Comptes Rendues Acad. Sci. Paris 319, Serie I (1994), 927–931.

Dérivations et calcul différentiel non commutatif II

Michel DUBOIS-VIOLETTE & Peter W. MICHOR

Résumé - Nous caractérisons la dérivation $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ par une propriété universelle en introduisant une nouvelle classe de bimodules.

Dérivations and noncommutative differential calculus II

Abstract - We characterize the derivation $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ by a universal property introducing a new class of bimodules.

Abridged English Version - In this Note, A denotes an associative algebra over $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ with a unit $\mathbb{1}$. In the Note [5], a graded differential algebra $\Omega_{\mathrm{Der}}(A)$ with $\Omega^0_{\mathrm{Der}}(A) = A$ was introduced with the notation $\Omega_{\mathrm{D}}(A)$. It is one of the aims of this Note to show that, by introducing a new category of bimodules, the derivation $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ is characterized by a universal property. Before introducing this category of bimodules, we first consider a slightly bigger category of bimodules : we call *central bimodule* a bimodule such that the corresponding bimodule structure over the center $Z(A)$ of A is induced by a structure of $Z(A)$-module. The category of central bimodules is a full subcategory of the category of all bimodules and we construct for the corresponding embedding functor a left adjoint $M \mapsto M_Z$ and a right adjoint $M \mapsto M^Z$. Consequently, *the category of central bimodules is stable by taking subbimodules, quotient modules, arbitrary projective limits and arbitrary inductive limits*. This category is obviously stable by taking tensor products over $Z(A)$, and consequently also over A. By applying the functor $M \mapsto M_Z$ to the universal differential calculus on $d : A \to \Omega^1(A)$, we produce a universal differential calculus for central bimodules, i.e. a derivation $d_Z : A \to \Omega^1(A)_Z$ where $\Omega^1(A)_Z$ is central such that any derivation of A in a central bimodule factorizes through d_Z and a unique homomorphism from $\Omega^1(A)_Z$ in the bimodule. In the case where A is commutative, a central bimodule is simply a module and $\Omega^1(A)_Z$ reduces to the module of Kähler $\mathbb{K}$-differentials $\Omega^1_{\mathbb{K}}(A)$. We now introduce the appropriate category of bimodules to deal with $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$. We call *diagonal bimodule* a bimodule which is isomorphic to a subbimodule of an arbitrary product of A. The category of diagonal bimodules is a full subcategory of the category of bimodules and we produce a left adjoint $M \mapsto Diag\ (M)$ for the corresponding embedding functor. Consequently *the category of Diagonal bimodules is stable by taking subbimodules and arbitrary projective limits.* This category is also stable by taking tensor products over A. By applying the functor $Diag$ to $d : A \to \Omega^1(A)$, we obtain a universal differential calculus $d : A \to Diag\ (\Omega^1(A))$ for the derivations of A in diagonal bimodules. Furthermore we show that $Diag\ (\Omega^1(A)) = \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ and that d coincides with the differential of $\Omega_{\mathrm{Der}}(A)$. Finally, it is worth noticing that when A is commutative, a diagonal bimodule is simply a module such that the canonical mapping in its bidual is injective. Thus the notions of central bimodule and of diagonal bimodule are noncommutative generalisations of the notion of module over a commutative algebra which do not coincide with the notion of right (or left) module.

