ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

Московский государственный институт электроники и математики

Кафедра математического анализа

Задачи для экзаменов и коллоквиумов по математическому анализу для студентов 1–2 курса ФПМ (1–3 семестры)

Москва 1997

Составитель: д-р физ.-мат. наук Ю. А. Неретин

Разработка составлена из задач, использовавшихся на экзаменах и коллоквиумах по матаматическому анализу в 1991–97 гг.

УДК 517

Задачи для экзаменов и коллоквиумов по математическому анализу для студентов 1–2 курса ФПМ (1–3 семестры) / Моск. гос. ин-т электроники и математики; Сост. Ю. А. Неретин, М., 1997. 20 с.

Рецензент: доц. В. В. Заруцкая

ISBN 5–230–22241–7

Предлагаемая разработка почти полностью составлена из задач, использовавшихся в курсе анализа в МИЭМ в 1991–1997гг.

Большая часть этих задач входила в экзаменационные билеты в качестве третьего вопроса. Список экзаменационных задач сообщался студентам заблаговременно (за несколько недель до сессии). Как правило решения задач в буквальном смысле этого слова на лекциях не разбирались и на консультациях студентам не сообщались. Однако состав списка экзаменационных задач очень тесно связан с лекционным материалом и, в частности, с примерами, разбиравшимися на лекциях. Во многих случаях пригодность той или иной задачи в качестве экзаменационной зависит от деталей курса, и по этой причине составление универсального списка задач затруднительно; наш список на универсальность не претендует.

Кроме того, в сборник входит часть задач, предлагавшихся студентам на коллоквиумах. Уровень этих задач различен: от очень простых (например, 2.1, 4.8) до сравнительно сложных (4.13, 6.9).

Сюда же добавлены некоторые задачи, разбиравшиеся на лекциях и упражнениях, задачи, входившие в типовые домашние работы (например 2.13, 2.15, 2.27, 4.1, 6.15), а также несколько задач, не проходивших проверку в условиях МИЭМ. В случаях, когда возможность использования задачи вызывает сомнения, около номера задачи поставлен знак вопроса ($^?$). Относительно сложные задачи снабжены знаком плюс ($^+$).

I. Последовательности

1. Доказать, что C_{2n}^n — самое большое из чисел C_{2n}^k. Доказать неравенства
$$\frac{1}{2n+1}\,2^{2n} < C_{2n}^n < 2^{2n}.$$

2. На сколько частей делят плоскость n прямых общего положения (никакие две прямые не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке)?

3. Пусть а) $a_n = \dfrac{n^{10}}{1.01^n}$; б) $a_n = \dfrac{100^n}{n!}$. Найти $\lim a_n$. Найти N такое, что $a_n < 10^{-1}$ для всех $n > N$.

4. Пусть $a_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dots + \dfrac{1}{n!}$. Найти n такое, что $|a_n - e| < 10^{-5}$.

5. Доказать, что последовательность $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k}{10^k}$ сходится. Найти ее сумму с точностью до 10^{-3}.

6. Пусть $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$. Найти $\lim a_n$. Найти какое-нибудь n такое, что $a_n > 100$.

7. Сколько нужно взять слагаемых, чтобы вычислить сумму ряда
$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$
с точностью до 10^{-6}.

8. Доказать, что ряд $\sum \dfrac{1}{(2n)!}$ сходится. Сколько нужно взять слагаемых, чтобы вычислить его сумму с точностью до 10^{-6}?

9. Найти множество предельных точек последовательности:
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots.$$

10. Постройте, если это возможно, последовательность, множество предельных точек которой есть: а) $\{0, 1\}$; б) $\{0, 1, 2\}$; в) $\mathbb{N}$; г) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.

II. Функции одной переменной

1. Пусть а) $f(x)=\sqrt{x}+1000\sin x$; б) $f(x)=x\cdot(1.001+\sin x)$. Указать C, такое, что $f(x)>100$ при $x>C$.

