E I N L E I T U N G

Als ich vor die Aufgabe gestellt war, eine 2-stündige Vorlesung über "Geschichte der Mathematik" vorzubereiten, bestand die schwierigste und wesentlichste Frage darin, den Stoff abzugrenzen: Denn die "Geschichte der Mathematik" ist per definitionem so umfangreich, wie "die Mathematik", nur daß sie über den Stoff der Mathematik hinaus auch den historisch-genetischen Aspekt enthält. Es ist daher nur möglich, "ausgewählte Kapitel der Geschichte der Mathematik" zu präsentieren und so hätte ich die Vorlesung seriöser Weise von Anfang an nennen sollen.

Vor die Notwendigkeit gestellt, auszuwählen, mußte ich klar herausarbeiten, was die hauptsächlichen Punkte waren, auf die ich bei der Darstellung der Geschichte der Mathematik hinaus wollte. Hier kristallisieren sich folgende Anliegen heraus:

1) Ich möchte aufzeigen, warum wir heute so rechnen, wie wir es tun. Mir ist bewußt, daß die Abstraktheit der heutigen Mathematik abstößt und ich kann eigentlich gar nicht böse sein darüber: Wenn ein Student etwa im ersten Semester die Definition eines Körpers an den Kopf geknallt kriegt "Ein Körper ist eine Menge K und zwei Abbildungen $+: K\times K \to K$ und $.: K\times K \to K$, die folgende Bedingungen erfüllen ...". Und dann folgt eine längere Speisekarte von Bedingungen, die anfangs unverständlich erscheinen und später - nachdem man die rätselhafte Sprache entschlüsselt hat - trivial und selbstverständlich wirken.

   Wenn die Definition eines Körpers nur so blutleer erfolgt und nicht zumindest genügend viele Beispiele zur Motivation gebracht werden, kann ein Student - meines Erachtens nach - nicht sehen, was mit so einer abstrakten Definition eigentlich erreicht werden soll: Es sollen die Eigenschaften von wohlbekannten Begriffen (in unserem Beispiel: die rationalen oder die reellen Zahlen) isoliert werden, auf die es in einem bestimmten Zusammenhang (in unserem Beispiel: die algebraische Theorie) ankommt, um so den Blick für das Wesentliche freizulegen; vor allem aber soll klargestellt werden, welchen (durch die Definition exakt kodifizierten) Katalog von Anforderungen andere Beispiele erfüllen müssen, damit man dieselben Schlußfolgerungen ziehen kann.

Vor allem aber scheint mir verhängnisvoll, daß ein Student den Eindruck haben könnte, daß Definitionen gewissermaßen vom Himmel fallen: daß sich sozusagen einmal ein weiser Mathematiker hingesetzt hat und gesagt hat: "So, jetzt definieren wir einen Körper". Der tatsächliche historische Prozeß lief völlig konträr: Die Untersuchung von algebraischen Gleichungen und von klassischen - von den Griechen stammenden - geometrischen Problemen wie etwa der "Quadratur des Kreises" führte Galois um 1830 dazu, diejenigen Eigenschaften von verschiedenen Objekten, die er untersuchte, zu isolieren, die wir heute in der Definition des Körpers finden. Jeder der die sogenannte "Galois'sche Theorie" lernt, wird selbst herausfinden, daß die algebraischen Begriffe,wie etwa der des "Körpers", wie ein magischer Schlüssel schließlich verwendet werden, um ganz verblüffende Ergebnisse zu beweisen: Etwa, daß man eine Gleichung fünften Grades im allgemeinen nicht mehr durch "eine Formel lösen" kann oder daß es unmöglich ist, zu einem gegebenen Würfel den Würfel mit doppeltem Volumen mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Hier sind wir an einer tiefen Schwierigkeit der heutigen Mathematik angekommen: Zum Teil ist es tatsächlich so, daß man die Tragweite und Bedeutung einer Definition, eines Begriffes oder eines Satzes erst dann erkennen kann, wenn man relativ viel von der darauf basierenden Theorie gelernt hat. Ich halte es aber für entscheidend, diesen "Sachzwang", so weit es nur irgendwie möglich ist, in Grenzen zu halten. Daher glaube ich, daß das Verstehen des historisch-genetischen Prozesses, wie sich mathematische Erkenntnisse entwickelt haben, sehr wichtig ist, vom pädagogischen wie vom "rein mathematischen" Gesichtspunkt.

Im meiner Vorlesung habe ich versucht, den Hintergrund für wenigstens einen - allerdings sehr entscheidenden - mathematischen Begriff auszuleuchten: Für "das ε und δ ". Es war ja nicht so, daß Weierstraß um 1870 sich hinsetzte und postulierte: "Eine Funktion ist in einem Punkt x_0 stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ ....", sondern dahinter steckt eine 200-jährige Entwicklung der Analysis, die sich immer wieder in Widersprüche verwickelte und nach dem Prinzip von "trial and error" fortschritt, bis man eben die "Epsilontik" als eine mögliche, saubere Lösung erkannte.

Das erste Ziel meiner Vorlesung besteht also darin, zu motivieren, warum wir den heute üblichen Zugang zur Analysis wählen; gegen Ende der Vorlesung werde ich auch noch kurz auf die Entwicklung der Cantorschen Mengenlehre eingehen und versuchen, aufzuzeigen, aus welchen Gründen und für welche Zwecke diese entwickelt wurde. Ich halte die Mengenlehre nämlich für das Tor zur Mathematik unseres Jahrhunderts. Die Bedeutung der Mengenlehre für die Mathematik steht aber in krassem Gegensatz zu dem Unfug, der damit teilweise in den Schulen getrieben wird und der eine ganze Generation von Eltern verunsichert. Wenn man Schüler zwingt, einen so klaren Satz wie "eine Elipse schneidet sich mit einer an sie gelegten Tangente in genau einem Punkt" mit "der Durchschnitt der Punktmenge einer Ellipse mit der Punktmenge einer an sie gelegten Tangente besteht aus einer Menge von Kardinalität eins" zu umschreiben, gewinnt man dadurch nichts als höchstens einen pseudowissenschaftlichen Anstrich.

Hier sehe ich also eine wichtige Aufgabe meiner Vorlesung, insbesondere den Lehramts-Kandidaten aus der historischen Entwicklung der Mathematik klarzumachen, wozu der Begriffsapparat der heutigen Mathematik <u>wirklich</u> gebraucht wird; daß aber die Anwendung dieser schweren Geschütze auf elementare Sachverhalte zu einem sinnentleerten Formalismus führen kann, der nicht nur nichts bringt,

sondern auch dem Schüler weitgehend die Freude am selbstständigen Lösen von mathematischen Problemen nimmt.
Ich möchte das mit einem Zitat von G. Frege veranschaulichen: "Die Mathematik ist wie ein Baum; je höher er wird, umso tiefere Wurzeln benötigt er." Für Büsche oder kleine Bäumchen aber ist es sicherlich nicht günstig, wenn sie mit enormen Wurzelstöcken ausgestattet sind, da sie dann für ihre Gesamtgröße zu wenig Licht und Sonne erhalten.

2) Der zweite Gesichtspunkt, den ich mit meiner Vorlesung ansprechen will, besteht darin, zu betonen, daß sich die Entwicklung der Mathematik nicht in einem abstrakten "Ideenhimmel" abspielt, sondern eigebunden ist in die ökonomische und kulturelle Gesamtentwicklung der Gesellschaft. Dieser an sich selbstverständliche Sachverhalt wird leider oft vollkommen übergangen und trägt zu einer falschen Mystifizierung und Glorifizierung der Mathematik bei.
Ich halte es auch für wichtig, die soziale Rolle und das Berufsbild der Mathematiker im Lauf der Jahrhunderte zu untersuchen.

3) Der dritte Gesichtspunkt ist vor allem psychologischer Natur: Ich weiß aus eigener Erfahrung, daß man sich am Anfang eines Mathematik-Studiums fühlt wie ein Zwerg vor den hohen, glatten Mauern eines offensichtlich für die Ewigkeit errichteten Schlosses. Erst mit der Zeit kommt man dann drauf, daß die Mauern nicht ganz so hoch und so glatt sind und es im Grunde auch mit der Ewigkeit nicht so weit her ist. Die falsche Ehrfurcht vor der Mathematik kann man vor allem dadurch abbauen, daß man den historischen Prozeß betrachtet: Mathematische Theorien sind keine ehernen Monumente, sondern Gedankengebäude, die im Laufe der Zeit entwickelt und immer wieder modifiziert werden. Ich halte es für sehr tröstlich, zu sehen, wie die größten Mathematiker auch Fehler gemacht haben oder gewisse Zusammenhänge einfach nicht erkannt haben. Erst wenn man die großen Mathematiker auf diese Weise

entmystifiziert hat, kann man - meiner Meinung nach - ihre wirklich brillanten Ideen und Einblicke schätzen und bewundern lernen.

