Michor P.

Funktoren zwischen Kategorien von Banach- und Waelbroeck-Räumen

Von

Peter Michor

Aus den
Sitzungsberichten der Österreichischen Akademie der Wissenschaften
Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung II, 182. Bd., 1. bis 3. Heft, 1973

1974

In Kommission bei
Springer-Verlag
Wien New York

Funktoren zwischen Kategorien von Banach- und Waelbroeck-Räumen[1]

Von

Peter Michor, Wien

Mathematisches Institut der Universität Wien

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Februar 1973 durch das w. M. Edmund Hlawka)

Mit den Ergebnissen von Waelbroeck und Buchwalter kann man die duale Kategorie $\underline{B}^{op}$ der Kategorie aller Banachräume $\underline{B}$ als die Kategorie der Waelbroeck-Räume $\underline{W}$ beschreiben. Ziel dieser Arbeit ist es, die Struktur von Funktoren zwischen diesen beiden Kategorien und Räume von natürlichen Transformationen näher zu beschreiben. Für Funktoren $\mathfrak{G} : \underline{B} \to \underline{W}$ und $F : \underline{W} \to \underline{B}$ definieren wir natürliche Transformationen $\eta : \mathfrak{G} \to F$ und $\psi : F \to \mathfrak{G}$, den Banachraum n.t. L $(\mathfrak{G}, F)$ und den Waelbroeckraum n.t. $\mathfrak{L}$ $(F, \mathfrak{G})$; über diese Räume beweisen wir Sätze, die dem Yoneda-Lemma verwandt sind.

Analog zur Dualität von Funktoren von Mitjagin-Shvarts definieren wir die Δ-Dualität von Funktoren $\underline{W} \to \underline{B}$. Wir zeigen, daß der Dualitätsfunktor Δ zu sich selbst adjungiert zur Rechten ist (dieser und der Dualitätsfunktor von Mitjagin-Shvarts sind die einzigen unter allen möglichen Dualitätsfunktoren, die das erfüllen). Schließlich berechnen wir von einigen speziellen Funktoren die dazu Δ-Dualen.

I. Allgemeine Voraussetzungen

Wir betrachten zwei Arten von Kategorien von Banachräumen über dem Grundkörper I (= $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, aber nur eines von beiden):

[1] Diese Arbeit ist Teil der Dissertation, die der Autor unter der Aufsicht von Professor Cigler verfaßt hat.

1. Solche, in denen Morphismen beschränkte lineare Abbildungen sind, z. B.: $\underline{B}$, die Kategorie aller Banachräume und volle Teilkategorien davon.

2) Solche Kategorien, in denen Morphismen lineare Kontraktionen sind (z. B.: $\underline{B}_1$); $\underline{B}_1$ ist vollständig und kovollständig.

Im 1. Fall läßt sich der Hom-Funktor in die Kategorie „liften“: $H(X, Y) = [\underline{B}(X, Y)$ mit Operatornorm]. Im zweiten Fall erweitern wir ihn so.

Wir betrachten nur solche (zulässige) Funktoren zwischen diesen Kategorien, die zusätzlich linear und Kontraktionen als Abbildungen $H(X, Y) \to H(F(X), F(Y))$ (im kovarianten Fall) sind. Auch unter den natürlichen Transformationen treffen wir eine Auswahl: eine (zulässige) natürliche Transformation $\eta : X \to \eta_X$ erfüllt noch: $\|\eta\| := \sup\limits_X \|\eta_X\| < \infty$. Wir haben dadurch eine (i. a. nicht volle) Teilkategorie der Funktorkategorie festgelegt.

Der „Raum“ n.t. $H(F, G)$ aller natürlichen Transformationen vom Funktor F in den Funktor G ist ein Banachraum, wenn er Menge ist (vergleiche dazu Linton). Das projektive Tensorprodukt $X \widehat{\otimes} Y$ zweier Banachräume X und Y ist die Vervollständigung des algebraischen Tensorprodukts $X \otimes Y$ in der Norm γ, die für $u \in X \otimes Y$ durch $\gamma(u) = \inf \{\Sigma \|x_i\| \|y_i\|,\ u = \Sigma x_i \otimes y_i \text{ in } X \otimes Y\}$ definiert ist. Es definiert einen (zulässigen) Funktor $\Sigma_X : Y \to X \widehat{\otimes} Y$, der linksadjungiert zum gelifteten Hom-Funktor ist: $H(X \widehat{\otimes} Y, Z) = H(X, H(Y, Z))$ natürlich in X, Y und Z über jeder vollen Teilkategorie von X, gegeben durch die Zuordnung $f \to \bar{f}$, wobei $f(x \otimes y) = \bar{f}(x)(y)$ ist.

Wegen der zusätzlichen Einschränkungen auf Funktoren und natürlichen Transformationen findet das Yoneda-Lemma nicht mehr in der Mengenkategorie, sondern in $\underline{B}$ selbst „statt“. n.t. $H(H_X, F) = F(X)$ isometrisch isomorph. Die eben angeführten Resultate finden sich bei Mitjagin-Shvarts.

Für Funktoren $G, F : \underline{K} \to \underline{B}$, wobei $\underline{K}$ eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$, F kovariant ist, hat Cigler einen Banachraum $G \mathbin{\widehat{\otimes}_K} F$, das Tensorprodukt der Funktoren G und F definiert. In Michor [1] findet sich darüber der folgende Satz, der hier auch als Definition von $G \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ gelten soll:

$G \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ ist in $\underline{B}_1$ induktiver Limes (= Kolimes) von Räumen $G(X) \mathbin{\widehat{\otimes}} F(Y)$, $X, Y \in \underline{K}$, wobei die Spektralschar so aussieht:

Indexklasse ist die Klasse aller Morphismen in $\underline{K}_1$; jedem $\lambda : X \to Y$ in $\underline{K}_1$ ordnen wir den Banachraum $R^\lambda = G(Y) \mathbin{\widehat{\otimes}} F(X)$ zu. Jedes Paar (α, β) von Morphismen in K_1, für das das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \\ Z \arrow[r, "\mu"] & U \arrow[u, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

in $\underline{K}_1$ kommutiert,

definiert eine Abbildung $\pi_\lambda^\mu : R^\lambda \to R^\mu$ durch

$$\pi_\lambda^\mu = G(\beta) \mathbin{\widehat{\otimes}} F(\alpha) : G(Y) \mathbin{\widehat{\otimes}} F(X) \to G(U) \mathbin{\widehat{\otimes}} F(Z).$$

Die Notation, die wir hier für Limites verwenden, findet sich in Mitjagin-Shvarts.

Eine Darstellung der im folgenden zusammengefaßten Resultate findet man bei Buchwalter:

Definition: Ein Waelbroeckraum ist ein Vektorraum $\mathfrak{X}$ über dem Grundkörper I zusammen mit einer absolutkonvexen absorbierenden Teilmenge $\circ\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{X}$, die mit einer kompakten Hausdorff-Topologie τ ausgestattet ist und für die folgendes gilt:

1. die Abbildung $x \to \frac{a+x}{2}$ von $\circ\mathfrak{X}$ in $\circ\mathfrak{X}$ ist stetig für alle $a \in \circ\mathfrak{X}$,

2. der Ursprung in $\circ\mathfrak{X}$ hat eine Umgebungsbasis von absolutkonvexen Mengen.

Wir nennen $\circ\mathfrak{X}$ die kompakte Kugel von $\mathfrak{X}$.

Lucien Waelbroeck hat folgenden Satz gezeigt:

Ein Waelbroeck $\mathfrak{X}$ ist Dualraum eines Banachraumes $\mathfrak{X}^*$; dabei ist $\circ\mathfrak{X}$ die Einheitskugel und τ die Einschränkung der schwach*-Topologie auf $\circ\mathfrak{X}$. Der Banachraum $\mathfrak{X}^*$ ist bis auf isometrische Isomorphismen eindeutig bestimmt und ist der Raum aller Linearformen auf $\mathfrak{X}$, deren Einschränkungen auf $\circ\mathfrak{X}$ τ-stetig sind, ausgestattet mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\circ\mathfrak{X}$.

Die „schwach*-Topologie" auf $\mathfrak{X}$ kann man auf zweierlei Weise aus der Topologie τ auf $\circ\mathfrak{X}$ gewinnen, ohne auf den Raum $\mathfrak{X}^*$ zurückzugreifen:

Sie ist:

1. die feinste lokalkonvexe Topologie auf $\mathfrak{X}$, die die Inklusionsabbildung $(\circ\mathfrak{X}, \tau) \to \mathfrak{X}$ stetig macht,

2. die feinste Topologie auf $\mathfrak{X}$, die die Translationen und Homothetien $(x \to r \cdot x)$ in $\mathfrak{X}$ und die Inklusion $(\circ\mathfrak{X}, \tau) \to \mathfrak{X}$ stetig macht (vgl. Buchwalter).

Definition: Die Kategorie $\underline{W}$ hat als Objekte alle Waelbroeckräume und als Morphismen lineare Abbildungen, die in den schwach*-Topologien stetig sind.

Solche Abbildungen sind schon beschränkt, denn eine schwach* kompakte Menge ist schwach* beschränkt, also Norm-beschränkt.

Die Kategorie $\underline{W}_1$ hat als Morphismen schwach* stetige lineare Abbildungen, die kompakte Kugeln in solche abbilden.