1. INTRODUCTION ET PRÉLIMINAIRES - Dans la Note [5], une algèbre différentielle graduée $\Omega_{\mathrm{Der}}(A)$ avec $\Omega^0_{\mathrm{Der}}(A) = A$ a été introduite (avec la notation $\Omega_{\mathrm{D}}(A)$), A étant une algèbre unifère. Le calcul différentiel $\Omega_{\mathrm{Der}}(A)$, basé sur les dérivations de A, a été construit à partir du calcul différentiel universel $\Omega(A)$ [3], [7]. Du degré zéro au degré un, le calcul différentiel universel est caractérisé par le fait que la dérivation $d : A \to \Omega^1(A)$ est universelle pour les dérivations de A à valeurs dans les bimodules. Dans cette Note, nous montrons que la dérivation $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ est universelle pour les dérivations de A à valeurs dans une catégorie de bimodules que nous appelons bimodules diagonaux. Dans le cas où A est commutative, un bimodule diagonal n'est autre que le bimodule sous-jacent à un module tel que l'application canonique dans son bidual est injective. Nous introduisons une autre catégorie de bimodules, les bimodules centraux, qui est un peu plus grande que celle des bimodules diagonaux et qui se réduit pour A commutative à la catégorie des modules. Cette catégorie possède aussi une dérivation universelle $d_Z : A \to \Omega^1(A)_Z$. Dans le cas où A est commutative, $\Omega^1(A)_Z$ est le module des $\mathbb{K}$-différentielles de Kähler $\Omega^1_{\mathbb{K}}(A)$ et d_Z est la $\mathbb{K}$-différentielle $d_{A/\mathbb{K}}$. Dans toute cette Note A désigne une $\mathbb{K}$-algèbre associative possédant une unité notée $\mathbb{1}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par un bimodule sur A ou plus simplement un bimodule, nous désignerons toujours un (A, A)-bimodule i.e. un $A \otimes A^{op}$-module. L'algèbre A elle-même est canoniquement un bimodule.

Si M et N sont deux bimodules $\mathrm{Hom}_A^A(M,N)$ désignera l'espace des homomorphismes de bimodules de M dans N ; on considèrera $M\otimes N$ comme un bimodule pour la structure définie par $a(m\otimes n)b=(am)\otimes(nb)$, $a,b\in A$, $m\in M$ et $n\in N$. $M\underset{A}{\otimes}N$ et $M\underset{Z(A)}{\otimes}N$ sont des bimodules quotients de $M\otimes N$.

Soit $\Omega^1(A)$ le noyau de la multiplication $m: A\otimes A\to A$, $m(a\otimes b)=a\cdot b$, et soit $d: A\to\Omega^1(A)$ l'application linéaire définie par $da=\mathbb{1}\otimes a-a\otimes\mathbb{1}$; $\Omega^1(A)$ est un sous-bimodule de $A\otimes A$ et d est une dérivation de A à valeurs dans $\Omega^1(A)$. Le couple $(\Omega^1(A),d)$ est caractérisé, à un isomorphisme près, par la propriété universelle suivante [1], [2] : *pour toute dérivation δ de A à valeurs dans un bimodule M il existe un unique homomorphisme de bimodules $i_\delta:\Omega^1(A)\to M$ tel que $\delta=i_\delta\circ d$*, i.e. on a $\mathrm{Der}(A,M)\simeq\mathrm{Hom}_A^A(\Omega^1(A),M)$. Soit $\mathrm{Der}(A)(=\mathrm{Der}(A,A))$ l'algèbre de Lie des dérivations de A dans A et soit $C^1(\mathrm{Der}(A),A)$ le bimodule des applications linéaires de $\mathrm{Der}(A)$ dans A. On désignera encore par d la dérivation de A à valeurs dans $C^1(\mathrm{Der}(A),A)$ définie par $(da)(\delta)=\delta a$, $\forall\delta\in\mathrm{Der}(A)$; le sous-bimodule de $C^1(\mathrm{Der}(A),A)$ engendré par dA sera noté $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$. L'homomorphisme canonique i_d de $\Omega^1(A)$ dans $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ est surjectif, et son noyau $F^1\Omega^1(A)$ est donné par $F^1\Omega(A)=\cap\{\ker\,(i_\delta)|\delta\in\mathrm{Der}(A)\}$, [5]. Il résulte de ce qui précède que l'on a $\mathrm{Der}(A)\simeq\mathrm{Hom}_A^A(\Omega^1(A),A)\simeq\mathrm{Hom}_A^A(\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A),A)$. Dans la référence [5], $\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ a été introduit et étudié avec la notation $\Omega^1_{\mathrm{D}}(A)$; nous avons remplacé le "D" de [5] par "Der" afin d'éviter toute confusion avec [4] où la même notation $\Omega^1_{\mathrm{D}}(A)$ désigne un autre objet, (voir aussi [6] pour plus de détails sur $\Omega_{\mathrm{Der}}(A)$). Dans le cas où A est une algèbre commutative, $\Omega^1(A)$ est un idéal de $A\otimes A$ et le quotient $\Omega^1(A)/(\Omega^1(A))^2$ est canoniquement un A-module noté $\Omega^1_{\mathbb{K}}(A)$ et appelé *module des $\mathbb{K}$-différentielles de A* ; l'image de $d: A\to\Omega^1(A)$ par la projection canonique de $\Omega^1(A)$ sur $\Omega^1_{\mathbb{K}}(A)$ est notée $d_{A/\mathbb{K}}$, [1]. Le couple $(\Omega^1_{\mathbb{K}}(A),d_{A/\mathbb{K}})$ est alors caractérisé par la propriété universelle suivante, [1] : *pour toute dérivation δ de A à valeurs dans un A-module M, il existe un unique homomorphisme de A-module $i_\delta:\Omega^1_{\mathbb{K}}(A)\to M$ tel que $\delta=i_\delta\circ d_{A/\mathbb{K}}$.*