Inhaltsangabe:

Aus den angegebenen Zielsetzungen für die Vorlesung habe ich folgende Eingrenzung des Stoffes gewählt: Ich behandle ausschließlich die Analysis und hier wiederum hauptsächlich die Anfänge der Entwicklung. Denn dies scheint mir nicht nur ein zentraler Punkt der Mathematik zu sein; ich habe vor allem auch an Lehramtskandidaten gedacht, die ihren Schülern das Differenzieren und Integrieren beibringen müssen und dafür den historischen Hintergrund kennen sollten. Bis Leibniz und Newton kann ich die Entwicklung noch einigermaßen vollständig beschreiben, von der Entwicklung ab Beginn des 18. Jahrhunderts kann ich aber wegen der Fülle des Stoffes nur mehr einzelne Aspekte bringen.
Trotzdem habe ich versucht, die Entwicklung zumindest "entlang eines roten Fadens", nämlich der Theorie der Fourier-Reihen, bis ans Ende des 19. Jahrhunderts zu verfolgen, um auf diese Weise die Brücke zur heutigen Mathematik zu schlagen. Das Skriptum gliedert sich daher in folgende Kapitel:

Inhaltsverzeichnis

I. ANFÄNGE DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG VOR NEWTON UND LEIBNIZ.

I.a Problemstellung:

Wir beginnen unsere Betrachtungen etwa mit dem Anfang des 17. Jahrhunderts. Wie wir sehen werden, ist es nämlich keineswegs der Fall, daß "die Differential- und Integralrechnung von Leibniz und Newton erfunden" wurde, wie man in der Schule hört, sondern es wurden bereits wesentliche Beiträge dazu vorher geliefert. Zumindest in dem Ausmaß, in dem die Infinitesimalrechnung üblicher Weise in der Mittelschule gelehrt wird, wurde sie bereits vorher entwikkelt, mit einer ganz wesentlichen Ausnahme allerdings: Die Tatsache, daß die Differentiation die inverse Operation der Integration ist, wurde erst von Leibniz und Newton in ihrer vollen Tragweite erfaßt.

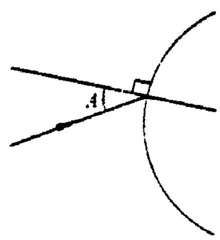
Was waren nun die Probleme, mit denen die Mathematiker um etwa 1600 konfrontiert waren und die zur Entwicklung der Differential- und Integralrechnung führten? Wir können sie im wesentlichen in vier Gruppen zusammenfassen.

1). Wenn man die Formel kennt, die die Position eines sich bewegenden Körpers als Funktion der Zeit beschreibt, so will man seine Geschwindigkeit und seine Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt berechnen. Umgekehrt will man bei gegebener Beschleunigung eines Körpers die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg berechnen.

   Bekanntlich hat ja schon Galilei um etwa 1590 festgestellt, daß der Weg, den ein (im Vakuum) fallender Körper zurücklegt, proportional dem Quadrat der Zeit ist. D.h., daß die Geschwindigkeit proportional zur Zeit wächst und die Beschleunigung konstant ist. (Das ist natürlich nichts anderes als die zweimalige Differentiation der Funktion $f(t) = c.t^2$.).

2) Das zweite Problem war das der Bestimmung einer Tangente an eine Kurve. Das Interesse an dieser Frage rührte aus mehreren Quellen. Es war eine Frage der reinen Geometrie

und es war auch von großer Bedeutung für die Anwendungen. Bekanntlich war die Optik ein wichtiges Forschungsgebiet des 17. Jahrhunderts. Um den Weg eines Lichtstrahls durch eine Linse zu untersuchen, muß man den Winkel,in dem der Lichtstrahl auf die Linse trifft, kennen, um das Brechungsgesetz anwenden zu können.



Eine weitere Fragestellung kam von der Mechanik: Wenn sich ein Körper entlang einer Bahn bewegt, so will man die Richtung der Geschwindigkeit berechnen, was ebenfalls auf die Berechnung der Tangente hinausläuft.

Es war aber nicht einmal der Begriff "Tangente" klar. Die Griechen hatten folgende Definition verwendet: "Diejenige Gerade, die die Kurve in genau einem Punkt berührt und die auf einer Seite der Kurve liegt". Diese Definition ist für Kegelschnitte ausreichend. Für die komplizierteren Kurven, wie sie bereits im 17. Jahrhundert untersucht wurden, war sie aber nicht mehr brauchbar. Um die Schwierigkeit der Begriffsbildung zu veranschaulichen: Leibniz definiert am Ende des 17. Jahrhunderts die Tangente als diejenige Gerade, die durch zwei punkte der Kurve geht, deren Abstand unendlich klein ist.

3) Das dritte Problem war die Extremwertbestimmung. Z.B. zeigte Galilei am Anfang des 17. Jahrhunderts, daß eine Kanone (im Vakuum) am weitesten schießt, wenn der Abschußwinkel 45° beträgt. Kepler bewies 1615 in seiner "Stereometria doliorum" (siehe unten), daß unter allen Parallelepipeden die einer gegebenen Kugel eingeschrieben sind und die ein Quadrat zur Basis haben, der Würfel das größte Volumen hat. Die Rechenmethode selbst ist nicht von besonderem Interesse (sie läßt sich nicht verallgemeinern) aber eine Feststellung, die Kepler dann machte,

ist wichtig: Je mehr man sich dem Maximum nähert, umso weniger ändert sich das Volumen bei Änderung des Verhältnisses der Seiten (In heutiger Terminologie: Die Ableitung verschwindet in Extrempunkten).
Diese wichtige, wenn auch naheliegende Bemerkung wurde übrigens schon viel früher, im 14. Jahrhundert vom Bischof Oresme gemacht, ja sie war sogar schon den babylonischen Astronomen bekannt gewesen.

4) Das vierte Problem war das der Berechnung von Kurvenlängen, Flächen, Volumen, Schwerpunkten etc. Schon die Griechen hatten einige Flächenberechnungen (z.B. für die Parabel) durchgeführt, doch ihre "Ausschöpfungsmethode" war nicht verallgemeinerungsfähig. Dies sollte durch die Entwicklung des Integralkalküls radikal geändert werden.

Die hier angeführten Probleme der Infinitesimalrechnung wurden von mindestens einem Dutzend der bedeutendsten Mathematiker des 17. Jhdts. behandelt und von mehreren Dutzend weniger bedeutenden. Wir können hier nur die wichtigsten Beiträge behandeln.

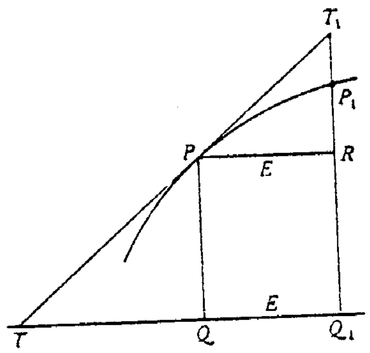
Johannes Kepler: (1571-1630)
Es ist mir eine große Freude, feststellen zu können, daß eine der frühesten Wurzeln der Infinitesimalrechnung aus Linz kommt und zwar auf Grund einer sehr praktischen Fragestellung. Johannes Kepler fand 1611 eine Anstellung in Linz durch die Stände des Erzherzogtums Österreich ob der Enns und verheiratete sich 1613 zum zweiten Mal mit der aus Eferding stammenden Susanne Reutlinger. Er schreibt:
"Als ich im November des letzten Jahres (1613) meine Wiedervermählung feierte, zu einer Zeit, da an den Donauufern bei Linz die aus Niederösterreich herbeigeführten Weinfässer nach einer reichlichen Lese aufgestapelt und zu einem annehmbaren Preis zu kaufen waren, da war es die Pflicht des neuen Gatten und sorglichen Familienvaters, für sein Haus den nötigen Trunk zu besorgen. Als einige Fässer eingekellert waren, kam am 4. Tag der Verkäufer mit der Meßrute, mit der er alle Fässer, ohne Rücksicht auf ihre Form, ohne jede weitere Überlegung oder Rechnung ihrem Inhalt nach bestimmte... Ich bezweifelte die Richtigkeit der Methode, denn ein sehr niedriges Faß mit etwas breiten Böden und daher sehr viel kleinerem Inhalt könnte dieselbe Visierlänge besitzen. Es schien mir als Neuvermähltem nicht

unzweckmäßig, ein neues Prinzip mathematischer Arbeiten, nämlich die Genauigkeit dieser bequemen und allgemein wichtigen Bestimmung nach geometrischen Grundsätzen zu erforschen und die etwa vorhandenen Gesetze ans Licht zu bringen."
Kepler entwickelte unter anderem die nach ihm benannte Faßregel , die darauf hinausläuft , die Oberfläche des Fasses durch eine Interpolationsparabel zu approximieren und dann das von ihr eingeschlossene Volumen zu berechnen, was äußerst einfach durchzuführen ist. Er verwendete dabei die seit den Griechen bekannte Flächenberechnung der Parabel. Er hatte ja für seine astronomischen Studien die Arbeiten der Griechen über die Kegelschnittlinien ausführlich studiert. Kepler legte seine Erkenntnisse in der 1615 erschienen Arbeit "Nova stereometria doliorum vinariorum" (Neue Stereometrie der Weinfässer) und ein Jahr später in gekürzter Fassung unter dem Titel, "Auszug aus der Uralten Messekunst Archimedes" nieder.

