



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — mathe-brief@oemg.ac.at

KETTENBRÜCHE — EINE EXKURSION

Zu Recht wird beklagt, dass das Beweisen im Mathematikunterricht eine eher untergeordnete Rolle spielt. In diesem Essay wird eine Exkursion zu Kettenbrüchen vorgeschlagen, die einige Beweise enthält, die mit den algebraischen Hilfsmitteln der höheren Schulen auskommen.

Sei $x = x_0 > 0$ eine reelle Zahl. Man definiert eine ganze Zahl b_0 durch die Ungleichung

$$b_0 \leq x_0 < b_0 + 1.$$

Ist $x_0 = b_0$, so ist man fertig. Andernfalls setzt man

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Da $0 < \frac{1}{x_1} < 1$, ist $1 < x_1$. Dann definiert man eine ganze Zahl b_1 durch die Ungleichung

$$b_1 \leq x_1 < b_1 + 1.$$

Ist $x_1 = b_1$, so stoppt der Algorithmus. Andernfalls setzt man

$$x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}.$$

Dann ist $1 < x_2$. Man kann diesen Algorithmus fortsetzen und es gilt

$$x_n = b_n + \frac{1}{x_{n+1}}.$$

Da

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{x_1} = \frac{1 + b_0 x_1}{x_1}$$

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{x_2}} = \frac{b_0 + (b_0 b_1 + 1)x_2}{1 + b_1 x_2}$$

$$x_0 = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{x_3}}}$$

usw., spricht man von einem *Kettenbruch*, engl. *continued fraction*. Der Algorithmus stoppt, wenn für eine Zahl N die Gleichung

$$x_N = b_N$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x = x_0$ eine rationale Zahl ist. Wir formulieren daher:

Satz 1. *Der Algorithmus stoppt genau dann, wenn x eine rationale Zahl ist.*

Beweis. Wenn $x_n = b_n$ eintritt, so ist

$$x_{n-1} = b_{n-1} + \frac{1}{b_n} = \frac{b_{n-1}b_n + 1}{b_n}$$

eine rationale Zahl. Dann ist auch

$$x_{n-2} = b_{n-2} + \frac{1}{x_{n-1}} = \frac{b_{n-2}b_{n-1} + b_{n-2} + b_n}{b_{n-1}b_n + 1}$$

eine rationale Zahl. Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens (in der Mathematik *Rekursion* genannt), sieht man, dass $x = x_0$ eine rationale Zahl ist.

Sei andererseits $x = x_0 = \frac{m_0}{n_0}$ eine rationale Zahl. Dann ist

$$\frac{m_0}{n_0} = b_0 + \frac{1}{x_1}.$$

Daraus folgt

$$x_1 = \frac{n_0}{m_0 - b_0 n_0} = \frac{m_1}{n_1}.$$

Daraus sieht man, dass $0 < n_1 = m_0 - b_0 n_0 < n_0$ gilt, d. h. die Nenner der auftretenden Brüche werden mit jedem Schritt kleiner. Es gibt daher ein $N \geq 0$, so dass $m_N - b_N n_N = 0$ gilt, d. h. der Algorithmus stoppt bei $x_N = b_N$. \square

Ein Beispiel genüge:

$$\begin{aligned} \frac{14}{11} &= 1 + \frac{3}{11}, & \frac{11}{3} &= 3 + \frac{2}{3}, & \frac{3}{2} &= 1 + \frac{1}{2}, & 2 &= 2 \\ \implies \frac{14}{11} &= 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} & (b_0 &= 1, b_1 = 3, b_2 = 1, b_3 = 2). \end{aligned}$$