2. Найти какое-нибудь C, такое, что для всех $x>C$ выполнено неравенство
$$\frac{x^9+7x^8+1}{x^{10}-10x^9+7x-2}<\frac{1}{100}.$$

3. Найти такие f и g, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, а f^g стремится к а) 0; б) 1; в) 17; г) $+\infty$; д) предел отсутствует.

4. Найти точную верхнюю грань функции $f(x)=\sin x+\sin x^2$.

5. Исследовать функции $\sin x^3$, x^3, $\sin x+\sin\sqrt{3}\,x$, $x^{5/7}$, $x^{7/5}$ на равномерную непрерывность на $\mathbb{R}$.

6. Исследовать форму кривой $y=x^3+ax^2+bx+c$ в зависимости от a, b, c.

7. Привести пример многочлена, имеющего три локальных максимума и два локальных минимума. Существует ли многочлен с двумя локальными минимумами и четырьмя локальными максимумами?

8. Привести пример многочлена, имеющего ровно 7 точек перегиба.

9. Нарисовать эскиз графика функции $y=\dfrac{x^2}{10\pi}+\cos x$. Сколько локальных экстремумов имеет эта функция?

10. Сколько корней имеет уравнение $x^3+px+q=0$ (в зависимости от p и q).

11. Сколько корней имеет уравнение (исследовать зависимости от параметра α):
$$\text{а) } e^x=\alpha x^2; \qquad \text{б) } x^5-\alpha x+1=0.$$

12. Изобразить кривую $y^2=x^3+x^2$. Что происходит вблизи точки $(0,0)$?

13. При данных (преподавателем) значениях параметров построить график, найти участки монотонности, выпуклости, асимптотику на бесконечности; исследовать поведение графика вблизи точек разрыва и вблизи точек разрыва производной:
$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad = x^\alpha\exp(Ax^\beta),\\
&\text{б)}\quad y^3=x(x-p)(x-q)=x^3+Ax^2+Bx,\\
&\text{в)}\quad y=A(x-a)^\mu+B(x-b)^\mu,\\
&\text{г)}\quad y=Ax^\alpha+Bx^\beta,\\
&\text{д)}\quad y=x^\alpha(x^h-B)^\beta,\\
&\text{д)}\quad y^k=x^m(x^2-b^2)^n,\\
&\text{е)}\quad y=\ln|x|(\ln|x|-p)(\ln|x|-q)=\ln^3|x|+A\ln^2|x|+B\ln|x|,\\
&\text{ж)}\quad y=\ln^\alpha|x|(\ln|x|+p),\\
&\text{з)}\quad y=\ln|x|+Ax^{2\alpha}+Bx^\alpha.
\end{aligned}$$

14. Нарисовать эскиз графика:

а) $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^t \cos t, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^t \sin^2 t, \\ y = e^t \cos^2 t, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = e^t \sin t, \\ y = e^{-t} \cos t, \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \sin 5t, \end{cases}$ д) $\begin{cases} x = \sin 3t, \\ y = \cos 5t, \end{cases}$ е) $\begin{cases} x = \sin 17t, \\ y = \sin 19t. \end{cases}$

15. Нарисовать (дома) правдоподобную картинку:

$$\begin{array}{llll}
\text{а)} & x = (t^2-1)(t^2-2), & y = (t^2-3)(t-4), & (1) \\
\text{б)} & x = t + \sin^{30} t, & y = t + \cos^{30} t, & (2) \\
\text{в)} & x = t^3 - t, & y = \cos 2\pi t, & (3) \\
\text{г)} & x = t^4 - t^2, & y = \cos 2\pi t, & (4) \\
\text{д)} & x = 3\cos t + \cos 5t, & y = 3\sin t + \sin 5t, & (5) \\
\text{е)} & x = 3\cos t + \cos(t/5), & y = 3\sin t + \sin(t/5), & (6) \\
\text{ж)} & x = \sin t(\pi + arctg\, t), & y = \cos t(\pi + arctg\, t), & (7) \\
\text{з)} & x = \sin^{11} t, & y = \sin(t/6). & (8)
\end{array}$$

16. Нарисовать заданные кривые. Что происходит вблизи точки $(0,0)$?

