1}\big)$ une carte de $Gr^k(B)$ et $\big(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma),\, \varphi_\Sigma^{-1}\big)$ une carte de $Gr^k(P)$. Soit aussi $\mathcal{U}_\Sigma^G \subseteq \Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G \cap \mathcal{U}_\Sigma$ un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(\Sigma, N\Sigma)^G$ tel que $\Big(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma^G),\, \varphi_\Sigma^{-1}\big|_{\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma^G)}\Big)$ soit une carte de $Gr^k(P)^G$ en Σ, et tel que

$$\tau_\Sigma(\Theta_\Sigma) \subseteq \pi^{-1}(\tau_W(\Theta_W)), \tag{3.56}$$

(voir section 3.1 pour les notations). Puisque $\pi : (P, h^P) \to (B, h^B)$ est une submersion riemannienne, on a pour $s \in \mathcal{U}_\Sigma^G$ et $x \in \Sigma$:

$$\pi\Big(\exp_x\big(s(x)\big)\Big) = \exp_{\pi(x)}\big(\tilde{s}(x)\big), \tag{3.57}$$

où $\tilde{s} \in \Gamma_{C^\infty}(W, NW)$ est définie par $\tilde{s}(\pi(x)) := \pi_{*_x} s(x)$ pour $x \in \Sigma$. Des relations (3.56) et (3.57) on en déduit successivement :

- $\Phi\big(\varphi_\Sigma(\mathcal{U}_\Sigma^G)\big) \subseteq \varphi_W(\mathcal{U}_W)$ et donc Φ est continue ;
- localement, $\Phi(s) = \tilde{s}$;
- Φ est lisse modérée et $\Phi_{*_\Sigma} s = \tilde{s}$;
- Φ^{-1} est aussi lisse modérée d'après le théorème d'inversion de Nash-Moser.

Le lemme s'en déduit. □

Il est facile de voir que la 2-forme $\widetilde{\mu^P}$ définie en (3.1) se restreint en une forme symplectique sur $Gr^2(P)^G$ et il est naturel de se demander de quelle manière la dynamique sur la variété symplectique $\big(Gr^2(P)^G, \widetilde{\mu^P}\big)$ se transporte sur la variété $Gr^2(B)$. Pour cela on a :

Théorème 3.50 *L'application $\Phi : \Big(Gr^2(P)^G, \widetilde{\mu^P}\Big) \to \big(Gr^2(B), \widetilde{V\mu^B}\big)$ est un symplectomorphisme (ici la fonction $V \in C^\infty(B, \mathbb{R})$ est la fonction apparaissant dans la Proposition 2.13). De plus, l'application Φ est équivariante par rapport aux actions naturelles à gauche du groupe $SAut(P, \mu^P)$ sur $Gr^2(P)^G$ et $Gr^2(B)$:*

$$\Phi\big(\varphi(\Sigma)\big) = \widetilde{\varphi}\big(\Phi(\Sigma)\big), \tag{3.58}$$

pour $\Sigma \in Gr^2(P)^G$ et $\varphi \in SAut(P, \mu^P)$ (voir aussi la section 2.4.1 pour les notations).

Remarque 3.51 *Toujours en utilisant la Proposition 3.23, on voit facilement que $\widetilde{V\mu^B}$ est une forme symplectique sur $Gr^2(B)$.*

Pour montrer le Théorème 3.50, nous avons besoin de deux lemmes.
Prenons $\Sigma \in Gr^2(P)^G$, $x \in \Sigma$ et notons $W := \Phi(\Sigma)$.

Lemme 3.52 *L'application* $\pi_{*_x}\big|_{N\Sigma_x} \ : \ \big(N\Sigma_x, h_x^{N\Sigma}\big) \ \to \ \big(NW_{\pi(x)}, h_{\pi(x)}^{NW}\big)$ *est une isométrie.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord, en notant $\mathcal{O}_x$ l'orbite de x dans P pour l'action de G , que :

$$\mathcal{O}_x \subseteq \Sigma \ \Rightarrow \ T_x\mathcal{O}_x \subseteq T_x\Sigma \ \Rightarrow \ (T_x\Sigma)^\perp \subseteq (T_x\mathcal{O}_x)^\perp \underset{\cong}{\xrightarrow{\pi_{*_x}}} T_{\pi(x)}B\,,$$

l'application π_{*_x} étant une bijection isométrique entre les espaces $(T_x\mathcal{O}_x)^\perp$ et $T_{\pi(x)}B$ (voir le point (ii) du Lemme 2.6 et la Remarque 2.8) . De plus, pour $w \in N\Sigma_x$ et $v \in T\Sigma_x$, on a d'après le Lemme 2.6 :

$$h^B_{\pi(x)}(\pi_{*_x}w, \pi_{*_x}v) = (\pi^* h^B)_x(w,v) = \underbrace{h^P_x(w,v)}_{=0} - h^{\mathfrak{g}}_x\big(\underbrace{\theta_x(w)}_{=0}, \theta_x(v)\big) = 0$$

($\theta_x(w) = 0$ car $w \in N\Sigma_x = (T_x\Sigma)^\perp \subseteq (T_x\mathcal{O}_x)^\perp$ ce qui veut dire que w est un vecteur horizontal) . Il en résulte que $\big(\pi_{*_x}\big|_{N\Sigma_x}\big)(N\Sigma_x) \subseteq NW_{\pi(x)}$ et par restriction de l'isométrie π_{*_x} sur $N\Sigma_x$, on en déduit le lemme. $\square$

Lemme 3.53 *L'application* $\pi_{*_x}\big|_{N\Sigma_x} : N\Sigma_x \to NW_{\pi(x)}$ *préserve l'orientation.*

Démonstration. Soient $\{e_1, e_2\}$ une base positive de $N\Sigma_x$ et $\{f_1, ..., f_{m-2}\}$ une base positive de $T_{\pi(x)}W$. De part le point (ii) de la Remarque 3.27, on a les équivalences suivantes entre propositions :

$$\begin{aligned} & \pi_{*_x}\big|_{N\Sigma_x} : N\Sigma_x \to NW_{\pi(x)} \ \text{ préserve l'orientation} \\ \Leftrightarrow \ & \{\pi_{*_x}e_1, \pi_{*_x}e_2\} \ \text{ est une base positive de } \ NW_{\pi(x)} \\ \Leftrightarrow \ & \{f_1, ..., f_{m-2}, \pi_{*_x}e_1, \pi_{*_x}e_2\} \ \text{ est une base positive de } \ T_{\pi(x)}B\,. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Prenons $k_1, ..., k_{m-2} \in T_x\Sigma$ horizontaux tels que $f_i = \pi_{*_x}k_i$ pour $i \in \{1, ..., m-2\}$. La proposition (3.59) est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} & \{\pi_{*_x}k_1, ..., \pi_{*_x}k_{m-2}, \pi_{*_x}e_1, \pi_{*_x}e_2\} \ \text{ est une base positive de } \ T_xB \\ \Leftrightarrow \ & \mu^B_{\pi(x)}(\pi_{*_x}k_1, ..., \pi_{*_x}k_{m-2}, \pi_{*_x}e_1, \pi_{*_x}e_2) > 0 \\ \Leftrightarrow \ & (\pi^*\mu^B)_x(k_1, ..., k_{m-2}, e_1, e_2) > 0\,. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Prenons $\{\xi_1, ..., \xi_{n-m}\}$ une base de $T_x\mathcal{O}_x$ telle que $(\theta^*\nu^G_e)_x(\xi_1, ..., \xi_{n-m}) = 1$ (voir Proposition 2.13 pour les notations). La proposition (3.60) est équivalente à :

$$\begin{aligned} & \Big((V \circ \pi) \cdot (\pi^*\mu^B) \wedge \theta^*\nu^G_e\Big)_x(k_1, ..., k_{m-2}, e_1, e_2, \xi_1, ..., \xi_{n-m}) > 0 \\ \Leftrightarrow \ & \mu^P_x(k_1, ..., k_{m-2}, e_1, e_2, \xi_1, ..., \xi_{n-m}) > 0 \\ \Leftrightarrow \ & \mu^P_x(k_1, ..., k_{m-2}, \xi_1, ..., \xi_{n-m}, e_1, e_2) > 0\,. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Nous devons donc montrer que $\{k_1, ..., k_{m-2}, \xi_1, ..., \xi_{n-m}\}$ est une base positive de $T_x\Sigma$. Or,

$$
\begin{aligned}
& \mu_x^\Sigma(k_1, ..., k_{m-2}, \xi_1, ..., \xi_{n-m}) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \Big(\big(V \circ (\pi|_\Sigma)\big) \cdot ((\pi\,|_\Sigma)^*\mu^W) \wedge \theta^*\nu_e^G\Big)_x (k_1, ..., k_{m-2}, \xi_1, ..., \xi_{n-m}) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & ((\pi\,|_\Sigma)^*\mu^W)(k_1, ..., k_{m-2}) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \mu^W_{\pi(x)}(\pi_{*_x}k_1, ..., \pi_{*_x}k_{m-2}) > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \{\pi_{*_x}k_1, ..., \pi_{*_x}k_{m-2}\} \text{ est une base positive de } T_{\pi(x)}W \\
\Leftrightarrow \quad & \{f_1, ..., f_{m-2}\} \text{ est une base positive de } T_{\pi(x)}W\,. \qquad (3.62)
\end{aligned}
$$

La proposition (3.62) étant vraie, le lemme s'en déduit. □

Des lemmes 3.52 et 3.53 on en déduit en particulier, avec des notations évidentes, que $\pi^*\mu^{NW} = \mu^{N\Sigma}$.

Démonstration du Théorème 3.50. Prenons $\Sigma \in Gr^2(P)^G$ et $X, Y \in T_\Sigma Gr^2(P)^G$. On a :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{(\mu^P)}_\Sigma(X,Y) &= \int_\Sigma i_Y i_X \mu^P = \int_\Sigma i_Y i_X \mu^{N\Sigma} \cdot \mu^\Sigma = \int_\Sigma i_Y i_X \pi^*\mu^{NW} \cdot \mu^\Sigma \\
&= \int_\Sigma \Big(i_{\widetilde{Y}} i_{\widetilde{X}} \mu^{NW}\Big) \circ \pi \cdot \mu^\Sigma = \int_W V\Big(i_{\widetilde{Y}} i_{\widetilde{X}} \mu^{NW}\Big) \cdot \mu^W \\
&= \int_W i_{\widetilde{Y}} i_{\widetilde{X}} \cdot V\mu^B = (\Phi^*\widetilde{V\mu^B})_\Sigma(X,Y)\,,
\end{aligned}
$$

ce qui est la formule cherchée. □

Une conséquence du Théorème 3.50 est la possibilité de réécrire l'équation d'un filament de vorticité (avec symétrie) sur $Gr^2(P)^G$ comme une équation hamiltonienne sur $\big(Gr^2(B), \widetilde{V\mu^B}\big)$. En effet, nous savons (voir section 3.2.4), que l'équation d'un filament de vorticité (avec symétrie) peut être interprétée comme une équation hamiltonienne sur $\big(Gr^2(P)^G, \widetilde{\mu^P}\big)$ par rapport à l'hamiltonien $\tilde{1}$. Mais de part le Théorème 3.50, cette équation est équivalente à l'équation hamiltonienne sur $\big(Gr^2(B), \widetilde{V\mu^B}\big)$ associée à l'hamiltonien $\tilde{1} \circ \Phi^{-1} = \widetilde{V} \in C^\infty(Gr^2(B), \mathbb{R})$. Le gradient symplectique de cet hamiltonien est donné d'après la Remarque 3.41 par :

$$
\big(\nabla^{\widetilde{V\mu^B}}\widetilde{V}\big)_W = J\,Trace\,\Pi_W - J\,\big(\nabla \ln(V)\big)^\perp\,,
$$

pour $W \in Gr^2(B)$.

Dans le cas particulier où la dimension de B est deux, on a (étant donné que B est connexe) :

- $\big(Gr^2(B), \widetilde{V\mu^B}\big) = (B, V\mu^B) \amalg (B, -V\mu^B)$ (union disjointe) ;
- $\widetilde{V} = V$ sur $(B, V\mu^B)$;

- $\left(\nabla^{\widetilde{V\mu^B}}\widetilde{V}\right) = \left(\nabla^{V\mu^B}V\right) = -J\left(\nabla\ln(V)\right)$ sur $(B, V\mu^B)$, J étant la structure presque-complexe canonique sur la surface riemannienne orientée $(B, V\mu^B)$.

Dans ce contexte ($\dim(B) = 2$), il apparait donc que l'équation d'un filament de vorticité se réduit à l'étude du flot d'un champ de vecteurs sur une surface.

Annexe A

Remarques sur la différentiabilité au sens de Kriegl-Michor et celle de Hamilton

Il existe de nombreuses notions de différentiabilité dans les espaces vectoriels topologiques localement convexes (voir [Kel74]) ; notions qui se confondent souvent dans les espaces de Fréchet pour les applications lisses. Le but de cet appendice est de discuter de deux de ces notions et de montrer quelles sont les même dans les espaces fréchetiques.

Définition A.1 (différentiabilité au sens de Hamilton)
Soient E et F deux espaces de Fréchet et U un ouvert de E.

(i) *Une application $f\ : U \to F$ est dite de classe C^1 au sens de Hamilton si :*

- *la quantité suivante*

$$df(x)v := \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$$

existe pour tout $x \in U$ et pour tout $v \in E$.

- *L'application $df\ : U \times E \to F$, $(x,v) \mapsto df(x)v$ est continue.*

(ii) *Une application $f\ : U \to F$ est dite de classe C^2 au sens de Hamilton si f est C^1 au sens de Hamilton et si de plus $df\ : U \times E \to F$ est de classe C^1 au sens de Hamilton.*
De facons équivalente, cela revient à montrer que la quantité

$$d^2f(x)\{v_1,v_2\} := \lim_{t\to 0}\frac{df(x+tv_1)v_2 - df(x)v_2}{t}$$

existe et est continue en tant qu'application de $U\times E\times E$ à valeurs dans F.

(*iii*) *De manière analogue, on définit les différentielles d'ordre supérieures par la formule :*

$$d^n f(x)\{v_1, ..., v_n\} := \lim_{t \to 0} \frac{d^{n-1}f(x+tv_1)\{v_2, ..., v_n\} - d^{n-1}f(x)\{v_2, ..., v_n\}}{t}$$

et l'on dit qu'une application f de classe C^{n-1} au sens de Hamilton est de classe C^n au sens de Hamilton si $d^n f : U \times E^n \to F$ existe et est continue.

Notation. Nous noterons $C^n_H(U,F)$ l'ensemble des applications de U dans F de classe C^n au sens de Hamilton. Naturellement, on définit $C^\infty_H(U,F)$ par $C^\infty_H(U,F) := \bigcap_{k \geq 0} C^k_H(U,F)$.

Résultats 1 *Soit $f : U \to F$ une application d'un ouvert U d'un espace de Fréchet E dans un autre espace de Fréchet F .*

(*i*) *Si $f \in C^1_H(U,F)$, alors f est continue.*

(*ii*) *Si $f \in C^1_H(U,V)$ et $g \in C^1_H(V,L)$ où V est un ouvert de F et L un espace de Fréchet, alors pour $x \in U$ et $v \in E$ on a la formule :*

$$d(g \circ f)(x)v = dg(f(x))df(x)v\ .$$

(*iii*) *Si $f \in C^n_H(U,F)$, alors pour $x \in U$, l'application $d^n f(x) : E \times \cdots \times E \to F$ est multilinéaire et symétrique.*

Abordons la notion de différentiabilité de Kriegl-Michor. Celle-ci repose sur la notion de courbe lisse, notion qui ne pose pas de problème puisque la dérivée “naive” (si elle existe) d'une courbe d'un espace vectoriel est elle-même une courbe. On dira donc qu'une courbe $\alpha : I \to E$ (I ouvert de $\mathbb{R}$) est lisse si elle admet des dérivées continues à tous les ordres.
On peut remarquer que l'ensemble des courbes lisses se confond avec $C^\infty_H(I,E)$.

Définition A.2 (différentiabilité au sens de Kriegl-Michor)
Soit $f : U \to F$ une application d'un ouvert U d'un espace de Fréchet E dans un autre espace de Fréchet F .
L'application f est dite de classe C^∞ au sens de Kriegl-Michor si l'image par f d'une courbe lisse est toujours une courbe lisse.

Notation. Nous noterons $C^\infty_{KM}(U,F)$ l'ensemble des applications de classe C^∞ au sens de Krigel-Michor.

Il est évident que la différentiabilité de Hamilton entraine celle de Kriegl-Michor. Nous allons voir que l'inverse est aussi vrai.

Définition A.3 *Soient E un espace de Fréchet et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers x. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge rapidement vers x si pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\left(n^k(x_n - x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

Lemme A.4 *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'un espace de Fréchet E qui converge rapidement vers x , alors on peut trouver une courbe lisse $\alpha : \mathbb{R} \to E$ telle que $\alpha(\frac{1}{n}) = x_n$ et $\alpha(0) = x$.*

Démonstration. Voir [KM97], page 18. □

Ce Lemme est très intéressant car dans un espace de Fréchet, la notion de continuité est équivalente à la notion de continuité séquentielle.

Lemme A.5 *Si $f \in C^{\infty}_{KM}(U, F)$, alors f est continue.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers x. Nous allons dans un premier temps montrer que l'on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge rapidement.
Puisque E est un espace de Fréchet, il existe une famille dénombrable de semi-norme $(p_i)_{i\geq 1}$ qui engendre la topologie de E. Une distance compatible sur E nous est donnée par

$$d(x,y) = \sum_{i\geq 1} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$$

pour $x, y \in E$.
En particulier pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in E$ on a

$$\frac{1}{2^i}\frac{p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)} \leq d(x,y) \Longrightarrow p_i(x-y) \leq 2^i(1+p_i(x-y))d(x-y)\ . \quad (*)$$

Choisissons alors $\varphi\ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement positive telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d(x_{\varphi(n)}, x) \leq e^{-n}$.
On a alors, pour $i, k \in \mathbb{N}$, d'après $(*)$:

$$\begin{aligned} p_i(n^k(x_{\varphi(n)} - x)) &= n^k p_i(x_{\varphi(n)} - x) \leq n^k 2^i (1 + p_i(x_{\varphi(n)} - x)) d(x_{\varphi(n)}, x) \\ &\leq n^k 2^i (1 + M_i) e^{-n} \to 0 \quad quand\, n \to +\infty \end{aligned}$$

où M_i est une borne de la suite convergente $(p_i(x_{\varphi(n)} - x))_{n\in\mathbb{N}}$. On en déduit que la suite $(p_i(n^k(x_{\varphi(n)} - x)))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout $k \in \mathbb{N}$ ce qui veut dire que cette suite est bornée dans E . Par suite, $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge rapidement.
Dans l'espace métrique E, il n'est pas difficile de voir que l'on peut tester la continuité de f au moyen des suites à convergence rapide. Soit alors $x_n \to x$ une telle suite . Prenons une courbe lisse α vérifiant $\alpha(\frac{1}{n}) = x_n$ et $\alpha(0) = x$.
On a alors, puisque $f \circ \alpha$ est lisse (et donc à fortiori continue) :

$$f(x_n) = f\left(\alpha\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (f\circ\alpha)\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (f\circ\alpha)(0) = f(x)\ .$$

Ainsi f est continue. □

Théorème A.6 *Si $f\ : U \to F$ est une application d'un ouvert U d'un espace de Fréchet E dans un autre espace de Fréchet F, alors f est C^{∞} au sens de Kriegl-Michor si et seulement si f est C^{∞} au sens de Hamilton.*

Démonstration. Supposons que f soit C^{∞} au sens de Kriegl-Michor.
Considérons, pour $x \in U$, $v \in E$ et $t \in \mathbb{R}$, le quotient suivant :

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t}\ .$$

l'application $t \mapsto x + tv$ est une courbe lisse, et donc aussi $\alpha\ :\ t \mapsto f(x+tv)$.
Il en résulte que

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} = \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{t}$$

converge lorsque $t \to 0$ puisque α est lisse. Ainsi nous pouvons considérer l'expression df .
Montrons que $df : U \times E \to F$ est C^∞ au sens de Kriegl-Michor. Prenons c_1 une courbe lisse de U et c_2 une courbe lisse de E. Notons $f^\vee : \mathbb{R}^2 \to F$, $(s,t) \mapsto f(c_1(s) + tc_2(s))$. Etant donné que $f^\vee$ est lisse au sens de Kriegl-Michor, cela implique, d'après le Théorème de Boman (cf [KM97], page 31), que $f^\vee$ admet des dérivées partielles continues au sens usuel à tout les ordres. On a alors

$$\begin{aligned} df(c_1(s))c_2(s) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(c_1(s)+tc_2(s))-f(c_1(s))}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f^\vee(s,t)-f^\vee(s,0)}{t} \\ &= \frac{\partial f^\vee}{\partial t}(s,0)\,. \end{aligned}$$

Il en résulte que $s \mapsto df(c_1(s))c_2(s)$ est une courbe lisse puisque $s \mapsto \frac{\partial f^\vee}{\partial t}(s,0)$ est lisse d'après le Théorème de Boman. L'application df est donc C^∞ au sens de Kriegl-Michor puisque l'image par df d'une courbe lisse est toujours une courbe lisse. On en déduit en particulier que $df : U \times E \to F$ est continue, et donc f est C^1 au sens de Hamilton. Par récurrence, on montre que f est C^∞ au sens de Hamilton. $\square$

Annexe B

Le groupe des difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte comme groupe de Lie fréchétique modéré

L'objet de cet appendice est de compléter quelques détails techniques de l'article "The inverse function theorem of Nash-Moser" de Richard Hamilton ([Ham82]), où est, entre autre, introduit la catégorie des variétés fréchétiques modérées.
Plus précisément, nous détaillons ici la démonstration de Hamilton donnant l'existence d'une structure de variété fréchétique modérée sur le groupe des difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte orientée. Nous complétons ainsi certaines constructions et arguments concernant la catégorie des espaces et des variétés "modérés" en utilisant très explicitememt des espaces de sections lisses d'un fibré vectoriel sur une variété compacte. Parmi les variétés considérées, sont traités le groupe de tous les difféomorphismes ainsi que celui de tous les difféomorphismes unimodulaires d'une variété compacte.

B.1 L'espace des sections d'un fibré vectoriel

B.1.1 La topologie de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$

Pour une variété compacte M de dimension n et un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ de rang r au dessus de M, nous allons voir qu'il est possible de mettre sur $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ l'espace des sections de E une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe faisant de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ un espace de Fréchet.

Notations. Par la suite, si $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$ et (U, φ) est une carte trivialisante

$(\pi^{-1}(U) \underset{\approx}{\xrightarrow{\Psi_U}} U \times \mathbb{R}^r)$, nous noterons

$$s_U \ : \ \varphi(U) \to \mathbb{R}^r \ ; \ x \mapsto (pr_2^U \circ \Psi_U \circ s \circ \varphi^{-1})(x)$$

où $pr_2^U \ : U \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^r$ est la projection sur le deuxième facteur. En particulier, en coordoonnées locales dans des cartes trivialisantes, une section s'écrit

$$(\Psi_U \circ s \circ \varphi^{-1})(x) = (\varphi^{-1}(x), s_U(x)) \in U \times \mathbb{R}^r$$

pour $x \in \varphi(U)$.

Lemme B.1 *L'espace $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe dont la topologie est engendrée par la famille de semi-normes $p_{U,K,i,\alpha}$ définies comme suit :*

(*i*) *(U, φ) est une carte trivialisante $(\pi^{-1}(U) \underset{\approx}{\xrightarrow{\Psi_U}} U \times \mathbb{R}^r)$;*

(*ii*) *K est un compact de U ;*

(*iii*) *i est un entier compris entre 1 et r ;*

(*iv*) *$\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice ;*

(*v*)

$$p_{U,K,i,\alpha} \ : \ \begin{cases} \Gamma_{C^\infty}(M,E) \to \mathbb{R} \ ; \\ s \mapsto \underset{x \in \varphi(K)}{sup} (\mid D^\alpha s_U^i(x) \mid) \end{cases}$$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ et $s_U(x) = (s_U^1(x), ..., s_U^r(x)) \in \mathbb{R}^r$ pour $x \in \varphi(U)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que la famille de semi-normes définie précédemment est faiblement séparante, ce qui est évident puisque si une section $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ est telle que $p_{U,K,i,\alpha}(s) = 0$ pour toutes les semi-normes, alors

$$\underset{x \in \varphi(K)}{sup} (\mid s_U^i(x) \mid) = 0$$

et $s_U^i \equiv 0$ sur K . Par suite, il en résulte que s est la section nulle. □

Nous allons désormais montrer que $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ est métrisable, c'est à dire que la topologie de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes.
Dans un premier temps, nous allons montrer que nous pouvons nous contenter de prendre des semi-normes $p_{U,K,i,\alpha}$ pour des domaines U appartenant à un même atlas.

