Исмагилов Раис Сальманович
(к семидесятипятилетию со дня рождения)

10 июля 2013 года исполняется 75 лет доктору физико-математических наук профессору Раису Сальмановичу Исмагилову. Его основные научные интересы - теория представлений и бесконечномерные группы, спектральная теория, динамические системы, поперечники. Он - автор более 90 научных статей и монографии «Representations of infinite-dimensional groups» (AMS, 1996). В 1983 году участвовал в качестве приглашенного докладчика в Международном математическом конгрессе в Варшаве. Обсудим вкратце наиболее известные его результаты.

Спектральная теория. Научной работой Р.С.Исмагилов начал заниматься под руководством профессора А.Г.Костюченко, основной областью интересов которого была теория операторов. В первой своей статье (Докл. АН СССР, **133**, №3 (1960)) для неограниченного оператора A в гильбертовом пространстве Р.С. ввел понятие *карлемановского вектора*. Так был назван вектор h, для которого $\|A^n h\| \leqslant m_n$ и $\sum m_{2n}^{-1/2n} < \infty$. Основной результат работы состоял в следующем: *Если карлемановские векторы для симметрического оператора A образуют плотное множество в пространстве, то A существенно самосопряжен.* В действительности, этот результат является операторным переложением знаменитого признака определенности проблемы моментов, принадлежащего Т.Карлеману. Но такое видение родства этих совсем по разному звучащих результатов было необычным. Применительно к конкретным операторам эта теорема оказалась очень эффективной и позволила получить ряд новых признаков существенной самосопряженности. Отметим, что спустя 5 лет карлемановские векторы были переоткрыты Нуссбаумом (Nussbaum), который назвал их *квазианалитическими*.

В 60-е годы после работ Розенблюма и Като о сохранении абсолютно непрерывной компоненты самосопряженного оператора при возмущении его ядерным естественно возникал вопрос о том, что происходит с сингулярными компонентами спектра при возмущениях. Один из основных результатов работы Исмагилова "О спектре матриц Теплица"(Докл. АН СССР. **149**, №4 (1963)) описывает связь между спектральными типами операторов A и PAP, где A самосопряжён, а P — проектор на подпростанство коразмерности 1. Результат состоит в том, что сингулярные компоненты этих операторов взаимно сингулярны (конечно, абсолютно непрерывные компоненты унитарно эквивалентны, что следует из теоремы Като-Розенблюма о ядерных возмущениях). Из этого результата весьма легко была выведена абсолюная непрерывность спектра оператора Теплица (аналитическое доказательство этого факта было получено ранее М.Розенблюмом). Наконец, была указана функция кратности, и таким образом, дано полное описание спектрального типа оператора Теплица. В этой же работе без доказательства (доказательство содержалось в кандидатской диссертации) был приведен еще один красивый результат: *Если A, B — самосопряженные ограниченные операторы и оператор AB — ядерный, то имеет место унитарная эквивалентность $(A+B)_a \simeq A_a \oplus B_a$, (здесь A_a — абсолютно непрерывная компонента оператора A).* Доказательство этой теоремы дано Като и Хоулендом (J. Funct. Anal, **41**(1981).)

Упомянем еще о двух работах Исмагилова, относящихся к теории операторов Штурма-Лиувилля. Результаты этих работ в настоящее время считаются классическими. В первой из этих работ (Докл. АН СССР. **140**, №1 (1961)) Исмагилов открыл замечательное свойство локализации для оператора Штурма-Лиувилля $L_q = -d^2/dx^2 + q$ на всей оси $\mathbb{R}$. Для произвольного интервала $\Delta = (a, b)$ он ввел величину

$$\lambda(\Delta) = \inf(L_q y, y), \quad \text{где } \ y \in C_0^\infty(\Delta), \|y\|_{L^2(a,b)} = 1$$

В статье доказано неравенство $\lambda(-\infty, \infty) > \inf_{|\Delta|=1} \lambda(\Delta) - 32$. Другими словами, из равномерной полуограниченности оператора на каждом из интервалов фиксированной длины с условиями Дирихле в концах интервалов следует его полуограниченность на всей оси. Этот результат не получил сразу должной известности после его выхода в свет и был переоткрыт через 18 лет (см. подробности в книге Цикона, Фрезу, Кирша и Саймона "Операторы Шредингера"). Позже Б.Саймон ввел термин "ИМС-фомула локализации"(по начальным буквам имен: Исмагилов-Морган-Сигал, первый из которых открыл формулу, а другие распространили ее на операторы более общего вида).