а) $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t(t^2-1), \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = t^6 + t^7, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = t^3 - t^2, \\ y = t^5 - t^4, \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = t^3 - t, \\ y = t^4 - t^2. \end{cases}$

17. Построить график. Найти точки, где касательная вертикальна (горизонтальна). Исследовать поведение вблизи особых точек:

$$\begin{array}{rll}
\text{3а)} & x = t^3 - 3t, & y = t^4 - 2t^2, \\
\text{б)} & x = t + \cos t, & y = \sin t, \\
\text{в)} & x = t^4 - 2t^2, & y = \sin \pi t.
\end{array}$$

18. Для кривой $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ найти угол между радиус-вектором $(x(t), y(t))$ и вектором скорости $(x'(t), y'(t))$.

19. Найти направление касательной к заданной кривой в момент времени $t = 0$ и направление выпуклости кривой вблизи этой точки:

а) $\begin{cases} x = e^t - 1, \\ y = \sin t, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \sin t - t, \\ y = \sin 2t - 2t. \end{cases}$

20. Исследовать функцию $f(x) = \frac{\ln^2 (x+\sqrt{x^2-1})}{\ln^2 (x-\sqrt{x^2-1})}$ на локальный экстремум.

21. Найти a, b и c такие, что

$$arcsin\, x = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{(1-x)^{1/2}} + \frac{b}{(1-x)^{3/2}} + \frac{c}{(1-x)^{5/2}} + o(1-x)^{-5/2}, \quad x \to 1-0.$$

22. Найти a, b и c такие, что

$$arctg\, x = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad x \to +\infty.$$

23. а) Что больше $4\ln 100001991$ или $3\ln 100001992 + \ln 100001988$? (Если студент использует калькулятор, пусть обьяснит, почему точность вычислительных средств достаточна.)

б)$^+$ Найти правдоподобную оценку для разности.

24. Найти $f^{(17)}(0)$ для $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0\,. \end{cases}$

25. Найти $f^{(43)}(0)$ для $f(x) = \sin(x^{13} + x^{15})$.

26. Что больше при очень малых положительных x:

а) $\sin \ln(1+x)$ или $\ln(1+\sin x)$?

б) $\sin(sh\, x)$ или $sh(\sin x)$?

в) $\sin(x^{15} + \sin x)$ или $\sin(\sin x) + \sin^{15} x$?

27. Найти первый ненулевой член тейлоровского разложения в нуле:

а) $\sin\left(x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40}\right) - x,$

б) $\ln(e^{-x} + x^5) + x,$

в) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sin x,$

г) $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(-x + \sqrt{1+x^2}),$

д) $tg\left(x - \dfrac{x^3}{3}\right) - x,$

е) $\ln^2\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right) - x^2,$

ж) $\sin(x + x^3) - \sin x - \sin^3 x.$

28$^+$. Доказать, что следующая функция бесконечно дифференцируема:

$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{t}, & t \geq 0, \\ \frac{1}{2}(e^{\sqrt{-t}} + e^{-\sqrt{-t}}), & t \leq 0. \end{cases}$$

29. Пусть $y = f(x) = x + x^3$. Доказать, что обратная к $f(x)$ функция $\varphi(y)$ бесконечно дифференцируема. Написать разложение Тейлора функции $\varphi(y)$ с точностью до $o(y^3)$. Решить приближенно уравнение $x^3 + x = 0.1$.

30. Для функции $\varphi(y)$ из предыдущей задачи напишите асимптотику вида

$$\varphi(y) = \alpha y^a + \beta y^b + o(y^b) \quad \text{при } y \to +\infty,\ \alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ a > b.$$

31. Доказать, что кривая $\begin{cases} x = t + t^3, \\ y = t + t^5 \end{cases}$ является графиком некоторой функции $y = f(x)$. Написать разложение Тейлора для $f(x)$ в нуле с точностью до $o(x^5)$.

32. Сколько слагаемых формулы Тейлора нужно взять, чтобы вычислить $\sin 1$ с точностью до 10^{-6}?