Proposition B.2 *Soit $\{(U_\xi, \varphi_\xi), \ \xi \in \Lambda \ \}$ un atlas de M constitué de cartes trivialisantes. Si $\mathcal{T}$ désigne la topologie de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ précédemment définie et $\mathcal{T}_\Lambda$ celle engendrée sur $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ par la famille de semi-normes $p_{U_\xi,K,i,\alpha}$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\Lambda$.*

Démonstration. Nous avons évidemment $\mathcal{T}_\Lambda \subseteq \mathcal{T}$; il suffit donc de montrer que $\mathcal{T}_\Lambda$ est plus fine que $\mathcal{T}$ ou encore qu'une base de voisinages de 0 dans $\mathcal{T}$ est contenue dans une base de voisinages de 0 dans $\mathcal{T}_\Lambda$.
Prenons (U, φ) une carte trivialisante, $K \subseteq U$ un compact, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, $i \in \{1, ..., r\}$ et $\varepsilon > 0$. Nous pouvons nous contenter de montrer que

$$\{s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E) \mid p_{U,K,i,\alpha}(s) < \varepsilon\}$$

est un voisinage de 0 dans $(\Gamma_{C^\infty}(M, E), \mathcal{T}_\Lambda)$.
Pour $k \in K$, il existe $\xi \in \Lambda$ tel que $k \in U_\xi$. Notons $\mathcal{V}_{k,\xi}$ un certain ouvert de $U \cap U_\xi$ contenant k et tel que $\overline{\mathcal{V}}_{k,\xi} \subseteq U \cap U_\xi$. Puisque $K \subseteq \underset{k\in K}{\cup} \mathcal{V}_{k,\xi}$, on a $K \subseteq \overset{A}{\underset{a=1}{\cup}} \mathcal{V}_{k_a,\xi_a}$ pour certains $k_a \in K$ et $\xi_a \in \Lambda$. Ainsi :

(1) $K \subseteq \overset{A}{\underset{a=1}{\cup}} \mathcal{V}_{k_a,\xi_a}$ avec $\overline{\mathcal{V}}_{k_a,\xi_a}$ compact puisque M est compact ;

(2) $\overline{\mathcal{V}}_{k_a,\xi_a} \subseteq U \cap U_{\xi_a}$.
Le reste de la démonstration va consister à montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\bigcap \{s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E) \mid p_{U_{\xi_a}, \overline{\mathcal{V}}_{k_a\xi_a}, j, \beta}(s) < \eta\} \\ \subseteq \{s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E) \mid p_{U,K,i,\alpha}(s) < \varepsilon\} , \quad (\heartsuit)$$

l'intersection étant prise pour $a \in \{1, ...A\}$, $j \in \{1, ..., r\}$, $\beta \in \mathbb{N}^n$ avec $\beta \leq \alpha$ (observons d'ores et déjà que l'intersection porte sur une famille finie d'indices).
Pour ce faire, nous devons "comparer" les "dérivées partielles" des sections dans des cartes trivialisantes différentes.
Prenons $\xi \in \Lambda$, $m \in U \cap U_\xi$ et $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$. Nous avons

$$s(m) = \Psi_U^{-1}(m, s_U(\varphi(m))) = \Psi_{U_\xi}^{-1}(m, s_{U_\xi}(\varphi_\xi(m))) ,$$

d'où

$$(m, s_U(\varphi(m))) = (\Psi_U \circ \Psi_{U_\xi}^{-1})(m, s_{U_\xi}(\varphi_\xi(m))) .$$

Notons $g_{UU_\xi} : U \cap U_\xi \to GL(r, \mathbb{R})$ l'application définie pour $(m, v) \in U \cap U_\xi \times \mathbb{R}^r$ par

$$(\Psi_U \circ \Psi_{U_\xi}^{-1})(m, v) = (m, g_{UU_\xi}(m)v) .$$

Nous avons donc

$$(m, s_U(\varphi(m))) = (m, g_{UU_\xi}(m)s_{U_\xi}(\varphi_\xi(m)))$$

et

$$s_U(\varphi(m)) = g_{UU_\xi}(m)s_{U_\xi}(\varphi_\xi(m)) .$$

Ainsi, pour $x \in \varphi(U \cap U_\xi)$, on a :

$$s_U(x) = g_{UU_\xi}(\varphi^{-1}(x))s_{U_\xi}((\varphi_\xi \circ \varphi^{-1})(x)) .$$

En particulier, avec des notations évidentes,

$$s_U^i(x) = \sum_{k=1}^{r} g_{UU_\xi}^{ik}(\varphi^{-1}(x))s_{U_\xi}^k((\varphi_\xi \circ \varphi^{-1})(x))$$

pour $i \in \{1, ..., r\}$.
Puisque nous devons calculer les dérivées partielles de l'expression ci-dessus, il est bon de se rappeler de deux choses :

$(*)$ Si $f, g \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors pour $\omega \in \mathbb{N}^n$,

$$D^{\omega}(fg) = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ \alpha+\beta=\omega}} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha}(f) D^{\beta}(g)$$

où les $C_{\alpha,\beta}$ sont des entiers naturels non nuls et $D^{\omega} = \dfrac{\partial^{|\omega|}}{\partial x_1^{\omega_1} \cdots \partial x_n^{\omega_n}}$.

$(**)$ Si $f \in C^{\infty}(U, \mathbb{R})$ et $g \in C^{\infty}(V, U)$ pour U et V des ouverts de $\mathbb{R}^n$, alors pour $\omega \in \mathbb{N}^n$ et $x \in V$, il existe des fonctions $h^{\alpha} \in C^{\infty}(V, \mathbb{R})$ telles que

$$D^{\omega}(f \circ g)(x) = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ \alpha\leq\omega}} (D^{\alpha} f)(g(x)) h^{\alpha}(x) \,.$$

A l'aide de $(*)$ et $(**)$, on en déduit, pour $\omega \in \mathbb{N}^n$ et $i \in \{1, ...r\}$, que

$$\begin{aligned}
& D^{\omega}\big(s_U^i\big)(x) \\
= & \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ \alpha+\beta=\omega}} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha}(g_{UU_\xi}^{ik} \circ \varphi^{-1})(x) D^{\beta}(s_{U_\xi}^k \circ \varphi_\xi \circ \varphi^{-1})(x) \\
= & \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n \\ \alpha+\beta=\omega}} \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ \gamma\leq\beta}} C_{\alpha,\beta} D^{\alpha}(g_{UU_\xi}^{ik} \circ \varphi^{-1})(x) D^{\gamma}(s_{U_\xi}^k)((\varphi_\xi \circ \varphi^{-1})(x)) h^{\gamma}(x) \,.
\end{aligned}$$

Revenons maintenant à $\omega = \alpha$, α comme dans $(\heartsuit)$. Il en résulte que pour x appartenant au compact $\varphi(\overline{\mathcal{V}}_{k_a,\xi_a})$, il existe une constante $C = C(a, \alpha) > 0$ telle que

$$|D^{\alpha}\big(s_U^i\big)(x)| \leq C \sum_{k=1}^{r} \sum_{\substack{\gamma\in\mathbb{N}^n \\ \gamma\leq\beta}} |D^{\gamma}(s_{U_{\xi_a}}^k)((\varphi_{\xi_a} \circ \varphi^{-1})(x))| \,.$$

Il devient alors évident que pour $\varepsilon > 0$, les sections suffisamment proches de 0 dans $(\Gamma_{C^\infty}(M, E),\ \mathcal{T}_\Lambda)$ vérifient $|\ D^{\omega} s_U^i(x)\ | \leq \varepsilon$ pour $x \in \varphi(\overline{\mathcal{V}}_{k_a\xi_a})$. Or les $\overline{\mathcal{V}}_{k_a\xi_a}$ recouvrent K et sont en nombre fini, si s est une section de E suffisamment proche de 0 dans $(\Gamma_{C^\infty}(M, E),\ \mathcal{T}_\Lambda)$, on a donc que

$$s \in \{\sigma \in \Gamma_{C^\infty}(M, E) \ \mid\ p_{U,K,i,\alpha}(\sigma) < \varepsilon\},$$

c'est à dire, on peut trouver $\eta > 0$ tel que l'inclusion $(\heartsuit)$ soit vraie. $\square$

Désormais, nous allons montrer que nous pouvons diminuer le nombre de compacts considérés sans changer $\mathcal{T}$.

Proposition B.3 *Si $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est la topologie sur $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ engendrée par les semi-normes $p_{U,K,i,\alpha}$ où les K sont de la forme $\varphi^{-1}(\overline{B}(q, \frac{1}{p}))$ avec $q \in \mathbb{Q}^n \cap \varphi(U)$ et $p \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $\overline{B}(q, \frac{1}{p}) \subseteq \varphi(U)$, alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{T}_{\mathbb{Q}}$ est plus fine que $\mathcal{T}$. Prenons $\varepsilon > 0$. Nous allons montrer que l'ensemble $\{s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E) \mid p_{U,K,i,\alpha}(s) < \varepsilon\}$ est un voisinage de 0 dans $(\Gamma_{C^\infty}(M,E),\ \mathcal{T}_{\mathbb{Q}})$.
Nous pouvons trouver $q_a \in \varphi(U) \cap \mathbb{Q}^n$ et $p_a \in \mathbb{N}^*$, $a = 1, ..., A$ vérifiant

$$K \subseteq \varphi^{-1}(\bigcup_{a=1}^{A} \overline{B}(q_a, \frac{1}{p_a})) .$$

On en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \quad &:= \quad \bigcap_{a=1}^{A} \{s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E) \mid p_{U,\varphi^{-1}(\overline{B}(q_a,\frac{1}{p_a})),i,\alpha}(s) < \varepsilon\} \\ &\subseteq \quad \{s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E) \mid p_{U,K,i,\alpha}(s) < \varepsilon\} . \end{aligned}$$

Or $\mathcal{O}$ étant un voisinage de 0 dans $(\Gamma_{C^\infty}(M,E),\ \mathcal{T}_{\mathbb{Q}})$, la proposition est donc démontrée. □

En observant aussi qu'il existe un atlas fini, on obtient comme corollaire des Propositions B.2 et B.3, que la topologie $\mathcal{T}$ est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes et donc $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ est un espace métrique. Il reste à montrer que cet espace est complet.

Lemme B.4 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, K un compact de U d'intérieur non vide et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $C^\infty(U,\mathbb{R})$ telle que f_k et $D^\alpha f_k$ convergent respectivement uniformément vers $f \in C^0(K,\mathbb{R})$ et $f^\alpha \in C^0(K,\mathbb{R})$ sur K pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On a alors $f\big|_{\overset{\circ}{K}} \in C^\infty(\overset{\circ}{K},\mathbb{R})$ et $D^\alpha f = f^\alpha$ sur $\overset{\circ}{K}$.*

Démonstration. Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de la forme $(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, notons pour $i \in \{1, ..., n\}$, $g_i := f^\alpha$. Prenons $x \in \overset{\circ}{K}$, $v \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^*$ suffisamment petit (de sorte que $x + tv \in \overset{\circ}{K}$). On a :

$$\begin{aligned} \frac{f_k(x+tv) - f_k(x)}{t} &= \int_0^1 (df_k)(x+stv)v ds \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x+stv)v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1 \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x+stv)v_i ds . \end{aligned}$$

Or,

- $\dfrac{f_k(x+tv) - f_n(x)}{t} \to \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t}$ quand $k \to \infty$;
- la suite de fonction $[0,1] \to \mathbb{R}$, $s \mapsto \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x+stv)$ converge uniformément vers la fonction $s \to g_i(x+stv)$. On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x+stv)ds \to \int_0^1 g_i(x+stv)ds \quad \textit{quand } k \to \infty .$$

Donc
$$\frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = \sum_{i=1}^{n} v_i \int_0^1 g_i(x+stv)ds\ .$$
Le deuxième membre de l'expression ci-dessus est continue par rapport à t et vaut $\sum_{i=1}^{n} v_i g_i(x)$ en $t=0$. On en déduit que f est différentiable avec
$$df(x)v = \sum_{i=1}^{n} v_i g_i(x)$$
et puisque les applications g_i sont continues, $f \in C^1(\overset{\circ}{K}, \mathbb{R})$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$. En appliquant de nouveau ce raisonnement, on montre que toutes les dérivées partielles de f existent sur $\overset{\circ}{K}$, sont continues et que $D^\alpha f = g_\alpha$. □

Lemme B.5 *L'espace métrique* $(\Gamma_{C^\infty}(M,E), \mathcal{T})$ *est complet.*

Démonstration. Notons
$$d\ :\ \begin{cases} \Gamma_{C^\infty}(M,E) \times \Gamma_{C^\infty}(M,E) \to \mathbb{R}_+\ ; \\ (s', s'') \mapsto \displaystyle\sum_{i \geq 1} \frac{1}{2^i} \frac{p_i(s'-s'')}{1+p_i(s'-s'')} \end{cases}$$
où $(p_i)_{i \geq 1}$ est une famille dénombrable de semi-normes engendrant la topologie $\mathcal{T}$. L'application d est une distance sur $\Gamma_{C^\infty}(M,E), \mathcal{T})$.
Prenons alors $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$. Pour $i \geq 1$, on a
$$\frac{1}{2^i} \frac{p_i(s_p - s_q)}{1+p_i(s_p - s_q)} \leq d(s_p, s_q) \to 0 \ \ quand\ \ p,q \to \infty\ .$$
Donc $\frac{1}{2^i} \frac{p_i(s_p-s_q)}{1+p_i(s_p-s_q)} \to 0$ ce qui implique que $p_i(s_p - s_q) \to 0$ quand $p,q \to \infty$.
Remarquons que l'on peut supposer p_i quelconque, ce qui veut dire que pour une carte trivialisante (U, φ), un compacte $K \subseteq U$ d'intérieur non nul, $i \in \{1, ..., r\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on a
$$(*)\quad \underset{x \in \varphi(K)}{sup} \{|D^\alpha (s_p)^i_U(x) - D^\alpha (s_q)^i_U(x)|\} \to 0 \ \ quand\ \ p,q \to \infty\ .$$
Prenons un atlas $\{(U_\xi, \varphi_\xi), \xi \in \Lambda\}$ constitué de cartes trivialisantes et un famille d'ouverts $(V_\xi)_{\xi \in \Lambda}$ vérifiant pour tout $\xi \in \Lambda$:
$$\overline{V}_\xi \subseteq U_\xi \ \ et \ \ \bigcup_{\xi \in \Lambda} V_\xi = M\ .$$
D'après $(*)$, $D^\alpha (s_k)^i_{U_\xi})\Big|_{\varphi_\xi(\overline{V}_\xi)}$ est une suite de Cauchy de l'espace de Banach $C^0(\varphi_\xi(\overline{V}_\xi), \mathbb{R})$. Ainsi $(s_k)^i_{U_\xi}$ converge uniformément vers une application $s^i_\xi \in C^0(\varphi_\xi(\overline{V}_\xi), \mathbb{R})$ qui est C^∞ sur $\varphi_\xi(V_\xi)$ d'après le Lemme précédent. On peut ainsi construire une section $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ définie localement sur $\varphi_\xi(V_\xi)$ par

$(s_\xi^1, ..., s_\xi^r)$. Pour que s soit bien définie globalement, s doit vérifier pour tout $\xi, \eta \in \Lambda$

$$s_\xi(\varphi_\xi(m)) = g_{\xi\eta} s_\eta(\psi(m))$$

où $g_{\xi\eta} : V_\xi \cap V_\eta \to GL(r, \mathbb{R})$ est l'application naturelle associée au changement de trivialisation. Or :

$$\begin{aligned} s_\xi(\varphi_\xi(m)) &= \lim_{k\to\infty} \left((s_k)_{V_\xi}\right)(\varphi_\xi(m)) \\ &= \lim_{k\to\infty} g_{\xi\eta}(m)(s_k)_\eta(\psi(m)) \\ &= g_{\xi\eta}(s_\eta)(\psi(m)) . \end{aligned}$$

Donc $s_k \to s$ dans $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$. □

Résumons-nous.

Théorème B.6 *La topologie $\mathcal{T}$ fait de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ un espace de Fréchet.*

B.1.2 Les courbes lisses de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$

Rappellons que pour un espace de Fréchet F, une courbe $c : I \to F$ (I étant un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) est différentiable si pour tout $t \in \mathbb{R}$, le quotient suivant

$$\frac{c(t+h) - c(t)}{t}$$

converge vers un certain $c'(t) \in F$ quand $h \to 0$ ce qui permet dans ce cas de définir une nouvelle courbe c' . Par définition, une courbe c est lisse si elle est infiniment différentiable, c'est à dire si les courbes c',$(c')'$,$((c')')'$, ... existent. Le but de cette partie est de décrire les courbes lisses de $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$.

Lemme B.7 *Si U est un ouvert de $\mathbb{R}^m$, alors l'application*

$$ev_U^r : C^\infty(U, \mathbb{R}^r) \times U \to \mathbb{R}^r, \ (f, x) \mapsto f(x),$$

est une application lisse où $C^\infty(U, \mathbb{R}^r)$ est muni de sa topologie naturelle d'espace de Fréchet.

Démonstration. Montrons que ev_U^r est continue. Prenons (f_n, x_n) une suite de l'espace métrique $C^\infty(U, \mathbb{R}^r) \times U$ convergent vers $(f, x) \in C^\infty(U, \mathbb{R}^r) \times U$. Nous pouvons supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x_n \in \overline{B}(x, \varepsilon)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} |f_n(x_n) - f(x)| &\leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \sup_{y \in \overline{B}(x,\varepsilon)} |f_n(y) - f(y)| + |f(x_n) - f(x)| . \end{aligned}$$

Le premier terme de cette dernière expression tend vers 0 puisque la suite f_n converge uniformément vers f sur le compact $\overline{B}(x, \varepsilon)$ et le deuxième aussi par continuité de f . Ainsi $f_n(x_n) = ev_U^r(f_n, x_n) \to f(x)$ quand $n \to \infty$ et ev_U^r est continue. Montrons que ev_U^r est C^1 au sens de Hamilton. Prenons $(f, x) \in$

$C^\infty(U,\mathbb{R}^r)\times U$, $(g,h)\in C^\infty(U,\mathbb{R}^r)\times\mathbb{R}^m$ et $t\in\mathbb{R}$ suffisamment petit pour que $(f,x)+t(g,v)\in U$. On a

$$\begin{aligned}\frac{ev_U^r((f,x)+t(g,v))-ev_U^r(f,x)}{t} &= \frac{ev_U^r(f+tg,x+tv)-f(x)}{t}\\ &= \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}+g(x+tv)\\ &\to (df)(x)v+g(x)\ \ \textit{quand}\ t\to 0\ .\end{aligned}$$

Ainsi ev_U^r est différentiable et

$$(ev_U^r)_{*_{(f,x)}}(g,v)=(df)(x)v+g(x)=ev^r_{U\times\mathbb{R}^m}(df,(x,v))+ev_U^r(g,x)\ .$$

Or, $d\ :\ C^\infty(U,\mathbb{R}^r)\to C^\infty(U\times\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^r)$ est une application linéaire continue, donc lisse. Il en résulte que la différentielles de ev_U^r est continue, et donc ev_U^r est de classe C^1 au sens de Hamilton.
En "réinjectant" cette régularité dans la différentielle de ev_U^r, on constate que ev_U^r est de classe C^2 au sens de Hamilton et en poursuivant le raisonnement, on prouve le lemme. □

Lemme B.8 *L'application*

$$ev\ :\ \Gamma_{C^\infty}(M,E)\times M\to E,\ \ (s,x)\mapsto s(x)\ ,$$

est une application lisse.

Démonstration. Montrons la continuité de ev . Prenons une suite (s_n,x_n) de l'espace métrique $\Gamma_{C^\infty}(M,E)\times M$ convergent vers $(s,x)\in\Gamma_{C^\infty}(M,E)\times M$. Nous pouvons supposer qu'il existe une carte trivialisante (U,φ) dont la trivialisation associée est $\Psi_U\ :\ \pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^r$ telle que x_n appartienne à U pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a alors

$$ev(s_n,x_n)=\Psi_U^{-1}(x_n,(s_n)_U(\varphi(x_n)))=\Psi_U^{-1}(x_n,ev^r_{\varphi(U)}((s_n)_U,\varphi(x_n))\ .$$

Or, la convergence de s_n vers s dans $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ implique que la suite de fonction $(s_n)_U$ converge vers s_U dans $C^\infty(\varphi(U),\mathbb{R}^r)$. On en déduit par la continuité de l'application $ev^r_{\varphi(U)}$, que $ev(s_n,x_n)\to ev(s,x)$ quand $n\to\infty$, et ev est donc continue.
Regardons la régularité de ev . Puisque c'est une propriété locale, nous pouvons nous contenter de regarder le régularité de l'application

$$\Phi\ :\ \left\{\begin{array}{c}\Gamma_{C^\infty}(M,E)\times\varphi(U)\to\mathbb{R}^r\ ,\\ (s,x)\mapsto s_U(x)\ .\end{array}\right.$$

Prenons alors $(s,x)\in\Gamma_{C^\infty}(M,E)\times\varphi(U)$, $(\sigma,v)\in\Gamma_{C^\infty}(M,E)\times\mathbb{R}^m$, et $t\in\mathbb{R}$ suffisamment petit de sorte que $(s,x)+t(\sigma,v)$ appartienne à $\Gamma_{C^\infty}(M,E)\times\varphi(U)$.
De la même manière que pour le lemme précédent, nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{\Phi((s,x)+t(\sigma,v))-\Phi(s,x)}{t} &= \frac{s_U(x+tv)-s_U(x)}{t}+\sigma_U(x+tv)\\ &\to (s_U)_{*_x}v+\sigma_U(x)\ \ \textit{quand}\ t\to 0\ .\end{aligned}$$

Donc Φ est différentiable avec

$$\begin{aligned}\Phi_{*_{(s,x)}}(\sigma,v) &= (s_U)_{*_x}v+\sigma_U(x)\\ &= ev^r_{\varphi(U)\times\mathbb{R}^m}\big((d\circ\rho_U)(s),(x,v)\big)+ev^r_{\varphi(U)}\big(\rho_U(\sigma),x\big)\end{aligned}$$

où $\rho_U \ : \ \Gamma_{C^\infty}(M,E) \to C^\infty(\varphi(U),\mathbb{R}^r),\ s \mapsto s_U$. C'est évidemment une application linéaire continue, donc lisse. Puisque l'operateur d est aussi lisse, on en déduit par le lemme précédent que $d\Phi$ est une application lisse, et donc Φ est lisse. $\square$

Avec ces deux lemmes, nous pouvons obtenir des informations sur les courbes lisses de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$.

Proposition B.9 *Si $c \ : \ I \to \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ est une courbe lisse, alors l'application*

$$c^\vee \ : I \times M \to E,\ (t,m) \to c(t)(m)$$

est lisse.

Démonstration. Posons $j_c \ : \ I \times M \to \Gamma_{C^\infty}(M,E) \times M,\ \ (t,m) \mapsto (c(t),m)$. Il s'agit évidemment d'une application lisse puisque c l'est. Il s'ensuit que $c^\vee = ev \circ j_c$ est lisse comme composée d'applications lisses. $\square$

Prenons à présent une application $f \in C^\infty(I \times M,E)$ vérifiant $f(t,m) \in E_m$ pour tout $t \in I$ et pour tout $m \in M$. Notons $f^\wedge \ : \ I \to \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ l'application définie par $f^\wedge(t)(m) = f(t,m)$.
Nous allons voir par la suite que $f^\wedge$ est une courbe lisse de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$.

Lemme B.10 *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $K \subseteq U$ un compact, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $t \in I$ et $g \in C^\infty(I \times U,\mathbb{R})$. On a l'égalité suivante :*

$$\lim_{h\to 0}\ \sup_{x\in K}\Big(\frac{g(t+h,x)-g(t,x)}{h} - \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\Big) = 0\,.$$

Démonstration. Nous pouvons prendre h appartenant au compact $[-\varepsilon,\varepsilon]$ pour un certain $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{g(t+h,x)-g(t,x)}{h} - \frac{\partial g}{\partial t}(t,x) \quad &= \quad \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial t}(t+sh,x)ds - \frac{\partial g}{\partial t}(t,x) \\ &= \quad \int_0^1 \Big\{\frac{\partial g}{\partial t}(t+sh,x) - \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\Big\}ds \\ &=: \quad \Lambda(h,x)\end{aligned}$$

est une fonction continue sur le compact $[-\varepsilon,\varepsilon] \times K$, Λ est donc aussi uniformément continue. Ainsi, pour $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que sur $[-\varepsilon,\varepsilon] \times K$ on ait

$$|h-h'| + ||x-x'|| < \delta \ \Rightarrow \ |\Lambda(h,x) - \Lambda(h',x')| < \eta\,.$$

Dès lors, pour $h \in [-\varepsilon,\varepsilon] \cap [-\delta,\delta]$ et $x \in K$ on a

$$|\Lambda(h,x) - \underbrace{\Lambda(0,x)}_{=0}| < \eta \ \text{ d'où } \ |\Lambda(h,x)| \leq \eta\,.$$

On en conclut que $\sup_{x\in K} |\Lambda(h,x)| \leq \eta$. $\square$

Proposition B.11 *L'application $f^\wedge : I \to \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ est une courbe lisse de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$. De plus,*

$$(f^\wedge)' = \Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)^\wedge .$$

Démonstration. Prenons $t \in I$ et montrons dans un premier temps que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^\wedge(t+h) - f^\wedge(t)}{h} = \Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)^\wedge(t)$$

dans $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$.

Soient (U,φ) une carte trivialisante, $K \subseteq U$ un compact, $i \in \{1,...,r\}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice. Toujours avec les notations précédentes, nous devons montrer que

$$q(h) := \sup_{x\in\varphi(K)} \left| D^\alpha\left(\frac{\big(f^\wedge(t+h)\big)_U^i - \big(f^\wedge(t)\big)_U^i}{h} - \left(\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)^\wedge(t)\right)_U^i \right)(x) \right| \to 0$$

quand $h \to 0$. Rappellons que si $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$, alors $s_U^i : \varphi(U) \to \mathbb{R}$; $x \mapsto (pr_2^{U,i} \circ \Psi_U \circ s \circ \varphi^{-1})(x)$ où $\Psi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ est la trivialisation associée à la carte (U,φ) et $pr_2^{U,i} = pr_i \circ pr_2^U : U \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ la projection sur la i-ième composante de $\mathbb{R}^r$.

Notons

$$\Phi(t,x) := (pr_2^{U,i} \circ \Psi_U \circ f)(t, \varphi^{-1}(x))$$

pour $(t,x) \in I \times \varphi(U)$.

L'application Φ est lisse puisque f l'est et $\Phi(t,x) = \big(f^\wedge(t)\big)_U^i(x)$ pour $(t,x) \in I \times \varphi(U)$.

Remarquons que :

- $D^\alpha\Big(\big(f^\wedge(t+h)\big)_U^i\Big)(x) = D^\alpha(\Phi)(t+h,x)$,
- $D^\alpha\Big(\big(f^\wedge(t)\big)_U^i\Big)(x) = D^\alpha(\Phi)(t,x)$,
- $D^\alpha\left(\left(\Big(\frac{\partial f}{\partial t}\Big)^\wedge(t)\right)_U^i\right)(x) = \frac{\partial}{\partial t} D^\alpha(\Phi)(t,x)$.

Si on note $\Omega(t,x) = D^\alpha(\Phi)(t,x)$, alors on obtient :

$$q(h) = \sup_{x\in\varphi(K)} \left| \frac{\Omega(t+h,x) - \Omega(t,x)}{h} - \frac{\partial}{\partial t}\Omega(t,x) \right| .$$

Cette quantité tend vers zero en vertu du lemme précédent. La proposition est donc démontrée. □

Remarque. Les Propositions B.9 et B.11 nous permettent donc de considérer une courbe lisse de $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ comme une application $f \in C^\infty(I \times M, E)$ vérifiant $f(t,m) \in E_m$ pour tout $(t,m) \in (I,M)$ (voir aussi [KM97], Lemma 30.8, page 299).