Unendliche Kettenbrüche. Da neben den endlichen Dezimalbruchentwicklungen auch die periodischen Entwicklungen von Interesse sind, wollen wir nun dieser Frage bei Kettenbrüchen nachgehen. Eine Kettenbruchentwicklung heißt *periodisch*, wenn es $\nu \geq 0$ und $\mu \geq 1$ gibt, so dass

$$x_\nu = x_{\nu+\mu}$$

gilt. Dann wiederholt sich die Folge b_0, b_1, b_1, \dots ab einem gewissen Index ν periodisch. Dazu geben wir einige Beispiele. Wir bestimmen den zu $x_0 = \sqrt{2} \approx 1,41$ gehörenden Kettenbruch. Der erste Schritt lautet

$$\underbrace{\sqrt{2}}_{x_0} = \underbrace{1}_{b_0} + \underbrace{(\sqrt{2} - 1)}_{1/x_1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \implies x_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41.$$

Wir haben hier verwendet, dass der Kehrwert von $\sqrt{2} - 1$ gleich $\sqrt{2} + 1$ ist. Davon überzeugt man sich direkt durch eine Probe, nachdem $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1 = 1$ gilt. Einen systematischen Weg zur Bestimmung des Kehrwerts in einer für die Kettenbruchentwicklung geeigneten Form zeigt

Aufgabe 1 weiter unten. Für den nächsten Schritt, die Zerlegung $x_1 = b_1 + \frac{1}{x_2}$, können wir die obige Rechnung verwenden:

$$\underbrace{1 + \sqrt{2}}_{x_1} = \underbrace{2}_{b_1} + \underbrace{(\sqrt{2} - 1)}_{1/x_2} = 2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 + \sqrt{2}.$$

Wegen $x_1 = x_2$ wird die Kettenbruchentwicklung ab hier periodisch:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}}} = \dots$$

Zusammenfassend ist die Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ periodisch mit Periode $\mu = 1$ ab dem Index $\nu = 1$. Eine ähnliche Rechnung kann mit $\sqrt{3} \approx 1,73$ durchgeführt werden. Der dazu benötigte Kehrwert von $\sqrt{3} - 1$ lautet $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} x_0 = \sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} & \Rightarrow \quad x_1 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx 1,36 \\ x_1 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1} & \Rightarrow \quad x_2 &= 1 + \sqrt{3} \approx 2,73 \\ x_2 &= 1 + \sqrt{3} = 2 + (\sqrt{3} - 1) = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} & \Rightarrow \quad x_3 &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass $x_3 = x_1$ gilt. Die Kettenbruchentwicklung wird also periodisch mit Periode $\mu = 2$ ab dem Index $\nu = 1$. Insgesamt erhalten wir

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}}} = \dots$$

Die Koeffizienten b_i lauten

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 1, b_4 = 2, b_5 = 1, \dots$$

Für alle ungeraden $n \geq 1$ ist $b_n = 1$, und für alle geraden $n \geq 2$ ist $b_n = 2$.

Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ des *Goldenen Schnitts* hat die einfachste unendliche Kettenbruchentwicklung mit $\nu = 0$, $\mu = 1$ und $b_n = 1$ für alle $n \geq 0$, denn wie man leicht nachrechnet, gilt

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

D.h. $x_1 = x_0$, und wir erhalten

$$x_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}} = \dots$$

Diese Kettenbruchentwicklung ist periodisch ab dem Index $\nu = 0$ mit Periode $\mu = 1$. Das ist die einfachste unendliche Kettenbruchentwicklung, die möglich ist.

Quadratische Irrationalzahlen. Man vermutet zu Recht, dass *quadratische Irrationalzahlen* eine Rolle spielen. Diese Zahlen sind nicht rational, aber Nullstellen eines quadratischen Polynoms

$$f(x) = Px^2 + Qx + R,$$

wobei P, Q und R ganze Zahlen sind. Wichtig ist die nächste Eigenschaft.

Satz 2. Sei $x_n = b_n + \frac{1}{x_{n+1}}$. Dann ist x_n eine quadratische Irrationalzahl genau dann, wenn x_{n+1} eine quadratische Irrationalzahl ist.