33. а) Пусть $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sin x_n$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

б) Укажите какое-нибудь L, такое, что $x_L < 1/1000$. Покажите, что $L < 7{\cdot}10^9$. Найдите какую-нибудь нижнюю оценку для L.

III. Интеграл

1. Вычислив на доске неопределенный интеграл, посмотрите, совпали ли Ваш ответ с ответом из Демидовича. Если ответы выглядят совершенно различно (что случается очень часто), убедитесь в том, что ответы совпадают.

2. Найдите рациональную подстановку $x = p(t)/q(t)$, сводящую любой интеграл вида $\int R(x, \sqrt{x+1}, \sqrt{x-1})\, dx$, где R — рациональная функция, к интегралу от рациональной функции.

3$^+$. Существует ли рациональная подстановка $x = p(t)/q(t)$, сводящая любой интеграл вида $\int R(x, \sqrt[3]{1-x^2})\, dx$, где R — рациональная функция, к интегралу от рациональной функции?

4. Вычислить интегралы:

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{100} x\, dx, \quad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{100} dx, \quad \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{100+\frac{1}{2}}\, dx.$$

5. Оценить $\int_0^1 \sin x^2 dx$ с точностью до 10^{-2}.

6. Нарисовать эскиз графика:

$$\text{а) } y = \int_0^x \sin^{101} t\, dt; \quad \text{б) } y = \int_0^x \sin^{100} t \cos 2t\, dt; \quad \text{в) } y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t^3 - t}}.$$

7. Какой знак у $\int_{10\pi k}^{20\pi k} \frac{\sin x}{x}\, dx$?

8. Найти N такое, что $\left|\int_{2\pi N}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| < \frac{1}{1000}$.

9. Оценить интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4} \cos 1000x\, dx$:

а) с точностью до 10^{-3}; б)$^+$ с точностью до 10^{-15}.

10. Тот же вопрос для $\int_0^{2\pi} e^{\sin x} \cos 1000x\, dx$.

11. Написать для тора уравнение вида $f(x, y, z) = 0$, где $f(x, y, z)$ — многочлен. Найти площадь его поверхности. Найти объем полнотория.

12. Вычислите силу притяжения точечного кулоновского заряда к заряду, равномерно распределенному (с данной плотностью) по прямой.

13$^?$. Пусть $|f(x)| \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Следует ли из этого, что интеграл $\int_0^\infty f(x)\, dx$ расходится?

IV. Функции нескольких переменных

1^+. Пусть $\alpha\beta\gamma\delta\epsilon$ — двоичная запись номера студента в журнале. Изобразить кривую в полярных координатах

$$r = 1 + \beta + \sin^{(1+\alpha)(-1)^\epsilon} \frac{3 + 2\gamma}{1 + \delta}\,\phi.$$

2. Изобразить поверхности: $xy + yz + xz = 0$; $100(x^2 + y^2 + z^2) - 99(xy + yz + xz) = 1$; $100(x + y)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 1$; $z = 1000(x^2 + y^2) + 2001xy$; $x^2 + y^2 + z^2 + 1.99(xy + yz + xz) = 1$.

3. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2. Какая поверхность получается, если вращать прямую l_1 вокруг оси l_2?

4. Найти все прямые, лежащие на поверхности $z = x^2 - y^2$.

5. а) Доказать, что на любом эллипсоиде лежит хотя бы одна окружность. б)$^+$ Найти все окружности, лежащие на эллипсоиде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ $(a \neq b \neq c \neq a)$.

$6^?$. Опишите, как может быть устроено семейство сечений однополостного гиперболоида пучком параллельных плоскостей.

7. Изобразите тело, ограниченное восьмью плоскостями:

$$x + y + z = \pm 1; \quad -x + y + z = \pm 1; \quad x - y + z = \pm 1; \quad x + y - z = \pm 1.$$

8. Изобразить линии уровня функций и построить их графики:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, б) $z = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$,

в) $z = x^2 + y^2$, г) $z = \dfrac{1}{2x^2 + y^2}$,

д) $z = xy$, е) $z = (x - y)^2$,

ж) $z = x - y^2$, з) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$,

и) $z = (x^2 + y^2 - 1)^2$.