B.2 L'espace $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ en tant qu'espace modéré

B.2.1 Les espaces modérés

Rappelons que la topologie d'un espace de Fréchet est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes. Par la suite, nous allons affiner cette structure afin de ne considérer qu'un certain type d'espace de Fréchet dans lequel un théorème d'inversion est disponible (Théorème de Nash-Moser).

Définition B.12

(i) Une graduation sur un espace de Fréchet F est la donnée d'une famille croissante de semi-normes $\{ \| \, \|_n \mid n \in J \}$ où $J \subseteq \mathbb{N}$, définissant la topologie. Un espace de Fréchet gradué est la donnée d'un espace de Fréchet muni d'une graduation.

(ii) Une application linéaire $L : F \to G$ entre deux espaces de Fréchet gradués F et G est dite modérée de base b et de degré r si pour tout $f \in F$ et tout $n \geq b$ on a :

$$\|L(f)\|_n \leq C\|f\|_{n+r},$$

où C est une constante pouvant dépendre de n.

(iii) Si $(B, \|\,\|_B)$ est un espace de Banach, on note $\sum(B)$ l'espace de Fréchet gradué constitué des suites $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de B telles que pour tout $n \geq 0$,

$$\|(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_n := \sum_{k=0}^{\infty} e^{nk}\|f_k\|_B < \infty \, .$$

(iv) Un espace de Fréchet gradué F est dit modéré si il existe un espace de Banach B et deux applications linéaires modérées $i : F \to \sum(B)$ et $p : \sum(B) \to F$ telles que $p \circ i : F \to F$ est l'identité.

(v) Deux graduations $\{\| \, \|_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ et $\{\| \, \|'_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ d'un espace de Fréchet F sont dites modérément équivalentes de degré r et de base b si

$$\|f\|_n \leq C\,\|f\|'_{n+r} \quad et \quad \|f\|'_n \leq C\,\|f\|_{n+r}$$

pour tout $f \in F$ et pour tout $n \geq b$ (la constante C pouvant dépendre de n).

Vérifions que l'espace $\Sigma(B)$ défini précédemment est bien un espace de Fréchet.

Lemme B.13 *Si $(B, \| \, \|_B)$ est un espace de Banach, alors l'espace métrique $\Sigma(B)$ est complet.*

Démonstration. Notons $\Sigma^1(B)$ l'espace des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B telles que $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_0 = \sum_{k\in B} \|u_n\|_B < \infty$ muni de la norme $\| \, \|_0$. Il est clair que

$(\Sigma^1(B), \| \ \|_0)$ est banachique et que $\Sigma(B)$ est inclu dans $\Sigma^1(B)$. Prenons alors une suite de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Sigma(B)$. Nous avons pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|f_p - f_q\|_n &= \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{nk} \|(f_p)_k - (f_q)_k\|_B \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \|e^{nk}(f_p)_k - e^{nk}(f_q)_k\|_B \to 0 \quad \text{quand} \quad p, q \to \infty \ . \end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, notons $(g_l^n)_{l\in\mathbb{N}}$ la suite de $\Sigma^1(B)$ définie pour $l, k \in \mathbb{N}$ par :

$$(g_l^n)_k := e^{nk}(f_l)_k$$

(remarquons que pour $l \in \mathbb{N}$, g_l^n appartient bien à $\Sigma^1(B)$ puisque $\|g_l^n\|_0 = \|f_l\|_n$ qui est fini étant donné que $f_l \in \Sigma(B)$). La limite précédente nous dit alors que la suite $(g_l^n)_{l\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\Sigma^1(B)$. Il existe donc $g^n \in \Sigma^1(B)$ telle que $g_l^n \to g^n$ quand $l \to \infty$ dans $\Sigma^1(B)$ où g^n peut s'écrire pour $k \in \mathbb{N}$ par :

$$(g^n)_k = e^{nk}(h^n)_k \ .$$

Puisque g^n appartient à $\Sigma^1(B)$, la suite h^n vérifie $\|h^n\|_n < \infty$ ce qui implique en particulier que $h^n \in \Sigma^1(B)$. Pour $n, m, l \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \|h^n - h^m\|_0 &\leq \|h^n - f_l\|_0 + \|f_l - h^m\|_0 \\ &\leq \|h^n - f_l\|_n + \|f_l - h^m\|_m \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{nk} \|(h^n)_k - (f_l)_k\|_B + \sum_{k\in\mathbb{N}} e^{mk} \|(f_l)_k - (h^m)_k\|_B \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \|(g^n)_k - (g_l)_k\|_B + \sum_{k\in\mathbb{N}} \|(g_l)_k - (g^m)_k\|_B \\ &= \|g^n - g_l^n\|_0 + \|g_l^m - g^m\|_0 \to 0 \quad \text{quand} \quad l \to \infty \end{aligned}$$

puisque $g_l^n \to g^n$ dans $\Sigma^1(B)$ quand $l \to \infty$. Nous pouvons donc définir $h \in \Sigma^1(B)$ par $h := h^n$, $n \in \mathbb{N}$ et constater que h appartient en fait à $\Sigma(B)$ et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers h dans $\Sigma(B)$. □

Remarque B.14 *1. C'est dans la catégorie des espaces fréchétiques modérés que s'applique le Théorème d'inversion de Nash-Moser (théorème que nous énoncerons par la suite). Comme nous allons l'utiliser, nous devons nous assurer que les espaces modèles des variétés considérées ultérieurement sont bien de ce type.*

2. Pour utiliser le Théorème de Nash-Moser, on peut travailler indifféremment avec des graduations modérément équivalentes (voir [Ham82]).

Donnons deux exemples d'espaces de Fréchet gradués.

Exemples.

1. Soient (M, μ) un espace topologique mesuré (pour la tribu borélienne) et w une fonction positive continue sur M. Notons $L_1^\infty(M, \mu, w)$ le sous espace de $L^1(M, \mu)$ constitué des fonctions intégrables $f : M \to \mathbb{C}$ vérifiant :

$$\|f\|_n = \int_M e^{nw}|f|\mu < \infty$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On montre que $L_1^\infty(M,\mu,w)$ est un espace de Fréchet de la même manière que pour $\Sigma(B)$ (il suffit dans la démonstration de remplaçer $\Sigma^1(B)$ par $L^1(M,\mu)$). Muni de la graduation $\{\, \|\ \|_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$, $L_1^\infty(M,\mu,w)$ est donc un espace de Fréchet gradué.

2. Soient M une variété compacte de dimension m et E un fibré vectoriel au-dessus de M de rang r. Sur l'espace $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ nous pouvons construire une graduation de la façon suivante. On se donne un atlas fini $\{(U_a,\varphi_a),\ a \in I\}$ constitué de cartes trivialisantes et une famille d'ouverts $\{V_a\}_{a\in I}$ telle que $\overline{V}_a \subseteq U_a$ pour tout $a \in I$ et $\cup_{a\in I} V_a = M$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$, on pose alors :

$$\begin{aligned} \|s\|_n &= \sum_{a\in I}\sum_{i=1}^{r}\sum_{|\alpha|\le n} p_{U_a,\overline{V}_a,i,\alpha}(s_{U_a}) \qquad (*) \\ &= \sum_{a\in I}\sum_{i=1}^{r}\sum_{|\alpha|\le n} \underset{x\in\varphi_a(\overline{V}_a)}{sup} |D^\alpha(s^i_{U_a})(x)| \end{aligned}$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^m$ est un multi-indice et $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_m}^{\alpha_m}}$.

La famille croissante de semi-normes ainsi définie engendre la même topologie que celle déjà considérée sur $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ puisque nous ne faisons qu'ajouter les semi-normes $p_{U_a,\overline{V}_a,i,\alpha}$. On définit ainsi une graduation sur $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$. Remarquons que dans $(*)$ nous pouvons remplacer les semi-normes $p_{U_a,V_a,i,\alpha}$ par les suivantes :

$$p_{U_a,\overline{V_a},n}(s) := \sum_{l=0}^{n} \underset{x\in\varphi_a(\overline{V}_a)}{sup} \|D^l(s_{U_a})(x)\|_{op}$$

pour $n \in \mathbb{N}$, $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ et où $\|D^l(s_{U_a})(x)\|_{op}$ désigne la norme d'opérateur de la différentielle d'ordre l de s_{U_a} en x. Les semi-normes obtenues, souvent notées $\|\ \|_{C^n}$ par la suite, forment une graduation sur $\Gamma_{C^\infty}(M,E)$ modérément équivalente à $\{\|\ \|_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ puisque pour $l \in \mathbb{N}$, $a \in I$, $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ et $x \in M$, $D^l(s_{U_a})(x)$ n'est autre qu'un polynome homogène dont les coefficiants sont constitués par les dérivées partielles de s_{U_a} en x que l'on estime sur le compact $\varphi_a(\overline{V}_a)$. Par la suite nous pourrons donc considérer l'une ou l'autre de ces deux graduations.

Lemme B.15 *L'espace $L_1^\infty(M,\mu,w)$ est un espace modéré.*

Démonstration. Notons $M_k := \{\, x \in M \,|\, k \le w(x) < k+1 \,\}$ et χ_k la fonction caractéristique de M_k. Posons alors $L\ :\ L_1^\infty(M,\mu,w) \to \sum(L^1(M,\mu))$, $f \mapsto (\chi_k f)_{k\in\mathbb{N}}$ et $M\ :\ \sum(L^1(M,\mu)) \to L_1^\infty(M,\mu,w)$, $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_k \chi_k f_k$. On a alors

$$\begin{aligned} \|L(f)\|_n &= \sum_k e^{nk}\int_M |\ \chi_k f\ |\ \mu = \sum_k e^{nk}\int_{M_k} |\ f\ |\ \mu \\ &= \sum_k \int_{M_k} e^{nk}\ |\ f\ |\ \mu \le \sum_k \int_{M_k} e^{nw}\ |\ f|\mu \\ &= \int_M e^{nw}\ |\ f\ |\ \mu = \|f\|_n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|M((f_k)_{k\in\mathbb{N}})\| &= \int_M e^{nw} \mid \sum_k \chi_k f_k \mid \mu \leq \sum_k \int_{M_k} e^{nw} \mid f_k \mid \mu \\
&\leq \sum_k \int_{M_k} e^{n(k+1)} |f_k| \mu = e^n \sum_k \int_{M_k} e^{nk} |f_k| \mu \\
&= e^n \sum_k e^{nk} \int_{M_k} |f_k| \mu \leq e^n \sum_k e^{nk} \int_M |f_k| \mu \\
&= e^n \sum_k e^{nk} \|f_k\|_{L^1(M,\mu)} = e^n \|(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_n
\end{aligned}$$

où $f \in L_1^\infty(M,\mu,w)$ et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \sum(L^1(M,\mu)$. Les applications L et M sont donc modérées et il est facile de voir que $M \circ L$ est l'application identique sur $L_1^\infty(M,\mu,w)$. □

Lemme B.16 *Si M est une variété compacte, alors l'espace $C^\infty(M,\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet modéré.*

Démonstration. On considère sur $C^\infty(M,\mathbb{R})$ la topologie naturellement induite par l'isomorphisme canonique $C^\infty(M,\mathbb{R}) \simeq \Gamma_{C^\infty}(M, M\times\mathbb{R})$.
Pour simplifier le problème, prenons $d \in \mathbb{N}$ tel que (M,j) soit une sous-variété plongée de $\mathbb{R}^d$ (ce qui est possible puisque M est compacte) où $j \in C^\infty(M,\mathbb{R}^d)$ est un plongement.
Remarquons que si P et Q sont deux variétés compactes difféomorphes, alors il existe un isomorphisme modéré entre les espaces $C^\infty(P,\mathbb{R})$ et $C^\infty(Q,\mathbb{R})$. En particulier $C^\infty(M,\mathbb{R})$ et $C^\infty(j(M),\mathbb{R})$ sont isomorphes en tant qu'espaces gradués et nous pouvons nous contenter d'étudier $j(M)$ que nous noterons aussi par M .
Considérons alors une boule fermée B de $\mathbb{R}^d$ suffisamment grande pour contenir M et notons $C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ l'espace de Fréchet gradué des fonctions lisses de $\mathbb{R}^d$ dont les dérivées partielles tendent vers zero à l'infini pour la graduation

$$\|f\|_n = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \| D^k f(x) \|_{op}$$

où $\| D^k f(x) \|_{op}$ désigne la norme d'opérateur de la k-ième différentielle de f en x . Notons aussi

$$C_0^\infty(B,\mathbb{R}) := \{ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \mid supp(f) \subseteq B \} .$$

L'espace $C_0^\infty(B,\mathbb{R})$ est un sous espace fermé de $C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ et donc est un espace de Fréchet gradué.
Nous pouvons construire un opérateur $\epsilon : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C_0^\infty(B,\mathbb{R})$ tel que pour $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $\epsilon(f)$ soit une extension de f. Pour ce faire, prenons $\mathcal{U} \xrightarrow{\pi} M$ un voisinage tubulaire de M dans B et $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ une fonction telle que $supp(\varphi) \subseteq \mathcal{U}$ et $\varphi \equiv 1$ sur un voisinage de M .
Posons alors pour $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$:

$$\epsilon(f)(x) = \begin{cases} (f\circ\pi)(x)\varphi(x) & \text{pour } x \in \mathcal{U}\,; \\ 0 & \text{pour } x \notin \mathcal{U}\,. \end{cases}$$

Montrons que $\epsilon : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C_0^\infty(B,\mathbb{R})$ est une application modérée. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\|\epsilon(f)\|_n = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in B} \| D^k\epsilon(f)(x) \|_{op} = \sum_{k=0}^{n} \sup_{x\in \mathcal{U}} \| D^k\Big((f\circ\pi)\varphi\Big)(x) \|_{op} .$$

Or il existe des constantes positives $C_{l,\sigma}$ telles que pour $x \in \mathcal{U}$ et $v_1, ..., v_k \in \mathbb{R}^d$ on ait :

$$\begin{aligned}&D^k\Big((f\circ\pi)\varphi\Big)(x)\{v_1,...,v_k\} = \\ &\qquad \sum_{l=0}^{k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} C_{l,\sigma} D^l(f\circ\pi)(x)\{v_{\sigma(1)},...,v_{\sigma(l)}\}D^{k-l}\varphi(x)\{v_{\sigma(l+1)},...,v_{\sigma(k)}\}\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\| D^k\Big((f\circ\pi)\varphi\Big)(x) \|_{op} &\leq \sum_{l=0}^{k}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_k} C_{l,\sigma}\| D^l(f\circ\pi)(x) \|_{op} \| D^{k-l}\varphi(x) \|_{op} \\ &\leq C\sum_{l=0}^{k} \| D^l(f\circ\pi)(x) \|_{op} \| D^{k-l}\varphi(x) \|_{op} .\end{aligned}$$

Par convention, nous utiliserons toujours la même lettre C pour désigner les constantes de majoration.
Puisque φ est à support compact, il existe $C > 0$ telle que

$$\| D^i\varphi(x) \|_{op} < C \quad \forall i \in \{1,...,n\} .$$

Ainsi, pour $x \in \mathcal{U}$,

$$\| D^k\Big((f\circ\pi)\varphi\Big)(x) \|_{op} \leq C\sum_{l=0}^{k} \| D^l(f\circ\pi)(x) \|_{op} . \quad (*)$$

Pour faire apparaitre des semi-normes de l'espace $C^\infty(M,\mathbb{R})$, prenons un atlas $\{(U_i,\varphi_i), i = 1,...,r\}$ de M et des compacts $K_i \subseteq U_i$ tels que $\bigcup_{i=1}^r K_i = M$. Pour $x \in \pi^{-1}(K_s)$ et grâce à la formule de différentiation des fonctions composées, on peut trouver des constantes $C_{i,j_1\cdots j_i}$ telles que pour $x \in \mathcal{U}$ et $v_1,...,v_l \in \mathbb{R}^d$ on ait :

$$\begin{aligned}&D^l(f\circ\pi)(x)\{v_1,...,v_l\} \\ =\;& D^l\Big((f\circ\varphi_s^{-1})\circ(\varphi_s\circ\pi)\Big)(x)\{v_1,...,v_l\} \\ =\;& \sum_{i=1}^{l}\sum_{j_1+\cdots+j_i=l} C_{i,j_1\cdots j_i} D^i(f\circ\varphi_s^{-1})(\varphi_s(\pi(x))) \\ &\Big\{D^{j_1}(\varphi_s\circ\pi)(x)\{v_1,...,v_{j_1}\},...,D^{j_i}(\varphi_s\circ\pi)(x)\{v_{l-j_i},...v_l\}\Big\} .\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\| D^l(f\circ\pi)(x) \|_{op} \\ \leq\;& C\sum_{i=1}^{l}\sum_{j_1+\cdots+j_i=l} \| D^i(f\circ\varphi_s^{-1})(\varphi_s(\pi(x))) \|_{op}\| D^{j_1}(\varphi_s\circ\pi)(x) \|_{op} \\ &\quad\cdots \| D^{j_i}(\varphi_s\circ\pi)(x) \|_{op} .\end{aligned}$$

A nouveau, on peut trouver $C > 0$ telle que $\| D^{j_k}(\varphi_s \circ \pi)(x) \|_{op} \leq C$ pour tout j_k et tout $x \in \pi^{-1}(K_s)$. D'où

$$\begin{aligned}
\| D^l(f \circ \pi)(x) \|_{op} &\leq C \sum_{i=1}^{l} \sum_{j_1+\cdots+j_i=l} \| D^i(f \circ \varphi_s^{-1})(\varphi_s(\pi(x))) \|_{op} \\
&\leq C \sum_{i=1}^{l} \| D^i(f \circ \varphi_s^{-1})(\varphi_s(\pi(x))) \|_{op} \, .
\end{aligned}$$

Si l'on revient à $(*)$, on obtient pour $x \in \pi^{-1}(K_s)$:

$$\begin{aligned}
\| D^k\Big((f \circ \pi)\varphi\Big)(x) \|_{op} &\leq C \sum_{l=0}^{k} \| D^l(f \circ \pi)(x) \|_{op} \\
&\leq C \sum_{l=0}^{k} \sum_{i=1}^{l} \| D^i(f \circ \varphi_s^{-1})(\varphi_s(\pi(x))) \|_{op} \, .
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\| \epsilon(f) \|_n &= \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in \mathcal{U}} \| D^k\Big((f \circ \pi)\varphi\Big)(x) \|_{op} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{a=1}^{r} \sup_{x \in \pi^{-1}(K_a)} \| D^k\Big((f \circ \pi)\varphi\Big)(x) \|_{op} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{a=1}^{r} \sup_{x \in \pi^{-1}(K_a)} C \sum_{l=0}^{k} \sum_{i=1}^{l} \| D^i(f \circ \varphi_a^{-1})(\varphi_a(\pi(x))) \|_{op} \\
&\leq C \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\sum_{i=1}^{l} \sum_{a=1}^{r} \sup_{y \in \varphi_a^{-1}(K_a)} \| D^i(f \circ \varphi_a^{-1})(y) \|_{op}}_{\leq \| f \|_{C^n}} \\
&\leq C \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \| f \|_{C^l} \leq C \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \| f \|_{C^n} \\
&\leq C \| f \|_{C^n} \, .
\end{aligned}$$

Donc $\epsilon : C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C_0^\infty(B, \mathbb{R})$ est une application modérée.
Considérons alors l'injection $i : C_0^\infty(B, \mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et la restriction $\rho : C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$. L'application i est évidemment modérée et l'on peut vérifier que ρ l'est aussi par des arguments similaires à ceux déjà utilisés dans le cas de ϵ .
Nous avons donc trois applications modérées :

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\epsilon} C_0^\infty(B, \mathbb{R}) \xrightarrow{i} C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \xrightarrow{\rho} C^\infty(M, \mathbb{R}) \, .$$

L'argument principal de la démonstration consiste à factoriser i dans un espace modéré grâce à la transformé de Fourier $\mathcal{F}$ suivant le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
C_0^\infty(B,\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathcal{F}"] \arrow[ddr, "i"'] & L_1^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda,ln(1+\|\xi\|)) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}"] \\
 & C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \arrow[d, "R"] \\
 & C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

où λ est la mesure de Lebesgue et $R : C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, $f+ig \mapsto f$. Remarquons que les espaces $L_1^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda,ln(1+\|\xi\|))$ et $C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ doivent être vus comme des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et que l'on muni $C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ de la même graduation que $C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ en prenant des modules à la place des valeurs absolues.
Enfin le diagramme précédent est bien défini étant donné les propriétés de $\mathcal{F}$ et le fait que

$$L_1^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda,ln(1+\|\xi\|)) = \Big\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid \int_{\mathbb{R}^d}(1+\|\xi\|)^n |f(\xi)| d\lambda(\xi) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Pour voir que ces différentes applications sont modérées, nous allons utiliser une graduation différente de celle donnée précédemment sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ mais néanmoins modérément équivalente et donnée par

$$\|f\|_n = \sum_{|\alpha|\le n} \underset{x\in\mathbb{R}^d}{sup} \mid D^\alpha f(x) \mid$$

où α est un multi-indice.

Montrons que $\mathcal{F} : C_0^\infty(B,\mathbb{R}) \to L_1^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda,ln(1+\|\xi\|))$ est une application modérée. Pour $f \in C_0^\infty(B,\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f)\|_n &= \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|)^n \mid \mathcal{F}(f)(\xi) \mid d\lambda(\xi) \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^{\frac{n}{2}} \mid \mathcal{F}(f)(\xi) \mid d\lambda(\xi) \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^{\frac{n}{2}} \frac{\sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|}{(1+\|\xi\|^2)^{\frac{k}{2}}} \mid \mathcal{F}(f)(\xi) \mid d\lambda(\xi)
\end{aligned}$$

car pour $k \in \mathbb{N}$, on a toujours $(1+\|\xi\|^2)^{\frac{k}{2}} \le C \sum_{|\alpha|\le k} |\xi^\alpha|$ pour un certain C où $\xi^\alpha = \xi^{\alpha_1} \cdots \xi^{\alpha_d}$ et $\|\xi\|$ est la norme euclidienne de ξ. Donc

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f)\|_n &\le C \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^{\frac{n-k}{2}} |\xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) \mid d\lambda(\xi) \\
&\le C \sum_{|\alpha|\le k} \int_{\mathbb{R}^d} (1+\|\xi\|^2)^{\frac{n-k}{2}} \underbrace{\mid \mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) \mid}_{\le \| D^\alpha f \|_{L^1(\mathbb{R}^d)}} d\lambda(\xi)
\end{aligned}$$

Rappelons ici que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^s \, d\lambda(\xi)$$

converge si et seulement si $s < \frac{-d}{2}$ (voir [Fol95], Lemme 6.9).
Donc $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{n-k}{2}} \, d\lambda(\xi)$ converge pour $k > n + d$.
Ainsi, pour $r > d$ on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(f)\|_n &\leq C \sum_{|\alpha| \leq n+r} \int_{\mathbb{R}^d} |\, D^\alpha f(\xi) \,| \, d\lambda(\xi) \\
&\leq C \sum_{|\alpha| \leq n+r} \sup_{\xi \in B} |\, D^\alpha f(\xi) \,| \\
&= C \|f\|_{n+r}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{F}$ est modérée de degré r avec $r > d$.