Die Kategorie $\underline{W}_1$ und ihr Zusammenhang mit $\underline{B}_1$ wurde von Buchwalter untersucht.

$\underline{W}$ ist $\underline{B}^{op}$ und $\underline{W}_1$ ist $\underline{B}_1{}^{op}$. Die Funktoren der Dualität sind $' : \underline{B} \to \underline{W}$ bzw. $' : \underline{B}_1 \to \underline{W}_1$ und $* : \underline{W} \to \underline{B}$ bzw. $* : \underline{W}_1 \to \underline{B}_1$. Sie wirken auf Morphismen durch Transposition und sind zueinander inverse kontravariante Funktoren.

In $\underline{B}$ ist der kontravariante Funktor $' : \underline{B} \to \underline{B}$ zu sich selbst adjungiert zur Rechten: $H(X, Y') = H(Y, X')$.

Darauf wende man den Dualitätsfunktor $' : \underline{B} \to \underline{W}$ an: $\underline{W}(Y'', X') = H(Y, X')$. Dabei ist X' links Element von $\underline{W}$ und rechts Element von $\underline{B}$: wir schreiben also $b(X')$ für „X', als Banachraum aufgefaßt" und haben dann sofort $\underline{W}(Y'', X') = H(Y, b(X'))$, die Adjungiertheitsrelation für: $'' : \underline{B} \to \underline{W}$ ist linksadjungiert zu $b : \underline{W} \to \underline{B}$.

Ein $\underline{W}$-Morphismus ist genau dann ein Monomorphismus, wenn er injektiv ist, und genau dann ein Epimorphismus, wenn sein Bild schwach*-dicht ist.

Produkte in $\underline{W}$ sind kartesische Produkte der Vektorräume, ausgestattet mit der Tychonov-Topologie der Faktoren. Die Coprodukte lassen keine einfache Beschreibung zu (vgl. Buchwalter).

Wir führen noch folgende Funktoren an:

$L : \underline{W} \times \underline{B} \to \underline{B}$, $L(\mathfrak{X}, Y)$ ist der Raum der schwach*-Norm-stetigen linearen Abbildungen $\mathfrak{X} \to Y$, ausgestattet mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\circ\,\mathfrak{X}$.

$\mathfrak{L} : \underline{B} \times \underline{W} \to \underline{W}$, $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$ ist der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen $X \to b\,\mathfrak{Y}$, ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf X. $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$ ist also abgeschlossene Teilmenge von $\prod_{x \in X} \mathfrak{Y}$.

Die Transposition $(f \to f')$ liefert in beiden Fällen natürliche Äquivalenzen: $L(\mathfrak{X}, Y) = L(Y', \mathfrak{X}^*)$ und $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y}) = \mathfrak{L}(\mathfrak{Y}^*, X')$.

Das projektive Tensorprodukt $\mathfrak{X} \overline{\otimes} \mathfrak{Y}$ in $\underline{W}$ zweier Waelbroeck-Räume $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ ist definiert durch:

$\mathfrak{X} \overline{\otimes} \mathfrak{Y} = (B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}))'$, wobei $B(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ der Banachraum der schwach* $\times$ schwach*-stetigen Bilinearformen mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf $\circ\,\mathfrak{X} \times \circ\,\mathfrak{Y}$ ist.

Der Symmetrie halber geben wir die duale Charakterisierung des projektiven Tensorproduktes $X \hat{\otimes} Y$ zweier Banachräume X und Y an:

$$X \hat{\otimes} Y = (\mathfrak{B}(X, Y))^*, \text{ wobei } \mathfrak{B}(X, Y)$$

der Waelbroeckraum der beschränkten Bilinearformen auf $X \times Y$ ist, ausgestattet mit der Topologie der punktweisen Konvergenz auf $X \times Y$.

Alle Funktoren, die wir betrachten, seien wieder zulässig, das heißt zum Beispiel für $F : \underline{W} \to \underline{B}$:

F ist linear auf den Morphismenräumen und $\| F(f) \| \leqslant \| b(f) \|$, und für $\mathfrak{G} : \underline{B} \to \underline{W}$:

$\mathfrak{G}$ ist linear und $\| b(\mathfrak{G}(f)) \| \leqslant \| f \|$.

II. Der Raum n.t. $L(\mathfrak{G}, F)$

Definition: Sei $\underline{C}$ eine beliebige Kategorie und $F : \underline{C} \to \underline{B}$, $\mathfrak{G} : \underline{C} \to \underline{W}$ Funktoren, beide ko- oder beide kontravariant.

Eine Zuordnung φ, die für $C \in \underline{C}$ durch $C \to \varphi_C \in L(\mathfrak{G}(C), F(C))$ definiert ist, heißt natürliche Transformation von $\mathfrak{G}$ in F, wenn gilt:

1. Für jeden Morphismus $f: C \to C_1$ in $\underline{C}$ ist $F(f) \cdot \varphi_C = \varphi_{C_1} \mathfrak{G}(f)$ in $L(\mathfrak{G}(C), F(C_1))$ im kovarianten Fall, oder $\varphi_C \cdot \mathfrak{G}(f) = F(f) \cdot \varphi_{C_1}$ in $L(\mathfrak{G}(C_1), F(C))$ im kontravarianten Fall.

2. $\| \varphi \| := \sup \{\| \varphi_C \|, C \in \underline{C}\} < \infty$.

Für jedes $C \in \underline{C}$ ist also $\varphi_C: \mathfrak{G}(C) \to F(C)$ schwach*-Norm-stetig.

Satz 1: Wenn die Klasse aller natürlichen Transformationen $\mathfrak{G} \to F$ eine Menge ist, dann ist sie ein Banachraum mit der oben angegebenen Norm, der mit n.t. $\underset{C}{L}(\mathfrak{G}, F)$ bezeichnet werden soll.

Beweis: Die lineare Struktur auf n.t. $\underset{C}{L}(\mathfrak{G}, F)$ ist objektweise definiert: $(\varphi_C)_{C \in \underline{C}} + (\eta_C)_{C \in \underline{C}} = (\varphi_C + \eta_C)_{C \in \underline{C}}$. Man prüft leicht nach, daß $(\varphi_C + \eta_C)_{C \in \underline{C}}$ wieder eine natürliche Transformation ist und daß (n. t. $L(\mathfrak{G}, F), \| . \|$) ein normierter Raum ist. Die Vollständigkeit zeigt man, indem man zu einer Cauchyfolge den Limes objektweise konstruiert.

Satz 2: Sei $F: \underline{W} \to \underline{B}$ ein kovarianter zulässiger Funktor und $X \in \underline{B}$. Dann ist n.t. $\underset{\underline{W}}{H}(b\,\mathfrak{L}_X, F)$ isometrisch isomorph zu $F(X'')$ und zwar natürlich in X.

Bemerkung: $b\,\mathfrak{L}_X: \underline{W} \to \underline{B}$

$$b\,\mathfrak{L}_X(\mathfrak{Y}) = b\,\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y}) = H(X, b(\mathfrak{Y})).$$

Man könnte jetzt vermuten, daß man das Yoneda-Lemma anwenden könnte, wenn man $\underline{W}$ mittels b in $\underline{B}$ einbettet. Das ist deswegen nicht der Fall, weil $b(\underline{W})$ keine volle Teilkategorie von $\underline{B}$ ist (es gibt $f: X' \to Y'$, die nicht schwach*-stetig in X' und Y' sind), und das Yoneda-Lemma nur auf vollen Teilkategorien von $\underline{B}$ gilt.

Beweis des Satzes:

Sei $\varphi \in$ n.t. $H(b\,\mathfrak{L}_X, F)$. Wir wollen die Beweisidee des Yoneda-Lemmas imitieren und benötigen dazu ein möglichst kanonisches Element in einem Raum $b\,\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$, $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$. Wir wählen $\mathfrak{Y} = X''$ und die

Einbettung $i_X : X \to X''$. $i_X \in b\,\mathfrak{L}\,(X, X'')$, daher ist $\varphi_{X''}\,(i_X)$ definiert und Element in $F\,(X'')$. Wir definieren also die Abbildung

$$T_X : \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, H\,(b\,\mathfrak{L}_X, F) \to F\,(X'')$$

durch $T_X\,(\varphi) = \varphi_{X''}\,(i_X)$.

Dann ist T_X klarerweise linear, und beschränkt, weil

$\|\, T_X\,(\varphi)\,\| = \|\,\varphi_{X''}\,(i_X)\,\| \leqslant \|\,\varphi_{X''}\,\|\,\|\,i_X\,\| \leqslant \|\,\varphi\,\|$ gilt, also ist $\|\,T_X\,\| \leqslant 1$. Wir konstruieren nun eine lineare Kontraktion $U_X : F\,(X'') \to$ $\to \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, H\,(b\,\mathfrak{L}_X, F)$, die zu T_X invers sein soll.