Wie erwähnt verwendete Kepler die aus der Antike stammenden Methoden zur Volumsberechnung, doch betrat Kepler methodisch Neuland, indem er Begriff und Redeweise vom unendlich Kleinen in mathematische Rechenmethoden eingezog.
So argumentiert etwa Kepler: "Der Umfang des Kreises hat so viele Teile als Punkte, nämlich unendlich viele. Jedes Teilchen kann angesehen werden als Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks, sodaß in der Kreisfläche unendlich viele Dreiecke liegen, die sämtlich mit ihren Scheiteln im Mittelpunkt zusammenstoßen. Es werde nun der Kreisumfang zu einer Geraden BC ausgetreckt." Kepler schließt daraus, daß der Kreisinhalt gleich dem Inhalt des Dreiecks über dem Umfang mit der Höhe gleich dem Radius des Kreises ist. Insgesamt war Kepler so imstande, weit über Archimedes auch hinsichtlich der Fülle von Körpern hinaus zu gehen, die - wenigstens näherungsweise - dem Inhalt nach berechenbar wurden. Kepler gab unter anderem auch Verfahren an für Torus, zitronenförmige, apfelförmige, birnen- und plaumenförmige Körper, Quitte, Kürbis, Olive, Spindeln und andere mehr.

Ein besonderer, der zweite Teil der "Faßrechnung" ist insbesondere dem Ausgangsproblem gewidmet, der "Stereometrie des österreichischen Fasses im besonderen".

Pierre de Fermat, (1601-1665), der vor allem auf Grund seiner tiefen zahlentheoretischen Arbeiten bekannt ist, löst das Problem der Tangente an eine Kurve und das Extremwertproblem im Jahr 1629 im wesentlichen mit der heutigen Methode in seiner Schrift "Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam". Sei PT die gesuchte Tangente im Punkt P an eine gegebene Kurve.



Die Strecke TQ ist die sogenannte "Subtangente". Fermat will nun die Länge von TQ berechnen, woraus die Tangente konstruiert werden kann.

Sei Q_1 ein Zuwachs der Strecke TQ von der Länge E. Da das Dreieck TQP ähnlich dem Dreieck PRT_1 ist, gilt

$$TQ : PQ = E : T_1R$$

Aber, so argumentiert nun Fermat, T_1R ist fast P_1R, daher

$$TQ : PQ = E : (P_1Q_1 - QP)$$

Wenn wir PQ gemäß heutiger Notation mit f(x) bezeichnen, und TQ : PQ als f'(x), so erhalten wir

$$TQ : f(x) = E : [f(x+E) - f(x)]$$

also

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E} = f'(x).$$

Für diejenigen Funktionen, die Fermat untersucht hat, ist es möglich durch den Term E im Zähler und Nenner zu dividieren (wie das ja auch bei den in der Mittelschule betrachteten Funktionen möglich ist). Nun setzt er $E = 0$ (er nennt das: beseitige den E-Term!) und erhält das korrekte Resultat.

Fermat - der nach meinem subjektiven Urteil der bedeutendste Mathematiker zwischen Archimedes und Newton war - wendet diese Methode auf viele schwierige Probleme an. Die Methode hat selbstverständlich genau die Form der heutigen Differentialrechnung, nur schwindelt sich Fermat um die Limes-Bildung herum. Oder sagen wir besser, für die Funktionen, die er untersucht, braucht er keinen schärfer gefaßten Limes-Begriff. Die Schwierigkeiten werden erst dann beginnen, wenn Funktionen auftreten, bei denen man nicht mehr so einfach durch E durchkürzen kann.

Die Schlußweise von Fermat scheint uns heute außerordentlich einfach und naheliegend, ja nahezu selbstverständlich. Jeder 17-jährige Mittelschüler kann und muß heute diesen Gedankengang durchdenken. Warum hat es eines solchen Genies bedurft, um das zu erdenken, was heute jeder Schüler kann. Im wesentlichen wohl deswegen, weil heute die Begriffe völlig klar sind und wir bereits mit Ideen, die durch diese Begriffe geprägt sind, von früher Jugend an gewissermaßen aufgezogen werden. Zum Beispiel ist es uns heute selbstverständlich, uns eine Funktion in kartesischen Koordinaten dargestellt vorzustellen (wie in der oberen Skizze), ja ich behaupte sogar, daß es uns nur sehr schwer möglich ist, sie anders begrifflich zu fassen (von der Intuition her, nicht von einer abstrakten Definition her). Die systematische Verwendung von kartesischen Koordinaten begann sich aber erst gerade zu jener Zeit durchzusetzen - R. Descartes, nach dem sie benannt sind, war 5 Jahre älter als Fermat.

Wir haben oben den Begriff "Funktion" verwendet, über den damals noch keineswegs Klarheit herrschte. Als "Funktion" galt bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts nur eine variable Größe, die sich als "Formel" hinschreiben ließ, wie etwa x^n, $\sin(x)$, $\log(x)$ etc. Der lange, mühevolle Weg, der zur Herausschälung des heutigen Begriffs einer Funktion und der Begriffe der Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Analytizität etc. geführt hat, wird uns noch oft in unserer historischen Betrachtung beschäftigen.

Auch war die Notation damals nicht so praktisch und suggestiv wie heute (die obige Beweisskizze ist - wie auch die kommenden Rechnungen - gewissermaßen eine Übersetzung des Fermat'schen Texts in heutige Notation - der Buchstabe E, der unserem heutigen Δx entspricht, wurde allerdings von Fermat in dieser Bedeutung verwendet). Die Methode, algebraische Größen mit Buchstaben zu bezeichen, war erst von Vieta (1540-1603) eingeführt worden. Man muß sich vergegenwärtigen, daß in dem im sechzehntem Jahrhundert geschriebenen Buch von M. Stifel über Algebra 200 Seiten benötigt werden, um die Gleichung 2. Grades zu behandeln, ein Sachverhalt, der uns heute in einer Zeile erschöpfend behandelt erscheint ($x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{4ac}}{2a}$), hauptsächlich aus Mangel an geeigneter Notation.

Diese Schwierigkeiten müssen wir uns immer in ihrer vollen Tragweite vor Augen führen, wenn wir die Leistungen früherer Mathematiker beurteilen wollen.

Zur Illustration der Wichtigkeit einer geeigneten Notation sollte der Leser einmal versuchen, eine mittelgroße Division mit römischen Zahlen durchzuführen.

René Descartes (1596-1650):

Descartes entwickelte in seinem Buch "La Gémétrie" eine Methode, um die Tangente an algebraische Kurven zu finden. In diesem Fall kann die Lösung rein algebraisch ermittelt werden ohne eine Limes-Bildung zu benötigen (während Fermat's Methode dies benötigt, wenn man sie sauber formuliert).

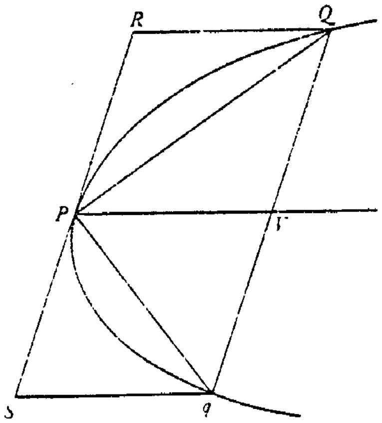
Descartes benützte diese Methode um den Winkel zwischen zwei sich schneidenden Kurven zu berechnen und es ist interessant, wie er die Wichtigkeit dieser Aufgabe einschätzte: "Dies ist das nützlichste und allgemeinste Problem der Geometrie, nicht nur welches ich kenne, sondern auch von welchem ich mir irgendwie vorstellen kann, es kennen zu wollen."