2. BIMODULES CENTRAUX - Soit M un bimodule sur A. Nous dirons que M est un *bimodule central* si pour tout élément z du centre $Z(A)$ de A et pour tout $m\in M$ on a $zm=mz$. Il revient au même de dire que la structure de bimodule de M sur $Z(A)$ est induite par une structure de $Z(A)$-module ou encore que M est un $A\underset{Z(A)}{\otimes}A^{op}$-module.

Exemples. - 1. Si A est une algèbre commutative, i.e. $Z(A) = A$, un bimodule central sur A n'est autre qu'un A-module (pour la structure de bimodule induite). - 2. Si le centre de A est trivial, i.e. $Z(A) = \mathbb{K}\mathbb{1}$, tout bimodule est central.

On a les propriétés de stabilité suivantes: (i) *tout sous-bimodule d'un bimodule central est central,* (ii) *tout quotient d'un bimodule central est central,* (iii) *tout produit de bimodules centraux est central,* $(iiii)$ *si M et N sont centraux alors $M \underset{Z(A)}{\otimes} N$ est central.*
Les propriétés de stabilité (i), (ii) et (iii) impliquent que *toute limite projective de bimodules centraux est un bimodule central* et que *toute limite inductive de bimodules centraux est un bimodule central.* Ces propriétés de stabilité sont reliées à l'existence d'un foncteur covariant $M \mapsto M_Z$ adjoint à gauche et d'un foncteur covariant $M \mapsto M^Z$ adjoint à droite du foncteur canonique I_Z de la catégorie des bimodules centraux dans celle des bimodules identifiant la catégorie des bimodules centraux comme sous-catégorie pleine de la catégorie des bimodules. Soit M un bimodule quelconque (sur A) et soit $[Z(A), M]$ le sous-bimodule de M engendré par les $zm - mz$ avec $z \in Z(A)$ et $m \in M$. On désignera par M_Z le bimodule quotient $M/[Z(A), M]$ et par p_Z la projection canonique de M sur M_Z. M_Z est central et tout homomorphisme de bimodules de M dans un bimodule central est nul sur $[Z(A), M]$. Soit d'autre part, M^Z l'ensemble des éléments $m \in M$ tels que $zm = mz$, $\forall z \in Z(A)$. M^Z est un sous-bimodule central de M, (le plus grand), on désignera par i^Z l'inclusion canonique de M^Z dans M. Tout homomorphisme d'un bimodule central dans M a son image dans M^Z. Les couples (M_Z, p_Z) et (M^Z, i^Z) sont donc caractérisés à un isomorphisme près par les propriétés universelles suivantes.

PROPOSITION 1 . (i) *Pour tout homomorphisme de bimodules $\varphi : M \to N$ de M dans un bimodule central N, il existe un unique homomorphisme de bimodules $\varphi_Z : M_Z \to N$ tel que $\varphi = \varphi_Z \circ p_Z$.* (ii) *Pour tout homorphisme de bimodules $\psi : N \to M$ d'un bimodule central N dans M, il existe un unique homomorphisme de bimodules $\psi^Z : N \to M^Z$ tel que $\psi = i^Z \circ \psi^Z$.*