Sei $x \in F\,(X'')$ und $f \in b\,\mathfrak{L}\,(X, \mathfrak{Y})$, $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$. Dann ist $f \in H\,(X, b\,\mathfrak{Y})$ und wir schreiben $\bar{f}$ für das Bild von f in $\underline{W}\,(X'', \mathfrak{Y})$ unter der Adjunktion $H\,(X, b\,\mathfrak{Y}) = \underline{W}\,(X'', \mathfrak{Y})$ (vgl. Kap. I). Man gewinnt $\bar{f}$ aus f, indem man $f' \mid \mathfrak{Y}^* : \mathfrak{Y}^* \to X'$ und $\bar{f} = (f' \mid \mathfrak{Y}^*)'$ bildet und f aus $\bar{f}$ durch $f = \bar{f} \mid X$. Man überzeugt sich leicht davon, daß $\|\,f\,\| = \|\,\bar{f}\,\|$ gilt und $\bar{f}$ die eindeutige schwach*-stetige Fortsetzung von $f : X \to \mathfrak{Y}$ auf $X'' \to \mathfrak{Y}$ ist.

Wir betrachten das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
i_X \in b\,\mathfrak{L}\,(X, X'') \arrow[r, dashed] \arrow[d, "b\,\mathfrak{L}\,(X, \bar{f})"'] & F\,(X'') \ni x \arrow[d, "F\,(\bar{f})"] \\
f \in b\,\mathfrak{L}\,(X, \mathfrak{Y}) \arrow[r, dashed] & F\,(\mathfrak{Y}),
\end{tikzcd}$$

das folgende Definition motiviert:

$U_X : F\,(X'') \to \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, H\,(b\,\mathfrak{L}_X, F)$ sei durch $U_X\,(x)_{\mathfrak{Y}}\,(f) = F\,(\bar{f})\,(x)$

für $x \in F\,(X'')$, $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$ und $f \in b\,\mathfrak{L}\,(X, \mathfrak{Y})$ definiert.

Wir zeigen, daß $\mathfrak{Y} \to U_X\,(x)_{\mathfrak{Y}}$ natürlich ist: Sei $g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ ein $\underline{W}$-Morphismus. Wir müssen folgendes Diagramm auf Kommutativität untersuchen:

$$\begin{tikzcd}
b\,\mathfrak{L}\,(X, \mathfrak{Y}) \arrow[r, "U_X\,(x)_{\mathfrak{Y}}"] \arrow[d, "b\,\mathfrak{L}\,(X, g)"'] & F\,(\mathfrak{Y}) \arrow[d, "F\,(g)"] \\
b\,\mathfrak{L}\,(X, \mathfrak{Z}) \arrow[r, "U_X\,(x)_{\mathfrak{Z}}"] & F\,(\mathfrak{Z})
\end{tikzcd}$$

Sei $f \in b\,\mathfrak{L}(X, \mathfrak{B})$. Dann ist

$$\begin{aligned} F(g)\cdot U_X(x)_{\mathfrak{B}}(f) &= F(g)\cdot F(\bar{f})(x) \\ U_X(x)_{\mathfrak{Z}}\cdot b\,\mathfrak{L}(X, g)\, f &= U_X(x)_{\mathfrak{Z}}(g\cdot f) \\ &\ F(\overline{g\cdot f})(x). \end{aligned}$$

Also bleibt zu zeigen; $\overline{g\cdot f} = g\cdot \bar{f}$, doch das folgt aus der Natürlichkeit der Adjungiertheitsrelation $H(X, b\,\mathfrak{B}) = \underline{W}(X'', \mathfrak{B})$ in $\mathfrak{B}$:

$$\begin{aligned} \overline{g\cdot f} = \overline{b(g)\cdot f} &= \overline{H(X, \mathrm{b}(g))(f)} = \\ &= \underline{W}(X'', g)(\bar{f}) = g\cdot \bar{f}. \end{aligned}$$

Wir geben noch einen zweiten Beweis dieser Tatsache, da sich hier der Zusammenhang zwischen der kategorientheoretischen Aussage „Natürlichkeit in $\mathfrak{B}$“ und dem funktionalanalytischen Hintergrund schön offenbart:

$g\cdot \bar{f}\colon X'' \to \mathfrak{B} \to \mathfrak{Z}$ ist eine stetige Erweiterung von $g\cdot f$. Die ist aber eindeutig und heißt $\overline{g\cdot f}$, also ist $g\cdot \bar{f} = \overline{g\cdot f}$.

$\| U_X \| \leqslant 1$, denn

$$\begin{aligned} \| U_X(x)_{\mathfrak{B}}(f) \| &= \| F(\bar{f})(x) \| \\ &\leqslant \| b(\bar{f}) \| \, \| x \| = \| f \| \, \| x \|. \end{aligned}$$

Wir zeigen $U_X\cdot T_X = Id$ auf n.t. $\underset{\underline{W}}{H}(b\,\mathfrak{L}_X, F)$. Sei $\varphi \in$ n.t. $\underset{\underline{W}}{H}(b\,\mathfrak{L}_X, F)$ und $f \in b\,\mathfrak{L}(X, \mathfrak{B})$, $\mathfrak{B} \in \underline{W}$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} [U_X\cdot T_X(\varphi)]_{\mathfrak{B}}(f) &= [U_X(\varphi_{X''}(i_X))]_{\mathfrak{B}}(f) \\ &= F(\bar{f})\cdot \varphi_{X''}(i_X) \\ &= \varphi_{\mathfrak{B}}\cdot b\,\mathfrak{L}(X, \bar{f})(i_X) \\ &= \varphi_{\mathfrak{B}}(\bar{f}\cdot i_X) \\ &= \varphi_{\mathfrak{B}}(f), \end{aligned}$$

denn $\bar{f}\cdot i_X = f$, weil $\bar{f}$ Erweiterung von f ist. (Oder weil i_X Koeinheit der Adjunktion ist.) Wir zeigen, daß $T_X\cdot U_X = 1_{F(X'')}$ ist.

Sei $x \in F(X'')$, dann ist:

$$\begin{aligned} T_X\cdot U_X(x) &= [U_X(x)]_{X''}(i_X) \\ &= F(\bar{i}_X)(x) \\ &= F(1_{X''})(x) = x \end{aligned}$$

denn $\overline{i_X} = 1_{X''}$, weil i_X Koeinheit der Adjunktion ist (oder weil $1_{X''}$ Erweiterung von i_X ist).

Also hat T_X eine inverse Abbildung U_X, die auch eine Kontraktion ist, daher ist T_X ein isometrischer Isomorphismus. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß $X \to T_X$ natürlich ist, also $T : \underset{\underline{W}}{\overset{(..)}{\text{n.t.}}}\ H\,(b\,\mathfrak{L}\,(.\,,\,..),\ F\,(..)) \to$ $\to F \cdot ''$ eine natürliche Transformation. Sei $g : X \to Y$ ein $\underline{B}$-Morphismus. Wir müssen das folgende Diagramm untersuchen:

$$\begin{tikzcd}
\text{n.t. } H\,(b\,\mathfrak{L}_X,\ F) \arrow[rr, "T_X"] \arrow[d, "\text{n.t. } H\,(b\,\mathfrak{L}\,(g,\,.\,),\ F)"'] & & F\,(X'') \arrow[d, "F\,(g'')"] \\
\text{n.t. } H\,(b\,\mathfrak{L}_Y,\ F) \arrow[rr, "T_Y"] & & F\,(Y'').
\end{tikzcd}$$

Sei $\varphi \in \text{n.t. } H\,(b\,\mathfrak{L}_X,\ F)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&T_Y \cdot \text{n.t. } H\,(b\,\mathfrak{L}\,(g,\,.\,),\ F)\ (\varphi) = \\
&= T_Y\,(\varphi \cdot b\,\mathfrak{L}\,(g,\,.\,)) \\
&= \varphi_{Y''} \cdot b\,\mathfrak{L}\,(g,\ Y'')\,(i_Y) \\
&= \varphi_{Y''}\,(i_Y \cdot g) \\
&F\,(g'') \cdot T_X\,(\varphi) = \\
&= F\,(g'') \cdot \varphi_{X''}\,(i_X) \\
&= \varphi_{Y''} \cdot b\,\mathfrak{L}\,(X,\ g'')\,(i_X) \\
&= \varphi_{Y''}\,(g'' \cdot i_X)
\end{aligned}$$

und $g'' \cdot i_X = i_Y \cdot g$, weil $i : I\,d \to ''$ eine natürliche Transformation ist.

qed.

Bemerkung: Sei $F : \underline{W} \to \underline{B}$ ein zulässiger kovarianter Funktor Dann ist $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\ L\,(\mathfrak{L}_X,\ F)$ isometrisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $F\,(X'')$, und zwar natürlich in X — das heißt, n.t. $L\,(\mathfrak{L},\ F)$ ist ein Teilfunktor von F''.

Dieser Teilraum $T_X\,(\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\ L\,(\mathfrak{L}_X,\ F))$ besteht genau aus denjenigen $x \in F\,(X'')$ für die die Abbildung $U_X\,(x)_{\mathfrak{Y}} \in L\,(\mathfrak{L}\,(X,\ \mathfrak{Y}),\ F\,(\mathfrak{Y}))$ ist für jedes $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$. Dabei ist $U_X(x)_{\mathfrak{Y}} : L(X, \mathfrak{Y}) \to F(\mathfrak{Y})$ die Abbildung $f \to F(f)(x)$ aus dem Beweis von Satz 2.

Satz 3: $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}_X, b\,\mathfrak{L}_Y) = (0)$ für alle $X, Y \in \underline{B}$.