9. Изобразить линии уровня функций и нарисуйте их графики:

а) $z = \sin x - y^2$; б) $z = x^4 + x^2 - y^2$;

в) $z = (x - y^2)^2$; г) $z = \pm\sqrt{-y^2 + x^2 - x^4}$,

д) $z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$; ж) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.

10. Доказать, что функция, непрерывная на компакте, достигает своего наибольшего значения.

11. а) На плоскости дано замкнутое множество K и точка a. Доказать, что существует точка $x \in K$, такая, что $|x - a| \leq |y - a|$ для всех $y \in K$.

б) На плоскости даны замкнутые множества K и L. Докажите, что существуют точки $\tilde{x} \in K$, $\tilde{y} \in L$, такие, что $|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq |x - y|$ для всех $x \in K$, $y \in L$.

12. Обозначим через $\rho(x,y)$ расстояние между точками x и y на плоскости. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

а) Докажите, что функция $f(x) = \rho(a_1, x) + \cdots + \rho(a_n, x)$ имеет точку локального минимума.

б)$^+$ Докажите. что $f(x)$ имеет единственную точку локального минимума.

в)$^?$ Пусть b — точка минимума функции f. Докажите, что $\sum\limits_j \dfrac{b-a_j}{|b-a_j|} = 0$.

13. Покажите, что функция $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(\sqrt{x^2+y^2})$ имеет вид $g(\sqrt{x^2+y^2})$. Найдите g.

14. Бывают ли дифференцируемые функции, имеющие два максимума и ни одного минимума?

15. Ограничены ли кривые: а) $x^4 - x^3 + y^2 = 1$; б) $x^2 - 2xy^3 + y^6 + y = 1$; в) $x^2 - 2xy^3 + y^4 = 1$; г) $x^4 - xy^3 + y^4 = 1$?

16. Найдите асимптоту кривой а) $x^3 + y^3 = 3xy$; б) $x^5 + y^5 = x^2y^2$.

17. Покажите, что при достаточно больших x уравнение (с неизвестной y) $y^7 + xy - x^5 = 0$ имеет единственное решение. Получите разложение вида:

$$y(x) = Ax^\alpha + Bx^\beta + o(x^\beta), \quad x \to +\infty \ \ (A \neq 0,\ B \neq 0,\ \alpha > \beta).$$

18. Покажите, что кривая $y^3 + y + x^3 - x^2 = 0$ является графиком некоторой функции $y = f(x)$. Напишите разложение Тейлора $f(x)$ в нуле с точностью до $o(x^3)$.

19. Найти угол между кривыми в точке пересечения:

$$\text{а)} \quad x^2 - y^2 = a, \quad xy = b,$$
$$\text{б)} \quad x^2 + \alpha xy - y^2 = a, \quad xy = b.$$

20. Что делают преобразования плоскости (пространства), заданные матрицами:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\cos\phi&\sin\phi&\\-\sin\phi&\cos\phi&\\&&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

21. Как устроены отображения:

$$\text{а)} \quad \begin{cases} u = \frac{x}{x^2+y^2}, \\ v = \frac{y}{x^2+y^2}, \end{cases} \qquad \text{б)} \quad \begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = 2xy, \end{cases} \qquad \text{в)} \quad \begin{cases} u = x^2, \\ v = y^2\,? \end{cases}$$

Куда они переводят координатную сетку? Примерно изобразите, куда они переводят эллипсы: $\frac{x^2}{100} + y^2 = 1$; $100x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$ (эллипсы можно заменить на изображения человечков, кошек, крокодилов и т.д.).

22. Карта Москвы меньшего масштаба наложена на точно такую же карту Москвы большего масштаба (так, что меньшая целиком содержится в большей). Доказать, что существует точка, которая на обеих картах изображает одно и то же место Москвы.