В другой работе Р.С. (УМН, 1962) речь идет об индексах дефекта оператора Штурма-Лиувилля $L_q = -d^2/dx^2 + q$, $y(0) = 0$ на полуоси $\mathbb{R}^+$. Оказалось, что можно говорить о существенной самосопряженности оператора L_q, т.е. о нулевых индексах дефекта, имея информацию о потенциале q не на всей полуоси $\mathbb{R}^+$, а только на некоторой системе непересекающихся отрезков Δ_k, уходящих в бесконечность. В частности, *индексы дефекта нулевые, если* $\sum_k |\Delta_k|^2 = \infty$ *и* $q(x) > -C|\Delta_k|^{-2}$ *при* $x \in \Delta_k$ (есть и другие достаточные условия). Если систему интервалов заменить замкнутым нигде не плотным неограниченным множеством, то результат такого рода невозможен.

Интерес к теории операторов у Исмагилова не угасал на протяжении всего времени. Несколько работ на эту тему он написал и в последнее десятилетие (среди них имеются и совместные работы с А.Г.Костюченко). Особо отметим новые принципиальные результаты по теории операторов Штурма-Лиувилля с матричным потенциалом, а также с потенциалами, которые не обеспечивают полуограниченность оператора.

Теория представлений и бесконечномерные группы. В 1964-68 Р.С.Исмагилов под влиянием работ М.А.Наймарка занимался представлениями групп в бесконечномерных пространствах с индефинитным скалярным произведением. По сравнению с унитарными представлениями там появляются новые эффекты (более сложно устроенные спектры, отсутствие полной приводимости).

Тогда же он начинает искать новые пути в теории представлений. В классической теории большую роль играют сверточные алгебры функций, постоянных на двойных классах смежности $K \setminus G/K$, где K-компактная подгруппа группы G (например, алгебры Гекке-Ивахори). Пусть теперь $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{F})$, где $\mathbb{F}$ - не локально-компактное неархимедово поле, $K \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{F})$ - подгруппа матриц с целыми элементами. Р.С. обнаружил удивительный факт, не имеющий конечномерного аналога: в этом случае пространство двойных классов смежности имеет естественную структуру полугруппы, которая действует в пространствах K-неподвижных векторов унитарных представлений G. Позже постепенно выяснилось, что такие полугрупповые операции обычны для бесконечномерных групп (в том числе для классических и симметрических групп) и являются мощным инструментом для их исследования. Эта группа работ Р.С. была одной стартовых точек теории бесконечномерных групп.

В 70х-начале 80х годов Р.С. занимался представлениями групп диффеоморфизмов и групп токов - тема в то время не исследованная и, как сейчас задним числом ясно, трудная. Рассматривались разнообразные подходы к предмету: представления в пространствах функций на точечных конфигурациях, индуцирование с представлений фундаментальной группы, конструкции центральных расширений с помощью амальгам (в том числе ряд работ 1992-2002гг), представления группы диффеоморфизмов со старшим весом (рассказывалось на семинаре А.А.Кириллова в 1980г, не опубликовано), представления групп диффеоморфизмов, сохраняющих слоения, использование «схемы Араки», конструкции действий групп диффеоморфизмов на бесконечномерных симплектических многообразиях. Обсудим подробнее две серии работ.

Рассмотрим *группу токов* $\mathcal{M} = C^\infty(X, K)$ гладких отображений r из многообразия X в компактную группу Ли K (например в $\mathrm{SU}(2)$). Рассмотрим пространство L^2 функций из X в алгебру Ли $\mathfrak{k}$. Рассмотрим естественное унитарное действие $r: f(x) \mapsto r(x)^{-1} f(x) r(x)$ группы $\mathcal{M}$ в этом L^2 и «поправим» его как $r: f(x) \mapsto r(x)^{-1} f(x) r(x) + r(x)^{-1} dr(x)$. Получается действие группы $\mathcal{M}$ аффинными изометрическими преобразованиями, а у группы аффинных изометрических преобразований гильбертова пространства есть стандартное представление в пространстве Фока. Получаемое таким образом действие группы токов в пространстве Фока в дальнейшем было предметом многочисленных исследований («энергетические представления», термин ввели переоткрывшие их впоследствии Р.Хёг-Крон и С.Альбеверио).