Beweis: Nach der Bemerkung besteht $T_X(\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}_X, b\,\mathfrak{L}_Y))$ aus denjenigen $f \in b\,\mathfrak{L}(Y, X'')$, für die $U_X(f)_{\mathfrak{Y}} \in L(\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y}), b\,\mathfrak{L}(Y, \mathfrak{Y}))$ ist für alle $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$.

Angenommen, es gibt so ein $f \neq 0$. Es sei $\mathfrak{Y}$ mit $\dim \mathfrak{Y}^* = \infty$ fest gewählt. Dann ist $U_X(f)_{\mathfrak{Y}} : \mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y}) \to b\,\mathfrak{L}(Y, \mathfrak{Y})$ stetig, also gibt es eine Nullumgebung V in $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$ mit $U_X(f)_{\mathfrak{Y}}(V) \subseteq \circ\, b\,\mathfrak{L}(Y, \mathfrak{Y}) = \circ\, H(Y, b\,\mathfrak{Y})$. Also existiert eine endliche Menge $A \subseteq X$ und eine endliche Menge $C \subseteq \mathfrak{Y}^*$, so daß für $W = \{g \in \mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y}),\ g(A) \subseteq C^\circ\}$ $U_X(f)_{\mathfrak{Y}}(W) \subseteq \circ\, H(Y, b\,\mathfrak{Y})$ gilt, wobei $C^\circ = \{x \in \mathfrak{Y}, |\langle x, c\rangle| \leqslant 1$ für alle $c \in C \subseteq \mathfrak{Y}^*\}$ die absolute Polare von C ist, denn Mengen der Gestalt W bilden eine Nullumgebungsbasis in $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$.

Weil $f \neq 0$ ist, existieren $y \in Y$ und $x' \in X'$ mit $\langle x', f(y)\rangle \neq 0$. Weil $\dim \mathfrak{Y}^* = \infty$ ist, $\exists\, z \in \mathfrak{Y}^*$, das nicht in der linearen Hülle von C (die abgeschlossen ist, weil C endlich ist) liegt.

Wir wählen ein beschränktes $g : \mathfrak{Y}^* \to X'$ mit $g(z) = x'$ und $\ker g \supseteq C$; so etwas existiert nach dem Satz von Hahn-Banach: man dehne das durch $v(z) = 1$, $v(c) = 0$ für $c \in C$ auf dem Erzeugnis von $C \cup \{z\}$ wohldefinierte (weil $z \notin$ linearen Hülle von C) lineare Funktional auf ganz $\mathfrak{Y}^*$ aus und bilde $g = v(.) \,.\, x'$.

Dann ist $g \in \mathfrak{L}(\mathfrak{Y}^*, X')$, also $h = g'|_X \in \mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$ und $\langle r\,h(a), c\rangle = \langle a, r \,.\, g(c)\rangle = \langle a, 0\rangle = 0$ für alle $a \in A$, $c \in C$ und $r \in I$, also ist $r \cdot h \in W$ für alle $r \in I$.

Daher ist $|\, U_X(f)_{\mathfrak{Y}}(r\,h) \| = \| b\,\overline{\mathfrak{L}(Y, r\,h)}(f) \| = |r|\, \|\bar{h} \cdot f\| \leqslant 1$ für alle $r \in I$, also $h \cdot f = 0$. Aber

$$\langle z, h \cdot f(y)\rangle = \langle z, g' \cdot f(y)\rangle = \langle g(z), f(y)\rangle = \langle x', f(y)\rangle \neq 0$$

und das ist ein Widerspruch. qed.

Der kontravariante Fall ist leichter zu behandeln:

Sei $F : \underline{B} \to \underline{B}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist für $\mathfrak{X} \in \underline{W}$ $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\, H(b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, F) = \underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\, H(H^{b(\mathfrak{X})}, F) = F(b\,\mathfrak{X})$ natürlich in $\mathfrak{X}$ nach dem Yoneda-Lemma für $\underline{B}$, wobei $b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}(Y) = b\,\mathfrak{L}(Y, \mathfrak{X}) = H(Y, b\,\mathfrak{X})$ ist.

Man kann wieder $\underset{\underline{B}}{\mathrm{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, F)$ in $\underset{\underline{B}}{\mathrm{n.t.}}\, H(b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, F)$ einbetten; also ist $\underset{\underline{B}}{\mathrm{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, F)$ isometrisch isomorph einem abgeschlossenen Teilraum von $F(b\,\mathfrak{X})$, natürlich in $\mathfrak{X}$. Also ist $\underset{\underline{B}}{\mathrm{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}, F)$ ein Teilfunktor von $F \cdot b$. Aus dem Beweis des Yoneda-Lemmas folgt sofort die Gestalt dieses Teilraumes:

$\underset{\underline{B}}{\mathrm{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, F)$ ist isometrisch isomorph zum Teilraum derjenigen $x \in F(b\,\mathfrak{X})$, für die Abbildung: $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{X}) \to F(X)$, die durch $f \to F(f)\,x$ gegeben ist, ein Element von $L(\mathfrak{L}(X, \mathfrak{X}), F(X))$ ist für jedes $X \in \underline{B}$.

Satz: 4. $\underset{\underline{B}}{\mathrm{n.t.}}\, L(\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, H^{Y}) = (0)$ für alle $\mathfrak{X} \in \underline{W}$ und $Y \in \underline{B}$.

Beweis: $\mathrm{n.t.}\, L(\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, H^{Y})$ entspricht dem Teilraum von $H(b\,\mathfrak{X}, Y)$, der aus den $f : b\,\mathfrak{X} \to Y$ besteht, für die die Abbildung $g \to H^{Y}(g)(f) = f \cdot g$ ein Element von $L(\mathfrak{L}(X, \mathfrak{X}), H(X, Y))$ ist für alle $X \in \underline{B}$. Sei $X \in \underline{B}$ mit $\dim X = \infty$ festgehalten.

Angenommen, es gibt so ein $f \neq 0$, $f \in H(b\,\mathfrak{X}, Y)$.
Dann existiert eine Nullumgebung V in $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{X})$ mit $f \cdot V \subseteq \circ H(X, Y)$. Also gibt es eine endliche Menge $A \subseteq X$ und eine endliche Menge $C \subseteq \mathfrak{X}^*$, so daß für $W = \{g \in \mathfrak{L}(X, \mathfrak{X}), \langle c, g(a) \rangle \leqslant 1$ für alle $a \in A$ und $c \in C\}$ gilt: $f \cdot W \subseteq \circ H(X, Y)$, denn die Mengen der Form W bilden eine Nullumgebungsbasis von $\mathfrak{L}(X, \mathfrak{X})$.

Da $f \neq 0$ ist, existiert ein $z \in b\,\mathfrak{X}$, so daß $f(z) \neq 0$ in X ist. Weil $\dim X = \infty$ ist, gibt es ein $x \in X$, das nicht Linearkombination der endlichen Menge $A \subseteq X$ ist. Man wähle ein beschränktes $g : X \to b\,\mathfrak{X}$ mit $g(x) = z$ und $\ker g \supseteq A$. Die Existenz von g folgt durch ein Argument ähnlich dem, das wir im Beweis von Satz 3 verwendet haben.

Nun gilt für alle $a \in A$, $c \in C$ und $r \in I$:

$$\langle c, r\,g(a) \rangle = \langle c, 0 \rangle = 0, \text{ also ist } r \cdot g \in W \text{ für alle } r \in I;$$

Daher ist $\| f \cdot r\,g \| = |r|\, \| f \cdot g \| \leqslant 1$ für alle $r \in I$, das heißt $f \cdot g = 0$. Aber $f \cdot g(x) = f(z) \neq 0$, das ist ein Widerspruch. qed.

III. Der Raum n.t. $\mathfrak{L}(F, \mathfrak{G})$

Definition: Es seien $F : \underline{C} \to \underline{B}$ und $\mathfrak{G} : \underline{C} \to \underline{W}$ Funktoren, beide ko- oder beide kontravariant und $\underline{C}$ sei dabei eine beliebige Kategorie. Eine (zulässige) natürliche Transformation $\eta : F \to b \cdot \mathfrak{G}$ heißt auch eine natürliche Transformation $\eta : F \to \mathfrak{G}$; dabei wird η als Abbildung $C \to \eta_C \in \mathfrak{L}(F(C), \mathfrak{G}(C))$ aufgefaßt.

Der Raum aller natürlichen Transformationen $F \to \mathfrak{G}$ trägt in natürlicher Weise eine Waelbroeckraumstruktur, ist also Objekt von $\underline{W}$, wenn er Menge ist: Seien F und $\mathfrak{G}$ zum Beispiel kovariant; dann ist $G = {} * \cdot \mathfrak{G} : \underline{C} \to \underline{B}$ kontravariant, $\mathfrak{G} = {}' \cdot G$ und nach Satz 3 von Cigler gilt:

$$\begin{aligned}
&\underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, H(F, b\,\mathfrak{G}) = \underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, H(F, {}' \cdot G) = \\
&= \underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, H(F, H(G, I)) = \underset{C}{\text{n.t.}}\, H(G \mathbin{\widehat{\otimes}} F, I) \\
&= (G \mathbin{\widehat{\otimes}} F)';
\end{aligned}$$

Wir können daher $\underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, H(F, b\,\mathfrak{G})$ als Dualraum von $G \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ auffassen. Versieht man ihn mit der entsprechenden schwach*-Topologie, so erhält man einen Waelbroeck-Raum, der mit $\underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(F, \mathfrak{G})$ bezeichnet werden soll.

