Österreichische Mathematische Gesellschaft

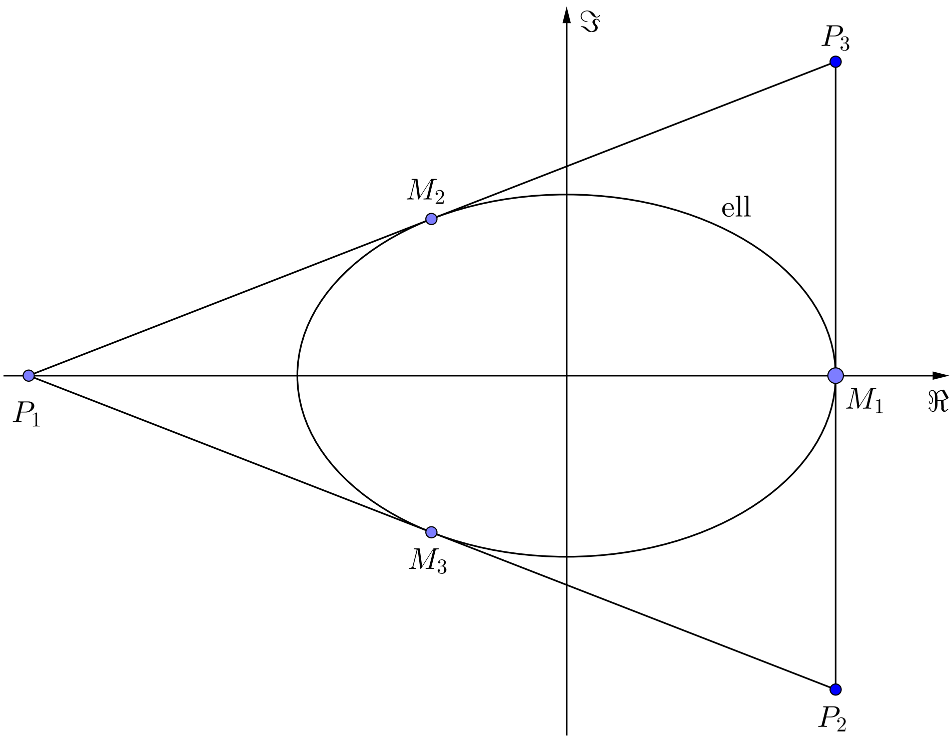
MATHE-BRIEF

Dezember 2021 — Nr. 112

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

EINE HÜBSCHE GEOMETRISCHE LICHTUNG: DER SATZ VON MARDEN

Sätze wie jener im vorliegenden Artikel bereichern die Geometrie nach Auffassung des Autors dieser Zeilen u.a. dadurch, dass sie nebst ihrer Ästhetik überraschende innermathematische Zusammenhänge zutage fördern, was Zeugnis über die organische Einheit des beeindruckenden Gebäudes der Mathematik ablegt. Nebst der Herleitung des in Rede stehenden Satzes bleibt der werten Leserin, dem werten Leser auch Raum für Eigentätigkeit, zumal Mathematik ja nun wirklich alles andere als zu den Zuschauersportarten zählt.



In [1], S. 101ff behandelt der Autor mit einigen Vorbemerkungen ohne Beweis folgenden

SATZ (von MARDEN). Betrachte eine Polynomfunktion f dritten Grades und ihre erste und zweite Ableitung f', f''. Es habe f eine reelle Nullstelle P_1 und zwei konjugiert komplexe Nullstellen P_2, P_3. Ordnet man dem Dreieck $P_1P_2P_3$ in der Gaußschen Zahlenebene sein Mittendreieck $M_1M_2M_3$ zu, so geht jene Ellipse *ell* durch M_1, welche als Brennpunkte die Nullstellen von f' besitzt, auch durch die anderen beiden Seitenmittelpunkte M_2 und M_3. In allen drei Punkten M_1, M_2, M_3 berührt diese Ellipse die Seiten des Dreiecks $P_1P_2P_3$. Der Mittelpunkt der Ellipse ist die Nullstelle von f''.

BEWEIS: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liegt der Schwerpunkt des Dreiecks P_1, P_2, P_3 im Ursprung. Mit $P_1 = 2c$ und $P_{2,3} = 2a \pm 2bi$ liefert dies die Bedingung $2c = -4a$.

Multiplikation von f mit einem beliebigen Faktor ändert seine Nullstellen nicht, und auch nicht die Nullstellen von f' und f''. Daher können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f aus seinen Nullstellen wie folgt rekonstruiert wird:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-P_1)(x-P_2)(x-P_3) = (x+4a)(x-2(a+bi))(x-2(a-bi)) \\ &= (x+4a)(x^2-4ax+4(a^2+b^2)) = x^3+4(b^2-3a^2)x+16a(a^2+b^2). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch

$$f'(x) = 3x^2 + 4(b^2 - 3a^2).$$

Das Mittendreieck hat die drei Ecken

$$M_1 = \frac{P_2+P_3}{2} = 2a, \quad M_2 = \frac{P_3+P_1}{2} = -a+ib, \quad M_3 = \frac{P_1+P_2}{2} = -a-ib$$

bzw. in anderer Schreibweise

$$M_1 = \frac{P_2+P_3}{2} = (2a,0), \quad M_2 = \frac{P_3+P_1}{2} = (-a,b), \quad M_3 = \frac{P_1+P_2}{2} = (-a,-b).$$