Другая важная работа - построение действия группы диффеоморфизмов в пространстве L^2 на множестве пуассоновских конфигураций (это действие было построено также Дж.Голдином, Дж.Гродником, Р.Пауэрсом, Д.Шарпом и А.М.Вершиком, И.М.Гельфандом, М.И.Граевым). Отметим, что получаемое представление можно реализовывать в пространстве L^2 по гауссовой мере, что устанавливает каноническое соответствие между пространствами L^2 по гауссовой и пуассоновой мере.

Несколько статей Р.С. 2006-2008гг были посвящены аналогам коэффициентов Рака́ для бесконечномерных представлений. А именно, берется группа G и тензорное произведение трех ее представлений $(\rho_1 \otimes \rho_2) \otimes \rho_3 = \rho_1 \otimes (\rho_2 \otimes \rho_3)$. Разлагая его на неприводимые представления в разных порядках, мы получаем внешне разные ответы, связанные нетривиальной матрицей (или оператором) перехода. В случае конечномерных представлений SL_2 это дает известные в математической физике ${}_4F_3$-многочлены Рака́. Р.С.Исмагилов впервые рассмотрел задачу в бесконечномерном случае: для $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ и группы изометрий $\mathbb{R}^3$. Полученные ответы оказались связанными с интересной геометрией (с пространствами модулей плоских связностей на поверхностях и пространствами шарнирных ломаных А.А.Клячко)

Динамические системы. Здесь мы отметим статьи (1973-2002) по разреженным случайным блужданиям на локально компактных группах G и матричным произведениям Рисса. Обсудим простейший случай. Пусть $G = \mathbb{R}$. Фиксируем последовательности p_k, q_k положительных чисел, $p_k + q_k = 1$. Фиксируем $h_k \in \mathbb{R}$. Пусть точка блуждает по $\mathbb{R}$, на k-ом шагу она остается на месте с вероятностью p_k и перемещается на h_k с вероятностью q_k. Рассмотрим хвостовую (остаточную) сигма-алгебру блуждания и индуцированную меру ν на ней (мы считаем траектории блуждания эквивалентными, если они совпадают с некоторого места, и рассматриваем измеримые подмножества, составленные из классов эквивалентности). В случае постоянных p_k, q_k, h_k получаемое пространство с мерой тривиально (по закону нуля и единицы). Более общие случаи (названия: «действия Макки», «специальный поток») много изучались (В.Я.Голодец, С.Д.Синельщиков, Р.Зиммер). Р.С.Исмагилов предложил (1986) критерий тривиальности (нетривиальности) хвостовой алгебры (в терминах винеровской алгебры и поведения произведений $\prod_{k=m}^{n}(1 + e^{ish_k})$). Далее Р.С. рассматривает случай «разреженных блужданий», когда h_k быстро растет: $h_k > h_1 + \cdots + h_{k-1}$. Он показывает, что для действия $\mathbb{R}$ в $L^2(\nu)$ спектральная мера задается «произведением Рисса»

$$\sigma(s) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + 2\sqrt{p_k q_k}\cos(h_k s)) = \prod_{k=1}^{\infty}|\sqrt{p_k} + \sqrt{q_k}e^{ish_k}|^2,$$

оно (согласно Ф.Риссу) сходится в смысле обобщенных функций к положительной мере на $\mathbb{R}$. Если $h_{k+1}/h_k > 3 + \varepsilon$ и $\sum p_k q_k = \infty$, то получаемая мера чисто сингулярна.

Поперечники. Широкую известность принесли Р.С.Исмагилову его работы по поперечникам. Величина $d_n(C, X)$ n-поперечника по Колмогорову характеризует возможность наилучшего приближения множества C в нормированном пространстве X подпространствами размерности n.

В первой своей работе по поперечникам (Функц. анализ и его прилож., **2**, №2 (1968)), Исмагилов показал, что в случае гильбертового пространства X поперечники множества опускают двусторонюю оценку через собственные значения и собственные функции интегрального оператора, ядро которого выражается через скалярные произведения векторов множества. Это позволило получить новые результаты по асимптотикам поперечников и привлекла внимание к этой теме специалистов по теории операторов.