Satz 1: Es sei $\underline{C}$ eine beliebige Kategorie, $F : \underline{C} \to \underline{B}$ und $\mathfrak{G} : \underline{C} \to \underline{W}$ kovariante Funktoren. Dann ist der Waelbroeck-Raum $\underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(F, \mathfrak{G})$ als projektiver Limes in $\underline{W}_1$ darstellbar.

Beweis: Wir verwenden die Darstellung von $(* \cdot \mathfrak{G}) \mathbin{\widehat{\otimes}} F$ als induktiver Limes in $\underline{B}_1$, die in I angegeben wurde. Da der Funktor $' : \underline{B}_1 \to \underline{W}_1$ invertierbar ist, führt er induktive Limiten in projektive über und die Spektralfamilie in Kap. I wird zu folgender in $\underline{W}_1$:

Indexklasse ist die Klasse aller Morphismen in $\underline{C}$.

Jedem $\lambda : C \to C_1$ in $\underline{C}$ entspricht der Waelbroeck-Raum $\mathfrak{R}^\lambda = \mathfrak{L}(F(C), \mathfrak{G}(C_1))$. Jedes Paar (α, β) von Morphismen in $\underline{C}$, für das das Diagramm

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\lambda"] & C_1 \arrow[d, "\beta"] \\ D \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\mu"] & D_1 \end{tikzcd}$$ kommutiert,

definiert eine Abbildung $\pi_\lambda^\mu \in \Pi_\lambda^\mu : \mathfrak{N}^\lambda \to \mathfrak{N}^\mu$, wobei

$\pi_\lambda^\mu = \mathfrak{L}\big(F(\alpha), \mathfrak{G}(\beta)\big) : \mathfrak{L}\big(F(C), \mathfrak{G}(C_1)\big) \to \mathfrak{L}\big(F(D), \mathfrak{G}(D_1)\big)$ ist. Der Morphismus $\pi_\lambda : \underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(F, \mathfrak{G}) \to \mathfrak{N}^\lambda$ ist gegeben durch

$$\pi_\lambda(\eta) = \mathfrak{G}(\lambda)\, \eta_C = \eta_{C_1} \cdot F(\lambda) \in \mathfrak{L}\big(F(C), \mathfrak{G}(C_1)\big)$$

für $\eta \in \underset{\underline{C}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(F, \mathfrak{G})$. qed.

Satz 2: Sei $\mathfrak{G} : \underline{W} \to \underline{W}$ ein kovarianter Funktor und $X \in \underline{B}$. Dann ist $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(b\, \mathfrak{L}_X, \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}(X'')$ natürlich in X.

Beweis: Die Gleichheit bedeutet eigentlich Isomorphie in $\underline{W}_1$: es gibt eine umkehrbare lineare Abbildung, die einen Homöomorphismus zwischen den kompakten Kugeln vermittelt, also einen Isomorphismus im isometrischen Sinn und im Sinn der schwach*-Topologie.

$b\, \mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y}) = H(X, b\, \mathfrak{Y})$. Also stimmt der Funktor $b\, \mathfrak{L}_X$ mit dem auf die nicht volle Teilkategorie $b(\underline{W})$ von $\underline{B}$ eingeschränkten Funktor H_X überein.

Wir verwenden genau dieselben Abbildungen wie im Beweis von II, Satz 2, denn $b\, \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(b\, \mathfrak{L}_X, \mathfrak{G}) = \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, H(b\, \mathfrak{L}_X, b\, \mathfrak{G})$.

Also ist

$T_X : \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(b\, \mathfrak{L}_X, \mathfrak{G}) \to \mathfrak{G}(X'')$ durch $T_X(\eta) = \eta_{X''}(i_X)$ für $\eta \in \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(b\, \mathfrak{L}_X, \mathfrak{G})$ definiert, wobei $i_X : X \to X''$ die kanonische Einbettung ist;

$U_X : \mathfrak{G}(X'') \to \underset{\underline{W}}{n\,.\,t\,.}\, \mathfrak{L}(b\, \mathfrak{L}_X, \mathfrak{G})$ ist durch $U_X(x)_{\mathfrak{Y}}(f) = \mathfrak{G}(\bar{f})(x)$ für $x \in \mathfrak{G}(X'')$ und $f \in b\, \mathfrak{L}(X, \mathfrak{Y})$, $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$ definiert, wobei $\bar{f}$ das dem f eindeutig unter der Adjungiertheitsrelation

$$b\,\mathfrak{L}\,(X, \mathfrak{Y}) = H\,(X, b\,\mathfrak{Y}) = \underline{W}\,(X'', \mathfrak{Y})$$

entsprechende Element ist.

In II Satz 2 haben wir schon gezeigt, daß $T_X{}^{-1} = U_X$, T_X eine Isometrie und $X \to T_X$ natürlich ist. Es bleibt also noch zu zeigen, daß T_X und U_X schwach*-stetig sind.

Sei $\varphi^{(\nu)}$ ein Netz in $\circ$ $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\,\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}_X, \mathfrak{G})$, das in der schwach*-Topologie gegen Null konvergiert. Da die Topologie von $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\,\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}_X, \mathfrak{G})$ die projektive Limes-Topologie bezüglich der Abbildungen

$$\pi_\lambda : \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\,\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}_X, \mathfrak{G}) \to \mathfrak{R}^\lambda$$

aus Satz 1 ist, ist speziell die Abbildung $\pi_{1_{X''}}$ stetig.

Also gilt: $\pi_{1_{X''}}(\varphi^{(\nu)}) = \varphi^{(\nu)}_{X''} \to 0$ in $\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}\,(X, X''), \mathfrak{G}\,(X''))$ und das besagt, daß für jedes $f \in b\,\mathfrak{L}\,(X, X'')$ das Netz $\varphi^{(\nu)}_{X''}(f) \to 0$ in $\mathfrak{G}\,(X'')$ konvergiert.

Speziell ist also:

$$\varphi^{(\nu)}_{X''}(i_X) = T_X\,(\varphi^{(\nu)}) \to 0 \text{ in } \mathfrak{G}\,(X'').$$

T_X induziert also eine stetige bijektive Abbildung zwischen den kompakten Kugeln $\circ$ $\text{n.t.}\,\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}_X, \mathfrak{G})$ und $\circ$ $\mathfrak{G}\,(X'')$, also einen Homöomorphismus. qed.

Satz 3: Sei $\mathfrak{G} : \underline{W} \to \underline{W}$ ein kovarianter Funktor. Dann ist

$$\text{n.t.}\,\mathfrak{L}\,(H^Y \cdot *, \mathfrak{G}) = \mathfrak{G}\,(Y') \text{ natürlich in } Y.$$

Beweis: Wir benützen die Abbildungen aus dem Beweis des Yoneda-Lemmas:

$T_Y : \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\,\mathfrak{L}\,(H_Y \cdot *, \mathfrak{G}) \to \mathfrak{G}\,(Y')$, definiert durch $T_Y(\varphi) = \varphi_{Y'}(1_Y) \in$ $\in \mathfrak{G}\,(Y')$ für $\varphi \in \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\,\mathfrak{L}\,(H^Y \cdot *, \mathfrak{G})$ und $U_Y : \mathfrak{G}\,(Y') \to \underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\,\mathfrak{L}\,(H^Y \cdot *, \mathfrak{G})$, definiert durch $U_Y(y)_{\mathfrak{Y}}(f) = \mathfrak{G}\,(f')\,(x)$ für $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$, $y \in \mathfrak{G}\,(Y')$, $f \in H\,(\mathfrak{Y}^*, Y)$. Genauso wie beim Yoneda-Lemma beweist man $\| T_Y \|_b \leqslant 1$, $\| U_Y \|_b \leqslant 1$, $T_Y^{-1} = U_Y$ und $Y \to T_Y$ ist natürlich. Also vermittelt T_Y ein Bijektion zwischen den kompakten Kugeln, die ein Homöomorphismus ist, wenn wir zeigen können, daß T_Y stetig ist: Sei $\varphi^{(\nu)} \to 0$ in $\underset{\underline{W}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(H_Y \cdot *, \mathfrak{G})$; also ist $\pi_{1_{Y'}}(\varphi^{(\nu)}) = \varphi^{(\nu)}_{Y'} \to 0$ (Satz 1) in $\mathfrak{L}\,\big(H\,((Y')^*,\ Y), \mathfrak{G}\,(Y')\big) = \mathfrak{L}\,(H\,(Y, Y),\ \mathfrak{G}\,(Y'))$, also $\varphi^{(\nu)}_{Y'}(1_Y) = T_Y\,(\varphi^{(\nu)}) \to 0$ in $\circ\,\mathfrak{G}\,(Y')$. qed.

Satz 4: Sei $\mathfrak{N} : \underline{B} \to \underline{W}$ ein kontravarianter Funktor. Dann ist $\underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{N}\,(\overline{b\,\mathfrak{X}})$ natürlich in $\mathfrak{X} \in \underline{W}$.