Beweis. Wenn x_n eine quadratische Irrationalzahl ist, gilt $f_n(x) = P_n x_n^2 + Q_n x_n + R_n = 0$. Man rechnet durch Einsetzen leicht nach, dass dann $f_{n+1}(x) = P_{n+1} x_{n+1}^2 + Q_{n+1} x_{n+1} + R_{n+1} = 0$ gilt, mit

$$P_{n+1} = b_n^2 P_n + b_n Q_n + R_n, \quad Q_{n+1} = 2b_n P_n + Q_n, \quad R_{n+1} = P_n \quad (1)$$

bzw.

$$P_n = R_{n+1}, \quad Q_n = Q_{n+1} - 2b_n R_{n+1}, \quad R_n = P_{n+1} - b_n Q_{n+1} + b_n^2 R_{n+1} \quad \square$$

Wir vermerken eine wichtige Folgerung aus diesen Formeln: Es gilt

$$Q_n^2 - 4P_n R_n = Q_{n+1}^2 - 4P_{n+1} R_{n+1} =: \Delta. \quad (2)$$

Nun kommen wir zum bedeutendsten Satz dieses Aufsatzes:

Satz 3. Die Kettenbruchentwicklung einer Zahl x ist genau dann periodisch, wenn x ein quadratische Irrationalzahl ist.

Beweis. Aus der Rekursion

$$x_\nu = b_\nu + \frac{1}{x_{\nu+1}} = b_\nu + \frac{1}{b_{\nu+1} + \frac{1}{x_{\nu+2}}} = \dots$$

folgt

$$x_\nu = \frac{A + Bx_{\nu+\mu}}{C + Dx_{\nu+\mu}}, \quad \text{wobei } A, B, C, D \text{ ganze Zahlen sind.}$$

Ist $x_\nu = x_{\nu+\mu}$, so sieht man

$$x_\nu = \frac{A + Bx_\nu}{C + Dx_\nu},$$

woraus die Gleichung

$$Dx_\nu^2 + (C - B)x_\nu - A = 0$$

folgt. Da der Kettenbruch nicht abbricht, ist x_ν nicht rational, x_ν ist also eine quadratische Irrationalzahl. Aus Satz 2 folgt nun direkt, dass auch der Vorgänger $x_{\nu-1}$ eine quadratische Irrationalzahl ist, und dessen Vorgänger, und so weiter, bis hinunter zu $x_0 = x$.

Die Umkehrung ist der schwierigere Teil. Joseph-Louis Lagrange hat 1770 einen ersten Beweis vorgelegt, dem später andere Beweise folgten. Der hier dargestellte Beweis geht auf Robert Ballieu 1942 zurück.

Sei $P(x) = Px^2 + Qx + R = 0$ eine quadratische Gleichung. Diese hat die beiden Lösungen

$$\alpha = \frac{-Q + \sqrt{\Delta}}{2P}, \quad \beta = \frac{-Q - \sqrt{\Delta}}{2P}, \quad \text{wobei } \Delta = Q^2 - 4PR.$$

Man bezeichnet α und β als *zueinander konjugierte Zahlen*. Aus der Gleichung

$$Px^2 + Qx + R = P(x - \alpha)(x - \beta)$$

folgt der nach Viète benannte Satz

$$\alpha\beta = \frac{R}{P}, \quad \alpha + \beta = -\frac{Q}{P}.$$

Wenn wir die Folge x_1, x_2, x_3, \dots betrachten und die Formeln (1) heranziehen, so gilt folgendes Ergebnis.

Satz 4. Ist $x_n = \frac{-Q_n + \sqrt{\Delta}}{2P_n}$, so ist $x_{n+1} = \frac{-Q_{n+1} - \sqrt{\Delta}}{2P_{n+1}}$ bzw. ist $x_n = \frac{-Q_n - \sqrt{\Delta}}{2P_n}$, so ist $x_{n+1} = \frac{-Q_{n+1} + \sqrt{\Delta}}{2P_{n+1}}$.