Obwohl Fermat's Methode allgemeiner war, hielt Descartes seine Methode für besser; er kritisierte Fermat, dessen Dar-

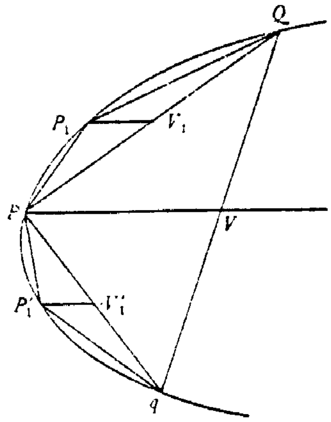
stellung tatsächlich nicht klar war und versuchte ihn auf seine eigene Weise (falsch) zu interpretieren. Fermat wiederum - auch nicht faul - behauptete (aus heutiger Sicht zurecht), daß seine Methode der kleinen Zuwächse E der von Descartes überlegen sei. Dies führte zu einem sehr heftigen öffentlichem Streit zwischen Fermat und Descartes. Wie wir sehen werden, wird es noch viele Streitigkeiten dieser Art zwischen Mathematikern geben (Leibniz gegen Newton, die Bernoullis gegeneinander und gemeinsam gegen die englischen Mathematiker, Daniel Bernoulli gegen Euler und Lagrange, Fourier gegen Lagrange und Cauchy, Galois gegen Poisson und Lacroix, Cantor gegen Dedekind, um nur stichwortartig einige zu nennen, die sich im übrigen untereinander in Inhalt und Form sehr unterscheiden).
Sie waren immer eine Mischung aus inhaltlicher, mathematischer Meinungsverschiedenheit und rein persönlicher Streiterei. Jeder der einmal einen mathematischen Kongreß besucht hat, weiß, daß diese Arten von Streitigkeiten, Eifersüchteleien, gegenseitiger Geringschätzung etc. bis zum heutigen Tag keineswegs ausgestorben sind.

Man kann und soll sich natürlich fragen, warum gerade Mathematiker in so starkem Maße zu persönlichen Auseinandersetzungen neigen: Meiner Meinung nach liegt sicher ein Grund darin, daß Mathematik ihrem Wesen nach ein Konkurrenzkampf ist: Jeder will nach Möglichkeit klüger sein als der andere und schönere und tiefere Resultate erzielen. Außerdem kann man - im allgemeinen - in der Mathematik nur dann erfolgreich sein, wenn man hart arbeitet und sich voll mit den Problemen identifiziert. Jean Dieudonné meint dazu: "Das Leben eines Mathematikers ist beherrscht von einer unstillbaren Neugier, einer Begierde, die untersuchten Probleme zu lösen, die zur Leidenschaft wird. Das führt oft dazu, daß er sich fast vollständig von der ihn umgebenden Umwelt entfernt. Die Bizarrheiten und Ticks von berühmten Mathematikern haben genau diese Wurzel. Die Entdeckung eines Beweises ist oft nur nach intensiver und langdauernder Konzentration möglich. Viele Mathematiker (Gauss, Kummer, Dedekind, Cantor etc.) haben berichtet, verschiedene Probleme erst nach jahrelangem, intensiven Nachdenken gelöst zu haben".

Nach dieser kleinen Abschweifung wollen wir uns wieder der Entwicklung der Infinitesimalrechnung zuwenden, und zwar der Berechnung von Flächen unter Kurven. Wie bereits erwähnt, haben schon die Griechen einige Flächen-Berechnungen durchgeführt. Das typische Beispiel ist Archimedes, der die Fläche unter der Parabel berechnet hat:



5.6 a



5.6 b

Zur Berechnung der Fläche des zwischen PQq eingeschlossenen Parabelstückes, wendet Archimedes (287-212 v. Chr.) die sogenannte Exhaustionsmethode (Ausschöpfungsmethode) an: Das Flächenstück wird mit einer Folge von Dreiecken überdeckt (genaugenommen: sein Inneres wird überdeckt). Die ersten beiden Schritte sind in den Figuren 5.6 a) und b) skizziert: Zuerst nimmt man das Dreieck ΔPQq, im zweiten Schritt die beiden Dreiecke ΔPP_1Q und $\Delta PP_1'q$, im dritten Schritt werden vier Dreiecke gebildet, indem man die Ordinate zwischen P_1Q, PP_1, $P_1'P$ und qP_1' halbiert usw. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Summe der Dreiecksflächen

$$A + (1/4)A + (1/16)A + \ldots$$

ergibt, wobei A die Fläche von ΔPQq ist. Das heißt, in diesem Fall konnte man die Flächenberechnung auf eine geometrische Reihe zurückführen. Für uns ist klar, daß die Summe $4/3.A$ ergibt, das heißt, das Prabelstück zwischen qPQ beträgt 2/3 der Fläche des Parallelogramms RQqS.

Es ist aber sehr interessant, mit welcher logischen Strenge Archimedes die Berechnung der geometrischen Reihe durchführte, eine Strenge die wir im 17. und 18. Jh. vermissen werden. Er zeigt mit einen <u>indirekten</u> Beweis, daß

$1 + 1/4 + 1/16 + \ldots = 4/3$. Er sagt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$1 + 1/4 + \ldots 1/4^n + (1/3).(1/4^n) = 4/3. \quad (*)$$

Das verifiziert man leicht und das ist eine Gleichung in der nur endlich viele Glieder vorkommen, also kein Grenzübergang auftritt. Archimedes zeigt nun, daß die unendliche Summe, bezeichen wir sie mit S, nicht größer sein kann als 4/3. Denn wäre dem so, dann wäre bereits eine endliche Partialsumme

$$S_n = 1 + 1/4 + \ldots + 1/4^n$$

größer als 4/3, was zu einem Widerspruch zur Gleichung (*) führt.

Andererseits kann S auch nicht kleiner als 4/3 sein: denn dann wäre $4/3 - S$ eine strikt positive Zahl, dann könnten wir ein n finden, sodaß

$$(1/3) \cdot (1/4^n) < 4/3 - S;$$

dies führt wieder zu einem Widerspruch zu (*).

Was Archimedes also hier tut, ist eine sorgfältige Abschätzung des Reihenrestes. Diese beinahe pedantische Strenge ist ein typisches Merkmal der griechischen Mathematik, die sich ja vor allem als Teil der Philosophie, als Eindringen in die "Welt der Ideen" versteht, und nicht so sehr als ein Hilfsmittel für technologische Neuerungen. So beweist etwa Euklid in seinem berühmten Buch "Die Elemente" (es ist um etwa 325 v. Chr. entstanden und ist ohne Zweifel das erfolgreichste Mathematikbuch der Weltgeschichte) zahlreiche Propositionen, die trivial scheinen (z.B. die Summe zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte Seite, oder 2 Dreiecke mit proportialen Seitenlängen haben gleiche Winkel usw.). "Beweisen" heißt das Zurückführen auf einige wenige, explizit formulierte Postulate.

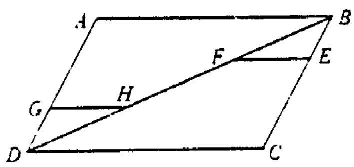
Die Ansicht der Griechen, daß - pointiert formuliert - das Wesen der Mathematik beschmutzt wird, wenn aus ihr Anwendungen und Schlußfolgerungen für die Praxis gezogen werden, spiegelt sich in folgender Anekdote wider, die über Euklid berichtet wird:Als er von einem Schüler gefragt wurde, welchen Nutzen er davon habe, geometrische Lehrsätze zu lernen, rief Euklid einen Sklaven herbei und beauftragte ihn, seinem Studenten eine kleine Münze zu schenken, "da dieser armselige Mensch einen Gewinn aus seinen Studien ziehen müsse".

Wir werden sehen, daß die Entwicklung zwischen der einseitigen Betonung der Mathematik als Wert an und für sich (wie hier extrem von Euklid vertreten) und zwischen der einseitigen Betonung der Anwendungsseite im Lauf der Geschichte wie ein Pendel hin- und herschwingen wird.