Beweis: Wiederum verwenden wir die Abbildungen des Yoneda-Lemmas: $T_{\mathfrak{X}} : \underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, \mathfrak{N}) \to \mathfrak{N}\,(b\,\mathfrak{X})$, definiert durch $T_{\mathfrak{X}}\,(\varphi) = \varphi_{b\,\mathfrak{X}}\,(1_{\mathfrak{X}})$ für $\varphi \in \underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, \mathfrak{N})$ und $U_{\mathfrak{X}} : \mathfrak{N}\,(b\,\mathfrak{X}) \to \underset{\underline{B}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{L}^{\mathfrak{X}}, \mathfrak{N})$, definiert durch $U_{\mathfrak{X}}\,(x)_Y\,(f) = \mathfrak{N}\,(f)\,(x)$ für $Y \in \underline{B}$, $x \in \mathfrak{N}\,(b\,\mathfrak{X})$ und $f \in b\,\mathfrak{L}\,(Y, \mathfrak{X})$. Dann gilt: $\| T_{\mathfrak{X}} \|_b \leqslant 1$, $\| U_{\mathfrak{X}} \|_b \leqslant 1$, $T_{\mathfrak{X}}^{-1} = U_{\mathfrak{X}}$ und $\mathfrak{X} \to T_{\mathfrak{X}}$ ist natürlich.

T_x ist stetig nach einem Argument analog dem im Beweis von Satz 3, vermittelt also einen Homöomorphismus zwischen den kompakten Kugeln. qed.

IV. Der Funktor Δ auf Funkt $(\underline{V}, \underline{B})$

$\underline{V}$ sei eine volle Teilkategorie von $\underline{B}$. Wir definieren für $F : \underline{V} \to \underline{B}$ den Δ-dualen Funktor $\Delta\,F$ so, daß er je nach Belieben als Funktor $\underline{V} \to \underline{B}$ oder $\underline{W} \to \underline{B}$ aufgefaßt werden kann.

Definition: Sei $F : \underline{V} \to \underline{B}$ ein kovarianter Funktor, zulässig im Sinn der Definition auf Seite 47.

Sei $\mathfrak{X} \in \underline{V}$ (oder $\in \underline{W}$). Dann sei
$$\Delta\,F\,(\mathfrak{X}) = b\,\big(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(F, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .\,)\big)$$
$$= \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, H\,\big(F, b\,(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .\,)\big)$$
(vgl. Kap. III).

Das ist ein Banachraum, wenn es eine Menge ist. Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ ein Morphismus in $\underline{V}$. Dann sei $\Delta\,F\,(f) : \Delta\,F\,(\mathfrak{X}) \to \Delta\,F\,(\mathfrak{Y})$ für $\alpha \in \Delta\,F\,(\mathfrak{X}) = b\,\big(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}\,(F, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .\,)\big)$ definiert durch $[\Delta\,F\,(f)\,(\alpha)]_3 = b\,\big((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1_3) \cdot \alpha_3\big)$ für

$\mathfrak{Z} \in \underline{V}$, also $\Delta F(f)(\alpha) = b((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\cdot}) \cdot \alpha_{\cdot})$ und
$\Delta F(f) = b\left(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(F, f \mathbin{\overline{\otimes}} \cdot)\right)$.

Behauptung: das ist wohldefiniert.

Beweis: $(f \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Z}}) \cdot \alpha_{\mathfrak{Z}} : F(\mathfrak{Z}) \to \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z}$ ist stetig in den entsprechenden Topologien und natürlich in $\mathfrak{Z}$ und

$$\begin{aligned} \| \Delta F(f)(\alpha) \| &= \sup_{\mathfrak{Z} \in \underline{V}} \| b(f \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Z}})\, b(\alpha_{\mathfrak{Z}}) \| \\ &\leqslant \| b(f) \| \sup_{\mathfrak{Z} \in \underline{V}} \| b(\alpha_{\mathfrak{Z}}) \| \\ &= \| b(f) \| \, \| \alpha \|. \end{aligned}$$

ΔF wirkt selbstverständlich linear auf den entsprechenden Morphismenräumen.

Für $g : \mathfrak{Z} \to \mathfrak{Z}_1$ in $\underline{V}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(\mathfrak{Z}) \arrow[r, "\alpha_{\mathfrak{Z}}"] \arrow[d, "F(g)"'] & \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z} \arrow[r, "f \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z}"] \arrow[d, "\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} g"] & \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z} \arrow[d, "\mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} g"] \\ F(\mathfrak{Z}_1) \arrow[r, "\alpha_{\mathfrak{Z}_1}"] & \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z}_1 \arrow[r, "f \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z}_1"] & \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Z}_1 \end{tikzcd}$$

kommutativ, weil α natürlich ist; daher ist auch $\Delta F(f)(\alpha)$ natürlich und somit $\in b\left(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, \mathfrak{L}(F, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \cdot)\right)$ und ΔF ist ein zulässiger Funktor (die übrigen Funktoreigenschaften sind trivial). qed.

Bemerkung: Wenn $\mathfrak{X}^*$ der Approximationsbedingung genügt und darüber hinaus noch die Radon-Nykodym-Eigenschaft (vgl. J. Diestel) besitzt, dann ist

$$b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y}) = b\mathfrak{X} \mathbin{\widehat{\otimes}} b\mathfrak{Y} \quad \text{für jedes } \mathfrak{Y},$$

also $\Delta F(\mathfrak{X}) = \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, H\left(F, b\mathfrak{X} \mathbin{\widehat{\otimes}} b(\,.\,)\right)$.

Im allgemeinen ist $\mathfrak{X} \otimes \mathfrak{Y}$ nicht dicht in $b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})$.

Definition: Es seien $F, G : \underline{V} \to \underline{B}$ zulässige Funktoren und $\varphi : F \to G$ eine natürliche Transformation. Dann sei $\Delta(\varphi) : \Delta G \to \Delta F$ definiert durch $\Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \alpha \cdot \varphi : F \to G \to \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}}$. für $\alpha \in \Delta G(\mathfrak{X})$, also $\Delta(\varphi)_{(\cdot)} =$
$(\ldots)$

$$= b\left(\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\ \mathfrak{L}\left(\varphi_{(\cdot\,\cdot)}, (\,\cdot\,) \mathbin{\overline{\otimes}} (\cdot\,\cdot)\right)\right).$$

Behauptung: Damit ist Δ ein kontravarianter Funktor $\mathrm{Funkt}_{ko}(\underline{V}, \underline{B}) \to \mathrm{Funkt}_{ko}(\underline{V}, \underline{B})$, der auf den Morphismenräumen n.t. $H(F, G)$ eine lineare Kontraktion erzeugt.

Beweis: $\Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \alpha \cdot \varphi : F \to G \to \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}}$, ist eine natürliche Transformation, weil α und φ es sind.

$$\| b(\alpha\varphi) \| \leqslant \| b(\alpha) \| \cdot \| b(\varphi) \|.$$

Trivialerweise respektiert Δ Zusammensetzungen von Morphismen und Identitäten und ist linear und Kontraktion. Wir müssen nur noch nachrechnen, ob $\mathfrak{X} \to \Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}$ natürlich ist.
Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ aus $\underline{V}$. Wir müssen feststellen, ob das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
\Delta G(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d, "\Delta G(f)"'] & \Delta F(\mathfrak{X}) \arrow[d, "\Delta F(f)"] \\
\Delta G(\mathfrak{Y}) \arrow[r, "\Delta(\varphi)_{\mathfrak{Y}}"] & \Delta F(\mathfrak{Y}).
\end{tikzcd}$$

Sei $\alpha \in \Delta G(\mathfrak{X})$. Dann ist

$$\Delta F(f) \cdot \Delta(\varphi)_{\mathfrak{X}}(\alpha) = \Delta F(f)(\alpha \cdot \varphi) = b\left((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1\,.\,) \cdot \alpha \cdot \varphi\right)$$

$$\Delta(\varphi)_{\mathfrak{Y}} \cdot \Delta G(f)(\alpha) = \Delta(\varphi)_{\mathfrak{Y}}\left(b\left((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1\,.\,)\,\alpha\right)\right) = b\left((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1\,.\,) \cdot \alpha \cdot \varphi\right).\quad \text{qed.}$$

Satz: Seien $F, G : \underline{V} \to \underline{B}$ Funktoren. Dann gilt

$$\underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\ H(F, \Delta G) = \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\ H(G, \Delta F)$$

isometrisch isomorph und natürlich in F und G, das heißt Δ ist zu sich selbst adjungiert zur Rechten.