Wir beweisen die erste Behauptung. Es genügt, folgendes nachzuweisen: Ist $x_n = \frac{-Q_n + \sqrt{\Delta}}{2P_n}$ und $x_{n+1} = \frac{-Q_{n+1} - \sqrt{\Delta}}{2P_{n+1}}$, so gilt $x_n = b_n + \frac{1}{x_{n+1}}$. Wir formen diese Bedingung um:

$$x_n - b_n = \frac{1}{x_{n+1}} \iff \frac{-Q_n - 2b_n P_n + \sqrt{\Delta}}{2P_n} = \frac{2P_{n+1}}{-Q_{n+1} - \sqrt{\Delta}}$$

Durch Erweitern mit $-Q_{n+1} + \sqrt{\Delta}$ und Beachten von $\Delta = Q_{n+1}^2 - 4P_{n+1}R_{n+1}$ formen wir die rechte Seite um:

$$\frac{2P_{n+1}}{-Q_{n+1} - \sqrt{\Delta}} = \frac{2P_{n+1}(-Q_{n+1} + \sqrt{\Delta})}{Q_{n+1}^2 - \Delta} = \frac{2P_{n+1}(-Q_{n+1} + \sqrt{\Delta})}{4P_{n+1}R_{n+1}} = \frac{-Q_{n+1} + \sqrt{\Delta}}{2R_{n+1}}.$$

Nach Gleichung (1) ist jetzt klar, dass $x_n - b_n = 1/x_{n+1}$ gilt; es ist nämlich $P_n = R_{n+1}$ und $Q_n + 2b_n P_n = Q_{n+1}$. Die zweite Aussage von Satz 4 beweist man analog.

Die zu x_n konjugierte Zahl soll im folgenden mit y_n bezeichnet werden. Der weitere Beweis von Satz 3 folgt in drei Schritten: (a) Wir zeigen, dass es ein N gibt, wo $R_N P_N < 0$. (b) Wir zeigen, dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $R_n P_n < 0$. (c) Wir zeigen, dass die Tripel (P_n, Q_n, R_n) nicht alle verschieden sein können und sich irgendwann wiederholen müssen. Daraus folgt, dass sich der Wert x_n wiederholt, und die Periodizität ist gezeigt.

(a) Wir nehmen an, dass für alle $n \geq 0$ die Ungleichung $P_n R_n > 0$ gilt. Nach Gleichung (1) ist $R_{n+1} = P_n$, und hätten dann alle Zahlen P_n und R_n dasselbe Vorzeichen. Bei $P_0 > 0$ gilt dann stets $P_n > 0$ und $R_n > 0$. Nach dem Satz von Viète haben nun x_n, y_n dasselbe Vorzeichen, d.h. es ist nicht nur $x_n > 0$, sondern auch $y_n > 0$. Daraus folgt (wiederum nach dem Satz von Viète), dass $Q_n < 0$. Nach Gleichung (1) gilt $Q_{n+1} = 2P_n b_n + Q_n$, also folgt $Q_n < Q_{n+1} < 0$ und letztlich $Q_0 < Q_1 < Q_2 < \dots < 0$. Das ist nicht möglich, weil zwischen Q_0 und 0 nur endlich viele verschiedene Werte Platz haben. Unsere Annahme $P_n R_n > 0$ (für alle n) war daher falsch.

Wir müssen das Argument noch für den Fall $P_0 < 0$ wiederholen. Es gilt dann $P_n < 0$ und $R_n < 0$. Nach Viète haben x_n, y_n dasselbe Vorzeichen, es gilt also $x_n > 0$, $y_n > 0$, also (wiederum nach Viète), dass $Q_n > 0$. Aus $Q_{n+1} = 2P_n b_n + Q_n$ folgt $Q_n > Q_{n+1} > 0$ und letztlich $Q_0 > Q_1 > Q_2 > \dots > 0$. Das ist nicht möglich. Unsere Annahme $P_n R_n > 0$ (für alle n) war daher falsch.