Doch kommen wir zurück zu den Anfängen der Integralrechnung im 17. Jhdt. Unter den vielen Beiträgen wollen wir die Arbeit von Bonaventura Cavalieri ((1598-1647), ein Schüler von Galilei) herausgreifen, da seine Methode der "Indivisiblen" eine gewisse historische Bedeutung erlangte und bis zur Mitte des 18. Jh. als mathematische Schule bezeichnet werden kann. Sie beleuchtet auch gut die Denkweise der Zeit.

Cavalieri betrachtet ein Flächenstück als zusammengesetzt aus einer unendlichen Zahl von senkrechten Linien. Cavalieri meint:"Eine Linie ist zusammengesetzt aus Punkten wie eine Perlenkette aus Perlen; eine Fläche ist zusammengesetzt aus Linien wie ein Gewebe aus Fäden; ein Volumen ist zusammengesetzt aus Flächen wie ein Buch aus Blättern."

Cavalieri's Schlußweise sei an folgendem einfachen Beispiel erläutert:



Die Dreiecke BCD und ABD sind <u>deshalb</u> flächengleich, weil jeder Linie GH eine gleich lange Linie FE entspricht.

<u>Übungsaufgabe:</u> Geben Sie Beispiele an, wie man mit Cavalieri's Schlußweise falsche Resultate ableiten kann.

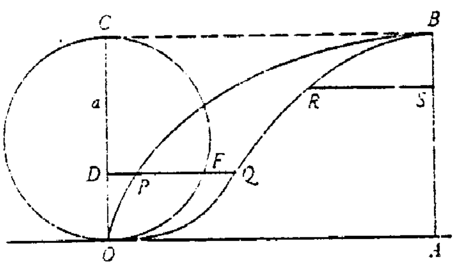
Cavalieri wendet dieses Prinzip der Indivisiblen - die Geraden, aus denen ein Flächenstück zusammengesetzt ist, nennt er Indivisiblen (= Unteilbare) - geschickt an, um etwa zu zeigen, daß das Volumen eines Kegels ein Drittel des Volumens des umschriebenen Zylinders ist (was den Griechen selbstverständlich bekannt war). Er berechnet auch (in heutiger Schreibweise)

$$\int_0^a x^n \, dx = a^{n+1}/(n+1)$$

für positive ganze Zahlen $n \leq 9$. Die Integration von Polynomen ist übrigens von mindestens einem halben Dutzend Leuten vor Leibniz und Newton gefünden worden. Der erste dürfte der Architekt Simon Stevin (1548-1620) gewesen sein, der die Formel 1586 kannte. Fermat etwa wußte um etwa 1635 bereits, daß die obige Formel für alle rationalen $n \neq -1$ gilt und bewies im wesentlichen auch, daß die Stammfunktion von x^{-1} der Logarithmus ist. Fermat stellt nämlich fest, daß die Funktion $a \rightarrow \int_1^a x^{-1} \, dx$ denselben Gesetzen gehorcht, wie der Logarithmus, d.h. daß die Multiplikation in die Addition übergeführt wird. Allerdings wurde der Logarithmus zu diesem Zeitpunkt (etwa 1635) noch nicht als eine Funktion, wie etwa Polynome, Kegelschnittslinien etc. betrachtet , sondern als in Tafeln erfaßte Rechenhilfe. Die Logarithmen waren übrigens erst kurz vorher von John Napier (1550-1617), Henry Briggs (1561-1631) und Joost Bürgi (1552-1632) "erfunden" worden, die die ersten Logarithmentafeln erstellten. Diese neue Rechenmethode war sofort ein großer Erfolg und etwa für Kepler bei seinem astronomischen Berechnungen eine ganz entscheidende Hilfe.

Zurück zu Cavalieri und seiner Methode der Indivisiblen:

Als Beispiel, wie Cavalieri's Methode auf nicht-triviale Probleme angewendet wurde, sei Roberval's Berechnung der Fläche unter der Zykloide angegeben (1634).



Die Gleichung der Zykloide OPB ist (in heutiger Notation) in Parameterform gegeben durch

$$y = a.\ \sin\ (t)$$
$$x = a.(t - \cos\ (t))$$

wobei $t \in [-\pi/2, +\pi/2]$, a der Radius des erzeugenden Kreises ist und wir den Nullpunkt in der Mitte des Rechteckes OABC annehmen. Wir wollen die Fläche OABP berechnen.

Roberval zieht die sogenannte "begleitende Linie der Zykloide" OQB, die wir

$$y = a.\sin x/a$$

schreiben. Aus Symmetriegründen (ähnlich wie oben bei den Dreiecken) ist die Fläche OQBA die Hälfte von OABC. Andererseits folgt unmittelbar aus der Definition der Zykloide, daß die Länge DF gleich der Länge PQ ist. Daher ist die Fläche OQBP gleich der Fläche des Halbkreises OFCD. Daher ist die Fläche unter der Zyklöide gleich $3a^2\pi/2$.

Übungsaufgabe: Berechne die Fläche unter der Zykloide, wie man es heute in einer Analysis-Vorlesung machen würde.
Hier tritt übrigens zum 1. Mal der Sinus auf, der noch bis ins 18. Jh. als "begleitende Linie der Zykloide" bezeichnet wurde.
Das Problem, das Robeval 1634 löste, wurde 1629 von Marin Mersenne (1598-1648) gestellt. Mersenne war begüterter Aristokrat, hochgebildet und wissenschaftlich sehr interessiert. Er hat zwar selbst zur Mathematik wenig beigetragen, aber seine Bedeutung als Kommunikationszentrum der mathematischen Welt in der ersten Hälfte des 17. Jh. ist kaum zu überschätzen. In seinem Haus trafen sich Naturwissenschafter und Philosophen; er unterhielt rege Korrespondenz mit Descartes (mit dem er zur Schule gegangen war), Fermat, Pascal, und diente gewissermaßen als Knotenpunkt des wissenschaftlichen Austausches.

Zu dieser Zeit gab es ja keine wissenschaftlichen Zeitschriften, in denen man neue Resultate niedergeschrieben hätte, sondern der Austausch spielte sich hauptsächlich durch Briefe und persönliche Treffen ab. Außerdem wurden natürlich Bücher geschrieben, aber es war immer sehr schwierig und kostspielig, einen Verleger zu finden. Die Publikation von Büchern war fast nur begüterten Mathematikern offen, oder solchen, die einen Mäzen hatten oder bei einem Aristokraten als Astronom oder dergleichen angestellt waren.

Ein anderer Aspekt scheint mir noch bemerkenswert: Es war im 17. und 18. Jh. sehr oft der Fall, daß offene Probleme gewissermaßen als Preisaufgabe gestellt wurden. Es wurden auch tatsächlich oft Geldpreise für die Lösung ausgesetzt, vor allem von den nationalen Akademien der Wissenschaft, die im Laufe des 17. Jh. in Frankreich, England, Italien, Holland und - auf Betreiben Leibniz's - 1700 in Preußen und 1723 in Rußland gegründet wurden.

Übrigens hat sich der Brauch, Geldpreise auf die Lösung mathematischer Probleme auszusetzen, bis in unsere Tage erhalten, wenn auch in eher symbolischer Form: Der bekannte (lebende) Mathematiker Paul Erdös etwa setzt auf die Lösung von Problemen Preise zwischen 10 Cent und mehreren hundert Dollars aus. Oder die Gruppe um Stephan Banach (20'er und 30'er Jahre unseres Jh. in Lemberg) protokollierte ihre ungelösten Probleme im "schottischen Buch" (so benannt, weil es im "Cafe Schottland" aufbewahrt wurde, wo S. Banach bis zu 17 Stunden lang ohne Pause über Mathematik diskutierte) und setzte als Preise Getränke oder Speisen aus. Der höchste Preis, eine Gans, der für die Lösung des Basisproblems ausgesetzt war, wurde erst 42 Jahre nach Formulierung des Problems durch Per Enflo (1971) errungen, der die Gans dann in einem feierlichen Festmahl verzehren durfte.

Die Methode des Problemstellens wurde auch manchmal ausgenützt, wie etwa von B. Pascal, der 1659 unter dem Pseudonym Dettonville einige Integrationsprobleme an andere Mathematiker stellte, um dann schließlich seine eigenen Lösungen (unter dem Namen Pascal) zu publizieren.

Um die Betrachtung der Infinitesimalrechnung vor Leibniz und Newton abzuschließen, und um ein gutes Beispiel der Raffinesse der Rechenmethoden zu geben, möchte ich noch John Wallis (1616-1703), den bedeutendsten englischen Mathematiker vor Newton erwähnen und seine Bemühungen, die Kreisfläche analytisch zu berechnen, die schließlich zur berühmten Wallis'schen Produkt-Darstellung von π führten (in dem Buch "Arithmetica Infinitorum").