Wegen

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = \frac{4}{3}(3a^2 - b^2)$$

liegen die Brennpunkte der Ellipse symmetrisch zum Ursprung. Falls

$$3a^2 - b^2 > 0,$$

besitzt die obige Gleichung zwei reelle Lösungen, die Brennpunkte liegen auf der reellen Achse, und die Ellipse *ell* hat erste Hauptlage. Wir konzentrieren uns im folgenden auf diesen Fall und überlassen die anderen Fälle mit Brennpunkten im Ursprung oder auf der imaginären Achse als Übungsaufgaben. Wir setzen die Gleichung der Ellipse als

$$\frac{x^2}{q^2} + \frac{y^2}{p^2} = 1 \text{ bzw. } p^2x^2 + q^2y^2 = p^2q^2$$

an. Nachdem M_1 auf der Ellipse liegt, gilt

$$q = 2a.$$

Die Exzentrizität e, die die Lage der Brennpunkte $(\pm e, 0)$ angibt, hat den Wert $q^2 - p^2$, was zu

$$e^2 = q^2 - p^2 = 4a^2 - p^2 = \frac{4}{3}\cdot(3a^2 - b^2) \iff 12a^2 - 3p^2 = 12a^2 - 4b^2 \iff p^2 = \frac{4b^2}{3}$$

führt. Die Gleichung der Ellipse lautet also

$$\frac{4b^2}{3}x^2 + 4a^2y^2 = \frac{16a^2b^2}{3} \text{ bzw. vereinfacht } b^2x^2 + 3a^2y^2 = 4a^2b^2.$$

Es ist noch die Behauptung nachzuweisen, dass sie die Gerade P_1P_3 im Punkt M_2 berührt. Aufgrund der Symmetrie berührt sie dann auch die Gerade P_1P_2 im Punkt M_3. Diese Verbindungsgerade hat den Richtungsvektor $P_3 - P_1 = (6a, 2b)$ und die Gleichung

$$g: -bx + 3ay = 4ab.$$

Der Schnitt mit der Ellipse ergibt sich dadurch, dass wir den Term bx aus der Gleichung der Geraden ausdrücken und in die Gleichung der Ellipse einsetzen:

$$(bx)^2 + 3a^2y^2 = 4a^2b^2 \implies (4ab - 3ay)^2 + 3a^2y^2 = 4a^2b^2 \implies (4b - 3y)^2 + 3y^2 = 4b^2$$

(nachdem $a \neq 0$). Ausrechnen und Vereinfachen ergibt

$$16b^2 - 24by + 9y^2 + 3y^2 = 4b^2 \iff 12(b^2 - 2by + y^2) = 0 \iff (b - y)^2 = 0$$

D.h. wir erhalten einen einzigen Schnittpunkt, was Berührung von Ellipse und Geraden bedeutet. Dessen x-Koordinate lautet $x = \frac{a}{b}(3y - 4b) = \frac{a}{b}(-b) = -a$, womit der Berührpunkt mit M_2 identifiziert ist.

Spielwiese für die Eigentätigkeit — Übungsaufgaben

(1) Man ermittle die zweite Ableitung von f und weise damit die noch offen gebliebende Behauptung über den Mittelpunkt von *ell* nach.
(2) Man diskutiere den Fall $b^2 > 3a^2$, wo die Nullstellen von f' auf der imaginären Achse liegen und sich die Ellipse dann in zweiter Hauptlage befindet.
(3) Man beweise, dass f im Fall $b^2 = 3a^2$ einen Sattelpunkt hat, das Dreieck $P_1P_2P_3$ dann gleichseitig ist und die Ellipse *ell* zu einem Kreis wird.

Abschließende Bemerkungen

Weitere schöne Sätze zur Geometrie der Ellipse, wie etwa der beeindruckende Satz von Ivory über orthogonale Kegelschnittsnetze finden sich inklusive ihrer Beweise in [4, S. 259ff]. Vertiefungen zur Ellipse, wie z.B. ihre Festlegung durch fünf Punkte oder der Schnitt zweier Ellipsen in allgemeiner Lage mittels Kegelschnittsbüscheln werden in [4, S. 213ff, 236ff] und in [6, S. 239f] behandelt. Für Verallgemeinerungen auf algebraische Kurven höheren Grades siehe z.B. [5, S. 216ff]. Ferner ist das Werk [3] mit seinen Illustrationen eine Fundgrube für geometrische Ästhetik, was mit noch mehr geometrischem Hintergrund auch auf [2] zutrifft.

Robert Resel (email *robert.resel@chello.at*, Webseite *www.matheprof.at*).

Literatur

[1] Chamberland, Marc (2016): Von Eins bis Neun - Große Wunder hinter kleinen Zahlen. Springer.
[2] Glaeser, Georg (2007): Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik. Spektrum, Heidelberg.
[3] Glaeser, Georg und Konrad Polthier (2009): Bilder der Mathematik. Spektrum, Heidelberg.
[4] Resel, Robert (2014): Reise zum Mittelpunkt der Mathematik. Logos, Berlin.
[5] Resel, Robert (2014): In 101 Abschnitten um die mathematische Welt. Logos, Berlin.
[6] Resel, Robert (2020): Mathematik(er) von A bis Z. Logos, Berlin.