Beweis: Für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y} \in \underline{V}$ gilt isometrisch:

$$\begin{aligned} & H\left(F(\mathfrak{X}), b\,\mathfrak{L}(G(\mathfrak{Y}), \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})\right) \\ = {} & H\left(F(\mathfrak{X}), H(G(\mathfrak{Y}), b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y}))\right) \\ = {} & H\left(F(\mathfrak{X}) \mathbin{\widehat{\otimes}} G(\mathfrak{Y}), b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})\right) \\ = {} & H\left(G(\mathfrak{Y}), H(F(\mathfrak{X}), b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y}))\right) \\ = {} & H\left(G(\mathfrak{Y}), b\,\mathfrak{L}(F(\mathfrak{X}), \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{X})\right) \end{aligned}$$

Sei $\varphi \in \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, H(F, \Delta G)$, dann ist

$$\varphi_{\mathfrak{X}} : F(\mathfrak{X}) \to \Delta G(\mathfrak{X}); \text{ für } x \in F(\mathfrak{X}) \text{ ist}$$

$$\varphi_{\mathfrak{X}}(x) \in \Delta G(\mathfrak{X}) = \underset{\underline{V}}{\text{n.t.}}\, H\left(G, b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \,.\,)\right); \text{ also}$$

$$\varphi_{\mathfrak{X}}(\,.\,)_{\mathfrak{Y}} : F(\mathfrak{X}) \to H\left(G(\mathfrak{Y}), b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})\right)$$

und diesem Element ist unter dem obigen Isomorphismus das folgende zugeordnet:

$$\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(\,.\,.\,)_{\mathfrak{X}} : G(\mathfrak{Y}) \to H\left(F(\mathfrak{X}), b(\mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{X})\right),$$

wobei $\varphi_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}}(y) = {}^{t}\left(\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x)\right)$ für $x \in F(\mathfrak{X})$ und $y \in G(\mathfrak{Y})$ gilt, und ${}^{t} : b(\mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{X}) \to b(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})$ der kanonische Isomorphismus ist.
Außerdem gilt $\| \varphi_{\mathfrak{X}}(\,.\,)_{\mathfrak{Y}}(\,.\,.\,) \| = \| \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(\,.\,.\,)_{\mathfrak{X}}(\,.\,) \|$, wir haben also nur noch die Natürlichkeiten nachzuprüfen:

1. Sei $\varphi \in \text{n.t.}\, H(F, \Delta G)$, zz: $\widehat{\varphi} \in \text{n.t.}\, H(G, \Delta F)$.

   Sei $x \in F(\mathfrak{X})$, $y \in G(\mathfrak{Y})$,
   $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_1 \quad g : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Y}_1$ in $\underline{V}$.

Zunächst müssen wir $\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y) \in \Delta F(\mathfrak{Y})$ zeigen:

$$\begin{tikzcd} F(\mathfrak{X}) \arrow[r, "\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}"] \arrow[d, "F(f)"'] & \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{X} \arrow[d, "\mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} f"] \\ F(\mathfrak{X}_1) \arrow[r, "\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}_1}"] & \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{X}_1 \end{tikzcd}$$ ist kommutativ,

denn
$$\begin{aligned}
&(\mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} f)\, \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}\,(y)_{\mathfrak{X}}\,(x)\\
&= (\mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} f)\, {}^t(\varphi_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}}\,(y))\\
&= {}^t((f \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})\, \varphi_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}}\,(y))\\
&= {}^t(\varphi_{\mathfrak{X}_1}\,(F\,(f)\,x)_{\mathfrak{Y}}\,(y)), \text{ weil } \mathfrak{X} \to \varphi_{\mathfrak{X}} \text{ natürlich ist,}\\
&= \widehat{\varphi}_{\mathfrak{X}}\,(y)_{\mathfrak{X}_1}\, F\,(f)\,x.
\end{aligned}$$

Also wissen wir, daß $\mathfrak{X} \to \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}\,(y)_{\mathfrak{X}}$ natürlich ist bei festem $\mathfrak{Y}$ und y. Nun zeigen wir, daß auch $\mathfrak{Y} \to \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}$ natürlich ist:

$$\begin{tikzcd}
G\,(\mathfrak{Y}) \arrow[r, "\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}"] \arrow[d, "G\,(g)"'] & \Delta\, F\,(\mathfrak{Y}) \arrow[d, "\Delta\, F\,(g)"] \\
G\,(\mathfrak{Y}_1) \arrow[r, "\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}1}"] & \Delta\, F\,(\mathfrak{Y}_1)
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&[\Delta\, F\,(g) \cdot \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}\,(y)]_{\mathfrak{X}}\,(x) =\\
&= (g \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{X}}) \cdot \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}\,(y)_{\mathfrak{X}}\,(x)\\
&= (g \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{X}})\, {}^t\,(\varphi_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}}\,(y))\\
&= {}^t((1_{\mathfrak{X}} \mathbin{\overline{\otimes}} g)\, \varphi_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}}\,(y))\\
&= {}^t(\varphi_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}_1} \cdot G\,(g)\,y) \quad \text{weil} \quad \mathfrak{Y} \to \varphi_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}} \quad \text{natürlich ist.}\\
&= \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}1}\,(G\,(g)\,y)_{\mathfrak{X}}\,(x).
\end{aligned}$$

und zwar für alle $\mathfrak{X}$ und x.

2. Wenn $\widehat{\varphi} \in$ n.t. $H(G, \Delta\, F)$ ist, dann ist $\varphi \in$ n.t. $H\,(F, \Delta\, G)$ (man vertausche F und G).

3. Für $\eta : F^1 \to F$ und $\gamma : G^1 \to G$ ist

$$\begin{tikzcd}
\text{n.t. } H\,(F, \Delta\, G) \arrow[r, "\widehat{\ }"] \arrow[d, "\text{n.t. } H\,(\eta,\, \Delta\,(\gamma))"'] & \text{n.t. } H\,(G, \Delta\, F) \arrow[d, "\text{n.t. } H\,(\gamma,\, \Delta\,(\eta))"] \\
\text{n.t. } H\,(F^1, \Delta\, G^1) \arrow[r, "\widehat{\ }"] & \text{n.t. } H\,(G^1, \Delta\, F^1)
\end{tikzcd}$$

kommutativ, denn für $y \in G^1\,(\mathfrak{Y})$, $x \in F^1\,(\mathfrak{X})$ ist

$$\begin{aligned}
&[\text{n.t. } H(\gamma, \Delta(\eta))(\widehat{\varphi})]_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x) = \\
&= [\Delta(\eta)_{\mathfrak{Y}} \cdot \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}} \cdot \gamma_{\mathfrak{Y}}](y)_{\mathfrak{X}}(x) \\
&= [\Delta(\eta)_{\mathfrak{Y}}(\widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(\gamma_{\mathfrak{Y}}(y)))]_{\mathfrak{X}}(x) \\
&= \widehat{\varphi}_{\mathfrak{Y}}(\gamma_{\mathfrak{Y}}(y))_{\mathfrak{X}} \cdot \eta_{\mathfrak{X}}(x) \\
&= {}^t(\varphi_{\mathfrak{X}}(\eta_{\mathfrak{X}}(x))_{\mathfrak{Y}}(\gamma_{\mathfrak{Y}}(y))) \\
&= {}^t[(\varphi_{\mathfrak{X}}(\eta_{\mathfrak{X}}(x)) \cdot \gamma)_{\mathfrak{Y}}(y)] \\
&= {}^t[(\Delta(\gamma)_{\mathfrak{X}}(\varphi_{\mathfrak{X}} \cdot \eta_{\mathfrak{X}}(x)))_{\mathfrak{Y}}(y)] \\
&= {}^t[(\Delta(\gamma) \cdot \varphi \cdot \eta)_{\mathfrak{X}}(x)_{\mathfrak{Y}}(y)] \\
&= [\frown(\Delta(\gamma) \cdot \varphi \cdot \eta)]_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x) \\
&= [\frown \cdot \text{n.t. } H(\eta, \Delta(\gamma))(\varphi)]_{\mathfrak{Y}}(y)_{\mathfrak{X}}(x). \qquad \text{qed.}
\end{aligned}$$

Korollar: Δ führt induktive Limiten in projektive Limiten über.

V. Der Δ-Duale spezieller Funktoren

Satz 1: Für $Y \in \underline{B}$ ist $\Delta(H^Y \cdot *) = b(\,.\,\overline{\otimes}\, Y')$ natürlich in Y.

Beweis: Nach III Satz 3 gilt

$$\Delta \quad (H^Y \cdot *)(\mathfrak{X}) = b(\text{n.t. } \mathfrak{L}(H^Y \cdot *, \mathfrak{X} \,\overline{\otimes}\, .)) = b(\mathfrak{X} \,\overline{\otimes}\, Y') \quad \text{für} \quad \mathfrak{X} \in \underline{W}$$

und natürlich in Y.

Wir müssen also nur noch die Natürlichkeit in $\mathfrak{X}$ nachweisen.

$T_Y^{(\mathfrak{X})}: \text{n.t. } \mathfrak{L}(H^Y \cdot *, \mathfrak{X} \,\overline{\otimes}\, .) \to \mathfrak{X} \,\overline{\otimes}\, Y'$ war gegeben durch

$$T_Y^{(\mathfrak{X})}(\varphi) = \varphi_{Y'}(1_Y).$$

Sei $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_1$ in $\underline{W}$.

Dann ist

$$\begin{array}{ccc}
\Delta(H^Y \cdot *)(\mathfrak{X}) & \xrightarrow{\;b(T_Y^{(\mathfrak{X})})\;} & b(\mathfrak{X} \,\overline{\otimes}\, Y') \\
{\scriptstyle \Delta(H^Y \cdot *)(f)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle b(f \,\overline{\otimes}\, Y')} \\
\Delta(H^Y \cdot *)(\mathfrak{X}_1) & \xrightarrow{\;bT_Y^{(\mathfrak{X}_1)}\;} & b(\mathfrak{X}_1 \,\overline{\otimes}\, Y')
\end{array}$$

kommutativ, denn

$$
\begin{aligned}
& b\,(f \mathbin{\overline{\otimes}} Y') \cdot b\,(T^{(\mathfrak{X})}_{Y})\,(\varphi) \\
={} & b\,\big((f \mathbin{\overline{\otimes}} Y') \cdot \varphi_{Y'}\,(1_Y)\big) \\
={} & b\,\big((f \mathbin{\overline{\otimes}} Y') \cdot \varphi_{Y'}\big)\,(1_Y) \\
={} & \big[\Delta\,(H^Y \cdot {*})\,(f)\,(\varphi)\big]_{Y'}\,(1_Y) \\
={} & T^{(\mathfrak{X}_1)}_{Y} \cdot \Delta\,(H^Y \cdot {*})\,(f)\,(\varphi) \qquad \text{qed.}
\end{aligned}
$$

Satz 2: Für $Y \in \underline{B}$ ist $\Delta\,(H_Y \cdot b) = b\,(\,.\, \overline{\otimes}\, Y'')$ natürlich in Y.