23. Доказать, что при достаточно малых $|a|$, $|b|$ система уравнений:

$$\begin{cases} x = x^2 + y^2 + a, \\ y = xy^2 + b \end{cases}$$

имеет единственное решение в квадрате $|x| \le \frac{1}{10}$, $|y| \le \frac{1}{10}$. Как найти решение с точностью до 10^{-3}?

24. Исследовать функции: а) $z = x^4 + y^7$, б) $z = x^3 - 3xy^2$, в) $z = x^4 - xy^3 + y^4$, г) $z = x^2 - 2xy^3 + y^6 + y^{10} = 0$ на экстремум в нуле. Изобразить примерное расположение линий уровня вблизи нуля.

25. При каких значениях параметра α функция $z = x^4 - \alpha xy^3 + y^4$ имеет локальный минимум в нуле?

26. Покажите, что функция $z = (x - y^2)^2 - y^6$ имеет в нуле минимум на любой прямой, проходящей через нуль. Имеет ли она минимум в нуле?

27. Изобразите кривые:

а) $x^2 = y^3$; $x^2 = y^4$; $x^3 = y^5$; б) $x^2 + xy + y^2 = 1$;

в) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$; г) $x^3 + y^3 = 3xy$;

д) $x^2y^2 = x^3 - y^3$; е) $x^6 - y^4 = x^2y^2$;

ж) $x^6 + y^6 = x^2y^2$; з) $x^6 + y^6 = xy$

и $(x + y)^3 = x + 8y$; к $(x^2 + y^2)^2 = y^2 + 1$.

В каких точках применима (не применима) теорема о неявной функции (где можно выбрать в качестве независимой переменной x, а где y)? Как устроены особые точки?

28. Изобразите примерно участок кривой $(x - y^2)(x - y^3) - y^{10} = 0$ вблизи нуля.

29. Изобразите поверхности:

$$\text{а) } x^2 + y^2 - z^2 = 1; \quad \text{б) } x^2 + y^2 - z^2 = 0; \quad \text{в) } xy + z^2 = 0;$$
$$\text{г) } z^2 = (1 - x^2)(1 - y^2); \quad \text{д) } z^3 - z^4 = x^2 + 4y^2; \quad \text{е) } y^2z = x^3 - xz^2;$$
$$\text{ж) } y^2z = x^3 + x^2z.$$

В каких точках применима (не применима) теорема о неявной функции (где можно выбрать в качестве независимых переменных x, y? где x, z? где y, z?)? Как устроены особые точки?

30. Изобразите примерно участок поверхности $z(x^2 + y^2) = x^2 - y^2$ вблизи $(0, 0, 1)$.

31. Изобразите кривые:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ y^2+z^2=1, \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+x+z^2=0, \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^2+z^2=\frac{1}{4}. \end{cases}$

В каких точках применима теорема о неявной функции? Где можно выбрать в качестве независимой переменной x, где y, где z? Как устроены особые точки?

32. Найти экстремум функции $x_1x_2\dots x_n$ при условии $x_1+x_2+\dots+x_n=1$. Докажите, что среднее геометрическое n положительных чисел не превосходит их среднего арифметического.

33. Исследовать на экстремум функцию $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ при условии $\sum a_{ij}x_iy_j=1$.

34. Сколько нормалей можно опустить на эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$:

а) из точки $(0,\beta)$? б)$^+$ из точки (α,β)?

35. Дана поверхность $x^4+y^4+z^4=4xyz$.

а) Найти ее самую высокую точку.

б) Найти ее проекцию на плоскость $x0y$.

в) Изобразить эту проекцию.