(b) Bei $R_N P_N < 0$ haben nach Viète x_N, y_N verschiedenes Vorzeichen. Wegen $x_N > 0$ gilt $y_N < 0$, d.h.

$$y_N < 0 < b_N < x_N.$$

Nachdem 0 und b_N zwischen den beiden Nullstellen des Polynoms f_n liegen, haben

$$f(0) = R_N, \quad f_N(b_N) = P_N b_N^2 + Q_N b_N + R_N = P_{N+1}$$

das gleiche Vorzeichen. Daher ist $R_N P_{N+1} > 0$. Aus $R_N P_N < 0$ folgt sodann $P_N P_{N+1} < 0$. Da $R_{N+1} = P_N$, erhalten wir $R_{N+1} P_{N+1} < 0$. Die Ungleichung $R_n P_n < 0$ gilt also nicht nur für $n = N$, sondern auch für $n = N + 1$ und bei Wiederholung des Arguments für alle weiteren $n \geq N$.

(c) $\Delta = Q_n^2 - 4P_n R_n$ ist eine feste Zahl, die nicht von n abhängt, und wegen $P_n R_n < 0$ ist $\Delta > 0$. d.h.

$$0 < Q_n^2 - 4P_n R_n = Q_n^2 + 4|P_n R_n| = \Delta.$$

Nachdem zwischen 0 und Δ nur endlich viele Zahlen liegen, gibt es nur endlich viele Möglichkeiten für die möglichen auftretenden Tripel (P_n, Q_n, R_n) . Sie müssen sich irgendwann wiederholen, es gibt also einen Index $\nu \geq N$ und eine Zahl $\mu \geq 1$ mit $Q_\nu = Q_{\nu+\mu}, P_\nu = P_{\nu+\mu}, R_\nu = R_{\nu+\mu}$. Dann ist aber $x_\nu = x_{\nu+\mu}$; die Periodizität ist bewiesen. \square

Übungsaufgaben. Es seien noch einige Übungsaufgaben genannt. Bei den Aufgaben 2, 3 und 4 wird man vollständige Induktion verwenden. Für Aufgabe 5 sollte man über Konvergenz von Folgen Bescheid wissen; für Aufgabe 6 genügen einfache Kenntnisse über Teilbarkeit.

Aufgabe 1. Der Kettenbruch von x_0 benötigt den Kehrwert von $x_0 - 1$. Für $x_0 = \sqrt{2}$ zeigt

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = 1 + \sqrt{2},$$

wie man solche Brüche mit Wurzeln im Nenner durch geeignetes Erweitern vereinfachen kann. Bestimme auf analoge Weise die Kehrwerte von $\sqrt{3} - 1$, $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1) - 1$ und $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) - 1$, die bei den obigen Rechnungen benötigt wurden.

Aufgabe 2. Setze $p_{-1} = 1, q_{-1} = 0, p_0 = b_0, q_0 = 1$. Beweise, dass aus den Rekursionsformeln

$$p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n \geq 1),$$

die Beziehung

$$x_0 = \frac{p_{n-2} + p_{n-1} x_n}{q_{n-1} + q_{n-2} x_n}.$$

folgt.

Aufgabe 3. Beweise mit Hilfe der gerade genannten Rekursionsformeln

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}.$$

Aufgabe 4. Man zeige für $n \geq 0$ die Ungleichung

$$q_{n+1} \geq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Hinweis: Man sollte sich erinnern, dass $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ Nullstelle der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$ ist.

Aufgabe 5. Sei x eine irrationale Zahl und ihre Kettenbruchentwicklung durch die Folge b_0, b_1, b_2, \dots gegeben. Dann beweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = x.$$

Hinweis: Im Ausdruck $|x - \frac{p_n}{q_n}|$ setze $x = \frac{p_{n-1} + p_n x_{n+1}}{q_{n-1} + q_n x_{n+1}}$.

Aufgabe 6. Zeige: Die Zahlen P_n, R_n, Q_n sind genau dann teilerfremd, wenn es die Zahlen $P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}$ sind.

Literatur. In vielen Büchern über Zahlentheorie findet man Einführung zur Theorie der Kettenbrüche. Ein immer noch hervorragendes Werk ist Oskar Perrons Buch *Die Lehre von den Kettenbrüchen. Band I*, Stuttgart: B. G. Teubner, 1977.

F. Schweiger