Die Formel für den Einheitskreis ist gegeben durch $y = (1 - x^2)^{1/2}$. Wallis betrachtet nun die Kurven

$$y = (1 - x^2)^0, \; y = (1 - x^2)^1, \; y = (1 - x^2)^2, \ldots$$

und erhält als Stammfunktionen (das ist die heutige Bezeichnungsweise)

$$\begin{aligned}
y &= x \\
y &= x - 1/3 \,.\, x^3 \\
y &= x - 2/3 \,.\, x^3 + 1/5.x^5 \\
y &= x - 3/3 \,.\, x^3 + 3/5.x^5 - 1/7.x^7
\end{aligned}$$

Aus diesen Formeln leitet Wallis nun mit heuristischer Induktion und Interpolation auf ebenso komplizierte wie geschichte Weise die, nach ihm benannte Formel ab

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdot \frac{6.6}{5.7} \cdot \frac{8.8}{7.9} \cdot \ldots$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

<u>Zusammenfassung der Periode von Newton und Leibniz, d.h. also bis etwa 1670:</u>

Eine große Menge von Wissen über die Infinitesimalrechnung war bekannt. Das Buch von Isaac Barrow ((1630-1677), er war Lehrer von Newton und dessen Vorgänger als Lucasischer Professor in Cambridge) "Lectiones Geometriae", das 1669 erschien, enthält eine Methode, um Tangenten zu finden, Sätze über die Differentiation von Produkt und Quotient von 2 Funktionen, die Differentiation von Potenzen von x, Variablen-Transformation zur Berechnung von Integralen und sogar die Differentiation von impliziten Funktionen. Allerdings ist dieses Buch aufgrund der geometrischen Formulierung und des Mangels an geeigneten Notationen sehr schwer verständlich und auch äußerst langatmig. Die Methode zur Findung der Tangente, die man aus heutiger Sicht in wenigen Zeilen hinschreiben kann, beansprucht etwa 100 Seiten und etwa 200 Abbildungen. I. Barrow erkennt - zumindest in Spezialfällen - bereits, daß die Integration die Umkehroperation der Differentiation ist, er arbeitet aber diese fundamentale Tatsache nicht weiter aus.

John Wallis hat in seiner 1655 erschienenen "Arithmetica Infinitorum" vergleichbare Resultate erzielt, konnte diese aber bereits in algebraischer Form präsentieren und nicht in der zum Teil schwerfälligen geometrischen Form.

Man wundert sich, was nun eigentlich für Newton und Leibniz noch zu entdecken übrig blieb. Die Anwort lautet: Die Allgemeinheit dessen, was bereits für spezielle Probleme getan worden war. Die Arbeit über Infinitesimalrechnung in den beiden ersten Dritteln des 17. Jh. verlor sich im Detail.

Auch scheint mir folgender - etwas paradoxer - Effekt bemerkenswert: Vor Leibniz und Newton wurde oft versucht, logische Strenge in der Herleitung der Resultate zu erzielen, was auf geometrische Argumentationen im Stil der Griechen hinauslief und zu mühseligen, subtilen Rechnereien führte, die den Blick für das Wesentliche behinderten. Erst als Leibniz seine Differentiale dy einführte, bzw. Newton seine "Fluenten" und "Fluxionen" war der in die Zunkunft weisende Weg beschritten. Die Mathematiker des 17. und 18. Jh. besaßen zwar keine logisch konsistente Theorie für die Benützung der Infinitesimalen und stießen auch immer wieder auf Paradoxa und Widersprüche. Die Situation wird aber durch das folgende Zitat von Horace Lamb treffend charakterisiert: "Eine Wanderer, der sich weigert über eine Brücke zu gehen, bevor er nicht jeden Teil genauestens auf seine Tragfähigkeit überprüft hat, wird wahrscheinlich nicht sehr weit kommen; manchmal muß man etwas riskieren, auch in der Mathematik."

Aus heutiger Sicht hatten die Mathematiker des 17. und 18. Jh. auch keine Chance, den Infinitesimalkalkül auf logisch einwandfreier Basis zu begründen; allein schon deswegen, weil der Begriff der reellen Zahlen überhaupt nicht klar war (und nicht klar sein konnte). Erst gegen Ende des 19. Jh's kann dieser Begriff - nach langem mühevollen Ringen - exakt gefaßt werden, was dann zur Entwicklung der Mengenlehre führte, die die Mathematik revolutionierte (D. Hilbert: "Aus dem Paradies, das uns Cantor geschaffen hat, lassen wir uns nie mehr vertreiben.") So wichtig die mengentheoretische Betrachtungsweise in der heutigen Mathematik ist, möchte ich doch in diesem Zusammenhang meine Überzeugung nicht verhehlen, daß ich es für völlig unsinnig halte, arme Volksschulkinder Äpfel und Birnen einringeln zu lassen. (Vgl. dazu: Morris Kline: "Why Johny can't add")

II. Newton und Leibniz

a) Newton:

Sir Isaac Newton (1642-1727) ist für mich unter die ganz großen Mathematiker einzureihen, wo neben ihm Archimedes, Euler, Gauß und Hilbert ihren Platz haben. Er erkennt klar die Bedeutung des Infinitesimalkalküls und die Tatsache, daß die Integration die Umkehrung der Differentiation ist.

Da er stark physikalisch denkt, ist die unabhängige Variable für ihn die Zeit, was eine fruchtbare Betrachtungsweise ist, aber - wie er bemerkt - nicht notwendig ist. Er betrachtet die Variablen als kontinuierliche Bewegungen von Punkten, Linien, Ebenen etc. und nicht als statische Aggregate von infinitesimalen Elementen (wie Cavalieri oder auch Leibniz). Eine Variable der Zeit $x(t)$ nennt er "Fluent" und ihre Änderungsrate die "Fluxion" und benennt sie $\dot{x}(t)$. Die Fluxion der Fluxion benennt er $\ddot{x}(t)$. Umgekehrt benennt er den Fluenten dessen Fluxion $x(t)$ ist, $\acute{x}(t)$, den Fluenten zu $\acute{x}(t)$ dann $\acute{\acute{x}}(t)$ usw. Newton argumeniert ähnlich wie Fermat vor ihm, wobei er statt des Fermat'schen E ein o schreibt. Dieses o stellt er sich als kleinen Zuwachs der Zeit vor, der schließlich gegen 0 strebt, also ganz ähnlich wie wir heute mit $h \to 0$ argumentieren. Der Differenzquotient geht dann in die "ultima ratio" (d.h. den Differential - quotienten über).

Newton betrachtet eine physikalische Gleichung $y = f(x)$ meist in der durch die Zeit parametrisierten Form $y(t) = f(x(t))$. Dies führt ihn sofort auf die Betrachtung von Differentialgleichungen und nicht nur auf die Differentiation und Integration von Funktionen. Ab diesem Zeitpunkt sollten die Differentialgleichungen immer ein zentrales Thema der Mathematik bleiben.

Nun benützt Newton systematisch noch ein weiteres wichtiges Hilfsmittel: Die Darstellung von Funktionen als unendliche Reihen. Um etwa die Funktion $y = 1/(1+x^2)$ zu integrieren, schreibt er sie (nach der Formel für die geometrische Reihe)

$$y = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots.$$

und integriert gliedweise. Er bemerkt dann, daß man - wenn man y als $x^{-2}/(1+x^{-2})$ auffaßt-auch folgende Reihendarstellung geben kann

$$y = x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + \ldots.$$

und ebenfalls gliedweise integrieren kann. Er sagt, daß der 1. Ausdruck für kleines x, der zweite aber für großes x verwendet werden soll. Er ist sich also des Problems der Konvergenz bewußt, geht aber nicht näher darauf ein. Das folgende Zitat Newton's charakterisiert seine Betrachtungsweise.

"Alle Operationen, die die übliche Analysis für Gleichungen mit einer endlichen Anzahl von Termini durchführt, können auch für unendliche Gleichungen angewandt werden, sodaß ich dies ohne zu zögern ebenfalls Analysis genannt habe. Denn die Schlüsse darin sind nicht weniger sicher als in der üblichen Analysis; noch sind die Gleichungen weiniger exakt; obwohl wir Sterblichen, deren Verstandeskräfte eng begrenzt sind, alle Termini dieser Gleichungen weder ausdrücken noch erfassen können, um daraus genau die Größen zu kennen, die wir wollen."