Montrons que $\mathcal{F}^{-1} \, : \, L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda, ln(1 + \|\xi\|)) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est modéré. Pour $f \in L_1^\infty(\mathbb{R}^d, \lambda, ln(1 + \|\xi\|))$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{F}^{-1}(f)\|_n \\
= & \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\, D^\alpha \mathcal{F}^{-1}(f)(x) \,| \\
= & \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\, \mathcal{F}^{-1}(c_\alpha \xi^\alpha f)(x) \,| \quad \text{avec } c_\alpha \in \mathbb{C} \\
\leq & \; C \sum_{|\alpha| \leq n} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\alpha| \, |f(\xi)| \, d\lambda(\xi) \\
\leq & \; C \sum_{|\alpha| \leq n} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|)^n \, |f(\xi)| \, d\lambda(\xi) \quad \text{car } |\xi^\alpha| \leq (1 + \|\xi\|)^n \text{ pour } |\alpha| \leq n \\
\leq & \; C \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|)^n \, |f(\xi)| \, d\lambda(\xi) \\
= & \; C \|f\|_n \, .
\end{aligned}$$

Enfin l'application $R \, : \, C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ est modérée car pour $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
\|R(f + ig)\|_n &= \|f\|_n = \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |D^\alpha f(\xi)| \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left(|D^\alpha f(\xi)| + |D^\alpha g(\xi)| \right) \\
&\leq \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left(\sqrt{2} \,|\, D^\alpha f(\xi) + i D^\alpha g(\xi) \,| \right) \quad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&= C \sum_{|\alpha| \leq n} \sup_{\xi \in B} \left(|\, D^\alpha (f + ig)(x) \,| \right) \\
&= C \|f + ig\|_n \, .
\end{aligned}$$

Finalement le Lemme B.15 achève cette démonstration puisque l'application identité de l'espace $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ se factorise dans $L_1^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda,ln(1+\|\xi\|))$ et que l'application identité sur $L_1^\infty(\mathbb{R}^d,\lambda,ln(1+\|\xi\|))$ se factorise sur un espace de type $\Sigma\big(L^1(\mathbb{R}^d)\big)$. $\square$

Lemme B.17 *Si $E \overset{\pi_E}{\to} M$ et $F \overset{\pi_E}{\to} M$ sont deux fibrés vectoriels de rang r au-dessus de M, $p : E \to F$ un isomorphisme de fibrés vectoriels et $\mathcal{P}$: $\Gamma_{C^\infty}(M,E) \to \Gamma_{C^\infty}(M,F)$ l'application linéaire donnée par $\Big(\mathcal{P}(s)\Big)(x) := (p \circ s)(x)$ pour $s \in \Gamma_{C^\infty}(M,E)$ et $x \in M$, alors $\mathcal{P}$ est un isomorphisme modéré.*

Démonstration. Prenons une carte trivialisante (U,φ) de M pour les deux fibrés E et F ainsi qu'un ouvert relativement compact V de U tel que $\overline{V} \subseteq U$ et $\varphi(\overline{V}) = \overline{B}(0,1) \subseteq \mathbb{R}^m$. Nous avons les trivialisations suivantes :

$$\begin{tikzcd} \pi_E^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\Psi_U^E"] \arrow[dr, "\pi_E"'] & & \mathcal{U}\times\mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_F^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[rr, "\Psi_U^F"] \arrow[dr, "\pi_F"'] & & \mathcal{U}\times\mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr"] \\ & \mathcal{U} & \end{tikzcd}$$

Notons $\tilde{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^r)$ l'application définie pour $(x,u) \in U \times \mathbb{R}^r$ par :

$$(\Psi_U^F \circ p \circ (\Psi_U^E)^{-1})(x,u) = (x,\tilde{p}(u))\,.$$

Pour $x \in U$ et s une section de E on a alors :

$$\begin{array}{rcl} (p\circ s)_U(x) & = & (pr \circ \Psi_U^F \circ p \circ s \circ \varphi^{-1})(x) \\ & = & (pr \circ \Psi_U^F \circ p \circ (\Psi_U^E)^{-1} \circ \Psi_U^E \circ s \circ \varphi^{-1})(x) \\ & = & pr \circ (\Psi_U^F \circ p \circ (\Psi_U^E)^{-1})(x, s_U(x)) \\ & = & pr(x, (\tilde{p}\circ s_U)(x)) \\ & = & (\tilde{p}\circ s_U)(x)\,. \end{array}$$

Ainsi d'après une estimation établie plus loin (voir Corollaire B.24), on a pour $n \geq 1$ et des sections de E bornées pour la semi-norme $\|\ \|_{C^1}$, disons pour un certain K :

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|\big(D^n(\tilde{p}\circ s_U)\big)(x)\|_{op} \\ \leq & C\left(1 + \displaystyle\sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|(D^n\tilde{p})(x)\|_{op} + \sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|(D^n s_U)(x)\|_{op}\right) \\ \leq & C\left(1 + \displaystyle\sup_{x\in\overline{B}(0,1)} \|(D^n s_U)(x)\|_{op}\right). \end{array}$$

On en déduit l'estimation suivante valable pour $n \geq 1$ et des sections de E bornées par K pour la semi-norme $\|\ \|_{C^1}$:

$$\|\mathcal{P}(s)\|_{C^n} \leq C\,(1 + \|s\|_{C^n})\,.$$

Pour $n \geq 1$ et une section de E différente de 0 et pas forcément bornée par K pour la semi-norme $\| \ \|_{C^1}$, nous avons donc :

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{P}\left(\frac{1}{\|s\|_{C^1} \cdot K} \cdot s \right) \right\|_{C^n} \leq C \left(1 + \left\| \frac{1}{\|s\|_{C^1} \cdot K} \cdot s \right\|_{C^n} \right) \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{\|s\|_{C^1} \cdot K} \cdot \|\mathcal{P}(s)\|_{C^n} \leq C + \frac{C}{\|s\|_{C^1} \cdot K} \cdot \|s\|_{C^n} \\
\Rightarrow \quad & \|\mathcal{P}(s)\|_{C^n} \leq CK \|s\|_{C^1} + C \|s\|_{C^n} \leq CK \|s\|_{C^n} + C \|s\|_{C^n} \\
\Rightarrow \quad & \|\mathcal{P}(s)\|_{C^n} \leq C \|s\|_{C^n} .
\end{aligned}$$

Ainsi, l'application $\mathcal{P} : \Gamma_{C^\infty}(M, E) \to \Gamma_{C^\infty}(M, F)$ est modérée de degré 0 et de base 1. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à $\mathcal{P}^{-1}$, on en déduit que $\mathcal{P}$ est un isomorphisme modéré. $\square$

Théorème B.18 *Si M est une variété compacte et $E \xrightarrow{\pi} M$ est un fibré vectoriel de rang r au-dessus de M, alors l'espace $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ est modéré.*

Démonstration. D'après le Théorème de stabilisation, on peut trouver un fibré vectoriel $F \xrightarrow{\rho} M$ au-dessus de M tel que $E \oplus F$ soit isomorphe en tant que fibré vectoriel au fibré trivial $M \times \mathbb{R}^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. On a ensuite de façon canonique des isomorphismes modérés :

$$\begin{aligned}
& \Gamma_{C^\infty}(M, E \oplus F) \cong \Gamma_{C^\infty}(M, E) \oplus \Gamma_{C^\infty}(M, F) \\
\text{et} \qquad & \Gamma_{C^\infty}(M, M \times \mathbb{R}^p) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^p) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})^p .
\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu du Lemme B.17, nous donne un nouvel isomorphisme modéré :

$$\Gamma_{C^\infty}(M, E) \oplus \Gamma_{C^\infty}(M, F) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})^p .$$

Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{C^\infty}(M, E) \arrow[r, "i"] \arrow[ddrr, "Id"'] & \Gamma_{C^\infty}(M, E) \oplus \Gamma_{C^\infty}(M, F) \arrow[r] & C^\infty(M, \mathbb{R})^p \arrow[d] \\
& & \Gamma_{C^\infty}(M, E) \oplus \Gamma_{C^\infty}(M, F) \arrow[d, "l"] \\
& & \Gamma_{C^\infty}(M, E)
\end{tikzcd}$$

où $i(s) := (s, 0) \in \Gamma_{C^\infty}(M, E) \oplus \Gamma_{C^\infty}(M, F)$ et où $l(s, \sigma) := s$ pour $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$ et $\sigma \in \Gamma_{C^\infty}(M, F)$. Cela suffit pour montrer que $\Gamma_{C^\infty}(M, E)$ est un espace modéré étant donné que toute les applications considérées sont modérées et que l'espace $C^\infty(M, \mathbb{R})^p$ est lui même modéré (un produit d'espaces modérés étant évidemment modéré). $\square$

Pour justifier l'importance de ce dernier résultat, donnons le Théorème de Nash-Moser (voir [Ham82] ou [KM97]).

Définition B.19 *Soient E et F deux espaces de Fréchet modérés, $\mathcal{U}$ un ouvert de F et $f : \mathcal{U} \to F$ une application.*
L'application f est dite lisse modérée si f est lisse et si pour tout $k \geq 0$ et pour tout $(x, v_1, ..., v_k)$ dans $\mathcal{U} \times E \times \cdots E$ il existe un voisinage V de $(x, v_1, ..., v_k)$ dans $\mathcal{U} \times E \times \cdots \times E$ et $b_k, r_0, ..., r_k \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq b_k$ on ait

$$\| D^k f(x)\{v_1, ..., v_k\} \|_n \leq C\,(1 + \|x\|_{n+r_0} + \|v_1\|_{n+r_1} + \cdots + \|v_k\|_{n+r_k}\,)$$

sur V (les constantes C pouvant dépendre de k et de n).

La catégorie de Hamilton correspond à celle dont les objets sont les ouverts d'espaces modérés et dont les morphismes sont les applications lisses modérées.

Théorème B.20 (Nash-Moser) *Soit $f : \mathcal{U} \subseteq E \to F$ une application lisse modérée entre deux espaces modérés E et F. Supposons qu'il existe un ouvert $V \subseteq \mathcal{U}$ tel que :*

(i) *pour tout $x \in V$, $Df(x) : E \to F$ est un isomorphisme ;*

(ii) *l'application $V \times F \to E$, $(x, v) \mapsto \big(Df(x)\big)^{-1}\{v\}$ est une application lisse modérée.*

Alors f est localement inversible sur V et chaque inverse local est lisse modéré.

B.2.2 Quelques applications lisses modérées

Dans cette partie, nous allons donner des résultats techniques de régularité ainsi que certaines estimations sur des applications que nous rencontrerons par la suite.

Pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ à support compact, notons

$$\|f\|_n = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \| D^n f(x) \|_{op}\,.$$

On a le théorème d'interpolation suivant.

Théorème B.21 *Pour un triplet (l, m, n) d'entiers tel que $l \leq m \leq n$ et $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ à support compact, on a :*

$$(*) \qquad \|f\|_m^{n-l} \leq C \|f\|_n^{m-l} \cdot \|f\|_l^{n-m}$$

pour un certain $C \in \mathbb{R}_+^*$ dépendant du triplet (l, m, n).

Démonstration. Nous allons procéder par étapes en commençant en petite dimension.

• Prenons $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à support compact et montrons le résultat suivant

$$\Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, f' \,|\Big)^2 \leq 2 \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, f'' \,|\Big) \cdot \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, f \,|\Big)\,.$$

Prenons $a, b, c > 0$ et posons $h(x) := af(\frac{x}{b} + c)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $g(x) := \pm h(\pm x)$, les signes étant choisis de telle sorte qu'en prenant a, b et c convenablement, nous ayons

$$\sup_{\mathbb{R}} |\, g' \,| = \sup_{\mathbb{R}} |\, g'' \,| = 1 = |\, g'(0) \,|$$

et
$$g(0) \geq 0\,, \quad g'(0) > 0\,.$$
Or, nous pouvons trouver $\xi \in [0,1]$ tel que
$$g(1) = g(0) + \underbrace{g'(0) + \frac{1}{2}g''(\xi)}_{\geq \frac{1}{2}}$$
et donc
$$\sup_{\mathbb{R}} |\, g \,| \geq g(1) \geq \frac{1}{2}$$
ce qui implique dans notre cas que
$$\Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, g' \,|\Big)^2 \leq 2 \sup_{\mathbb{R}} |\, g'' \,| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\, g \,|\,.$$
En remplaçant g par f nous obtenons :
$$\begin{aligned} & \Big(\frac{a}{b}\Big)^2 \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, f' \,|\Big)^2 \leq 2a \sup_{\mathbb{R}} |\, f'' \,| \, \frac{a}{b^2} \sup_{\mathbb{R}} |\, f \,| \\ \Rightarrow \quad & \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, f' \,|\Big)^2 \leq 2 \sup_{\mathbb{R}} |\, f'' \,| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\, f \,|\,. \end{aligned}$$
• Prenons $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ à support compact et montrons que
$$\|f\|_1^2 \leq C \, \|f\|_2 \, \|f\|_0\,.$$
Il existe $x, v \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|v\| = 1$ et $\|f\|_1 = |\, Df(x)\{v\} \,|$. Posons $g(t) := f(x+tv)$, $t \in \mathbb{R}$.
On a $g(t) = f(x+tv)$, $g'(t) = Df(x+tv)\{v\}$ et et $g''(t) = D^2 f(x+tv)\{v,v\}$.
De plus, d'après le premier point, nous avons :
$$\begin{aligned} & \Big(\sup_{\mathbb{R}} |\, g' \,|\Big)^2 \leq 2 \sup_{\mathbb{R}} |\, g'' \,| \cdot \sup_{\mathbb{R}} |\, g \,| \\ \Rightarrow \quad & \Big(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\, Df(x+tv)\{v\} \,|\Big)^2 \leq C \sup_{t\in\mathbb{R}} |\, D^2 f(x+tv)\{v,v\} \cdot |\, \sup_{t\in\mathbb{R}} |\, f(x+tv) \,| \\ \Rightarrow \quad & |\, Df(x)\{v\} \,|^2 \\ & \quad \leq C \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\, D^2 f(x+tv)\{v,v\} \,\|_{op} \sup_{t\in\mathbb{R}} |\, f(x+tv) \,| \leq C \, \|f\|_2 \, \|f\|_0 \\ \Rightarrow \quad & \|f\|_1^2 \leq C \, \|f\|_2 \, \|f\|_0\,. \end{aligned}$$
• Prenons $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ à support compact et montrons que
$$\|f\|_1^2 \leq C \, \|f\|_2 \, \|f\|_0\,.$$
On a :
$$\begin{aligned} \|\, Df(x) \,\|_{op}^2 &= \|\, Df(x)\{v\} \,\|^2 \qquad \text{pour un certain } v \in \mathbb{R}^d \text{ tel que } \|v\| = 1 \\ &= \sum_{i=1}^{e} \|\, Df^i(x)\{v\} \,\|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{e} \|\, Df^i(x) \,\|_{op}^2 \leq \sum_{i=1}^{e} \|f^i\|_1^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; C \sum_{i=1}^{e} \|f^i\|_2 \, \|f^i\|_0 \leq C \Big(\sum_{i=1}^{e} \|f^i\|_2^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{e} \|f^i\|_0^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \; C \Big(\sum_{i=1}^{e} \|D^2 f^i(x_i)\|_{op}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{e} |f^i(y_i)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{avec } x_i, y_i \in \mathbb{R}^d \\
&\leq \; C \, \| \, D^2 f^{i_0}(x_{i_0}) \, \|_{op} \, | \, f^{j_o}(y_{j_0}) \, | \\
&\leq \; C \Big(\sum_{i=1}^{e} \| \, D^2 f^i(x_{i_0}) \, \|_{op} \Big) \Big(\sum_{i=1}^{e} | \, f^j(y_{j_0}) \, | \Big) \\
&= \; C \Big(\sum_{i=1}^{e} \| \, D^2 f^i(x_{i_0}) \{\alpha_i, \beta_i\} \, \| \Big) \Big(\sum_{i=1}^{e} | \, f^j(y_{j_0}) \, | \Big) \\
&\leq \; C \Big(\sum_{i=1}^{e} \| \, D^2 f^i(x_{i_0}) \{\alpha_i, \beta_i\} \, \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \, \| \, f(y_{j_0}) \, \| \\
&\leq \; C \, \| \, D^2 f^k(x_{i_0}) \{\alpha_k, \beta_k\} \, \| \, \|f\|_0 \\
&\leq \; C \Big(\sum_{i=1}^{e} \| \, D^2 f^i(x_{i_0}) \{\alpha_k, \beta_k\} \, \| \Big) \, \|f\|_0 \\
&\leq \; C \Big(\sum_{i=1}^{e} \| \, D^2 f^i(x_{i_0}) \{\alpha_k, \beta_k\} \, \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \, \|f\|_0 \\
&= \; C \, \| \, D^2 f(x_{i_0}) \{\alpha_k, \beta_k\} \, \| \, \|f\|_0 \\
&\leq \; C \, \| \, D^2 f(x_{i_0}) \, \|_{op} \, \|f\|_0 \\
&\leq \; C \, \|f\|_2 \, \|f\|_0 \, .
\end{aligned}
$$

D'où $\|f\|_1^2 \leq C \, \|f\|_2 \, \|f\|_0$.

• Montrons que la relation $(*)$ est vraie pour des triplets d'entiers de la forme $m{-}1 \leq m \leq m{+}1$. Prenons $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^e)$ à support compact. On a :

$$
\begin{aligned}
\|f\|_m^2 \; &= \; \Big(\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \| \, D^m f(x) \, \|_{op} \Big)^2 \\
&= \; \| \, D^m f(x_0) \{v_1, ..., v_m\} \, \|^2 \\
&= \; \| \, Dg(x_0) \{v_1\} \, \|^2 \qquad \text{où} \quad g(x) := D^{m-1} f(x) \{v_2, ..., v_m\} \\
&\leq \; \|g\|_1^2 \leq C \, \|g\|_2 \, \|g\|_0 \\
&= \; C \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \| \, D^2 g(x) \, \| \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \| \, g(x) \, \| \\
&= \; C \, \| \, D^2 g(z_0) \{\xi_1, \xi_2\} \, \| \, \|g(\alpha)\| \\
&= \; C \, \| \, D^{m+1} f(z_0) \{v_2, ..., v_m, \xi_1, \xi_2\} \, \| \, \| \, D^{m-1} f(\alpha) \{v_2, ..., v_m\} \, \| \\
&\leq \; C \, \|f\|_{m+1} \, \|f\|_{m-1} \, .
\end{aligned}
$$

Donc $\|f\|_m^2 \leq C \, \|f\|_{m+1} \, \|f\|_{m-1}$.

• Montrons que la relation $(*)$ est vraie pour des triplets de la forme

$$
\left\{ \begin{array}{ll} m{-}1 \leq m \leq m{+}n \;\; ; & (1) \\ m{-}n \leq m \leq m{+}1 \;\; ; & (2) \end{array} \right.
$$

où $n, m \geq 1$ et $m{-}n \geq 0$.

Faisons le par récurrence. Le résultat est déjà montré pour $n = 1$. Supposons le donc vrai au rang n . On a :

$$\begin{aligned} \|f\|_m^{n+1} &\overset{(1)}{\leq} C\,\|f\|_{m+n}\,\|f\|_{m-1}^n \\ &\overset{(2)}{\leq} C\,\|f\|_{m+n+1}^{\frac{n}{n+1}}\,\|f\|_m^{\frac{1}{n+1}}\,\|f\|_{m-1}^n\,. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} & \|f\|_m^{(n+1)^2} \leq C\,\|f\|_{m+n+1}^n\,\|f\|_m\,\|f\|_{m-1}^{n(n+1)} \\ \Rightarrow\ & \|f\|_m^{(n+1)^2-1} \leq C\,\|f\|_{m+n+1}^n\,\|f\|_{m-1}^{n(n+1)} \\ \Rightarrow\ & \|f\|_m^{n+2} \leq C\,\|f\|_{m+n+1}\,\|f\|_{m-1}^{n+1} \end{aligned}$$

et donc $(*)$ est vraie pour le triplet $(m{-}1, m, n{+}m{+}1)$. De la même manière, on montre que la relation $(*)$ est vraie pour le triplet $(m{-}n{-}1, m, m{+}1)$.
Supposons maintenant que $(*)$ est vraie pour le triplet (l, m, n), c'est à dire, $\|f\|_m^{n-l} \leq C\,\|f\|_n^{m-l}\,\|f\|_l^{n-m}$.
Nous savons que

$$\|f\|_n^{n+1-m} \leq C\,\|f\|_{n+1}^{n-m}\,\|f\|_m$$

d'où

$$\begin{aligned} & \|f\|_m^{n-l} \leq C\,\|f\|_{n+1}^{\frac{(n-m)(m-l)}{n+1-m}}\,\|f\|_m^{\frac{m-l}{n+1-m}}\,\|f\|_l^{n-m} \\ \Rightarrow\ & \|f\|_m^{(n-l)(n+1-m)} \leq C\,\|f\|_{n+1}^{(n-m)(m-l)}\,\|f\|_m^{m-l}\,\|f\|_l^{(n-m)(n+1-m)} \\ \Rightarrow\ & \|f\|_m^{(n+1-l)(n-m)} \leq C\,\|f\|_{n+1}^{(n-m)(m-l)}\,\|f\|_l^{(n-m)(n+1-m)} \\ \Rightarrow\ & \|f\|_m^{n+1-l} \leq C\,\|f\|_{n+1}^{m-l}\,\|f\|_l^{n+1-m}\,. \end{aligned}$$

Donc si la relation $(*)$ est vraie pour le triplet ordonné (l, m, n), alors elle est aussi vraie pour le triplet $(l, m, n{+}1)$. Par suite le théorème est démontré.

□

Comme application de ce théorème d'interpolation, nous pouvons donner des estimations très utiles pour montrer par la suite que certaines applications entre variétés sont modérées.

Corollaire B.22 *Soit E un fibré vectoriel au-dessus d'une variété compacte M . Pour un triplet d'entiers $l \leq m \leq n$, on a :*

$$\|s\|_{C^m}^{n-l} \leq C\,\|s\|_{C^n}^{m-l} \cdot \|s\|_{C^l}^{n-m}$$

pour tout $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$.

Corollaire B.23 *Soit E un fibré vectoriel au-dessus d'une variété compacte M . Si (i, j) appartient au segment d'extrémités (k, l) et (m, n) dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors*

$$\|s\|_{C^i} \cdot \|s'\|_{C^j} \leq C\left(\|s\|_{C^k} \cdot \|s'\|_{C^l} + \|s\|_{C^m} \cdot \|s'\|_{C^n}\right)$$

pour tout $s, s' \in \Gamma_{C^\infty}(M, E)$.

Démonstration. Pour fixer les idées, nous pouvons supposer que $k \leq m$, $l \leq n$ et que $(i,j) = t(k,l) + (1-t)(m,n)$ pour un certain $t \in [0,1]$. D'après le théorème d'interpolation nous avons :

$$\|s\|_{C^i} \leq C\, \|s\|_{C^k}^{\frac{m-i}{m-k}} \cdot \|s\|_{C^m}^{\frac{i-k}{m-k}}$$

avec

$$\frac{m-i}{m-k} = \frac{m-tk-(1-t)m}{m-k} = \frac{m-tk-m+tm}{m-k} = \frac{tm-tk}{m-k} = t$$

et

$$\frac{i-k}{m-k} = \frac{tk+(1-t)m-k}{m-k} = \frac{(1-t)(m-k)}{m-k} = 1-t\,.$$

Donc $\|s\|_{C^i} \leq C\,\|s\|_{C^k}^{t} \cdot \|s\|_{C^m}^{1-t}$ et de même $\|s'\|_{C^j} \leq C\,\|s\|_{C^l}^{t} \cdot \|s\|_{C^n}^{1-t}$. Le corollaire découle alors du fait que pour $x, y \geq 0$ et $t \in [0,1]$, on a $x^t y^{1-t} \leq C\,(x+y)$. $\square$

Notons B^n, la boule unitée fermée de centre 0 de $\mathbb{R}^n$. Pour $f \in C^\infty(B^n, \mathbb{R}^m)$ et $k \in \mathbb{N}$, définissons $\|f\|_k$ par :

$$\|f\|_k := \sup_{x \in B^n} \|\, D^k f(x)\, \|_{op}\,.$$

Corollaire B.24 *Soient $f : B^n \to \mathbb{R}^m$ et $g : B^l \to B^n$ des applications lisses telles que $\|f\|_1 \leq K$ et $\|g\|_1 \leq K$ pour un certain $K \geq 0$.*
Alors pour $k \geq 1$ on peut trouver une constante C_k dépendant de K telle que

$$\|f \circ g\|_{C^k} \leq C_k \left(1 + \|f\|_{C^k} + \|g\|_{C^k} \right)$$

où $\|f\|_{C^k} := \sum_{i=0}^{k} \|f\|_i = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in B^n} \|\, D^i f(x)\, \|_{op}$.

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons trouver des constantes $C_{i,j_1,\ldots,j_i}$ telles que pour tout $x \in B^l$,

$$D^a(f \circ g)(x) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j_1+\cdots+j_i=a} C_{i,j_1,\ldots,j_i}\, D^i f(g(x))\{D^{j_1} g(x), ..., D^{j_i} g(x)\}$$

et donc

$$\|f \circ g\|_a \leq C \sum_{i=1}^{a} \sum_{j_1+\cdots+j_i=a} \|f\|_i\, \|g\|_{j_1} \cdots \|g\|_{j_i}\,.$$

Or d'après la formule d'interpolation, nous avons :

$$\begin{cases} \|f\|_i \leq C\, \|f\|_1^{\frac{a-i}{a-1}}\, \|f\|_a^{\frac{i-1}{a-1}}\ ; \\ \|g\|_{j_i} \leq C\, \|g\|_1^{\frac{a-j_i}{a-1}}\, \|g\|_a^{\frac{j_i-1}{a-1}}\ . \end{cases}$$

D'où

$$\begin{array}{rcl}
\|f\circ g\|_a & \leq & C\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\sum_{j_1+\cdots+j_i=a}\|f\|_1^{\frac{a-i}{a-1}}\|f\|_a^{\frac{i-1}{a-1}}\|g\|_1^{\frac{a-j_1}{a-1}}\|g\|_a^{\frac{j_1-1}{a-1}}\cdots\|g\|_1^{\frac{a-j_i}{a-1}}\|g\|_a^{\frac{j_i-1}{a-1}}\\
& \leq & C\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\sum_{j_1+\cdots+j_i=a}\|f\|_1^{\frac{a-i}{a-1}}\|f\|_a^{\frac{i-1}{a-1}}\|g\|_1^{\frac{a(i-1)}{a-1}}\|g\|_a^{\frac{a-i}{a-1}}\\
& \leq & C\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\|f\|_1^{\frac{a-i}{a-1}}\|f\|_a^{\frac{i-1}{a-1}}\|g\|_1^{\frac{a(i-1)}{a-1}}\|g\|_a^{\frac{a-i}{a-1}}\\
& = & C\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\Big(\|f\|_1\|g\|_a\Big)^{\frac{a-i}{a-1}}\Big(\|f\|_a\|g\|_1^a\Big)^{\frac{i-1}{a-1}}\\
& = & C\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\Big(\|f\|_1\|g\|_a\Big)^{1-\frac{i-1}{a-1}}\Big(\|f\|_a\|g\|_1^a\Big)^{\frac{i-1}{a-1}}\\
& \leq & C\displaystyle\sum_{i=1}^{a}\Big(\|f\|_1\|g\|_a+\|f\|_a\|g\|_1^a\Big)\\
& \leq & C\Big(\|f\|_1\|g\|_a+\|f\|_a\|g\|_1^a\Big)\\
& \leq & C\Big(K\|g\|_a+\|f\|_aK^a\Big)\\
& \leq & C_a\Big(\|g\|_a+\|f\|_a\Big).
\end{array}$$

Remarquons que pour passer de la cinquième ligne à la sixième, nous avons utilisé le fait que si $x,y\geq 0$ et $t\in[0,1]$, alors $x^{1-t}y^t\leq C\,(x+y)$.
Donc

$$\begin{array}{rcl}
\|f\circ g\|_{C^k} & = & \displaystyle\sum_{a=0}^{k}\|f\circ g\|_a\\
& = & \|f\circ g\|_0+\displaystyle\sum_{a=1}^{k}\|f\circ g\|_a\\
& \leq & C+C\displaystyle\sum_{a=1}^{k}\Big(\|f\|_a+\|g\|_a\Big)\\
& \leq & C+C\displaystyle\sum_{a=0}^{k}\Big(\|f\|_a+\|g\|_a\Big)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
& = & C\Big(1+\displaystyle\sum_{a=0}^{k}\|f\|_a+\sum_{a=0}^{k}\|f\|_a\Big)\\
& = & C\Big(1+\|f\|_{C^k}+\|g\|_{C^k}\Big)
\end{array}$$

ce qui est l'inégalité cherchée. □

Notons B_r la boule fermée de centre 0 et de rayon r de $\mathbb{R}^m$.

Corollaire B.25 *Soit $i : B_2 \to B_3$, $x \mapsto x$. On a :*

(i) *il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $f \in C^\infty(B_2, B_3)$ vérifiant $\|f - i\|_{C^1(B_2)} < \varepsilon$, f est un difféomorphisme de B_2 sur $f(B_2)$ et $B_1 \subseteq f(B_2)$. En particulier, on peut considérer $f^{-1}\big|_{B_1} : B_1 \to B_2$.*

(ii) *Pour tout $k \geq 1$, on a l'estimation suivante :*

$$\|f^{-1}\|_{C^k(B_1)} \leq C_k \left(\|f\|_{C^k(B_2)} + 1 \right).$$

où on note ici $\|f\|_{C^k(B_r)} = \sum_{i=0}^{k} \left(\sup_{x \in B_r} \| D^i f(x) \|_{op} \right)$ si f est définie sur B_r.