Beweis:
$$
\begin{aligned}
H_Y \cdot b\,(\mathfrak{X}) = H\,(Y, b\,\mathfrak{X}) = b\,\mathfrak{L}\,(Y, \mathfrak{X}) &= b\,\mathfrak{L}\,(\mathfrak{X}^*, Y') \\
&= H\,(\mathfrak{X}^*, b\,(Y')) \\
&= H^{b\,(Y')} \cdot {*}\,(\mathfrak{X})
\end{aligned}
$$

natürlich in $\mathfrak{X}$ und Y.

Nach Satz 1 ist also

$$
\begin{aligned}
\Delta\,(H_Y \cdot b) &= \Delta\,(H^{b\,(Y')} \cdot {*}) \\
&= b\,\big(\,.\, \overline{\otimes}\,(b\,(Y'))'\big) \\
&= b\,(\,.\, \overline{\otimes}\, Y'') \qquad \text{qed.}
\end{aligned}
$$

Satz 3: $\Delta\, b = b$, also ist b selbst — Δ-dual.

Beweis: Für $\varphi \in \Delta\, b\,(\mathfrak{X}) = b\,\big(\text{n.t. } \mathfrak{L}\,(b, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}}\, .\,)\big)$ ist

$$\varphi_I \in b\,\mathfrak{L}\,(b\,I, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} I) = H\,(I, b\,\mathfrak{X}) = b\,\mathfrak{X},$$

wobei I der Grundkörper ist.

Wir definieren daher

$$T_{\mathfrak{X}} : \Delta\, b\,(\mathfrak{X}) \to b\,(\mathfrak{X}) \text{ durch } T_{\mathfrak{X}}\,(\varphi) = \varphi_I\,(1),\ 1 \in I.$$

Dann ist $\|\, T_{\mathfrak{X}}\,(\varphi)\,\| = \|\,\varphi_I\,(1)\,\| \leqslant \|\,\varphi_I\,\| \leqslant \|\,\varphi\,\|$, also $\|\, T_{\mathfrak{X}}\,\| \leqslant 1$.

Für jedes $x \in b\,\mathfrak{X}$ sei $\widehat{x} : I \to b\,\mathfrak{X}$, $\widehat{x}\,(1) = x$.

Für $\mathfrak{Y} \in \underline{W}$ sei $^k : \mathfrak{Y} \to I \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y}$ der Isomorphismus $y \to 1 \otimes y$.

Für $\mathfrak{X} \in \underline{W}$ sei $U_{\mathfrak{X}} : b\,\mathfrak{X} \to \Delta\,(b)\,(\mathfrak{X})$ definiert durch

$$U_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}} = (\widehat{x} \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Y}}) \cdot {}^k : \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y}.$$

Dann ist $\|\, U_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}}\,\| \leqslant \|\,\widehat{x}\,\| = \|x\|$, also ist $U_{\mathfrak{X}}\,(x)_{\mathfrak{Y}} \in b\,\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{Y}, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} \mathfrak{Y})$, darüberhinaus ist $\mathfrak{Y} \to (\widehat{x} \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Y}}) \cdot {}^k$ klarerweise natürlich, also ist $U_{\mathfrak{X}}\,(x) \in b\,\big(\text{n.t. } \mathfrak{L}\,(b, \mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}}\, .\,)\big)$.

$$
\begin{aligned}
[U_{\mathfrak{X}} \cdot T_{\mathfrak{X}}(\varphi)]_{\mathfrak{Y}}(y) &= U_{\mathfrak{X}}\big(\varphi_I(1)\big)_{\mathfrak{Y}}(y) \\
&= \widehat{\big(\varphi_I(1) \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Y}}\big)}\,({}^k y) \\
&= (\varphi_I \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Y}})\,(1 \otimes y) \\
&= (\varphi_I \mathbin{\overline{\otimes}} 1_{\mathfrak{Y}})\,(1_I \mathbin{\overline{\otimes}} \hat{y})\,(1 \otimes 1) \\
&= (1_{\mathfrak{X}} \mathbin{\overline{\otimes}} \hat{y})\,(\varphi_I \mathbin{\overline{\otimes}} 1_I)\,(1 \otimes 1) \\
&= (1_{\mathfrak{X}} \mathbin{\overline{\otimes}} \hat{y})\,\varphi_I(1) \\
&= \varphi_{\mathfrak{Y}} \cdot b(\hat{y})\,(1) \quad \text{weil } \varphi \text{ natürlich ist.} \\
&= \varphi_{\mathfrak{Y}}(y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{\mathfrak{X}} \cdot U_{\mathfrak{X}}(x) &= U_{\mathfrak{X}}(x)_I(1) \\
&= (\hat{x} \mathbin{\overline{\otimes}} 1_I)\,(1 \otimes 1) \\
&= x \otimes 1 = x.
\end{aligned}
$$

Somit ist $T_{\mathfrak{X}} = U_{\mathfrak{X}}^{-1}$, $\| T_{\mathfrak{X}} \| \leqslant 1$, $\| U_{\mathfrak{X}} \| \leqslant 1$, also ist $T_{\mathfrak{X}}$ für jedes $\mathfrak{X}$ ein isometrischer Isomorphismus; Wir zeigen noch, daß $\mathfrak{X} \to T_{\mathfrak{X}}$ natürlich ist:

Sei $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}_1$ in $\underline{W}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
b(f) \cdot T_{\mathfrak{X}}(\varphi) &= b(f)\,\varphi_I(1) \\
&= b\big((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1_I) \cdot \varphi_I\big)\,(1) \\
&= T_{\mathfrak{X}_1}\big(b\,((f \mathbin{\overline{\otimes}} 1\,.\,) \cdot \varphi)\big) \\
&= T_{\mathfrak{X}_1} \cdot \Delta\, b(f)\,(\varphi). \qquad \text{qed.}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen: 1 Es ist nicht gelungen, $\Delta\,(b\,(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .))$ zu berechnen; doch wegen $\Delta\big(b\,(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .)\big)\,(\mathfrak{Y}) = b\,\big(\text{n.t.}\,\mathfrak{L}\,(b\,(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .),\, \mathfrak{Y} \mathbin{\overline{\otimes}} .)\big)$ könnte man vermuten, daß

$$\Delta\big(b\,(\mathfrak{X} \mathbin{\overline{\otimes}} .)\big) = b\,\mathfrak{L}\,(b\,\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = H\,(b\,\mathfrak{X}, b\,\mathfrak{Y}) \text{ ist.}$$

Dann wäre etwa

$$\Delta\,\Delta\,(H^Y \cdot *) = \Delta\big(b\,(Y' \mathbin{\overline{\otimes}} .)\big) = H_{b\,Y'} \cdot b = H^{b\,Y''} \cdot * \quad \text{also} \quad H^Y \cdot *$$

genau dann reflexiv, wenn Y reflexiv ist.

2. Man kann die in Michor [2] entwickelten Methoden auch hier anwenden und die Δ-Dualität auf „Linksideale" zurückführen. Man

wird dann vermutlich auf die Dualität von Linksidealen stoßen, die Pietsch in der zitierten Arbeit eingeführt hat. Die Ergebnisse von Pietsch wiederum würden Aussagen liefern wie $\Delta F = \Delta F_e$, eine Gleichung, um die man sich bei D lange vergeblich bemüht hat.

Literatur

Buchwalter, Henri: Topologies, bornologies et compactologies. Thêse Doc. Sc. Math. Fac. Sc. Lyon (1968).

Cigler, Johann: Funktoren auf Kategorien von Banachräumen, erscheint in Mh. für Math.

Diestel, J.: The Radon-Nikodym property and the coincidence of integral and nuclear Operators. Rev. Roum. Math. pures et appl. **42**/10 (1972) p. 1611.

Linton, F. E. J.: Autonomous categories and duality of functors. Journal of Algebra **2** (1965) 315–349.

MacLane, Saunders: Kategorien, Springer-Verlag 1972.

Michor, Peter [1]: Zum Tensorprodukt von Funktoren auf Kategorien von Banachräumen, erscheint in Mh. für Math.

Michor, Peter [2]: Duality of functors on categories of Banach-spaces, erscheint in J. of pure and applied Algebra.

Mitjagin, B. S., A. S. Svarts: Functors in categories of Banach-spaces. Russian Math. Surveys 19, **2** (1964) 65–127.

Pietsch, Albrecht: Ideale von *Sp*-Operatoren in Banachräumen. Studia Math. **38** (1970) 59–69.

Waelbroeck, Lucien: Some theorems about bounded structures. J. Functional Anal. 1 (1967) 392–408.

Druck von Adolf Holzhausens Nfg., Universitätsbuchdrucker, Wien