So hatte Newton eine sehr effiziente Methode zur Lösung von Differentialgleichungen in der Hand: Er setzt die gesuchte Funktion als Potenzreihe (mit unbestimmten Koeffizienten) in die Differentialgleichung ein, führt die durch die Gleichung bestimmten Differentiationen und algebraischen Operationen formal durch und bestimmt dann rekursiv die Glieder der Potenzreihe. Diese Methode ist noch heute von großer Bedeutung. Allerdings glaubte Newton damit "jede Differentialgleichung lösen zu können", was aus heutiger Sicht etwas naiv scheinen mag.

Dies geht aus dem folgenden Anagramm (eine besondere Art von Buchstabenrätsel) hervor, das Newton in einem Brief an Leibniz (24.Oktober 1676) schrieb:

6a cc d ae 14e ff 7i ....

Die Lösung lautete: "Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa" ("Bei gegebener Gleichung zwischen beliebig vielen fließenden Größen, deren Fluxionen zu finden und umgekehrt.") In Newton's Terminologie läuft dies auf die oben angeführte Aussage hinaus.

Für Leibniz mußte dieses Anagramm unverständlich bleiben, obwohl er zu diesem Zeitpunkt bereits selbst die Infinitesimalrechnung gefunden hatte. Es ist mit Recht gesagt worden, daß es wohl eines viel größeren Scharfsinnes bedurft hätte, aus diesem Anagramm Newtons das Geheimniss der neuen Methode zu erkennen, als selbständig die Differential- und Integralrechnung zu entdecken.

In seiner "Methode der Fluxionen und der unendlichen Reihen" (geschrieben 1671 aber erst 1736 veröffentlicht) gibt Newton eine Reihe von Anwendungen der Fluxionsrechnung. Differentiation von impliziten Funktionen, Wendepunkte von Funktionen, Krümmungen von Kurven, wobei er die korrekte Formel für den Radius des Krümmungskreises angibt

$$r = \frac{(1+\dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{y}}$$

Er gibt diese Größe auch in Polarkoordinaten an. Am Ende seiner Arbeit fügt er auch eine kurze Integraltafel an.

Wir sehen also, daß Newton 1671 bereits voll das Wesen der Infinitesimalrechnung erkannt hat und die elementaren Anwendungen beherrschte.

Newton dürfte seine wesentlichen Entdeckungen in den Jahren 1665 und 1666 (als 23 bzw. 24-jähriger) gemacht haben, als er wegen der Pest, die in der Umgebung von London wütete, 2 Jahre auf dem Lande (in Woolsthorpe) verbrachte. Aus dieser

Zeit stammt die berühmte Geschichte vom Apfelbaum (die übrigens von Voltaire auf dem Kontinent in Umlauf gebracht wurde). Tatsächlich hat Newton in dieser Zeit das Gravitationsgesetz als den Schlüssel zum Verständnis der Himmelsmechanik erkannt. Auch hat er - neben seinen bereits erwähnten mathematischen Arbeiten - zu dieser Zeit auch die epochale Entdeckung gemacht, daß das weiße Licht aus farbigem Licht zusammengesetzt ist.

Newton veröffentlichte aber seine Entdeckungen nicht sogleich, denn - wie Morgan sagt - "a morbid fear of opposition from others ruled his whole life." 1672 schließlich veröffentlichte er seine erste Arbeit über die Natur des Lichtes, in Verbindung mit seiner Wissenschaftsphilosophie. Er wurde daraufhin schwerstens kritisiert von seinen Zeitgenossen, darunter Robert Hooke und Christiaan Huygens, die andere Vorstellungen über die Natur des Lichtes hatten. Diese Fragen beschäftigten die gebildete Welt dieser Zeit sehr, und wir wissen ja, daß etwa Goethe noch über 100 Jahre später in seiner "Farbenlehre" in äußerst polemischer - und aus heutiger Sicht völlig falscher - Weise gegen die Ideen Newtons ankämpfte.

Dieser Mißerfolg veranlaßte Newton, für lange Zeit nichts mehr zu publizieren, obwohl er umfangreiche, geschlossene Arbeiten schrieb (wie die bereits erwähnte " Methodus Fluxionum") und diese auch bei der "Royal Society" präsentierte. Hätte Newton sofort publiziert, hätte der unheilvolle Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz wohl nicht stattgefunden.

Ein weiterer Punkt, den man Newton vorhalten muß (nicht im Sinne einers Vorwurfes, sondern als Erklärung dafür, warum der Leibniz'sche Infinitesimalkalkül bei nachfolgenden Mathematikern erfolgreicher war): Newton kümmerte sich nie um gute Notationen während Leibniz Tage dafür aufwandte, solche zu finden. Newton kümmerte sich auch nicht darum, grundlegende Rechenregeln herauszuarbeiten. Ein Beispiel mag dies erläutern. Newton war seit 1666 bekannt, daß zu der Gleichung der "Fluenten"

$$z = u \cdot v$$

die dazu gehörige Gleichung der Fluxionen

$$\dot{z} = \dot{u}v + u\dot{v}$$

lautet. Für ihn war das aber ein nicht weiter erwähnenswerter Spezialfall des allgemeinen Problems der Infinitesimalrechnung (siehe das Anagramm) und er streicht diese Tatsache nicht extra heraus. Dagegen formuliert Leibniz 10 Jahre später explizit sein

$$d(uv) = udv + vdu,$$

was noch heute als Leibniz'sche Produktregel bezeichnet wird.

b) Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):

Wir wollen uns hier nur mit den mathematischen Arbeiten dieser äußerst vielseitigen und interessanten Gestalt auseinandersetzen. Wie Leibniz selbst meinte , wußte er bis zu seiner Reise nach Paris (1672) kaum etwas über Mathematik. Seine Vaterstadt Leipzig, an deren Universität er auch studierte, war damals, ausgepowert vom 30-jährigen Krieg, mathematisch gesehen tiefste Provinz. Dennoch wollen wir seine Dissertation "De arte Combinatoria" aus dem Jahre 1666 nicht unerwähnt lassen, da sie gut die Denkweise Leibniz's charakterisiert.

Da ist einmal eine grundsätzliche philosophische Idee: Leibniz glaubte an die Möglichkeit einer "Characteristica generalis", einer allgemeinen symbolischen Sprache, mit der jeder vernünftige Gedanke in Symbolen und Formeln niedergeschrieben werden könne. Die Symbole würden gewissen formalen Regeln gehorchen, die die Korrektheit der Schlüsse garantieren würden. Dieser Grundgedanke - wenn er auch utopisch und naiv scheinen mag - beeinflußte sein philosophisches wie mathematisches Werk stark: er hatte immer großes Interesse an Notationen und Symbolen und versuchte mathematische Erkenntnisse in Formeln und Algorithmen niederzulegen. Als er sich mich der Geometrie von Kurven beschäftigte, war er - anders als seine Vorläufer - eher an Methoden als an Resultaten interessiert, vor allem an Methoden die in Form eines

Algorithmus gefaßt werden konnten. Kurz gesagt, er suchte einen <u>Kalkül</u>. (Übrigens wird im angelsächsischen Sprachraum die Differential- und Integralrechnung als "Calculus" bezeichnet).

Leibniz betrachtet in "De Arte Combinatoria" Folgen von Zahlen, deren Differenzen, "zweite" Differenzen usw. Zum Beispiel sind für die Folgen der Quadrate

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \ldots.$$

die Differenzen

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

und die zweiten Differenzen

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots$$

Leibniz bemerkte das Verschwinden der dritten Differenzen für die Folge der Quadrate, das Verschwinden der zweiten Differenzen für die Folge der natürlichen Zahlen usw. Er bemerkte natürlich auch, daß für eine Reihe mit erstem Glied gleich 0 die Summe der Differenzenglieder gleich dem letzten Glied der Reihe ist. Die Reziprozität von Differenzieren und Integrieren wird hier ganz selbstverständlich offenbar.

Leibniz entwickelt einiges (formales) Geschick bei der Berechnung von unendlichen Reihen. Bei seiner Reise nach Paris 1672, die er übrigens in wichtiger diplomatischer Mission unternahm, behauptete er denn auch, "jede unendliche Reihe berechnen zu können". Christiaan Huygens, zu diesem Zeitpunkt die mathematische (und auch physikalische und astronomische) Autorität der 1666 gegründeten Akademie der Wissenschaften in Paris (die aus dem Wissenschaftler-Kreis um Mersenne hervorgegangen war), stellte ihn auf die Probe: Er solle die Summe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

der sogenannten "reziproken Dreieckszahlen" berechnen. Wie wir wissen, läßt sich diese Reihe mit einem ganz einfachen

Trick berechnen.

Übungsaufgabe: Berechne die Summe (auf elementare Weise).