Démonstration. Montrons qu'il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $f \in C^\infty(B_2, B_3)$ vérifiant $\|f - i\|_{C^1(B_2)} < \varepsilon$, f est injective sur B_2.
Faisons le par l'absurde en supposant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in C^\infty(B_2, B_3)$, x_n et y_n appartenant à B_2 tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_n - i\|_{C^1(B_2)} < \frac{1}{n} \quad ; \quad x_n \neq y_n \;\text{ et }\; f_n(x_n) = f_n(y_n).$$

Puisque B_2 est compacte, nous pouvons supposer qu'il existe x et y appartenant à B_2 tels que $x_n \to x$ et $y_n \to y$.
On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\|f_n(x_n) - x\| &\leq \|f_n(x_n) - x_n\| + \|x_n - x\| \\
&= \|f_n(x_n) - i(x_n)\| + \|x_n - x\| \\
&\leq \|f_n - i\|_{C^1(B_2)} + \|x_n - x\| \\
&< \frac{1}{n} + \|x_n - x\| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que $f_n(x_n) \to x$ et de la même manière, $f_n(y_n) \to y$. Ainsi, puisque $f_n(x_n) = f_n(y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient $x = y$.

A présent, comme $f \to i$ dans l'espace de Banach $C^1(B_2, \mathbb{R}^m)$ muni de la norme $\| \,.\, \|_{C^1(B_2)}$, nous savons d'après l'Appendice A, qu'il existe une courbe lisse $\alpha : \mathbb{R} \to C^1(B_2, \mathbb{R}^m)$ vérifiant (quitte à passer à une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\alpha\left(\frac{1}{n}\right) = f_n \quad ; \quad \alpha(0) = i.$$

Notons alors $\Phi : \mathbb{R} \times B_2 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $(t, z) \mapsto (t, \alpha(t)(z))$.
Puisque pour tout $z \in B_2$

$$D\Phi(0, z) = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{pmatrix},$$

l'application Φ est notamment un difféomorphisme au voisinage de $(0, x)$, voisinage que nous pouvons prendre de la forme $\mathcal{U} :=]-\eta, \eta[\times (B(x, \eta) \cap B_2)$, pour un certain $\eta > 0$.

Mais alors, puisque $x_n \to x$ et $y_n \to y$ et d'après les hypothèses que nous avons faites, nous avons pour n assez grand :

$$\left(\begin{array}{c} \left(\frac{1}{n}, x_n\right) \in \mathcal{U} \text{ et } \left(\frac{1}{n}, y_n\right) \in \mathcal{U}\,; \\ f_n(x_n) = f_n(y_n)\,; \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \left(\frac{1}{n}, x_n\right) \in \mathcal{U} \text{ et } \left(\frac{1}{n}, y_n\right) \in \mathcal{U}\,; \\ \Phi\Big(\frac{1}{n}, x_n\Big) = \Phi\Big(\frac{1}{n}, y_n\Big) \end{array} \right)$$

et donc $x_n = y_n$ puisque Φ est un difféomorphisme sur $\mathcal{U}$. Nous obtenons donc une contradiction.
Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que pour tout $f \in C^1(B_2, \mathbb{R}^m)$ vérifiant $\|f - i\|_{C^1(B_2)} < \varepsilon$, alors f est injective sur B_2.

De plus, si $\varepsilon < 1$, nous avons pour tout $x \in B_2$:

$$\begin{array}{rl} & \| Df(x) - Id \|_{op} \leq \|f - i\|_{C^1(B_2)} < \varepsilon < 1 \\ \Rightarrow & \| Df(x) - Id \|_{op} < 1 \\ \Rightarrow & Df(x) \in GL_m(\mathbb{R}). \end{array}$$

Donc d'après le théorème d'inversion locale, f est partout localement inversible sur B_2, ce qui, ajouté à l'injectivité de f sur B_2, implique que f est un difféomorphisme de B_2 sur $f(B_2)$.

Montrons à présent que $B_1 \subseteq f(B_2)$.
Pour cela, prenons $f \in C^\infty(B_2, B_3)$ vérifiant $\|f - i\|_{C^1(B_2)} < \varepsilon$ où ϵ est choisi de telle sorte que pour $z \in B_1, x \in \partial B_2$ et $y \in \mathbb{R}^m$ avec $\|x - y\| < \epsilon$, alors, en notant u le point d'intersection entre la droite passant par z et y et ∂B_2, on ait $\|u - x\| < 2$. Faisons alors un raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe $z \in B_1 \setminus f(B_2)$. On peut définir une application $F : \partial B_2 \to \partial B_2$ qui à $x \in \partial B_2$ associe le point d'intersection de ∂B_2 et de la droite passant par z et $f(x)$. Le choix de ϵ implique que $F(x) \neq -x$ pour tout $x \in \partial B_2$. Il en résulte que F est homotope à l'identité de ∂B_2. Cependant, on sait qu'aucune application continue de la sphère de dimension $m-1$ dans elle-même pouvant s'étendre en une application de B_2 sur ∂B_2 (ce qui est le cas ici), ne peut être homotope à l'identité (voir [Hir94], Théorème 3.1.4), d'où une contradiction. Le point (i) est donc démontré.

Montrons le point (ii). Prenons $\varepsilon > 0$ petit et $f \in C^\infty(B_2, B_3)$ une application vérifiant $\|f - i\|_{C^1(B_2)} < \varepsilon$ et admettant un inverse $g \in C^\infty(B_1, B_2)$ sur B_1.
Puisque $f \circ g = Id$ sur B_1, nous avons $D^i(f \circ g) = 0$ pour $i \geq 2$. On en déduit pour $i \geq 2$ et $x \in B_1$ que :

$$\begin{aligned} 0 &= D^i(f \circ g)(x) \\ &= \sum_{a=1}^{i} \sum_{j_1 + \cdots j_a = i} C_{a,j_1,\ldots,j_a} \, D^a f(g(x))\{D^{j_1} g(x), \ldots, D^{j_a} g(x)\} \\ &= Df(g(x)) D^i g(x) \\ &\qquad + \sum_{a=2}^{i} \sum_{j_1 + \cdots j_a = i} C_{a,j_1,\ldots,j_a} \, D^a f(g(x))\{D^{j_1} g(x), \ldots, D^{j_a} g(x)\}\,. \end{aligned}$$

Nous avons donc, puisque $Df(g(x))^{-1} = Dg(x)$, la relation

$$D^i g(x) = -Dg(x)\Big\{ \sum_{a=2}^{i} \sum_{j_1+\cdots j_a=i} C_{a,j_1,\dots,j_a}\, D^a f(g(x))\{D^{j_1} g(x), ..., D^{j_a} g(x)\} \Big\},$$

et donc

$$\|g\|_i \quad \leq \quad C\, \|g\|_1 \sum_{a=2}^{i} \sum_{j_1+\cdots j_a=i} \|f\|_a \|g\|_{j_1} \cdots \|g\|_{j_a} .$$

Remarquons que nous pouvons regarder f et g comme des applications définies sur $\mathbb{R}^m$ tout entier et dont les supports sont compacts et suffisamment petit pour que l'avant dernière relation soit toujours vraie sur ces supports. Ceci permet ainsi d'utiliser les semi-normes $\|\ \|_n$ introduites avant le Théorème B.21.
De plus,

$$\begin{aligned}
\|Dg(x)\|_{op} &= \| Dg(x) - Id + Id \|_{op} \\
&\leq \| Dg(x) - Id \|_{op} + 1 \\
&\leq \| Dg(x) - Df(g(x))Dg(x) \|_{op} + 1 \\
&\leq \| \big(Id - Df(g(x))\big)Dg(x) \|_{op} + 1 \\
&\leq \| Id - Df(g(x)) \|_{op} \| Dg(x) \|_{op} + 1 \\
&\leq \varepsilon \| Dg(x) \|_{op} + 1
\end{aligned}$$

et donc $\| Dg(x) \|_{op} \leq \dfrac{1}{1-\varepsilon}$ et par suite $\|g\|_1 \leq \dfrac{1}{1-\varepsilon}$.
Par le théorème d'interpolation, nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{cases} \|f\|_a \leq C\, \|f\|_1^{\frac{i-a}{i-1}}\, \|f\|_i^{\frac{a-1}{i-1}}\,; \\ \|g\|_j \leq C\, \|g\|_1^{\frac{i-j-1}{i-2}}\, \|g\|_{i-1}^{\frac{j-1}{i-2}}\,; \end{cases}$$

et comme $\|f\|_1 \leq C$ et $\|g\|_1 \leq C$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\|g\|_i &\leq C \sum_{a=2}^{i} \|f\|_i^{\frac{a-1}{i-1}}\, \|g\|_{i-1}^{\frac{j_1-1}{i-2}} \cdots \|g\|_{i-1}^{\frac{j_a-1}{i-2}} \\
&\leq C \sum_{a=2}^{i} \|f\|_i^{\frac{a-1}{i-1}}\, \|g\|_{i-1}^{\frac{i-a}{i-2}} . \qquad (*)
\end{aligned}$$

Montrons alors que pour tout $k \geq 1$,

$$\|g\|_k \leq C\,\big(\,\|f\|_k + 1\big)\,.$$

Pour $k = 1$ nous avons :

$$\|g\|_1 \leq C \leq C\,\big(\,\|f\|_1 + 1\big)\,.$$

Supposons donc que $\|g\|_{k-1} \leq C\left(\|f\|_{k-1}+1\right)$ pour $k \geq 2$.
En utilisant $(*)$, nous obtenons les estimations suivantes :

$$
\begin{aligned}
\|g\|_k &\leq C \sum_{a=2}^{k} \|f\|_k^{\frac{a-1}{k-1}} \|g\|_{k-1}^{\frac{k-a}{k-2}} \\
&\leq C \sum_{a=2}^{k} \|f\|_k^{\frac{a-1}{k-1}} \Big(\|f\|_{k-1}+1 \Big)^{\frac{k-a}{k-2}} .
\end{aligned}
$$

Or si $\|f\|_{k-1} \geq 1$, nous avons par interpolation

$$
\begin{aligned}
(\|f\|_{k-1}+1)^{k-1} &\leq C\,\|f\|_{k-1}^{k-1} \leq C\,\|f\|_1\,\|f\|_k^{k-2} \\
&\leq C\,\|f\|_k^{k-2} \leq C\,(\|f\|_k+1)^{k-2}
\end{aligned}
$$

et si $\|f\|_{k-1} < 1$, alors

$$
(\|f\|_{k-1}+1)^{k-1} \leq 2^{k-1} \leq 2^{k-1}\,(\|f\|_k+1)^{k-2} .
$$

Dans les deux cas nous avons

$$
\|f\|_{k-1}+1 \leq C\,(\|f\|_k+1)^{\frac{k-2}{k-1}} .
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
\|g\|_k &\leq C \sum_{a=2}^{k} \|f\|_k^{\frac{a-1}{k-1}} \Big(\|f\|_k+1 \Big)^{\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k-a}{k-2}} \\
&\leq C \sum_{a=2}^{k} \|f\|_k^{\frac{a-1}{k-1}} \Big(\|f\|_k+1 \Big)^{\frac{k-a}{k-1}} \\
&\leq C \sum_{a=2}^{k} \Big(\|f\|_k+1 \Big)^{\frac{a-1}{k-1}} \Big(\|f\|_k+1 \Big)^{\frac{k-a}{k-1}} \\
&\leq C \sum_{a=2}^{k} \Big(\|f\|_k+1 \Big) \\
&\leq C\,(\|f\|_k+1) .
\end{aligned}
$$

Donc $\|g\|_k \leq C\,(\|f\|_k+1)$ pour tout $k \geq 1$.
On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\|g\|_{C^k(B_1)} &\leq C \sum_{i=0}^{k} \|g\|_i \leq C\,\|g\|_0 + C \sum_{i=1}^{k} \|g\|_i \\
&\leq C + C \sum_{i=1}^{k} (\|f\|_i+1) \\
&\leq C \Big(\sum_{i=0}^{k} \|f\|_i + 1 \Big) \\
&\leq C \Big(\|f\|_{C^k} + 1 \Big).
\end{aligned}
$$

Le point (ii) est donc démontré. $\square$

Soient maintenant M une variété compacte, $E_1 \overset{\pi_1}{\to} M$ et $E_2 \overset{\pi_2}{\to} M$ deux fibrés vectoriels de rang r er s au dessus de M et $\mathcal{U}$ un ouvert de E_1.
Notons $\widetilde{\mathcal{U}}$ l'ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$ défini par :

$$\widetilde{\mathcal{U}} := \{ \, s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1) \,|\, s(M) \subseteq \mathcal{U} \, \} \, .$$

Soit $p : \mathcal{U} \to E_2$ est une application lisse vérifiant $\pi_2 \circ p = \pi_1$ et soit $\mathcal{P} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$ définie par :

$$\mathcal{P}(s) = p \circ s$$

pour $s \in \widetilde{\mathcal{U}}$.

Définition B.26 *Avec les hypothèses ci-dessus, l'application $\mathcal{P}$ est appelé un morphisme non linéaire de fibrés vectoriels.*

Proposition B.27 *Si $\mathcal{P} : \widetilde{\mathcal{U}} \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$ est un morphisme non linéaire de fibrés vectoriels, alors $\mathcal{P}$ est une application lisse modérée.*

Démonstation. Prenons $s : I \subseteq \mathbb{R} \to \widetilde{\mathcal{U}}$ une courbe lisse de $\widetilde{\mathcal{U}}$.
Prenons $t \in I$ et $x \in M$, nous avons

$$\mathcal{P}(s(t))(x) = (p \circ s(t))(x) = p(s(t)(x)) \, .$$

Or, $(t, x) \in I \times M \mapsto p\big(s(t)(x)\big)$ est lisse puisque $(t, x) \in I \times M \mapsto s(t)(x)$ est lisse d'après la Proposition B.9.
Il s'ensuit par la Proposition B.11 que la courbe $t \in I \mapsto \mathcal{P}(s(t))$ dans $\Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$ est lisse. Donc $\mathcal{P}$ est lisse au sens de Kriegl-Michor, ce qui implique que $\mathcal{P}$ est lisse.
Montrons que $\mathcal{P}$ est modérée.
Prenons (V, φ) une carte de M trivialisant E_1 et E_2 et telle que $\varphi(V) = B(0, 2) \subseteq \mathbb{R}^m$. Nous avons les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} \pi_1^{-1}(V) \arrow[rr, "\Psi_1"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & & V \times \mathbb{R}^r \arrow[dl, "pr_1^r"] \\ & V & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \pi_2^{-1}(V) \arrow[rr, "\Psi_2"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & V \times \mathbb{R}^s \arrow[dl, "pr_2^s"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Localement nous pouvons écrire $(\Psi_2 \circ p \circ \Psi_1^{-1})(x, v) = (x, \widetilde{p}(v))$ où $\widetilde{p}$ est une fonction lisse définie sur un certain ouvert de $\mathbb{R}^r$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^s$.
Pour $x \in \varphi(V)$ et $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(s)_V(x) &= (pr_2^s \circ \Psi_2 \circ \mathcal{P}(s) \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= (pr_2^s \circ \Psi_2 \circ p \circ s \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= (pr_2^s \circ \Psi_2 \circ p \circ \Psi_1^{-1} \circ \Psi_1 \circ s \circ \varphi^{-1})(x) \\ &= (pr_2^s \circ \Psi_2 \circ p \circ \Psi_1^{-1})(x, s_V(x)) \\ &= pr_2^s\big(x, \widetilde{p}(s_V(x))\big) \\ &= (\widetilde{p} \circ s_V)(x) \, . \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(s)_V = \widetilde{p} \circ s_V$.
Remarquons qu'a l'aide d'une fonction plateau nous pouvons prolonger $\widetilde{p} \circ s_V$ sur $\mathbb{R}^r$ en une fonction à support compact de telle sorte que le prolongement coïncide avec $\widetilde{p} \circ s_V$ sur $\overline{B}(0,1)$. On peut dès lors appliquer le Corollaire B.24 pour obtenir l'estimation suivante pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \| D^k(\widetilde{p} \circ s_V)(x) \|_{op} \leq C\Big(1 + \sum_{k=0}^{n} \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \| D^k s_V(x) \|_{op} \Big) .$$

Remarquons que par compacité de $\overline{B}(0,1)$, la dépendance de $\tilde{p}$ est absorbée par la constante C . On en déduit, en considérant un "bon atlas" de M induisant des normes $\| \, . \, \|_{C^n}$ globales, que pour $n \geq 1$:

$$\|\mathcal{P}(s)\|_{C^n} \leq C \left(1 + \|s\|_{C^n}\right)$$

pour tout $s \in \widetilde{\mathcal{U}}$.
Il nous reste à montrer que les différentielles de $\mathcal{P}$ vérifient des estimations similaires.
Pour cela, il nous suffit de remarquer que les différentielles de $\mathcal{P}$ sont aussi des opérateurs de fibrés vectoriels. Notons $D_v p \, : \mathcal{U} \oplus E_1 \to E_2$ l'application définie pour $(z,u) \in \mathcal{U} \oplus E_1$ par :

$$D_v p(z,u) := \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_0 p(z+tu) \, .$$

Cette application preserve les fibres. De plus, pour $x \in M$, $s \in \widetilde{\mathcal{U}}$ et $\sigma \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$, nous savons d'après la Proposition B.11 que :

$$\begin{aligned} (D\mathcal{P}(s)\{\sigma\})(x) &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_0 \Big(\mathcal{P}(s+t\sigma)(x)\Big) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\bigg|_0 p(s(x)+t\sigma(x)) \\ &= D_v p(s(x), \sigma(x)) \end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons voir $D\mathcal{P}$ comme un opérateur de fibrés vectoriels. Par récurrence il en ait de même des différentielles de $\mathcal{P}$ à tous les ordres.
Donc $\mathcal{P}$ est une application lisse modérée. □

B.3 Exemples de variétés fréchétiques

Dans cette partie, nous donnons des exemples de variétés fréchétiques dont les espaces modèles sont des espaces de sections. Nous seront même plus précis puisque nous considérerons des variétés modérées dont voici la définition :

Définition B.28

(*i*) *Une variété fréchétique $\mathfrak{M}$ est dite variété modérée si les espaces modèles de $\mathfrak{M}$ sont modérés et si les changements de cartes sont des applications lisses modérées.*

(ii) Une application $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ entre deux variétés modérées est dite lisse modérée si f est continue et si localement f est lisse modérée.

(iii) Un groupe de Lie fréchétique $\mathfrak{G}$ est dit groupe de Lie modéré si $\mathfrak{G}$ est une variété modérée et si la multiplication $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ et l'inversion $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$ sont des applications lisses modérées.

B.3.1 Certaines sous-variétés de $C^\infty(M, N)$

Soient M et N deux variétés connexes de dimension finie telles que M soit compacte.

Proposition B.29 *L'ensemble $C^\infty(M, N)$ peut être muni d'une structure de variété modérée, un voisinage ouvert de f dans $C^\infty(M, N)$ étant modelé sur l'espace $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$.*

Démonstration. Fixons une métrique h sur N et considérons un ouvert $\mathcal{U}$ de TN contenant la section nulle et tel que l'application $\Phi : \mathcal{U} \to N \times N$ définie pour $(y, v) \in T_yN$ par

$$\Phi(y, v) := (y, exp_y(v))$$

soit un difféomorphisme de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V} := \Phi(\mathcal{U})$.
Pour $f \in C^\infty(M, N)$, définissons une carte $(\mathcal{U}_f, \varphi_f)$ de $C^\infty(M, N)$ en f par :

$$\mathcal{U}_f := \{ g \in C^\infty(M, N) \,|\, (f(x), g(x)) \in \Phi(\mathcal{U}),\ \forall x \in M \}$$

$$\text{et} \qquad \varphi_f : \mathcal{U}_f \to \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN), \quad g \mapsto \varphi_f(g)$$

où

$$\varphi_f(g)(x) := \big(exp_{f(x)}\big)^{-1}(g(x))$$

pour $x \in M$ et $g \in \mathcal{U}$.
L'application φ_f est bien définie et l'on a les propriétés suivantes :

• l'application $\varphi_f : \mathcal{U}_f \to \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$ est injective car si $\varphi_f(g) = \varphi_f(g')$ pour $g, g' \in \mathcal{U}_f$, alors :

$$\begin{aligned} & \varphi_f(g) = \varphi_f(g') \\ \Rightarrow \quad & \Big(exp_{f(x)}\Big)^{-1}(g(x)) = \Big(exp_{f(x)}\Big)^{-1}(g'(x)) \quad \forall x \in M \\ \Rightarrow \quad & g(x) = g'(x) \quad \forall x \in M \\ \Rightarrow \quad & g = g'. \end{aligned}$$

• L'ensemble $\varphi_f(\mathcal{U}_f)$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$.
En effet, nous pouvons remarquer que

$$\varphi_f(\mathcal{U}_f) = \{ s \in \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN) \,|\, s(M) \subseteq (\pi_N^* f)^{-1}(\mathcal{U}) \}$$

où $\pi_N^* f$ est l'application canonique de f^*TN à valeurs dans TN et où évidemment le membre de droite est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$.
• On a l'égalité suivante :

$$\bigcup_{h \in C^\infty(M,N)} \mathcal{U}_h = C^\infty(M, N).$$

• Si $g \in C^\infty(M,N)$, alors l'ensemble $\varphi_f(\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g)$ est un ouvert de l'espace $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$.
En effet, pour $f \in C^\infty(M,N)$, posons $\tau_f \ : \ f^*\mathcal{U} \to (f \times Id_N)^{-1}(\mathcal{V}) \subseteq M \times N$, $(x,v) \mapsto (x,\, exp_{f(x)}(v))$ pour $v \in (T_{f(x)}N) \cap \mathcal{U}$. L'application τ_f est clairement un difféomorphisme et l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& s \in \varphi_f(\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g) \Leftrightarrow (\varphi_f)^{-1}(s) \in \mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g \\
\Leftrightarrow \quad & (f(x), (\varphi_f)^{-1}(s)(x)) \in \mathcal{V} \ \text{ et } \ (g(x), (\varphi_f)^{-1}(s)(x)) \in \mathcal{V} \ \ , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (f(x), exp_{f(x)}(s(x))) \in \mathcal{V} \ \text{ et } \ (g(x), exp_{f(x)}(s(x))) \in \mathcal{V} \ \ , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (f \times Id_N)(x,\, exp_{f(x)}(s(x))) \in \mathcal{V} \\
& \quad \text{et } \ (g \times Id_N)(x,\, exp_{f(x)}(s(x))) \in \mathcal{V},\ \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (x, exp_{f(x)}(s(x))) \in (f \times Id_N)^{-1}(\mathcal{V}) \cap (g \times Id_N)^{-1}(\mathcal{V}) \ \ , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (x, exp_{f(x)}(s(x))) \in \tau_f(f^*\mathcal{U}) \cap \tau_g(g^*\mathcal{U}) \ \ , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & s(x) \in \tau_f^{-1}\Big(\tau_f(f^*\mathcal{U}) \cap \tau_g(g^*\mathcal{U})\Big) \ \ , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & s(M) \subseteq \tau_f^{-1}\Big(\tau_f(f^*\mathcal{U}) \cap \tau_g(g^*\mathcal{U})\Big).
\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_f(\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g) = \Big\{ s \in \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN) \,|\, s(M) \subseteq \tau_f^{-1}\Big(\tau_f(f^*\mathcal{U}) \cap \tau_g(g^*\mathcal{U})\Big)\Big\}$ qui est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$ puisque $\tau_f^{-1}\Big(\tau_f(f^*\mathcal{U}) \cap \tau_g(g^*\mathcal{U})\Big)$ est ouvert dans f^*TN.
• Les changements de cartes sont lisses et modérés.
Pour $s \in \varphi_f(\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g)$ et $x \in M$ on a :

$$\begin{aligned}
\big[(\varphi_g \circ \varphi_f^{-1})(s)\big](x) &= \big[(\varphi_g(\varphi_f^{-1}(s))\big](x) \\
&= exp_{g(x)}^{-1}\Big(\varphi_f^{-1}(s)(x)\Big) \\
&= exp_{g(x)}^{-1}\Big(exp_{f(x)}\,(s(x))\Big).
\end{aligned}$$

On constate que $\varphi_g \circ \varphi_f^{-1}$ est un morphisme non linéaire de fibrés vectoriels, l'homomorphisme de fibré (non-linéaire) associé étant l'application

$$\mathcal{V} \subseteq f^*TN \to g^*TN,\ (x,v) \mapsto exp_{g(x)}^{-1}\big(exp_{f(x)}(v)\big)$$

pour $x \in M$ et $v \in T_{f(x)}N$ tels que $(x,v) \in V$.
L'application $\varphi_g \circ \varphi_f^{-1}$ est donc lisse modérée d'aprés la Proposition B.27.
• La topologie canonique de $C^\infty(M,N)$ induite par la structure différentielle définie ci-dessus est séparée.
Prenons $f, g \in C^\infty(M,N)$ telles que $f(x) \neq g(x)$ pour un certain $x \in M$.
Prenons $\epsilon > 0$ tel que $exp_{f(x)}\big(B(0,\epsilon)\big) \cap exp_{g(x)}\big(B(0,\epsilon)\big) = \emptyset$ et prenons aussi $\eta > 0$ tel que si $s \in \varphi_f(\mathcal{U}_f)$ avec $\|s\|_{C^0} < \eta$, alors $\|s(x)\| < \epsilon$ et de même si $\sigma \in \varphi_g(\mathcal{U}_g)$ avec $\|\sigma\|_{C^0} < \eta$, alors $\|\sigma(x)\| < \epsilon$.
On a alors

$$\varphi_f^{-1}\Big(\Big\{\, s \in \varphi_f(\mathcal{U}_f) \,\Big|\, \|s\|_{C^0} < \eta \Big\}\Big) \bigcap \varphi_g^{-1}\Big(\Big\{\, \sigma \in \varphi_g(\mathcal{U}_g) \,\Big|\, \|\sigma\|_{C^0} < \eta \Big\}\Big) = \emptyset.$$

Or cette dernière expression est justement une intersection vide de deux ouverts de $C^\infty(M,N)$ contenant respectivement f et g. On a donc montré que

$C^\infty(M,N)$ est bien une variété modérée.

