Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

November 2023 — Nr. 124

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

ÜBER PRODUKTE AUFEINANDERFOLGENDER NATÜRLICHER ZAHLEN

Für natürliche Zahlen s, k betrachten wir Produkte der Gestalt

$$(s+1)(s+2)\cdots(s+k), \tag{1}$$

wobei wir voraussetzen werden, dass $k \geq 2$ gilt, um wirklich von einem Produkt sprechen zu können.

Als erstes wollen wir derart gebildete Zahlen hinsichtlich ihrer Teilbarkeit untersuchen. Dazu fällt einem zunächst auf, dass jede Menge bestehend aus k aufeinanderfolgenden Zahlen ein Vielfaches von 2, von 3, …, von k enthält und somit das Produkt durch $kgV(2,3,\dots,k)$ teilbar ist. Insbesondere folgt die Teilbarkeit durch alle Primzahlen $\leq k$. Aber geht da noch mehr?

Schreibt man

$$(s+1)(s+2)\cdots(s+k) = \frac{(s+k)!}{s!} = k!\frac{(s+k)!}{k!s!} = k!\binom{s+k}{s}$$

mit Hilfe des Binomialkoeffizienten, so erkennt man, dass das Produkt sogar stets durch $k!$ teilbar sein muss. Hinsichtlich der Primteiler liefert dies nichts Neues, und in dieser Allgemeinheit ist auch nicht mehr zu erwarten, wie man am Fall $s = 0$ erkennt. Wie sieht es aber mit Produkten aus, die bei einem Wert $s+1$ starten, der hinreichend groß im Vergleich zur Anzahl k der Faktoren ist?

Darüber gibt der folgende Satz von Sylvester Auskunft: ist $s > k$, so hat das Produkt (1) mindestens einen Primteiler $p > k$. Das klingt auf den ersten Blick vielleicht nicht sehr beeindruckend, aber schon anhand einer einfachen Folgerung daraus wird einem klar, dass diese Aussage von großer Bedeutung ist. Wählt man nämlich $k = s-1$ in (1), so folgt aus dem Satz, dass $(s+1)\cdots(2s-1)$ einen Primteiler $p > s$ besitzt. Ist eine Primzahl Teiler eines Produkts, so muss sie einen der Faktoren teilen, also hat eine der Zahlen $s+1,\dots,2s-1$ einen Primteiler $p > s$. Da alle diese Zahlen kleiner als $2s$ sind, muss eine dieser Zahlen selbst dieser Primteiler sein, und wir haben damit gezeigt, dass zwischen s und $2s$ stets eine Primzahl liegt, ein Resultat, das auch unter dem Namen *Bertrandsches Postulat* bekannt ist.

Nun, da wir einiges über Teiler von (1) wissen, wenden wir uns der Frage zu, ob ein derartiges Produkt jemals eine vollständige Potenz einer ganzen Zahl sein kann, d.h. ob die Gleichung

$$(s+1)(s+2)\cdots(s+k) = y^m \tag{2}$$

mit $s, k, y, m \in \mathbb{N}$ und $k, m \geq 2$, Lösungen besitzt. Dies haben P. Erdős und J.L. Selfridge Anfang der 1970er Jahre untersucht und gezeigt, dass Gleichung (2) unlösbar ist.

Der Satz von Sylvester schränkt den Bereich, in dem Lösungen von Gleichung (2) liegen könnten, schon dahingehend ein, dass $s > k^m$ gelten muss. In der Tat muss ja einer der Faktoren $(s+i)$,

$1 \leq i \leq k$, durch eine Primzahl $p > k$ teilbar sein. Dieses p teilt daher nur einen der k Faktoren und zumal deren Produkt eine m-te Potenz ist, muss sogar p^m diesen Faktor teilen. Folglich gilt für ein i

$$s + i \geq p^m \geq (k+1)^m.$$

Wäre $s \leq k^m$, so folgte $k^m + i \geq s + i \geq (k+1)^m$. Nun ist $(k+1)^m \geq k^m + mk$, sodass $i \geq mk \geq 2k$ gelten müsste, ein Widerspruch zu $1 \leq i \leq k$.