36$^?$. Пусть X — квадратная матрица размера $n\times n$. Найти дифференциалы отображений:

$$\text{а)}\quad X\mapsto AXB, \tag{9}$$

$$\text{б)}\quad X\mapsto X^2 \text{ в точке } X=A, \tag{10}$$

$$\text{в)}\quad X\mapsto X^3 \text{ в точке } X=A, \tag{11}$$

$$\text{г)}\quad X\mapsto X^{-1} \text{ в точке } X=E, \tag{12}$$

$$\text{д)}\quad X\mapsto X^{-1} \text{ в точке } X=A, \tag{13}$$

$$\text{е)}\quad X\mapsto det(X) \text{ в точке } X=E. \tag{14}$$

V. Числовые ряды

1. Исследовать ряд $\sum \frac{\sin n}{n^\alpha}$ на абсолютную и условную сходимость.
2. Сколько нужно взять слагаемых, чтобы вычислить сумму ряда:

$$\text{а)}\quad \sum \frac{n^4}{3^n},\quad \sum \frac{(-1)^n}{\ln n};\qquad \text{б)}\quad \sum \frac{\sin n}{n}$$

с точностью до 10^{-3}.

3. Нарисовать график функции

$$\varphi(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^x}.$$

Чему равен ее предел при $x \to +\infty$?

4. Докажите, что существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right).$$

5. а) Сколько нужно взять слагаемых, чтобы вычислить сумму ряда $\sum n^{-5/4}$ с точностью до $1/1000$?

б)$^?$ Предложите какой-нибудь разумный способ вычисления этой суммы на компьютере.

VI. Функциональные ряды и интегралы, зависящие от параметра

1. Оценить сверху разность

$$\ln(1+x) - \sum_{n=1}^{20} \frac{(-1)^n x^n}{n} \quad \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

2. Просуммировать ряды:

$$\sum n^2 x^n,\quad \sum \frac{x^n}{n(n+1)},\quad \sum \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)},$$
$$\sum (ch\, n) x^n,\quad \sum (\sin n) x^n.$$

3. Вычислить: а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$; б) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \ldots$.
4. Найти 99-й коэффициент Тейлора в нуле для функции:

$$\text{а)}\quad \frac{1}{x^2+x+1};\qquad \text{б)}\quad \frac{x}{e^x - 1}.$$

5. Разложить $arcsin\, x$ по степеням $(1-x)$ при $x \to 1-0$.
6. Разложить по степеням x^{-1} при $x \to +\infty$ функции:

$$\text{а)}\quad arctg\, x;\qquad \text{б)}\quad \int_x^\infty \frac{dt}{1+t^5}.$$

7. Пусть $f(x)$ — непрерывная ограниченная при $x \geq 0$ функция. Найти

$$\lim_{n\to+\infty} n \int_0^\infty f(x) e^{-nx}\, dx.$$

8. Пусть $f(x)$ — кусочно-непрерывная ограниченная функция на $\mathbb{R}$. Вычислить

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^\infty f(x) K_n(t-x)\, dx,$$

где

$$\text{а)}\quad K_n(s) = \frac{n}{2}\, e^{-n|s|}; \qquad \text{б)}\quad K_n(s) = \frac{n}{1+n^2 s^2}.$$

9^+. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Используя ядро Дирихле, нарисовать примерно поведение 1000-й суммы ряда Фурье вблизи нуля.

10. Пусть график 2π-периодической функции f центрально-симметричен относительно точек $(0,0)$ и $(\pi/2, 0)$. Что можно сказать о ее коэффициентах Фурье?

11. Найти пределы функции $f(\alpha) = \int_0^\infty \exp(-x^\alpha)\, dx$ при $\alpha \to +\infty$, $\alpha \to 0$.

12. Вычислить $\int_0^1 \ln\Gamma(x)\, dx$.

13. Доказать, что функция

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}\, d\varphi$$

является решением уравнения

$$F''(k) + \frac{1}{k} F'(k) + \frac{1}{1-k^2} F(k) = 0.$$

14. Доказать, что функция

$$y(x) = \int_a^b \sin|x-t|\; f(t)\, dt$$

удовлетворяет уравнению $y'' + y = 2f(x)$.