Enfin cette structure de variété ne dépend pas de la métrique utilisée sur N. Reprenons les notations déjà introduites en insérant des indices pour signifier la métrique h_1 ou h_2 liée aux objets considérés. Montrons que quelque soit la métrique utilisée, la topologie naturelle de variété de $C^\infty(M,N)$ est la même. Pour ce faire, il suffit pour $f,g \in C^\infty(M,N)$ de montrer que $\varphi_f^{h_1}(\mathcal{U}_f^{h_1} \cap \mathcal{U}_g^{h_2})$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$. On a :

$$\begin{aligned}
& s \in \varphi_f^{h_1}(\mathcal{U}_f^{h_1} \cap \mathcal{U}_g^{h_2}) \Leftrightarrow (\varphi_f^{h_1})^{-1}(s) \in \mathcal{U}_f^{h_1} \cap \mathcal{U}_g^{h_2} \\
\Leftrightarrow \quad & (f(x), (\varphi_f^{h_1})^{-1}(s)(x)) \in \mathcal{V}^{h_1} \text{ et } (g(x), (\varphi_f^{h_1})^{-1}(s)(x)) \in \mathcal{V}^{h_2} \quad , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (f(x), exp_{f(x)}^{h_1}(s(x))) \in \mathcal{V}^{h_1} \text{ et } (g(x), exp_{f(x)}^{h_1}(s(x))) \in \mathcal{V}^{h_2} \quad , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (f \times Id_N)(x,\, exp_{f(x)}^{h_1}(s(x))) \in \mathcal{V}^{h_1} \\
& \quad \text{et } (g \times Id_N)(x,\, exp_{f(x)}^{h_1}(s(x))) \in \mathcal{V}^{h_2} \quad , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (x, exp_{f(x)}^{h_1}(s(x)) \in (f \times Id_N)^{-1}(\mathcal{V}^{h_1}) \cap (g \times Id_N)^{-1}(\mathcal{V}^{h_2}) \quad , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & (x, exp_{f(x)}^{h_1}(s(x)) \in \tau_f^{h_1}(f^*\mathcal{U}^{h_1}) \cap \tau_g^{h_2}(g^*\mathcal{U}^{h_2}) \quad , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & s(x) \in \left(\tau_f^{h_1}\right)^{-1}\left(\tau_f^{h_1}(f^*\mathcal{U}^{h_1}) \cap \tau_g^{h_2}(g^*\mathcal{U}^{h_2})\right) \quad , \forall x \in M \\
\Leftrightarrow \quad & s(M) \subseteq \left(\tau_f^{h_1}\right)^{-1}\left(\tau_f^{h_1}(f^*\mathcal{U}^{h_1}) \cap \tau_g^{h_2}(g^*\mathcal{U}^{h_2})\right)
\end{aligned}$$

et donc $\varphi_f^{h_1}(\mathcal{U}_f^{h_1} \cap \mathcal{U}_g^{h_2}) = \left\{ s \in \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN) \,|\, s(M) \subseteq \left(\tau_f^{h_1}\right)^{-1}\left(\tau_f^{h_1}(f^*\mathcal{U}^{h_1}) \cap \tau_g^{h_2}(g^*\mathcal{U}^{h_2})\right)\right\}$ qui est bien un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)$.
De la même manière, on peut voir que les changements de coordonnées pour de telles cartes correspondantes à des métriques différentes sont toujours des morphismes non linéaires de fibrés vectoriels, et sont donc modérés. □

Lemme B.30 *Une courbe lisse de la variété $C^\infty(M,N)$ est une courbe $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to C^\infty(M,N)$ telle que l'application $\alpha^\vee : I \times M \to N$, $(t,x) \mapsto \alpha(t,x)$ soit une application lisse.*

Démonstration. Nous utiliserons les notations précédemment introduites.
Soit $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \to C^\infty(M,N)$ une courbe lisse de la variété $C^\infty(M,N)$.
Soit $t_0 \in I$. Puisque α est lisse, il existe $\epsilon > 0$ tel que pour $t \in]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [$, $\alpha(t)$ appartient à $\mathcal{U}_{\alpha(t_0)} \subseteq C^\infty(M,N)$. Or, d'après la Proposition B.9, nous avons les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
& \alpha \text{ est lisse sur }]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [\,; \\
\Rightarrow \quad & \varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha\big|_{]\, t_0-\epsilon,\, t_0+\epsilon\, [} :]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [\to \varphi_{\alpha(t_0)}(\mathcal{U}_{\alpha(t_0)}) \text{ est lisse}\,; \\
\Rightarrow \quad & \left(\varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha\right)^\vee :]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [\times M \to \alpha(t_0)^*TN \text{ est lisse}.
\end{aligned}$$

Notons alors $\Psi_{\alpha(t_0)} : \alpha(t_0)^*TN \to N$, $(x,v) \mapsto exp_{\alpha(t_0)(x)}(v)$ pour $v \in T_{\alpha(t_0)(x)}N$. Nous pouvons observer que $\Psi_{\alpha(t_0)}$ est lisse et que pour $(t,x) \in$

$]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [\times M\,,$

$$\Big(\Psi_{\alpha(t_0)} \circ \Big(\varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha\Big)^{\vee}\Big)(t,x) = exp_{\alpha(t_0)(x)}\bigg(\Big(\varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha\Big)^{\vee}(t,x)\bigg)$$

$$= \quad exp_{\alpha(t_0)(x)}\bigg(\Big[\Big(\varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha\Big)(t)\Big](x)\bigg) = exp_{\alpha(t_0)(x)}\bigg(\Big(\varphi_{\alpha(t_0)}(\alpha(t))\Big)(x)\bigg)$$

$$= \quad exp_{\alpha(t_0)(x)}\bigg((exp_{\alpha(t_0)(x)})^{-1}(\alpha(t)(x))\bigg) = \alpha(t)(x) = \alpha^{\vee}(t,x)\,.$$

Il s'ensuit par la dernière implication que $\alpha^{\vee} = \Psi_{\alpha(t_0)} \circ \Big(\varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha\Big)^{\vee}$ est lisse.
Reciproquement, soit $\alpha^{\vee} : I \times M \to N$ une application lisse.
Prenons $t_0 \in I$ et notons $\Lambda : I \times M \to N \times N,\ (t,x) \to \Big(\alpha^{\vee}(t_0,x),\, \alpha^{\vee}(t,x)\Big)$.
Par continuité de Λ, pour tout $x \in M$, on peut trouver $\epsilon > 0$ et V_x un voisinage de x dans M tels que pour tout $(t,y) \in]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [\times V_x$, on ait

$$\begin{aligned} & \Lambda\Big(\,]\, t_0 - \epsilon,\, t_0 + \epsilon\, [\times V_x\Big) \subseteq \Phi(\mathcal{U}) \\ \Rightarrow \quad & \Big(\alpha^{\vee}(t_0,y),\, \alpha^{\vee}(t,y)\Big) \in \Phi(\mathcal{U}) \end{aligned}$$

où $\Phi(\mathcal{U})$ est défini dans la proposition précédente.
Par compacité de M, on en déduit qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\Big(\alpha^{\vee}(t_0,x),\, \alpha^{\vee}(t,x)\Big) \in \Phi(\mathcal{U})$$

pour tout $(t,x) \in]\, t_0 - \eta,\, t_0 + \eta\, [\times M$.
En particulier, $\alpha(t) := \alpha(t,.) \in \mathcal{U}_{\alpha(t_0)}$ pour tout $t \in]\, t_0 - \eta,\, t_0 + \eta\, [$ et l'on a pour $(t,x) \in]\, t_0 - \eta,\, t_0 + \eta\, [\times M$:

$$\Big[\varphi_{\alpha(t_0)}(\alpha(t))\Big](x) = (exp_{\alpha(t_0)(x)})^{-1}(\alpha(t)(x)) = (exp_{\alpha(t_0)(x)})^{-1}(\alpha^{\vee}(t,x))$$

qui est lisse par rapport à (t,x). On en déduit par la Proposition B.11 que le chemin $\varphi_{\alpha(t_0)} \circ \alpha$ de $\Gamma_{C^\infty}(M, \alpha(t_0)^*TN)$ est lisse, et par suite, α aussi. $\square$

Lemme B.31 *Pour $f \in C^\infty(M,N)$, on a l'identification canonique*

$$T_f C^\infty(M,N) \cong \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN)\,.$$

On peut alors écrire, pour $\alpha : I \to C^\infty(M,N)$ une courbe lisse de $C^\infty(M,N)$ passant par f en 0 :

$$\Big(\frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha(t)\Big)(x) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \alpha^{\vee}(t,x)$$

où $x \in M$ et $\alpha^{\vee} : I \times M \to N,\ (t,x) \mapsto \alpha(t,x)$.

Démonstration. Prenons $f \in C^\infty(M,N)$, $x_0 \in M$ et notons

$$ev_{1,x_0} : \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TN) \to (f^*TN)_{x_0},\ s \mapsto s(x_0)$$

$$\text{et} \quad ev_{2,x_0} : C^\infty(I\times M,N)\to C^\infty(I,N),\ f\to f(\,.\,,x_0)\,.$$

Naturellement, $(\varphi_f)_{*_f} : T_fC^\infty(M,N)\to \Gamma_{C^\infty}(M,f^*TN)$ est un isomorphisme permettant l'identification de ces deux espaces. Mais cette identification est canonique dans le sens où nous avons la relation

$$ev_{1,x_0}\Big(\,(\varphi_f)_{*_f}\frac{d}{dt}\Big|_0\,\alpha(t)\,\Big)=\frac{d}{dt}\Big|_0\,\Big(\,ev_{2,x_0}(\alpha^\vee)\Big)\,.$$

En effet, si α est une courbe lisse de $C^\infty(M,N)$ passant par f en 0 (on peut donc supposer que $\alpha(t)=\varphi_f^{-1}(s(t))$ où s est une courbe lisse de $\Gamma_{C^\infty}(M,f^*TN)$), on a d'après la Proposition B.11 :

$$\begin{aligned}
ev_{1,x_0}\Big(\,(\varphi_f)_{*_f}\frac{d}{dt}\Big|_0\,\alpha(t)\,\Big) &= ev_{1,x_0}\Big(\,(\varphi_f)_{*_f}\frac{d}{dt}\Big|_0\,(\varphi_f^{-1})(s(t))\,\Big)\\
&= ev_{1,x_0}\Big(\,(\varphi_f)_{*_f}(\varphi_f^{-1})_{*_0}\frac{d}{dt}\Big|_0\,s(t)\,\Big)\\
&= ev_{1,x_0}\Big(\,\frac{d}{dt}\Big|_0\,s(t)\,\Big)=ev_{1,x_0}\Big(\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,s^\vee\Big)^\wedge(t)\Big)\\
&= \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,s^\vee\Big)^\wedge(t)(x_0)=\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,s^\vee\Big)(t,x_0)\,.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_0\,\Big(ev_{2,x_0}(\alpha^\vee)\Big) &= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,\Big(\alpha^\vee(t,x_0)\Big)=\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,\varphi_f^{-1}(s(t))(x_0)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,exp_{f(x_0)}\big(s^\vee(t,x_0)\big)=\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0\,s^\vee\Big)(t,x_0)\,.
\end{aligned}$$

Le lemme est donc démontré. □

Remarque B.32 *Les deux lemmes précédents sont utiles étant donné que le calcul de Kriegl-Michor s'étend directement aux variétés fréchétiques, i.e une application $f : \mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$ entre deux variétés fréchétiques est lisse si et seulement si $f\circ\alpha$ est lisse pour toute courbe lisse $\alpha : I\to\mathfrak{M}$ (voir Appendice A).*

A présent prenons M une variété compacte connexe de dimension m et notons Diff(M) le groupe des difféomorphismes de M.

Lemme B.33 *Si $f : I\subseteq\mathbb{R}\to C^\infty(M,M)$ est un chemin lisse de $C^\infty(M,M)$ tel que $f(0)=: g\in$ Diff(M), alors $f(t)\in$ Diff(M) pour t suffisamment petit.*

Démonstration. Avec les notations de la Proposition B.29, nous pouvons considérer une carte $(\mathcal{U}_g,\varphi_g)$ de $C^\infty(M,M)$ en g.
Comme $f : I\subseteq\mathbb{R}\to C^\infty(M,M)$ est continue, on peut supposer que pour tout $t\in I$, $f(t)\in\mathcal{U}_g$. En particulier il existe un chemin s de $\Gamma_{C^\infty}(M,g^*TM)$ tel que pour tout $x\in M$,

$$f(t)(x)=exp_{g(x)}\big(s(t)(x)\big)\,.$$

Montrons alors que pour $x\in M$, $\big(f(t)\big)_{*_x}$ est un isomorphisme dès que t est suffisamment petit.

Prenons (U, φ) une carte en x et (V, ψ) une carte en $g(x)$. Puisque f s'identifie à une application lisse de $I \times M$ à valeurs dans M, on peut supposer que pour tout $t \in I$ petit on a $f(t)(U) \subseteq V$.
A présent, dire que $\big(f(t)\big)_{*_x}$ est un isomorphisme est équivalent à dire que la matrice suivante

$$A(t,x) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(x)} (\psi \circ f(t) \circ \varphi^{-1})^1 & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\Big|_{\varphi(x)} (\psi \circ f(t) \circ \varphi^{-1})^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\varphi(x)} (\psi \circ f(t) \circ \varphi^{-1})^m & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_m}\Big|_{\varphi(x)} (\psi \circ f(t) \circ \varphi^{-1})^m \end{pmatrix}$$

appartient à $GL(m, \mathbb{R})$. Or, puisque $f \in C^\infty(I \times M, M)$, $A : I \times U \to M(m \times m, \mathbb{R})$ est une application continue vérifiant $A(0,x) \in GL(m, \mathbb{R})$, puisque g_{*_x} est un isomorphisme.
Ainsi, par continuité de A et parce que $GL(m, \mathbb{R})$ est un ouvert de $M(m \times m, \mathbb{R})$, on peut trouver $\eta > 0$ et W un voisinage de x tels que si $|t| < \eta$ et si $z \in W$, alors $A(t,z) \in GL(m, \mathbb{R})$.
En réappliquant ce raisonnement à l'ensemble de la variété compacte M, on en déduit qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\big(f(t)\big)_{*_x}$ est un isomorphisme pour tout $|t| < \epsilon$ et pour tout $x \in M$.

Montrons que pour t petit, l'application $f(t) : M \to M$ est injective. Faisons le par l'absurde en supposant qu'il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui converge vers 0 et deux suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de M vérifiant

$$x_n \neq y_n \quad \text{et} \quad f(t_n)(x_n) = f(t_n)(y_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Par compacité, nous pouvons supposer que $x_n \to x$ et $y_n \to y$ pour un certain $x \in M$ et un certain $y \in M$. On a alors par continuité de f,

$$\begin{aligned} f(0,x) = f(0,y) \quad &\Rightarrow \quad g(x) = g(y) \\ &\Rightarrow \quad x = y =: x_\infty \end{aligned}$$

puisque g est un difféomorphisme.
Soit $\Lambda : I \times M \to I \times M$, $(t,x) \mapsto (t, f(t,x))$. Pour $(t,x) \in I \times M$, on a

$$\Lambda_{*_{(0,x)}} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ * & g_{*_x} \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme puisque g est un difféomorphisme.
Donc Λ est localement un difféomorphisme pour (t,x) proche de $(0, x_\infty)$. Ceci implique, étant donné que $x_n \neq y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que pour n assez grand, $\Lambda(t_n, x_n) \neq \Lambda(t_n, y_n)$ ce qui est une contradiction avec le fait que $f(t_n, x_n) = f(t_n, y_n)$.

On en conclut que pout t suffisamment petit, $f(t)$ est une application injective. Or $f(t)$ est partout localement un difféomorphisme. On en déduit, M étant connexe, que c'est aussi un difféomorphisme. $\square$

Proposition B.34 *L'ensemble Diff(M) est un ouvert de $C^\infty(M,M)$. En particulier, Diff(M) est une variété lisse modérée.*

Démonstration. Faisons le par l'absurde en supposant qu'il existe une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $C^\infty(M,M)\backslash\mathrm{Diff}(M)$ qui converge vers un certain difféomorphisme f.
Toujours avec les notations de la Proposition 6, nous pouvons supposer que $f_n \in \mathcal{U}_f$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi il existe une suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TM)$ telle que $s_n \to 0$ et $f_n(x) = exp_{f(x)}(s_n(x))$ pour tout $x\in M$.
Comme $\Gamma_{C^\infty}(M, f^*TM)$ est un espace de Fréchet, nous pouvons supposer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge rapidement vers 0 (voir Appendice A). Ceci entraine l'existence d'une courbe lisse $\sigma : \mathbb{R} \to \Gamma_{C^\infty}(M, f^*TM)$ vérifiant

$$\sigma\Big(\frac{1}{n}\Big) = s_n \quad \text{et} \quad \sigma(0) = 0\,.$$

Pour $t\in\mathbb{R}$, notons $g(t)\in C^\infty(M,M)$ l'application définie pour $x\in M$ par $g(t)(x) := exp_{f(x)}\big(\sigma(t)(x)\big)$. L'application g est une courbe lisse de $C^\infty(M,M)$ qui tend vers f. D'après le Lemme 11, il existe donc $\eta>0$ tel que $g(t)\in\mathrm{Diff}(M)$ pour tout $|t|<\eta$.
En particulier, pour $n\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n}<\eta$, on a $g(\frac{1}{n}) = f(n)\in\mathrm{Diff}(M)$ ce qui est une contradiction.
Donc Diff(M) est un ouvert de $C^\infty(M,M)$. □

Proposition B.35 *Le groupe Diff(M) est un groupe de Lie modéré d'algèbre de Lie $\mathcal{X}(M)$, les champs de vecteurs de M. De plus, nous avons les propriétés suivantes :*

(i) le groupe Diff(M) admet une fonction exponentielle $Exp : \mathcal{X}(M) \to$ Diff(M) donnée pour $X\in\mathcal{X}(M)$ par :

$$Exp(X) = \varphi_1^X$$

où φ_t^X désigne le flot associé à X.

(ii) Le crochet de Lie $[\ ,\ ]_{Diff(M)}$ de l'algèbre de Lie du groupe Diff(M) est donné pour $X,Y\in\mathcal{X}(M)$ par :

$$[X,Y]_{Diff(M)} = -[X,Y]_{\mathcal{X}(M)}\,.$$

(iii) Le groupe Diff(M) agit sur son algèbre de Lie grâce à l'action adjointe Ad donnée pour $\varphi\in$ Diff(M) et $X\in\mathcal{X}(M)$ par :

$$Ad(\varphi)(X) = \varphi_*X$$

où φ_*X est le champ de vecteurs de M défini pour $x\in M$ par $(\varphi_*X)_x = {\varphi_*}_{\varphi^{-1}(x)}X_{\varphi^{-1}(x)}$.

(iv) Si λ : Diff$(M)\times$ Diff$(M) \to$ Diff(M), $(f,g)\mapsto f\circ g$ et i : Diff$(M)\to$ Diff(M), $f\mapsto f^{-1}$, alors les différentielles de λ et i sont données pour $f,g\in$ Diff(M), $s\in T_f$Diff(M), $\sigma\in T_g$Diff(M) et $x\in M$ par :

$$\Big(\lambda_{*_{(f,g)}}(s,\sigma)\Big)(x) = s(g(x)) + f_{*_{g(x)}}\sigma(x)$$

$$\text{et} \quad \Big(i_{*_f}s\Big)(x) = -\Big(f_{*_{f^{-1}(x)}}\Big)^{-1} s(f^{-1}(x))\,.$$

Démonstration. Nous savons déjà par la Proposition B.34 que Diff(M) est une variété modérée.
Montrons que λ est une application lisse modérée. Prenons $\alpha, \beta : I \to \mathrm{Diff}(M)$ deux courbes lisses de Diff(M). Pour montrer que λ est lisse, il suffit, d'après le Lemme B.30, de vérifier que l'application $I \times M \to M$, $(t,x) \mapsto (\alpha(t)\circ\beta(t))(x) = \alpha^\vee(t, \beta^\vee(t,x))$ est lisse. Or c'est effectivement le cas puisque les applications $\alpha^\vee : I \times M \to M$ et $\beta^\vee : I \times M \to M$ sont lisses.
Déterminons la différentielle de λ.
Prenons $f, g \in \mathrm{Diff}(M)$, $s \in T_f\mathrm{Diff}(M)$, $\sigma \in T_g\mathrm{Diff}(M)$ et deux courbes lisses $\alpha, \beta : I \to \mathrm{Diff}(M)$ vérifiant $\alpha(0) = f$, $\beta(0) = g$, $\dot\alpha(0) = s$ et $\dot\beta(0) = \sigma$.
Pour $x \in M$ on a alors d'après le Lemme B.31 :

$$\begin{aligned}
\Big(\lambda_{*_{(f,g)}}(s,\sigma)\Big)(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Big(\lambda\big(\alpha(t),\beta(t)\big)(x)\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha(t)\Big(\beta(t)(x)\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \alpha^\vee(t,\, \beta^\vee(t,x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \alpha^\vee(t, g(x)) + \Big(\Big(\frac{\partial}{\partial x}\alpha^\vee\Big)(0,g(x))\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big|_0 \beta^\vee(t,x)\Big) \\
&= s(g(x)) + f_{*_{g(x)}}\sigma(x)\,.
\end{aligned}$$

Montrons que λ est modérée. Prenons $f_0, g_0 \in \mathrm{Diff}(M)$, $s_0 \in T_{f_0}\mathrm{Diff}(M)$ et $\sigma_0 \in T_{g_0}\mathrm{Diff}(M)$ de sorte que $(s_0,\sigma_0) \in (\varphi_{f_0}\times\varphi_{g_0})\Big((\mathcal{U}_{f_0}\times\mathcal{U}_{g_0})\cap\lambda^{-1}(\mathcal{U}_{f_0\circ g_0})\Big)$ où $(\mathcal{U}_{f_0}\times\mathcal{U}_{g_0},\, \varphi_{f_0}\times\varphi_{g_0})$ est une carte de $\mathrm{Diff}(M)\times\mathrm{Diff}(M)$ définie par $(\varphi_{f_0}\times\varphi_{g_0})(f,g) = (\varphi_{f_0}(f), \varphi_{g_0}(g))$ pour $(f,g)\in\mathcal{U}_{f_0}\times\mathcal{U}_{g_0}$.
Prenons aussi Θ_1 un voisinage de s_0 dans $\Gamma_{C^\infty}(M, f_0^*TM)$ borné en topologie C^1, Θ_2 un voisinage de σ_0 dans $\Gamma_{C^\infty}(M, g_0^*TM)$ borné en topologie C^1 et tels que :

- $\Theta_1\times\Theta_2 \subseteq (\varphi_{f_0}\times\varphi_{g_0})\Big((\mathcal{U}_{f_0}\times\mathcal{U}_{g_0})\cap\lambda^{-1}(\mathcal{U}_{f_0\circ g_0})\Big)$;
- pour tout $\sigma\in\Theta_2$, $\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma)(U_2) \subseteq \varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0)(U_3)$;
- pour tout $s\in\Theta_1$, $\varphi_{f_0}^{-1}(s)\Big(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0)(U_3)\Big) \subseteq \varphi_{f_0}^{-1}(s_0)\Big(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0)(U)\Big)$

où (U,φ) est une carte de M vérifiant $\varphi(U) = B(0,4)$ ($B(0,4)$ étant la boule ouverte) et où l'on pose $U_2 := \varphi^{-1}(B(0,2))$ et $U_3 := \varphi^{-1}(B(0,3))$.
Remarquons que $(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0)(U),\, \varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1})$ et $((\varphi_{f_0}^{-1}(s_0)\circ\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))(U),\, \varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1}\circ(\varphi_{f_0}^{-1}(s_0))^{-1})$ sont aussi des cartes de M.
Remarquons aussi que si $\tau\in\Gamma_{C^\infty}(M, h^*TM)$ où h est un difféomorphisme de M, alors si (V,ψ) est une carte de M, une trivialisation de $h^*TM \xrightarrow{\pi_h} M$ au dessus de V est donnée par l'application $\pi_h^{-1}(V)\to V\times\mathbb{R}^m$, $u\mapsto \Big(\pi_h(u), (\psi\circ h^{-1})_{*_{h(x)}}u\Big)$ si $u\in T_{h(x)}M$ et $x\in V$.
Prenons alors $x\in B(0,2)\subseteq\mathbb{R}^m$, $(s,\sigma)\in\Theta_1\times\Theta_2$ et notons $f := \varphi_{f_0}^{-1}(s)$, $g :=$

$\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma)$. On a :

$$
\begin{aligned}
& \left(\big(\varphi_{f_0\circ g_0}\circ\lambda\circ(\varphi_{f_0}\times\varphi_{g_0})^{-1}\big)(s,\sigma)\right)_{U_2}(x) \\
= & \left(\big(\varphi_{f_0\circ g_0}\circ\lambda\circ(\varphi_{f_0}^{-1}\times\varphi_{g_0}^{-1})\big)(s,\sigma)\right)_{U_2}(x) \\
= & \left(\varphi_{f_0\circ g_0}\big(\lambda(\varphi_{f_0}^{-1}(s),\,\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma))\big)\right)_{U_2}(x) \\
= & \big(\varphi\circ(f_0\circ g_0)^{-1}\big)_{*_{(f_0\circ g_0)(\varphi^{-1}(x))}}\circ exp^{-1}_{(f_0\circ g_0)(\varphi^{-1}(x))}\,(f\circ g)(\varphi^{-1}(x)) \\
= & \underbrace{(\varphi\circ(f_0\circ g_0)^{-1})_*\circ exp^{-1}_{(f_0\circ g_0)(\varphi^{-1}(x))}\,(\varphi_{f_0}^{-1}(s_0)\circ\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0)\circ\varphi^{-1})}_{=:\,\Lambda\,:\,B(0,4)\to\mathbb{R}^m}
\end{aligned}
$$

$$
\circ\underbrace{\varphi\circ(\varphi_{f_0}^{-1}(s_0)\circ\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1}\circ f\circ(\varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1})^{-1}}_{=:\,\tilde f\,:\,B(0,3)\to B(0,4)}
$$

$$
\circ\underbrace{(\varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1})\circ g\circ\varphi^{-1})}_{=:\,\tilde g\,:\,B(0,2)\to B(0,3)}(x)
$$

$$
\begin{aligned}
= & \ \Lambda\circ\tilde f\circ\tilde g \\
= & \ \underbrace{\Lambda\circ h_{\frac{1}{2}}^{-1}}_{B(0,2)\to\mathbb{R}^m}\circ\underbrace{h_{\frac{1}{2}}\circ\tilde f\circ h_{\frac{2}{3}}^{-1}}_{B(0,2)\to B(0,2)}\circ\underbrace{h_{\frac{2}{3}}\circ\tilde g}_{B(0,2)\to B(0,2)}
\end{aligned}
$$

où $h_\mu\,:\,\mathbb{R}^M\to\mathbb{R}^M$, $x\to\mu x$, $\mu\in\mathbb{R}^*$.
On en déduit d'après le Corollaire B.24 que pour $k\geq 1$ on a :

$$
\begin{aligned}
\| & \left(\varphi_{f_0\circ g_0}\circ\lambda\circ(\varphi_{f_0}\times\varphi_{g_0})^{-1}(s,\sigma)\right)_{U_2}\|_k \\
& \leq C\,(1+\|\Lambda\circ h_{\frac{1}{2}}^{-1}\|_k+\|h_{\frac{1}{2}}\circ\tilde f\circ h_{\frac{2}{3}}^{-1}\|_k+\|\,h_{\frac{2}{3}}\circ\tilde g\,\|_k) \\
& \leq C\,(1+\|h_{\frac{1}{2}}\circ\tilde f\circ h_{\frac{2}{3}}^{-1}\|_k+\|\,h_{\frac{2}{3}}\circ\tilde g\,\|_k).
\end{aligned}
$$

De plus, pour $x\in\varphi^{-1}(B(0,1))$:

$$
\begin{aligned}
(h_{\frac{2}{3}}\circ\tilde g)(x) &= \big(h_{\frac{2}{3}}\circ\varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1}\circ g\circ\varphi^{-1}\big)(x) \\
&= \big(h_{\frac{2}{3}}\circ\varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1}\circ\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma)\circ\varphi^{-1}\big)(x) \\
&= \left(h_{\frac{2}{3}}\circ\varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1}\right)\left(exp_{g_0(\varphi^{-1}(x))}\big(\sigma(\varphi^{-1}(x))\big)\right)
\end{aligned}
$$

$$
=\underbrace{\left(h_{\frac{2}{3}}\circ\varphi\circ(\varphi_{g_0}^{-1}(\sigma_0))^{-1}\right)\left(exp_{g_0(\varphi^{-1}(x))}\,(\varphi\circ(\varphi_g^{-1}(\sigma_0))^{-1})^{-1}_{*_{g_0(\varphi^{-1}(x))}}\right.}_{=:\,\Phi}
$$

$$
\left.\underbrace{\big(\varphi\circ(\varphi_g^{-1}(\sigma_0))^{-1}\big)_{*_{g_0(\varphi^{-1}(x))}}\big(\sigma(\varphi^{-1}(x))\big)}_{=\sigma_{U_2}(x)}\right)
$$

$= (\Phi \circ \sigma_{U_2})(x)$.