La partie (i) implique que le foncteur $M \mapsto M_Z$ de la catégorie des bimodules dans la catégorie des bimodules centraux est adjoint à gauche de I_Z, i.e. on a $\mathrm{Hom}^A_A(M_Z, N) \simeq \mathrm{Hom}^A_A(M, I_Z(N))$ pour N central, et la partie (ii)

implique que le foncteur $M \mapsto M^Z$ est adjoint à droite de I_Z, i.e. que l'on a $\mathrm{Hom}_A^A(I_Z(N), M) \simeq \mathrm{Hom}_A^A(N, M^Z)$ pour N central. Le foncteur $M \mapsto M_Z$ est par conséquent exact à droite et le foncteur $M \mapsto M^Z$ est exact à gauche. On notera que M est un bimodule central si et seulement si $M = M_Z$ et que ceci est équivalent à $M = M^Z$. D'autre part, l'identité $zm \otimes n - m \otimes nz = mz \otimes n - m \otimes zn + (zm - mz) \otimes n + m \otimes (zn - nz)$ implique que si M et N sont des bimodules centraux alors $(M \otimes N)_Z = M \underset{Z(A)}{\otimes} N$.

Considérons le bimodule $\Omega^1(A)$ et la (différentielle) dérivation universelle $d : A \to \Omega^1(A)$. Par composition avec la projection $p_Z : \Omega^1(A) \to \Omega^1(A)_Z$, on obtient une dérivation $d_Z : A \to \Omega^1(A)_Z$; $d_Z = p_Z \circ d$.

PROPOSITION 2 . *Pour toute dérivation $\delta : A \to M$ de A dans un bimodule central M, il existe un unique homomorphisme de bimodules $i_\delta : \Omega^1(A)_Z \to M$ tel que l'on ait $\delta = i_\delta \circ d_Z$.*

Autrement dit, $d_Z : A \to \Omega^1(A)_Z$ est universelle pour les dérivations à valeurs dans les bimodules centraux. Cette proposition est une conséquence immédiate de la proposition 2 et de la propriété universelle de $d : A \to \Omega^1(A)$.

COROLLAIRE 1 . *Si A est une algèbre commutative, $\Omega^1(A)_Z$ s'identifie au A-module $\Omega^1_{\mathbb{K}}(A)$ des $\mathbb{K}$-différentielles (de Kähler) de A et d_Z est la $\mathbb{K}$-différentielle $d_{A/\mathbb{K}}$.*

Remarque. En utilisant l'exactitude à droite de $M \to M_Z$, on déduit de la suite exacte $0 \to \Omega^1(A) \xrightarrow{j} A \otimes A \xrightarrow{m} A \to 0$ une suite exacte $\Omega^1(A)_Z \xrightarrow{j^\sharp} A \underset{Z(A)}{\otimes} A \xrightarrow{m^\sharp} A \longrightarrow 0$. Dans le cas où A est commutative, cette dernière suite est une suite exacte de A-module avec $\Omega^1(A)_Z = \Omega^1_{\mathbb{K}}(A)$ et $A \underset{Z(A)}{\otimes} A = A \underset{A}{\otimes} A = A$, mais $m^\sharp$ se réduit alors à l'application identique de A dans A et, par conséquent, $\mathrm{Im}(j^\sharp) = 0$. Ceci montre que $j^\sharp$ *n'est généralement pas injective.*

3. BIMODULES DIAGONAUX - Soit M un bimodule sur A. Nous dirons que M est un *bimodule diagonal* si M est isomorphe à un sous-bimodule de A^I où I est un ensemble approprié (dépendant de M). Tout bimodule diagonal est évidemment central.

Exemples. - 1. Si A est une algèbre commutative, un bimodule diagonal n'est autre qu'un A-module (pour la structure de bimodule induite) tel que l'application canonique dans son bidual soit injective. - 2. Si A est l'algèbre $M_n(\mathbb{C})$ des matrices $n \times n$ complexes alors tout bimodule est diagonal.

On a les propriétés de stabilité suivantes : (i) *tout sous-bimodule d'un bimodule diagonal est diagonal,* (ii) *tout produit de bimodules diagonaux est diagonal,* (iii) *si M et N sont diagonaux alors $M \underset{A}{\otimes} N$ est diagonal,* ($A^I \underset{A}{\otimes} A^J$ est un sous-bimodule de $A^{I\times J}$).
Les propriétés de stabilité (i) et (ii) impliquent que *toute limite projective de bimodules diagonaux est un bimodule diagonal.* Ces propriétés de stabilité sont reliées à l'existence d'un foncteur *Diag* de la catégorie des bimodules dans celle des bimodules diagonaux qui est adjoint à gauche du foncteur canonique I_{Diag} identifiant la catégorie des bimodules diagonaux comme sous-catégorie pleine de la catégorie des bimodules. Soit M un bimodule quelconque et soit $c : M \to A^{\mathrm{Hom}^A_A(M,A)}$ l'homomorphisme canonique défini par $c(m) = (\omega(m))_{\omega\in\mathrm{Hom}^A_A(M,A)}$. Nous désignerons par $Diag(M)$ l'image de c. $Diag(M)$ est un bimodule diagonal.