Es verbleibt also, zu zeigen, dass Gleichung (2) auch für $s > k^m$ keine Lösungen besitzt. Dafür schreiben Erdős und Selfridge die Faktoren $s+i$ als $a_i x_i^m$, wobei die a_i frei von m-ten Potenzen sind. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass alle Primteiler von a_i kleiner oder gleich k sind. (Primfaktoren $> k$ können nur in einem a_i auftreten, somit in einer Potenz, die ein Vielfaches von m ist.)

Der Vorteil dieser Interpretation wird sehr gut an folgendem Beispiel klar: sei $k = 7, m = 2$ in Gleichung (2), also

$$(s+1)(s+2)\cdots(s+7) = y^2. \tag{3}$$

Wäre Gleichung (3) lösbar, so wären $a_1, \ldots, a_7$ nur durch die Primzahlen $2{,}3{,}5$ teilbar. Von den sieben a_i können höchstens zwei durch 5 teilbar sein, es verbleiben also fünf a_i, die höchstens durch 2 und 3 teilbar und quadratfrei sind, wodurch nur die vier Zahlen $1{,}2{,}3{,}6$ in Frage kommen. Damit treten auf der linken Seite von Gleichung (3) mindestens zwei Faktoren auf, die die Gestalt n^2 bzw. $2n^2$ bzw. $3n^2$ bzw. $6n^2$ haben. Deren Differenz kann aber nicht ≤ 7 sein, zumal alle Faktoren $\geq 7^2$ sind.

Im allgemeinen Fall zeigen Erdős und Selfridge, dass für $l < m$ alle Produkte $a_{i_1} \cdots a_{i_l}$, $i_1 \leq \ldots \leq i_l$, verschieden sind und verwenden dies auf verschiedene Arten, je nachdem in welchen Intervallen k und m liegen, um zu zeigen, dass Gleichung (2) gar keine Lösung haben kann. Die Details dieser Überlegungen sind in [1] nachzulesen.

Wir wollen zum Abschluss noch eine weitere Frage in Zusammenhang mit Produkten der Form (1) aufwerfen: gibt es Zahlen, die auf zwei verschiedene Arten so dargestellt werden können? Ein Beispiel dafür ist

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

Bitte kurz selbst nach Beispielen suchen vor dem Weiterlesen!

Schließt man triviale Fälle wie etwa

$$1 \cdot 2 \cdots n = 2 \cdots n$$

für beliebiges n aus, so muss man schon etwas länger suchen, um fündig zu werden:

$$14 \cdot 15 = 5 \cdot 6 \cdot 7,$$

$$55 \cdot 56 \cdot 57 = 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22,$$

oder auch

$$63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 66 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14.$$

Es existiert sogar eine unendliche Klasse von Lösungen, die nach folgendem Schema konstruiert sind:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (3 \cdot 4 \cdot 5 - 1) = 6 \cdots (3 \cdot 4 \cdot 5 - 1)(3 \cdot 4 \cdot 5).$$

Eine gute Übersicht über bekannte Aussagen zu Lösungen der zugrundeliegenden Gleichung

$$(s+1)(s+2)\cdots(s+k) = (r+1)(r+2)\cdots(r+l) \tag{4}$$

findet man in [2]. Als kleine Übung sei dem Leser der Beweis der Tatsache vorgeschlagen, dass Gleichung (4) keine Lösung besitzt, falls $k = 2$ und $l = 4$.

L. Summerer

Literatur

[1] P. Erdős, J.L. Selfridge, *The product of consecutive integers is never a power*. Illinois Math. J. 19 (1975), 292–301.

[2] R. A. Macleod, I. Barrodale, *On equal products of consecutive integers*. Canadian Mathematical Bulletin 13/2 (1970), 255–259.