A nouveau par le Corollaire B.24, pour $k \geq 1$ on a :

$$\| h_{\frac{2}{3}} \circ \tilde{g} \|_k = \| \Phi \circ \sigma_{U_2} \|_k \leq C\,(1 + \|\Phi\|_k + \|\sigma_{U_2}\|_k) \leq C\,(1 + \|\sigma_{U_2}\|_k)\,.$$

De façons similaire,

$$\| h_{\frac{1}{2}} \circ \tilde{f} \circ h_{\frac{2}{3}}^{-1} \|_k \leq C\,(1 + \|s_{U_2}\|_k)\,.$$

D'où pour $k \geq 1$:

$$\| \Big(\varphi_{f_0 \circ g_0} \circ \lambda \circ (\varphi_{f_0} \times \varphi_{g_0})^{-1}(s, \sigma) \Big)_{U_2} \|_k \leq C\,(1 + \|s_{U_2}\|_k + \|\sigma_{U_2}\|_k)\,.$$

En choisissant un bon atlas de M et des normes $\| \, . \, \|_{C^k}$ globales, on obtient pour $k \geq 1$:

$$\| \; (\varphi_{f_0 \circ g_0} \circ \lambda \circ (\varphi_{f_0} \times \varphi_{g_0})^{-1}(s, \sigma) \, \|_{C^k} \leq C\,(1 + \|s_{U_2}\|_{C^k} + \|\sigma_{U_2}\|_{C^k})\,.$$

Pour effectuer des estimations similaires sur les différentielles de λ, nous pouvons remarquer que la différentielle de λ consiste à composer et a différentier, opérations qui vérifient des estimations de même type que celles juste établies. Ainsi par récurrence, λ est une application lisse modérée.

Montrons que i est lisse.
Prenons une courbe lisse $\alpha \,:\, I \to \mathrm{Diff}(M)$ de $\mathrm{Diff}(M)$. Il nous suffit de montrer que l'application $(t, x) \in I \times M \to i(\alpha(t))(x)$ est lisse. Soit alors $(t_0, x_0) \in I \times M$. Nous pouvons considérer (U, φ) une carte de M en $\alpha^{\vee}(t_0, x_0) = \alpha(t_0)(x_0)$ ainsi que $\epsilon > 0$ et un ouvert V de M contenant $\alpha^{\vee}(t_0, x_0)$ et vérifiant :

$$\forall (t, x) \in]\, t_0 - \epsilon,\; t_0 + \epsilon\, [\times V, \quad \alpha^{\vee}(t, x) \in U\,.$$

Considérons alors l'application $\Xi \,:\,]\, t_0 - \epsilon,\; t_0 + \epsilon\, [\times \varphi(V) \times \varphi(V) \to \mathbb{R}^m$, $(t, x, y) \mapsto \varphi\Big(\alpha^{\vee}(t, \varphi^{-1}(y))\Big) - x$. Cette dernière vérifie :

- $\Xi\Bigg(t_0, \varphi(x_0), \varphi(i(\alpha(t_0))(x_0))\Bigg) = 0\,;$
- $\dfrac{\partial\, \Xi}{\partial y} = \varphi_* \alpha(t)_* \varphi_{*_y}^{-1}$ est un isomorphisme.

Ainsi, d'après le théorème des fonctions implicites (et notamment par son résultat d'unicité), il existe un voisinage W autour de $(t_0, \varphi(x_0))$ tel que l'application $(t, x) \in W \mapsto \varphi(i(\alpha(t))(x))$ soit lisse. Il s'ensuit que $i(\alpha(t))(x)$ est partout localement lisse en (t, x) ce qui implique que $i \,:\, \mathrm{Diff}(M) \to \mathrm{Diff}(M)$ est lisse.
Déterminons les différentielles de i .
Soit α une courbe lisse de $\mathrm{Diff}(M)$ telle que $\alpha(0) = f$ et $\dot{\alpha}(0) = s$. On a pour $x \in M$ et d'après la formule de différentiation de λ :

$$\begin{aligned}
\lambda(\alpha(t), i(\alpha(t)))(x)) = x \quad &\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\Big|_0 \lambda(\alpha(t), i(\alpha(t)))(x)) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lambda_{*_{(f, f^{-1})}}\,(s, i_{*_f}\, s) = 0 \\
&\Rightarrow \quad s(f^{-1}(x)) + f_{*_{f^{-1}(x)}}\,(i_{*_f}\, s)(x) = 0 \\
&\Rightarrow \quad (i_{*_f}\, s)(x) = -\Bigg(f_{*_{f^{-1}(x)}}\Bigg)^{-1} s(f^{-1}(x))
\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée.
Pour voir que l'application i est modérée, il suffit de procéder comme pour λ mais en appliquant le Corollaire B.25 ; la preuve étant plus simple mais tout autant pénible, nous l'omettrons.
Ainsi Diff(M) est un groupe de Lie modéré.

Montrons que le groupe de Lie Diff(M) admet une fonction exponentielle Exp. Rappelons qu'une fonction exponentielle d'un groupe de Lie Fréchétique G est une application lisse $exp\,:\,\mathfrak{g}:=\mathrm{Lie}(G)\to G$ telle que si $\xi\in\mathfrak{g}$, alors l'application $t\in\mathbb{R}\mapsto exp(t\xi)$ est un groupe à un paramètre passant par e, l'élément neutre de G, en $t=0$ et ayant pour vecteur tangent ξ en e. Vérifions donc que l'application $t\in\mathbb{R}\mapsto\varphi_t^X=:Exp(tX)\in\mathrm{Diff}(M)$ est un groupe à un paramètre de Diff(M) passant par Id en $t=0$ et y ayant pour vecteur tangent $X\in\mathcal{X}(M)$. On a évidemment $Exp(0\cdot X)=\varphi_0^X=Id$ et pour $t,s\in\mathbb{R}$, on a la relation $\varphi_{t+s}^X=\varphi_t^X\circ\varphi_s^X$, c'est-à-dire,

$$Exp\big((t+s)X\big)=Exp\big(tX\big)\cdot Exp\big(sX\big)\,.$$

De plus, il est clair que nous avons

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0 Exp(tX)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0\varphi_t^X=X\,.$$

Ainsi, l'application $Exp\,:\,\mathcal{X}(M)\to\mathrm{Diff}(M)$ est bien une application exponentielle du groupe Diff(M).

Déterminons l'action adjointe $Ad\,:\,\mathrm{Diff}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)$ de Diff(M). Notons pour $\varphi\in\mathrm{Diff}(M)$, c_φ l'application lisse définie par $c_\varphi\,:\,\mathrm{Diff}(M)\to\mathrm{Diff}(M)$, $\psi\mapsto\varphi\circ\psi\circ\varphi^{-1}$. On a pour $X\in\mathcal{X}(M)$,

$$Ad(\varphi)(X)=(c_\varphi)_{*_{Id}}X=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 c_\varphi(\varphi_t^X)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0\varphi\circ\varphi_t^X\circ\varphi^{-1}\,.$$

Or, pour $x\in M$, on a :

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_0\Big(\varphi\circ\varphi_t^X\circ\varphi^{-1}\Big)(x)=\varphi_{*_{\varphi^{-1}(x)}}X_{\varphi^{-1}(x)}=(\varphi_*X)_x\,.$$

Ainsi, $Ad(\varphi)(X)=\varphi_*X$.

Déterminons le crochet de Lie $[\;,\;]_{\mathrm{Diff}(M)}$ du groupe Diff(M). Pour $X,Y\in\mathcal{X}(M)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
[\,X,\,Y\,]_{\mathrm{Diff}(M)} &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 Ad(Exp(tX))(Y)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0 Exp(tX)_*Y\\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0(\varphi_t^X)_*Y=-\left.\frac{d}{dt}\right|_0(\varphi_{-t}^X)_*Y\\
&= -[\,X,\,Y\,]\,.
\end{aligned}$$

□

B.3.2 Le groupe SDiff(M)

Fixons une variété M compacte, connexe, sans bord, de dimension m et orientée par rapport à une certaine forme de volume μ (on suppose $Volume(M) = 1$). Nous pouvons alors considérer le groupe

$$\mathrm{SDiff}(M) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M) \,|\, \varphi^*\mu = \mu\}\,.$$

Le but de cette partie est de montrer que SDiff(M) est un groupe de Lie modéré. Pour cela, il nous faut quelques résultats de base sur les opérateurs elliptiques. Rappelons que si E_1 et E_2 sont deux fibrés vectoriels au dessus de M, alors un opérateur différentiel linéaire d'ordre $k \in \mathbb{N}$ entre E_1 et E_2 est une application linéaire $D : \Gamma_{C^\infty}(M, E_1) \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$ telle que dans une carte trivialisante (U, φ) pour les deux fibrés on ait :

$$(D\,s)_U = \sum_{|\alpha| \leq\, k} A_\alpha\, D^\alpha s_U$$

où, pour α un multi-indice, on a :

- $A_\alpha \,:\, \varphi(U) \to L(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^q)$ avec rang$(E_1) = r$ et rang$(E_2) = q$;
- $D^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_m}^{\alpha_m}} := \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\dfrac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m}$.

Nous pouvons noter immediatement qu'un opérateur différentiel linéaire d'ordre k vérifie $\|D\,s\|_{C^n} \leq C\,\|s\|_{C^{n+k}}$, pour $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$, $n \in \mathbb{N}$. En particulier, c'est une application lisse modérée.
Si l'on considére le fibré des jets $J^k(E_1)$ (voir par exemple [Pal68], [Pal65], [Mic80], [Ebi72]), alors il existe une correspondance biunivoque entre opérateurs différentiels linéaires d'ordre k et l'espace des sections du fibré $Hom(J^k(E_1), E_2)$. Un diagramme commutatif représente la situation :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{C^\infty}(M, E_1) \arrow[rr, "L(\tau)"] \arrow[dr, "j_k"'] & & \Gamma_{C^\infty}(M, E_2) \\
& \Gamma_{C^\infty}(M, J^k(E_1)) \arrow[ur, "\tilde{\tau}"'] &
\end{tikzcd}$$

où $\tau \in \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2))$ et où $L(\tau)$ représente l'opérateur différentiel linéaire d'ordre k associé à τ, $\tilde{\tau}$ désigne l'opérateur de fibrés associé à τ vu comme élément de $Hom(J^k(E_1), E_2)$ et où j_k est l'opérateur différentiel universel d'ordre k (voir [Ebi72]). On définit ainsi une application

$$L \,:\, \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2)) \times \Gamma_{C^\infty}(M, E_1) \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)\,.$$

Rappelons aussi qu'a tout opérateur différentiel linéaire $D \,:\, \Gamma_{C^\infty}(M, E_1) \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$ d'ordre k , on peut associer son symbole principal $\sigma(D)$ défini pour $x \in M, \theta_x \in \Omega^1(M)_x$ et $e \in (E_1)_x$ par

$$\sigma(D)(\theta_x, e) = D\left(\frac{1}{k!} f^k s\right)(x)$$

où $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ vérifie $(df)(x) = \theta_x$, $f(x) = 0$ et $s(x) = e$. On peut donc voir le symbole de D comme une application

$$\sigma(D) \,:\, \Omega^1(M) \to \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(E_1, E_2))\,.$$

On dit alors que l'opérateur D est elliptique si $\sigma(D)(\theta)(x) \in Hom((E_1)_x, (E_2)_x)$ est inversible pour tout $\theta \in \Omega^1(M)$ et $x \in M$ des que θ_x est non nul. Vu cette dernière condition, il est alors clair que l'ensemble $\mathcal{U}$ des sections τ de $Hom(J^k(E_1), E_2)$ vérifiant que $L(\tau) \,:\, \Gamma_{C^\infty}(M, E_1) \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$ est inversible et elliptique est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2))$. Nous pouvons donc considérer la famille d'inverses

$$S \,:\, \big(\mathcal{U} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(M, L(J^k(E_1), E_2))\big) \times \Gamma_{C^\infty}(M, E_2) \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$$

définie par

$$S(\tau)g = h \Leftrightarrow g = L(\tau)h$$

pour $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$ et $g \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$.
Un des premiers objectifs est de montrer que S est une application lisse modérée. Pour ce faire, nous devons utiliser deux graduations distinctes sur les espaces de sections. Sur $\Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2))$ nous continuerons d'utiliser des normes $\| \,.\, \|_{C^n}$ comme nous l'avons toujours fait, mais sur les espaces $\Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$ et $\Gamma_{C^\infty}(M, E_2)$, nous considèrerons les normes $\| \,.\|_{H^n}$ qui mesurent les dérivées jusqu'a l'ordre n en L^2. En procédant comme pour les normes $\| \,.\, \|_{C^n}$ (voir Lemme B.1), on pourrait partir de semi-normes

$$p^{H^2(M)}_{U,K,i,\alpha}(s) = \left(\int_{\varphi(K)} |\, D^\alpha s^i_U(x) \,|^2 dx \right)^2$$

est après définir $\| \,.\|_{H^n}$ comme nous l'avons fait pour $\| \,.\, \|_{C^n}$.
Pour montrer que S est modérée, nous avons juste besoin des trois propriétés suivantes :

(i) les inégalités d'interpolation des corollaires B.22 et B.23 restent valables avec cette nouvelle graduation (voir [Ada]) ;

(ii) étant donnée la forme locale d'un opérateur différentiel linéaire d'ordre k, on a évidemment l'inégalité :

$$\|L(\tau)h\|_{H^0} \leq C\|\tau\|_{C^0} \cdot \|h\|_{H^k}$$

pour $\tau \in \mathcal{U} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2))$ et $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$;

(iii) on a l'inégalité suivante, que l'on peut retrouver à partir du chapitre X de [Fol95] :

$$\|h\|_{H^k} \leq C(\, \|L(\tau)h\|_{H^0} + \|h\|_{H^0}\,)$$

pour $\tau \in \mathcal{U}$ et $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$.

Lemme B.36 *Si $\tau_0 \in \mathcal{U}$, alors il existe $\epsilon > 0$ et une constante $C = C(\tau_0, \epsilon) > 0$ tels que si $\|\tau - \tau_0\|_{C^0} < \epsilon$, alors $\tau \in \mathcal{U}$ et pour tout $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$:*

$$\|h\|_{H^k} \leq C\, \|L(\tau)h\|_{H^0}\,.$$

Démonstration. Soit $\tau \in \mathcal{U}$ proche de τ_0. On a d'après (ii) et (iii) :

$$\begin{aligned}\|h\|_{H^k} &\leq C\,\|L(\tau_0)h\|_{H^0} = C\,\|L(\tau_0-\tau)h + L(\tau)h)\|_{H^0}\\ &\leq C\,\|L(\tau_0-\tau)h\|_{H^0} + C\,\|L(\tau)h\|_{H^0}\\ &\leq C\,\|\tau_0-\tau\|_{C^0}\cdot\|h\|_{H^k} + C\,\|L(\tau)h\|_{H^0}\,.\end{aligned}$$

Prenons $\|\tau_0 - \tau\| \leq \dfrac{1}{2C} =: \epsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned} &\|h\|_{H^k} \leq \frac{1}{2}\|h\|_{H^k} + C\,\|L(\tau)h\|_{H^0}\\ \Rightarrow\quad &\|h\|_{H^k} \leq C\,\|L(\tau)h\|_{H^0}\,.\end{aligned}$$

□

Avant de poursuivre, introduisons quelques éléments qui vont nous permettre de faciliter les calculs. Prenons deux connections ∇^{E_1} et ∇^{E_2} sur E_1 et E_2. Si $X \in \mathcal{X}(M)$ est un champ de vecteurs sur M, alors $\nabla_X^{E_i} : \Gamma_{C^\infty}(M, E_i) \to \Gamma_{C^\infty}(M, E_i)$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1. En effet, si $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_i)$ et $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ sont tels que $s(x) = 0$ et $f(x) = 0$ pour un certain $x \in M$, alors

$$(\nabla_X^{E_i}(f\cdot s))(x) = (df)_x(X)\underbrace{s(x)}_{=0} + \underbrace{f(x)}_{=0}(\nabla_X^{E_i}s)(x) = 0\,.$$

Ceci prouve que $\nabla_X^{E_i}$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1 (voir [Pal65], chapitre IV, Théorème 5). Pour calculer le symbole principal de $\nabla_X^{E_i}$, prenons $x \in M, f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ et $s \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_i)$ tels que $f(x) = 0$, $(df)(x) = \theta_x$ ($\theta \in \Omega^1(M)$) et $s(x) = e$. On a alors

$$\begin{aligned}\Big(\sigma(\nabla_X^{E_i})(\theta)(x)\Big)(e) &= \Big(\nabla_X^{E_i}(f\cdot s)\Big)(x)\\ &= \underbrace{(df)_x}_{=\theta_x}(X)\underbrace{s(x)}_{e} + \underbrace{f(x)}_{=0}(\nabla_X^{E_i}s)(x)\\ &= \theta_x(X)e\,.\end{aligned}$$

Avec des notations évidentes, nous avons donc $\sigma(\nabla_X^{E_i})(\theta) = \theta(.)\,Id$. En particulier, l'expression du symbole principal d'ordre $k+1$ de

$$\nabla_X^{E_2}\circ L(\tau) - L(\tau)\circ\nabla_X^{E_1}$$

est zero. Ainsi $\nabla_X^{E_2}\circ L(\tau) - L(\tau)\circ\nabla_X^{E_1}$ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre au plus k et nous pouvons écrire de manière unique :

$$\nabla_X^{E_2}\circ L(\tau) - L(\tau)\circ\nabla_X^{E_1} = L(\Lambda(\tau))$$

où $\Lambda : \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2)) \to \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2))$ est une application linéaire. En fait, Λ est même un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1. En effet, prenons $\tau \in \Gamma_{C^\infty}(M, Hom(J^k(E_1), E_2))$ et $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. On a :

$$L(\Lambda(f\cdot\tau)) = \nabla_X^{E_2}\circ L(f\cdot\tau) - L(f\cdot\tau)\circ\nabla_X^{E_1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_X^{E_2}\Big(f \cdot L(\tau)\Big) - f \cdot L(\tau) \circ \nabla_X^{E_1} \\
&= (df)(X) \cdot L(\tau) + f \cdot \nabla_X^{E_2} \circ L(\tau) - f \cdot L(\tau) \circ \nabla_X^{E_1} \\
&= L\Big((df)(X) \cdot \tau\Big) + f \cdot \Big(\nabla_X^{E_2} \circ L(\tau) - L(\tau) \circ \nabla_X^{E_1}\Big) \\
&= L\Big((df)(X) \cdot \tau\Big) + f \cdot L(\Lambda(\tau)) \\
&= L\Big((df)(X) \cdot \tau + f \cdot \Lambda(\tau)\Big) .
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\Lambda(f \cdot \tau) = (df)(X) \cdot \tau + f \cdot \Lambda(\tau)$, ce qui, par un argument de même type que précédemment, implique que Λ est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1. De plus, il est clair que si nous choisissons un nombre fini de champs de vecteurs X_a engendrant $(TM)_x$ en chaque point x de M, alors nous pouvons trouver $C > 0$ telle que

$$
\|h\|_{H^{n+1}} \leq C \left(\|h\|_{H^n} + \sum_a \|\nabla_{X_a}^{E_i} h\|_{H^n}\right)
$$

pour $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_i)$.
D'autre part, nous avons l'inégalité suivante :

$$
\|L(\tau)h\|_{H^n} \leq C \left(\|h\|_{H^{n+k}} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^k}\right) \qquad (*)
$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathcal{U}$ telle que $\|\tau - \tau_0\|_{H^0} < \epsilon$ et $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$. Celle-ci se voit par récurrence sur n . Le résultat est évidemment vrai pour $n = 0$. Supposons le donc vrai au rang n . D'aprés une inégalité précédente appliquée à $L(\tau)h$, on a :

$$
\|L(\tau)h\|_{H^{n+1}} \leq C \left(\|L(\tau)h\|_{H^n} + \sum_a \|\nabla_{X_a}^{E_2} L(\tau)h\|_{H^n}\right) .
$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence,

$$
\begin{aligned}
\|L(\tau)h\|_{H^n} &\leq C \left(\|h\|_{H^{n+k}} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^k}\right) \\
&\leq C \left(\|h\|_{H^{n+k+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k}\right)
\end{aligned}
$$

et si l'on utilise à nouveau l'hypothèse de récurrence ainsi que la définition de Λ, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_X^{E_2} L(\tau)h\|_{H^n} &= \|L(\Lambda(\tau))h + L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^n} \\
&\leq \|L(\Lambda(\tau))h\|_{H^n} + \|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^n} \\
&\leq C \Big(\|h\|_{H^{n+k}} + \|\Lambda(\tau)\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^k} + \\
&\qquad \|\nabla_X^{E_1} h\|_{H^{n+k}} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|\nabla_X^{E_1} h\|_{H^k}\Big) \\
&\leq C \Big(\|h\|_{H^{n+k+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k} + \\
&\qquad \|h\|_{H^{n+k+1}} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^{k+1}}\Big) \\
&\leq C \left(\|h\|_{H^{n+k+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^{k+1}}\right) .
\end{aligned}
$$

Or les inégalités d'interpolation nous donnent :

$$\|\tau\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^{k+1}} \leq C \left(\|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k} + \underbrace{\|\tau\|_{C^0}}_{\leq C} \cdot \|h\|_{H^{n+k+1}} \right).$$

D'où

$$\|\nabla_X^{E_2} L(\tau)h\|_{H^n} \leq C \left(\|h\|_{H^{n+k+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k} \right)$$

et par suite

$$\|L(\tau)h\|_{H^{n+1}} \leq C \left(\|h\|_{H^{n+k+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k} \right).$$

Lemme B.37 *Si $\|\tau - \tau_0\|_{H^0} < \epsilon$ et $L(\tau)h = g$, alors*

$$\|h\|_{H^{n+k}} \leq C \left(\|g\|_{H^n} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|g\|_{H^0} \right).$$

Démonstration. Nous allons effectuer une récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n = 0$ d'après le Lemmme B.36. Supposons le donc vrai au rang n. Nous avons donc, pour $h \in \Gamma_{C^\infty}(M, E_1)$,

$$\|h\|_{H^{n+k}} \leq C \left(\|L(\tau)h\|_{H^n} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|L(\tau)h\|_{H^0} \right)$$

d'où

$$\|\nabla_X^{E_1} h\|_{H^{n+k}} \leq C \left(\|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^n} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^0} \right). \quad (**)$$

Maintenant, d'après l'inégalité $(*)$ et toujours par la définition de Λ, nous avons :

$$\begin{aligned} \|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^n} &\leq \|\nabla_X^{E_2} L(\tau)h\|_{H^n} + \|L(\Lambda(\tau))h\|_{H^n} \\ &\leq C \left(\|\nabla_X^{E_2} g\|_{H^n} + \|h\|_{H^{n+k}} + \|\Lambda(\tau)\|_{C^n} \cdot \|h\|_{H^k} \right) \\ &\leq C \left(\|g\|_{H^{n+1}} + \|h\|_{H^{n+k}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|h\|_{H^k} \right) \end{aligned}$$

Nous pouvons poursuivre cette inégalité en utilisant l'estimation sur $\|h\|_{H^k}$ du Lemme B.36 ainsi que l'hypothèse de récurrence sur $\|h\|_{H^{n+k}}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^n} \\ \leq\ & C \left(\|g\|_{H^{n+1}} + (\|g\|_{H^n} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|g\|_{H^0}) + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|g\|_{H^0} \right) \\ \leq\ & C \left(\|g\|_{H^{n+1}} + \|g\|_{H^{n+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|g\|_{H^0} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|g\|_{H^0} \right) \\ \leq\ & C \left(\|g\|_{H^{n+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|g\|_{H^0} \right). \end{aligned}$$