Вторая работа Р.С.Исмагилова (УМН, **29** (**177**), №3 (1974)) произвела радикальный сдвиг в проблематике асимптотики поперечников для соболевских классов $W_p^r(\mathbb{T})$ в $L_q(\mathbb{T})$ при $p \leqslant q$, $q \geqslant 2$. Нетрудно доказывается, что уклонение $d(W_p^r(\mathbb{T}), \mathcal{T}_n, L_q(\mathbb{T}))$ класса Соболева от пространств $\mathcal{T}_n$, порожденных тригонометрическими полиномами степени $\leqslant n$ слабо (по n) эквивалентно $n^{-(r-(1/p-1/q)_+)}$. Довольно быстро было доказано, что приближение пространствами тригонометрических полиномов дает правильный порядок убывания колмогоровских поперечников $p \geq q$. В кругу специалистов имелась полная уверенность, что это справедливо и в случае и при других значениях p, q. Но Р.С. показал, что это не так: при $1 \leqslant p < \infty$, $q = \infty$ справедлива другая асимптотика. Для достижения цели Р.С. применил методы из других областей, совершенно неожиданные для тех, кто занимался этими задачами. При этом оказалось, в частности, что линейная оболочка n тригонометрических полиномов, расположенных не подряд, дают лучшее приближение, чем пространство $\mathcal{T}_n$ тригонометрических полиномов степени n. Это привело к новым понятиям *тригонометрического и абсолютного поперечников,* сыгравших большую роль в дальнейшем. Это был прорыв в хорошо укрепленной крепостной стене. В этой стене образовалась брешь, и этой задачей стали заниматься многие исследователи. Принципиально новый подход к этой проблематике был найден в работах Б.С.Кашина. Дальнейшее развитие этой тематики связано с именами Э.С.Белинского, Э.М. Галеева, Е.Д.Глускина, Е.Д.Куланина, В.Е.Майорова, В.Н.Темлякова и других.

После аспирантуры Раис Сальманович распределился в только что организованный Московский институт электронного машиностроения (МИЭМ), который вскоре стал одним из центров сосредоточения математиков и математического образования в Москве. Там он работал 25 лет, с 1978 года в звании профессора (защитил докторскую в 1973 году), в 1982-1988гг заведовал кафедрой «Алгебра и анализ», последние 20 лет он работает в МГТУ им. Баумана. В качестве лектора Раис Сальманович всегда выделялся ясностью изложения и способностью просто рассказывать сложные вещи, в том числе в нематематической аудитории.

Мы закончим цитатой из его заметки в журнале «Квант» (2003) «Ожерелье Штейнера, или любовь к вычислениям» о поризме Штейнера

То, что изложено в предыдущем разделе, было получено мной в 1954 году, в летние каникулы после 9ого класса средней школы. Разумеется, я не знал тогда, что задача была поставлена и решена Я.Штейнером еще в 19 веке. Не знал я также об инверсии и решении рекуррентный соотношений. Но это - тот случай, когда незнание оказалось благом. Ведь что было бы, если бы, если бы кто-либо поспешил сообщить мне все эти сведения? Я лишился бы пары восхитительных недель, наполненных тем, что составляет творчество: это и острое любопытство (замкнется или нет цепочка окружностей), и счастливая идея применения формулы Виета, и финальная формула, заключающая решение загадки. Мне повезло: в сельской школе 1954 года никому и не снилось наблюдаемое сегодня мельтешение кружков и олимпиад, профильных школ и лицеев, "Шагов в будущее"(есть и такие) и пр. и пр. Известная истина: самостоятельное творчество - вещь более ценная, чем сумма знаний, а к творчеству побуждает скорее интеллектуальный голод, нежели пресыщение.

Этим нравоучением и закончу: да не покинут чувство меры и здравый смысл того читателя, который пожелает применить его к себе

Поздравляя Раиса Сальмановича с юбилеем, мы желаем ему всяческого благополучия и дальнейших трудов на благо математики и математического просвещения.

А.М.Вершик, Б.С.Кашин, А.А.Кириллов, В.Ф.Молчанов, Ю.А.Неретин, Г.И.Ольшанский, В.В.Рыжиков, В.М.Тихомиров, А.А.Шкаликов