PROPOSITION 3 . *Pour tout homomorphisme de bimodules $\varphi : M \to N$ de M dans un bimodule diagonal N, il existe un unique homomorphisme de bimodules $Diag(\varphi) : Diag(M) \to N$ tel que $\varphi = Diag(\varphi) \circ c$.*

Puisque, par définition, un bimodule diagonal est un sous-bimodule de A^I, il suffit de démontrer le résultat pour $N = A^I$; cela revient à le démontrer pour $N = A$ ce qui est évident d'après les définitions. □
La proposition 6 montre que le foncteur I_{Diag} admet le foncteur *Diag* comme adjoint à gauche, i.e. $\mathrm{Hom}^A_A(Diag(M), N) \simeq \mathrm{Hom}^A_A(M, I_{Diag}(N))$. Le foncteur *Diag* est, par conséquent, exact à droite.
On notera que M est un bimodule diagonal si et seulement si $\mathrm{Hom}^A_A(M, A)$ sépare les points de M et que ceci est équivalent à $M \simeq Diag(M)$. D'autre part pour tout bimodule M, on a $Diag(M) = Diag(M_Z)$, ce qui implique que si M et N sont des bimodules centraux, (en particulier si ils sont diagonaux), on a $Diag(M \otimes N) = Diag(M \underset{Z(A)}{\otimes} N)$.

PROPOSITION 4 . *On a $Diag(\Omega^1(A)) = \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$.*

$\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ est, par construction, un sous-bimodule de $A^{\mathrm{Der}(A)}$; c'est donc un bimodule diagonal. D'autre part $\mathrm{Hom}^A_A(\Omega^1(A), A) \simeq \mathrm{Hom}^A_A(\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A), A)$ implique $\mathrm{Hom}^A_A(\Omega^1(A), M) \simeq \mathrm{Hom}^A_A(\Omega^1_{\mathrm{Der}}(A), M)$ pour tout bimodule diagonal M, d'où le résultat. $\square$

COROLLAIRE 2 *Pour toute dérivation δ de A à valeurs dans un bimodule diagonal M, il existe un unique homomorphisme de bimodules $i_\delta : \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A) \to M$ tel que $\delta = i_\delta \circ d$.*

Autrement dit la dérivation $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ est universelle pour les dérivations à valeurs dans les bimodules diagonaux. De même que $d : A \to \Omega^1(A)$ est le bloc de base pour construire l'enveloppe différentielle universelle $\Omega(A)$ de A [7], $d : A \to \Omega^1_{\mathrm{Der}}(A)$ est le bloc de base pour construire l'algèbre différentielle $\Omega_{\mathrm{Der}}(A)$ introduite dans [5] avec la notation $\Omega_{\mathrm{D}}(A)$.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre* I, Chapitre III, Paris, Hermann 1970.

[2] H. CARTAN, S. EILENBERG, *Homological algebra*, Princeton University Press 1973.

[3] A. CONNES, Non-commutative differential geometry, *Publi. I.H.E.S.*, 62, 1986, p. 257.

[4] A. CONNES, *Non commutative geometry*, Prépub. I.H.E.S./m/93/54.

[5] M. DUBOIS-VIOLETTE, Dérivations et calcul différentiel non commutatif, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 307, Série I, 1988, p.403-408.

[6] M. DUBOIS-VIOLETTE, P.W. MICHOR, The Frölicher-Nijenhuis bracket for derivation based non commutative differential forms, to appear.

[7] M. KAROUBI, Homologie cyclique des groupes et des algèbres, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 297, Série I, 1983, p. 381-384.

M.D-V. *Laboratoire de Physique Théorique et Hautes Energies, Bât. 211, Université Paris XI, F-91405 Orsay Cedex*

P.W.M. *Erwin Schrödinger Institute of Mathematical Physics, Pasteurgasse 6/7, A-1090 Wien, Austria*