D'où, en revenant à $(**)$ et en utilisant cette dernière inégalité au rang 0 et n, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \|\nabla_X^{E_1} h\|_{H^{n+k}} \\ \leq\ & C \left(\|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^n} + \|\tau\|_{C^n} \cdot \|L(\tau)\nabla_X^{E_1} h\|_{H^0} \right) \\ \leq\ & C \left(\|g\|_{H^{n+1}} + \|\tau\|_{C^{n+1}} \cdot \|g\|_{H^0} + \|\tau\|_{C^n} \cdot (\|g\|_{H^1} + \|\tau\|_{C^1} \cdot \|g\|_{H^0}) \right). \end{aligned}$$

On a alors par interpolation :

$$\begin{aligned}\|\tau\|_{C^n}\cdot\|g\|_{H^1} &\leq C\Big(\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}+\|\tau\|_{C^0}\cdot\|g\|_{H^{n+1}}\Big)\\ \textit{et}\ \|\tau\|_{C^n}\cdot\|\tau\|_{C^1} &\leq C\,\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|\tau\|_{C^0}\,,\end{aligned}$$

et puisque $\|\tau\|_{C^0}<C$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\|\nabla^{E_1}_X h\|_{H^{n+k}} &\leq C\Big(\|g\|_{H^{n+1}}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}\\ &+\ \|\tau\|_{C^0}\cdot\|g\|_{H^{n+1}}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}\Big)\\ &\leq C\Big(\|g\|_{H^{n+1}}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}\Big)\,.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\|h\|_{H^{n+k+1}} &\leq C\Big(\|h\|_{H^{n+k}}+\sum_a\|\nabla^{E_1}_{X_a}h\|_{H^{n+k}}\Big)\\ &\leq C\Big(\|h\|_{H^{n+k+1}}+\|g\|_{H^{n+1}}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}\Big)\\ &\Rightarrow (1-C)\cdot\|h\|_{H^{n+k+1}}\leq C\Big(\|g\|_{H^{n+1}}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}\Big)\\ &\Rightarrow \|h\|_{H^{n+k+1}}\leq C\Big(\|g\|_{H^{n+1}}+\|\tau\|_{C^{n+1}}\cdot\|g\|_{H^0}\Big)\end{aligned}$$

□

Proposition B.38 *L'application* $S:\mathcal{U}\times\Gamma_{C^\infty}(M,E_2)\to\Gamma_{C^\infty}(M,E_1)$ *est une application lisse modérée.*

Démonstration. Prenons $\tau_0\in\mathcal{U}$ et $\epsilon>0$ comme dans le Lemme B.36 et $g_0\in\Gamma_{C^\infty}(M,E_2)$. Alors, pour $\|\tau-\tau_0\|_{C^0}<\epsilon$ et $\|g-g_0\|_{H^0}<\epsilon$, on a d'après le Lemme B.37 :

$$\begin{aligned}\|S(\tau)g\|_{H^{n+k}} &\leq C\Big(\|g\|_{H^n}+\|\tau\|_{C^n}\cdot\underbrace{\|g\|_{H^0}}_{<C}\Big)\\ &\leq C\Big(1+\|g\|_{H^n}+\|\tau\|_{C^n}\Big)\,.\end{aligned}$$

Notons aussi que S est continue. Montrons que S est lisse modérée. Prenons $\tau\in\mathcal{U},\ \ \sigma\in\Gamma_{C^\infty}\big(M,Hom\big(J^k(E_1),E_2\big)\big),\ \ h,g\in\Gamma_{C^\infty}(M,E_2)$ et $t\in\mathbb{R}$. On a par continuité de S :

$$\begin{aligned}&\frac{S(\tau+t\sigma)(h+tg)-S(\tau)(h)}{t}\\ =\ &\frac{S(\tau+t\sigma)h-S(\tau)h}{t}+S(\tau+t\sigma)g\\ =\ &S(\tau+t\sigma)\left(\frac{h-L(\tau+t\sigma)S(\tau)h}{t}\right)+S(\tau+t\sigma)g\\ =\ &S(\tau+t\sigma)\left(\frac{L(\tau)S(\tau)h-L(\tau+t\sigma)S(\tau)h}{t}\right)+S(\tau+t\sigma)g\\ =\ &-S(\tau+t\sigma)\left(\frac{L(\tau+t\sigma)S(\tau)h-L(\tau)S(\tau)h}{t}\right)+S(\tau+t\sigma)g\\ \underset{t\to0}{\longrightarrow}\ &-S(\tau)DL(\tau,S(\tau)h)\{(\sigma,S(\tau)h)\}+S(\tau)g\,.\end{aligned}$$

Remarquons que L est évidemment une application lisse et surtout modérée comme nous pouvons le déduire à partir de l'estimation $(*)$. Ainsi l'application S est différentiable et sa différentielle ne fait intervenir que S qui est continue et vérifie l'inégalité précédente et L qui est une application lisse modérée. On en déduit par récurrence que S est lisse modérée. $\square$

Remarque B.39 *Cette dernière proposition nous autorise donc à utiliser le Théorème d'inversion de Nash-Moser pour une application lisse modérée dont les différentielles forment localement une famille d'opérateurs elliptique inversibles.*

Lemme B.40 *Soit $D : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ un opérateur différentiel linéaire elliptique d'ordre 2 prenant localement la forme :*

$$(Df)_U = \sum_{i,j=1}^{m} a^{ij}(x)\frac{\partial^2 f_U}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b^i(x)\frac{\partial f_U}{\partial x_i}.$$

Alors le noyau de D est constitué des constantes réelles.

Démonstration. Soit $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ telle que $Df = 0$. Supposons que f atteigne son maximum en $x_0 \in M$. Considérons l'ensemble

$$A := \{x \in M \mid f(x) = f(x_0)\}.$$

Cet ensemble est évidemment fermé dans M. Prenons alors $x \in A$, (U,φ) une carte de M en x et V un ouvert relativement compact de U tel que $\bar{V} \subseteq U$ et $x \in V$. On a alors $f_V = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(V) \to \mathbb{R}$ atteind son maximum dans l'intérieur de $\varphi(V)$ alors que localement sur $\varphi(V)$, l'opérateur D vérifie toutes les conditions du Théorème 24.10 de [Jos03]. On en déduit par ce théorème que f_V est constant et donc f est constant sur V. Par suite, puisque M est connexe, $A = M$ et ainsi $f \equiv f(x_0)$. $\square$

Enfin, il nous faut encore parler des opérateurs différentiels non linéaires de degré k entre deux espaces de sections. Un tel opérateur est une application $D : \mathcal{U} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(M,E_1) \to \Gamma_{C^\infty}(M,E_2)$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\Gamma_{C^\infty}(M,E_1)$ et telle $(Ds)(x)$ est une application lisse de s et de ses dérivées partielles de degré au plus k en x dans des cartes. Cela signifie, si l'on utilise le langage des jets, qu'il existe un morphisme de fibrés (non linéaire) $p : J^k(E_1) \to E_2$ et tel que, en notant $\mathcal{P} : \Gamma_{C^\infty}(M,J^k(E_1)) \to \Gamma_{C^\infty}(M,E_2)$ l'opérateur de fibrés associé à p, on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \subseteq \Gamma_{C^\infty}(M,E_1) \arrow[rr, "D"] \arrow[dr, "j_k"'] & & \Gamma_{C^\infty}(M,E_2) \\
& \Gamma_{C^\infty}(M,J^k(E_1)) \arrow[ur, "\mathcal{P}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi D est une application lisse modérée puisque $D = \mathcal{P} \circ j_k$ où j_k est un opérateur différentielle linéaire et que $\mathcal{P}$ est un opérateur de fibrés vectoriels (voir Proposition B.27).

Nous arrivons au résultat majeur de cet appendice :

Théorème B.41 *Le groupe SDiff(M) est un sous-groupe de Lie modéré du groupe Diff(M).*

Démonstration. Il nous suffit d'exhiber une carte de SDiff(M) en Id_M, ce que nous allons faire grâce au Théorème d'inversion de Nash-Moser.
Prenons une métrique g sur M telle que la forme volume induite par g soit précisément μ. Notons $\Phi\ :\ \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathrm{Diff}(M)$ l'application de carte de Diff(M) où $\mathcal{U}$ est un ouvert de $\mathcal{X}(M)$ et Φ l'application définie pour $X \in \mathcal{X}(M)$ et $x \in M$ par

$$\Phi(X)(x) = exp_x(X_x)\,.$$

Définissons alors l'application $P\,:\, \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ par :

$$\Phi(X)^*\mu = P(X)\cdot \mu\,,$$

pour $X \in \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}(M)$ et où μ est la forme volume canonique de M associée à la métrique g.
Montrons que P est un opérateur différentiel non-linéaire d'ordre 1. Dans une carte orientée de coordonnées locales associées $(x_1, ..., x_m)$ (on note $\mu = \sqrt{|g|}\cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m$ et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$) nous avons :

$$\begin{aligned}
& P(X)(x)\cdot \mu_x(\partial_1, \ldots, \partial_m) = (\Phi(X)^*\mu)_x(\partial_1, \ldots, \partial_m)\\
\Rightarrow\quad & P(X)(x)\cdot \sqrt{|g|}(x) = \mu_{\Phi(X)(x)}(\Phi(X)_*\partial_1, \ldots, \Phi(X)_*\partial_m)\\
\Rightarrow\quad & P(X)(x)\cdot \sqrt{|g|}(x) = \big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X)\big)(x)\cdot \mathrm{Jac}\,\Phi(X)(x)\\
\Rightarrow\quad & P(X)(x) = \frac{\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X)\big)(x)\cdot \mathrm{Jac}\,\Phi(X)(x)}{\sqrt{|g|}(x)}
\end{aligned}$$

pour x appartenant à cette carte. Si nous notons $\Phi(X)(x) = exp(x, X_x)$, alors :

$$\Phi(X)_{*_x} = \frac{\partial\, exp}{\partial x}(x, X_x) + \frac{\partial\, exp}{\partial v}(x, X_x)\cdot \frac{\partial\, X}{\partial\, x}$$

la dérivée selon v signifiant que l'on dérive par rapport à la deuxième variable.
C'est par cette expression que l'on peut constater que P est un opérateur différentiel non-linéaire d'ordre 1.
Regardons les différentielles de P. Prenons $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ et $x \in \mathbb{R}$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\bigg|_0 P(X+tY)(x) &= \frac{\frac{d}{dt}\Big|_0 \Bigg(\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X+tY)\big)(x)\cdot \Big(\mathrm{Jac}\,\Phi(X+tY)\Big)(x)\Bigg)}{\sqrt{|g|}(x)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}(x)}\cdot \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Big(\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X+tY)\big)(x)\Big)\cdot \Big(\mathrm{Jac}\,\Phi(X)\Big)(x)\\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{|g|}(x)}\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X)\big)(x)\cdot \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Big(\mathrm{Jac}\,\Phi(X+tY)(x)\Big)\\
&= \frac{P(X)(x)}{\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X)\big)(x)}\cdot \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Big(\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X+tY)\big)(x)\Big)\\
&\qquad + \frac{P(X)(x)}{\big(\mathrm{Jac}\,\Phi(X)\big)(x)}\cdot \frac{d}{dt}\bigg|_0 \Big(\mathrm{Jac}\,\Phi(X+tY)(x)\Big).
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{\frac{d}{dt}\Big|_0 \Big(\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X+tY)\big)(x)\Big)}{\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X)\big)(x)} = \frac{d\Big(\sqrt{|g|}\Big)_{\Phi(X)(x)} \cdot \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(X+tY)(x)}{\big(\sqrt{|g|}\circ \Phi(X)\big)(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= d\Big(\ln(\sqrt{|g|})\Big)_{\Phi(X)(x)} \frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(X+tY)(x) \\
&= d(\ln(\sqrt{|g|}))_{\Phi(X)(x)} \frac{d}{dt}\Big|_0 exp(x, X+tY) \\
&= d\Big(\ln(\sqrt{|g|})\Big)_{\Phi(X)(x)} \frac{\partial\, exp}{\partial v}(x, X_x)\cdot Y_x
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_0 \Big(\mathrm{Jac}\,\Phi(X+tY)(x)\Big) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 det\Big(\Phi(X+tY)_{*_x}\Big) \\
&= \det\Big(\Phi(X)_{*_x}\Big)\cdot \mathrm{Trace}\Big(\Phi(X)_*^{-1}\frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(X+tY)_{*_x}\Big) \\
&= \mathrm{Jac}\Big(\Phi(X)\Big)(x)\cdot \mathrm{Trace}\Big(\Phi(X)_*^{-1}\frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(X+tY)_{*_x}\Big)\,.
\end{aligned}$$

On en conclut que :

$$\begin{aligned}
\Big((DP)(X)\{Y\}\Big)(x) &= \frac{d}{dt}\Big|_0 P(X+tY)(x) \\
&= P(X)\Big[d\Big(\ln(\sqrt{|g|})\Big)_{\Phi(X)(x)} \frac{\partial\, exp}{\partial v}(x, X_x)Y_x \\
&\quad +\mathrm{Trace}\Big(\Phi(X)_*^{-1}\frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(X+tY)_{*_x}\Big)\Big],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\Big|_0 \Phi(X+tY)_{*_x} \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_0 \Big(\frac{\partial\, exp}{\partial x}(x, X_x+tY_x) + \frac{\partial\, exp}{\partial v}(x, X_x+tY_x)\cdot\frac{\partial\,(X_x+tY_x)}{\partial x}\Big) \\
&= \frac{\partial^2 exp}{\partial x\,\partial v}(x, X_x)\cdot Y_x + \frac{\partial^2 exp}{\partial v^2}(x, X_x)\cdot\frac{\partial\, X}{\partial x}\cdot Y_x + \frac{\partial\, exp}{\partial v}(x, X_x)\cdot \frac{\partial\, Y}{\partial x}\,.
\end{aligned}$$

Il apparait que $DP(X)\{Y\}$ forme une famille d'opérateurs différentielles linéaires en Y dont les coefficients sont des opérateurs différentiels non-linéaires d'ordre 1 en X.

Pour $X=0$, on a $P(X)\equiv 1, \Phi(X) = Id_M, \frac{\partial\, exp}{\partial v}(x,0) = Id_{T_xM}$ et $\frac{\partial^2 exp}{\partial x\,\partial v}(x,0) = 0$. Ainsi, d'après une formule classique de géométrie différentielle (voir par exemple [Lee03], page 384),

$$\Big(DP(0)\{Y\}\Big)(x) = \mathrm{Trace}\Big(\frac{\partial\, Y}{\partial x}(x)\Big) + d\Big(\ln(\sqrt{|g|})\Big)_x\cdot Y_x$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x_i} + \Big(\frac{1}{\sqrt{|g|}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{|g|}) \Big) Y^i \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{|g|} \cdot Y^i \right) \\
&= \Big(\mathrm{div}_\mu(Y) \Big)(x)
\end{aligned}
$$

où $\mathrm{div}_\mu(Y)$ désigne la divergence du champ de vecteurs Y par rapport à la mesure μ.
Rappelons que

$$\mathcal{X}(M,\mu) = \{X \in \mathcal{X}(M) \,|\, \mathrm{div}_\mu(X) = 0\}$$

et

$$C_0^\infty(M,\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(M,\mathbb{R}) \,|\, \textstyle\int_M f \cdot \mu = 0\}\,.$$

Nous savons d'après la décomposition de Helmholtz-Hodge (voir [Arn66], page 341 ou [dR84]), que nous pouvons écrire

$$\mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M,\mu) \oplus \nabla\big(C^\infty(M,\mathbb{R})\big),$$

ce qui, puisque l'on a un isorphisme canonique entre $\nabla\big(C^\infty(M,\mathbb{R})\big)$ et $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$, nous permet d'identifier $\mathcal{X}(M)$ avec $\mathcal{X}(M,\mu)\oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ et de définir l'application $Q : \mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}(M) = \mathcal{X}(M,\mu) \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathcal{X}(M,\mu) \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ par

$$Q(X,f) := (X, P(X + \nabla f) - 1)$$

pour $X \in \mathcal{X}(M,\mu)$ et $f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R})$. Si l'on montre que Q est un difféomorphisme local au voisinage du champ de vecteurs 0, alors l'application $\Phi \circ Q^{-1}$ sera une application de carte de Diff(M) faisant de SDiff(M) une sous variété de Diff(M). En effet, si $(X,0) \in \mathcal{X}(M,\mu)\oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})$, notons $(Y,f) := Q^{-1}(X,0)$. On a alors :

$$
\begin{aligned}
& (Y,f) := Q^{-1}(X,0) \\
\Leftrightarrow\ & Q(Y,f) = (X,0) \\
\Leftrightarrow\ & (Y, P(Y + \nabla f) - 1) = (X,0) \\
\Leftrightarrow\ & X = Y \quad \text{et} \quad P(X + \nabla f) = 1\,.
\end{aligned}
$$

Ceci entraine par définition de P, que $\Phi(X + \nabla f)^* \mu = P(X + \nabla f) \cdot \mu = \mu$, ce qui veut dire que $\Phi(X + \nabla f) = \big(\Phi \circ Q^{-1}\big)(X,0) \in \mathrm{SDiff}(M)$. Ainsi, $\big(\Phi \circ Q^{-1}\big)(\Theta \cap (\mathcal{X}_\mu(M) \oplus 0)) \subseteq \mathrm{SDiff}(M)$ où Θ est un certain voisinage de 0 dans $\mathcal{X}(M,\mu) \oplus C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ sur lequel Q^{-1} est un difféomorphisme.

Montrons donc que Q est un difféomorphisme au voisinage de 0. Pour appliquer le théorème de Nash-Moser, nous devons regarder les différentiels de Q sur un voisinage de 0. Pour $X, Y \in \mathcal{X}(M,\mu)$, $f, h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, nous avons

$$DQ(X,f)\{Y,h\} = (Y, DP(X + \nabla f)(Y + \nabla h))$$

et donc si nous voulons inverser DQ, il nous faut résoudre l'équation

$$DQ(X,f)\{Y,h\} = (\mathcal{Y}, k)\,,$$

c'est-à-dire, il faut trouver h tel que

$$DP(X + \nabla f)\nabla h = k - DP(X + \nabla f)Y \, .$$

Soyons plus précis sur le deuxième membre. Nous avons $k \in C_0^\infty(M, \mathbb{R})$. Pour ce qui est de $DP(X + \nabla f)Y$, nous pouvons remarquer que pour un champ de vecteurs Z,

$$\begin{aligned}\Phi(Z)^*\mu = P(Z) \cdot \mu \quad &\Rightarrow \quad \int_M \Phi(Z)^*\mu = \int_M P(Z) \cdot \mu \\ &\Rightarrow \quad \int_M P(Z) \cdot \mu = \pm 1\end{aligned}$$

le signe dépendant de la préservation ou non de l'orientation de M par $\Phi(Z)$. Ainsi, pour Z proche de 0 et grâce à la continuité nous avons :

$$\int_M P(Z) \cdot \mu = \int_M P(0) \cdot \mu = \int_M \mu = 1 \, .$$

On en déduit que pour Z petit, $P(Z) \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}) + 1$ ce qui implique que $DP(Z)$ est à valeurs dans $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$. Il en résulte que pour X et f petit, $DP(X + \nabla f)$ est un opérateur à valeurs de $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ et par suite, $k - DP(X + \nabla f)Y \in C_0^\infty(M, \mathbb{R})$.
Le bon point de vu est donc de regarder $DP(X + \nabla f)\nabla$ comme un opérateur différentiel linéaire d'ordre 2 de $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ dans lui même et de montrer qu'il est inversible. L'injectivité résulte de la présence du gradient qui donne une forme locale à cet opérateur satisfaisant le Lemme B.40. Une fonction g de $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ appartenant au noyau de cet opérateur est donc une constante, et la seule constante de $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ est 0.
Pour la surjectivité, nous pouvons remarquer que $DP(0) \circ \nabla = \mathrm{div}_\mu \circ \nabla = \triangle$ qui est un opérateur elliptique. Pour X et f petit, l'opérateur $DP(X + \nabla f) \circ \nabla$ reste donc elliptique et admet le même indice que $\triangle$ restreint à $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$. Or, évidemment le noyau de $\triangle$ restreint à $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ est nul et $\triangle$ est surjective sur l'espace $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ puisque pour des fonctions lisses, l'equation $\triangle u = v$ admet une solution si et seulement si $\int_M v \cdot \mu = 0$ (voir [Heb96]). Il en résulte que l'indice de $\triangle$ sur $C_0^\infty(M, \mathbb{R})$ est 0. Par suite, $DP(X + \nabla f) \circ \nabla$ est injective et d'indice nul, d'où la bijectivité.
Enfin $DP(X + \nabla f) \circ \nabla$ constitue une famille inversible d'opérateurs différentiels linéaires elliptiques. Par la Proposition B.38, on en déduit que la famille des inverses est lisse modérées ce qui permet d'appliquer le théorème d'inversion de Nash-Moser à Q, ce qui termine la démonstration. $\square$

Bibliographie

[ACMM89] M. C. Abbati, R. Cirelli, A. Manià, and P. Michor. *The Lie group of automorphisms of a principal bundle.* J. Geom. Phys., 6(2) :215–235, 1989.

[Ada] R. A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, New York-London. Pure and Applied Mathematics, Vol. 65.

[AK98] V. I. Arnold and B. A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1998.

[AM78] R. Abraham and J. E. Marsden. *Foundations of mechanics.* Benjamin/Cummings Publishing Co., Reading, Mass., 1978. Second edition, revised and enlarged, With the assistance of Tudor Ratiu and Richard Cushman.

[AMR88] R. Abraham, J. E. Marsden, and T. Ratiu. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.

[Arn66] V. Arnold. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 16(fasc. 1) :319–361, 1966.

[BG92] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces.* Presses Universitaires de France, Paris, second edition, 1992.

[Bry93] Jean-Luc Brylinski. *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*, volume 107 of Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993.

[dC92] M. P. do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[Die72] J. Dieudonné. *Treatise on analysis. Vol. III.* Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-III.

[dR84] G. de Rham. *Differentiable manifolds, forms, currents, harmonic forms*, volume 266 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Translated from the French by F. R. Smith, With an introduction by S. S. Chern.

[Ebi72] D. G. Ebin. *Espace des métriques riemanniennes et mouvement des fluides via les variétés d'applications.* Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique et Université Paris VII, 1972. Cours de 3ème Cycle, Année Universitaire 1971–1972, Rapport No. M 86.0572.

[EM70] D. G. Ebin and J. Marsden. *Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.* . Ann. of Math. (2), 92 :102–163, 1970.

[Fol95] G. B. Folland. *Introduction to partial differential equations.* Princeton University Press, Princeton, NJ, second edition, 1995.

[Ham82] R. S. Hamilton. *The inverse function theorem of Nash and Moser.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 7(1) :65–222, 1982.

[Has72] R. Hasimoto. *A soliton on a vortex filament.* J. Fluid Mechanics, 51 :477–485, 1972.

[Hat94] Y. Hattori. *Ideal magnetohydrodynamics and passive scalar motion as geodesics on semidirect product groups.* J. Phys. A, 27(2) :L21–L25, 1994.

[Heb96] E. Hebey. *Sobolev spaces on Riemannian manifolds*, volume 1635 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[Hir94] M. W. Hirsch. *Differential topology*, volume 33 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1994.

[HV04] S. Haller and C. Vizman. *Non-linear Grassmannians as coadjoint orbits.* Math. Ann., 329(4) :771–785, 2004.

[Ism96] R. S. Ismagilov. *Representations of infinite-dimensional groups*, volume 152 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Jos02] J. Jost. *Riemannian geometry and geometric analysis.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2002.

[Jos03] J. Jost. *Postmodern analysis.* Universitext. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[Kel74] H. H. Keller. *Differential calculus in locally convex spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1974. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 417.

[KM97] A. Kriegl and P. W. Michor. *The convenient setting of global analysis*, volume 53 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[KN96a] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.

[KN96b] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.

[Koi03] Norihito Koiso. *Vortex filament equation in a Riemannian manifold.* Tohoku Math. J. (2), 55(2) :311–320, 2003.

[Laf96] J. Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles.* Presses universitaires de Grenoble, 1996.

[Lan02] S. Lang. *Introduction to differentiable manifolds.* Universitext. Springer-Verlag, New York, second edition, 2002.

[Lee03] J. M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer, Heidelberg, 2003.

[Mic80] P. W. Michor. *Manifolds of differentiable mappings*, volume 3 of Shiva Mathematics Series. *Shiva Publishing Ltd.*, Nantwich, 1980.

[Mil84] J. Milnor. *Remarks on infinite-dimensional Lie groups.* In *Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983)*, pages 1007–1057. *North-Holland*, Amsterdam, 1984.

[MM05] P. W. Michor and D. Mumford. *Vanishing geodesic distance on spaces of submanifolds and diffeomorphisms.* Doc. Math., 10 :217–245 (electronic), 2005.

[MR99] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry*, volume 17 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1999.

[MW83] J. Marsden and A. Weinstein. *Coadjoint orbits, vortices, and Clebsch variables for incompressible fluids.* Phys. D, 7(1-3) :305–323, 1983.

[Nab00] G. L. Naber. *Topology, geometry, and gauge fields, Interactions*, volume 141 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 2000.

[NT] T. Nishiyama and A. Tani. *Initial and initial-boundary value problems for a vortex filament with or without axial flow.* SIAM J. Math. Anal.

[Omo97] H. Omori. *Infinite-dimensional Lie groups*, volume 158 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. Translated from the 1979 Japanese original and revised by the author.

[Pal65] R. S. Palais. *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem.* With contributions by M. F. Atiyah, A. Borel, E. E. Floyd, R. T. Seeley, W. Shih and R. Solovay. Annals of Mathematics Studies, No. 57. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965.

[Pal68] R. S. Palais. *Foundations of global non-linear analysis.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1968.

[Pet06] P. Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 2006.

[Pol05] J. Polchinski. *String theory, An introduction to the bosonic string. Vol. I.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. Reprint of the 2003 edition.

[PS86] A. Pressley and G. Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. , Oxford Science Publications.

[Ric96] R. L. Ricca. *The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics.* Fluid Dynam. Res., 18(5) :245–268, 1996.

[Ser72] F. Sergeraert. *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications.* Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), 5 :599–660, 1972.

[Spi79] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry. Vol. II.* Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second edition, 1979.

[Viz01a] C. Vizman. *Geodesics and curvature of semidirect product groups.* In Proceedings of the 20th Winter School "Geometry and Physics" (Srní, 2000), pages 199–206, 2001.

[Viz01b] C. Vizman. *Geodesics on extensions of Lie groups and stability : the superconductivity equation.* Phys. Lett. A, 284(1) :23–30, 2001.

[Zwi04] B. Zwiebach. *A first course in string theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2004. With a foreword by David Gross.