15. Какому дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами вида

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

удовлетворяет функция:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)} \quad y(x) = \int_0^1 (\max(x,t) - xt) f(t)\, dt,\\
&\text{б)} \quad y(x) = \int_a^b sh\,|x-t|\ f(t)\, dt,\\
&\text{в)} \quad y(x) = \int_a^x f(t)(x-t)e^{a(t-x)}\, dt.
\end{aligned}
$$

16. Вычислить:

$$
\begin{aligned}
&\text{а)} \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \int_0^x \frac{(x-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, f(t)\, dt,\\
&\text{б)} \quad \left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\,\frac{\partial}{\partial x}\right) \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\, d\phi.
\end{aligned}
$$

17. Вычислить $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a)^n}$
а) с помощью формулы понижения,
б) с помощью дифференцирования по параметру,
с) с помощью разложения на комплексные простые дроби.

VII. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

1. Вычислить
$$\iint_G (y^2-x^2)^{20} dx\,dy$$
по области G: $|x|+|y|\le 1$.

2. Вычислить
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-x^2+xy-y^2)\,dx\,dy.$$

3. В области, ограниченной поверхностями: $z=1-x^2$, $z=-1+y^2$, расставить пределы интегрирования в порядке $dz\,dx\,dy$ и $dx\,dz\,dy$.

4. Переставить пределы интегрирования в
$$\int_0^\alpha dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)\,dz$$
и свести интеграл к однократному.

5. Вычислить
$$\iiint_G x^\alpha y^\beta z^\gamma (1-x-y-z)^\beta dx\,dy\,dz$$
по области G: $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$, $x+y+z\le 1$.

6. Найти потенциал выражения $\dfrac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$, из которой выкинута полуось $\{(x,0),\,x\le 0\}$.

7. Вычислить интеграл от того же выражения по контуру:
$$\begin{cases} x=\cos 3t+2\cos 2t,\\ y=\sin 3t+2\sin 3t,\end{cases} \qquad t\in[0,2\pi].$$

8. Изобразить кривую и найти ее центр тяжести:
$$\begin{cases} x=(a+b\cos 3\varphi)\cos 2\varphi,\\ y=(a+b\cos 3\varphi)\sin 2\varphi,\\ z=b\sin 3\varphi\end{cases} \qquad (\varphi\in[0,2\pi],\, a>b>0).$$

9. Окружность С радиуса R катится по окружности радиуса $2R$ без скольжения. Изобразить траекторию точки, лежащей на С, и вычислить площадь, ограниченную этой траекторией.

10. Найти центр тяжести однородной полусферы.

11. Найти кинетическую энергию однородного шара данной плотности, вращающегося с данной угловой скоростью вокруг одной из осей.

12. Найти объем n-мерного шара.

13^+. Найти силу гравитационного притяжения к однородной сфере.

14. Найти силу притяжения кулоновского заряда к равномерно заряженной плоскости.

15. В соседней вселенной сила гравитационного притяжения обратно пропорциональна расстоянию. Найти силу притяжения точки к однородной сфере.

16. Найти поток

$$\int \frac{x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

через эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

17. Найти

$$\int \frac{(z-y^2)\,dx + 2xy\,dy - x\,dz}{x^2 + (z-y^2)^2}$$

$$\text{по кривой } \begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = 1 + \sin\varphi, \\ z = 2 - \cos\varphi \end{cases} \qquad \text{и по кривой } \begin{cases} x = 5\cos\varphi, \\ y = 1 + 5\sin\varphi, \\ z = 2 - \cos\varphi. \end{cases}$$

18. Докажите, что центральное поле, т.е. поле вида

$$\vec{f} = \frac{\alpha(r)}{r}(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}),$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, является потенциальным. Найти его потенциал. Для каких функций $\alpha(r)$ оно является бездивергентным?

Задачи для экзаменов и коллоквиумов по математическому анализу для студентов 1–2 курса ФПМ (1–3 семестр).

Составитель: НЕРЕТИН Юрий Александрович

Редактор
Технический редактор

Подписано в печать . Формат 60 × 84/16.
Бумага типографская №2. Печать ротапринтная.
Усл. печ. л. Усл. кр.-отт. Уч.-изд. л.
Тираж Заказ Бесплатно. Изд. №
Московский государственный институт электроники и математики.
109028 Москва, Б. Вузовский пер., 3/12.
Печатный цех Московского государственного института
электроники и математики.
113054 Москва, ул. М. Пионерская, 12.