Es ist interessant, zu sehen, wie Leibniz argumentierte (der zu seinem Glück die Reihe tatsächlich berechnen konnte). Sei

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Diese Reihe vergleicht Leibniz mit der Reihe

$$B = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

oder

$$B-1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$$

Durch (gliedweise) Addition erhält man

$$A + B - 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = B.$$

Daraus folgt, daß $A = 1$ (das korrekte Ergebnis).

Übungsaufgabe: Was halten Sie von der Argumentation Leibniz's? Ist sie wesentlich verschieden von Ihrer eigenen Lösung?

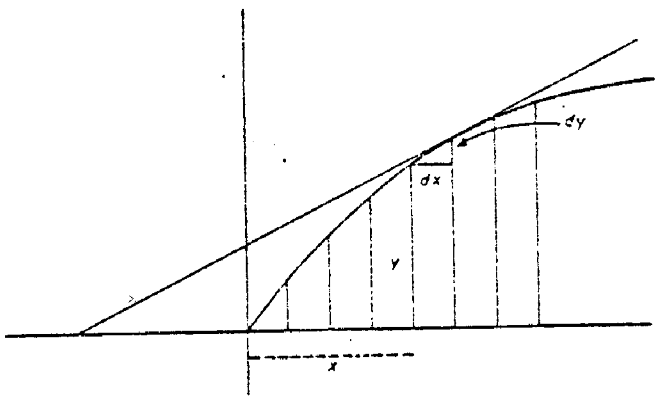
Der Einfluß von Huygens ist entscheidend für Leibniz's Entwicklung: Huygens gibt Leibniz die Schriften von Pascal, die wiederum von Fermat beeinflußt sind, und so lernt Leibniz deren Arbeiten über die Infinitesimalrechnung kennen.

Leibniz blieb von 1672-76 in Paris, von einigen Reisen abgesehen. Fatale Auswirkungen hatte die 1673 unternommene Reise nach London: An der Royal Society stellte im J. Pell die Aufgabe, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ zu berechnen, woran Leibniz scheiterte. Diese Reihe sollte noch viel Kopfzerbrechen bereiten (vor allem den Brüdern Bernoulli, die sich vergeblich daran versuchten). Die Lösung gelang erst Euler im Jahre 1734. Heute kennen wir zahlreiche Methoden zur Berechnung dieser

Reihe, aber keine davon ist ganz einfach.

Als die von Leibniz in London präsentierte mechanische Rechenmaschine ebenfalls kläglich versagte (die Konzeption war wohl gut, aber die Ausführung mangelhaft), war der Eindruck, den er hinterließ reichlich schlecht. Die führenden Mitglieder der Royal Society - Newton, Pell, Hooke, Collins - hielten ihn für einen in Mathematik dilettierenden Anfänger. Sie hatten recht für den Leibniz von 1673, aber unrecht für den Leibniz ab 1675 . Leider haben sie ihr Urteil über Leibniz nie revidiert.

Leibniz entwickelte seinen Infinitesimalkalkül um 1675; die Manuskripte, die er zwischen 25. Oktober und 11. November 1675 schrieb und in denen er seine wesentlichen Ideen ausführt, sind heute noch im Leibnizschen Archiv in Hannover zu sehen. Darin führt er die Schreibweise $\int$ und d ein, entwickelt ihre inverse Beziehung und die elementaren Rechenregeln der Infinitesimalrechnung.



Leibniz stellt sich eine Funktion $y(x)$ gewissermaßen als eine (mit x indizierte) Folge vor, wobei die aufeinanderfolgenden Glieder unendlich nahe beieinander liegen. Das Differential dy ist die unendlich kleine Differenz von 2 aufeinanderfolgenden Ordinaten y, während dx der unendlich kleine Abstand von zwei aufeinanderfolgenden Werten von x ist. Eine Summe (das Zeichen $\int$ steht für "Summe"; vor 1675 hatte Leibniz omn. für "omnes lineae" geschrieben, worin die Cavalieri'sche Denkweise sich niederschlägt) wie $\int y\,dx$ ist die Summe der unendlich kleinen Rechtecke $y \times dx$, die sich Leibniz allerdings anfangs eher als Linien und nicht als Rechtecke vorstellt (in der Tradition von Cavalieri).

Leibniz hat nie eine geschlossene Abhandlung über seinen Differentialkalkül geschrieben (vergleichbar der "Theorie der Fluxionen" von Newton) und seine Publikationen darüber, die ab 1684 erschienen, sind höchst unklar ; er hält nämlich den oben beschriebenen Zugang zu den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ keineswegs konsequent durch und vermengt oft Differenzenquotienten mit Differentialquotienten.

Zwei Dinge sollten aber entscheidend werden für den Siegeszug des Leibniz'schen Infinitesimalkalküls: Im Jahre 1682 konnte in Leipzig eine wissenschaftliche Zeitschrift gegründet werden, die "Acta Eruditorum" (Berichte der Gelehrten), in der Leibniz ständig kleinere Arbeiten publizierte.
Schon 1682 veröffentlichte er darin seine berühmte Reihen-Darstellung für π.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots.$$

Er erhält die Reihendarstellung im wesentlichen durch die Taylor-Entwicklung der Funktion des Arcustangens und Einsetzen im Punkt 1. Im wesentlichen soll heißen, daß seine Argumentation aus heutiger Sicht darauf hinausläuft, obwohl Schreib- und Bezeichnungsweise völlig anders waren.

Die Idee der Taylor-Reihe war übrigens schon vor 1700 Newton, Leibniz und den Bernoullis bekannt, wenn sie es auch nie explizit formuliert haben. Newton war allerdings so verliebt in seinen "allgemeinen binomischen Lehrsatz" - obwohl der ja nur ein Spezialfall der Taylor-Reihe ist - daß er lieber diesen als die Taylor-Entwicklung verwendete.

Erst 1715 veröffentlichte dann der englische Mathematiker Brook Taylor eine Arbeit über die "Taylorentwicklung" einer Funktion, die allerdings rein formal und ohne Abschätzung des Restglieds war. Die erste Abschätzung des Restgliedes stammt von Lagrange um etwa 1760. Mac Laurin, ein bedeutender englischer Mathemtiker, der um 1750 ein Lehrbuch schrieb, in dem auch die Taylor-Reihe behandelt wird, hat absolut nichts zur Theorie der Taylor-Reihen beigetragen und das selbst auch ausdrücklich betont. Trotzdem hält sich die Bezeichnung Mac Laurin-Reihe hartnäckig in verschiedenen Mathematikbüchern.

Zurück zu Leibniz: Im Juniheft 1682 behandelte er das Brechnungsgesetz der Optik - unter Bezug auf Fermat - als Extremwertproblem (das "Fermat'sche Prinzip").

1684 schließlich veröffentlichte er seine Gedanken zur Differentialrechnung in einer sehr kurzen Arbeit (6 Seiten) mit einem langen Titel: "Nova Methodus ...", zu deutsch: "Eine neue Methode für Maxima und Minima sowie für Tangenten, die durch gebrochene und irrationale Werte nicht beeinträchtigt wird, und eine beispiellose Art der Rechnung dafür". Die Arbeit ist aber so unklar, daß die Brüder Bernoulli meinten, sie sei "eher ein Rätsel als eine Erklärung".

In dieser Arbeit - in der zum ersten Mal das Wort "Differentialrechnung gebraucht wird - führt Leibniz unter anderem die n-ten Differentiale d^n ein . Später versucht er übrigens auch Ausdrücken d^α für reelles α einen Sinn zu geben und schreibt auch manchmal statt $\int$ das Symbol d^{-1}.

Zwei Jahre nach der "Nova Methodus ...", 1686, veröffentlicht Leibniz einen Artikel "De geometria recondita ..", in dem er die Grundregeln der Integralrechnung angibt.

Der zweite glückliche Umstand, der Leibniz zu Hilfe kam, waren die Brüder Jakob (1654-1705) und Johann (1667-1748) Bernoulli, die den Leibniz'schen Infinitesimal-Kalkül begierig aufgriffen, die unklaren Punkte weitgehend klären konnten und auf eine Fülle von schwierigen Problemen anwendeten. Zwischen 1686 und 1691 gibt es keinen Band der monatlich erscheinenden "Acta eruditorum", in dem nicht ein Artikel von Leibniz oder den Bernoullis enthalten wäre. Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, die wir von 1600 an langsam fortschreiten sahen, explodiert nun plötzlich. Schon 1696 erscheint das erste Lehrbuch der Infinitesimalrechnung, "Analyse des infiniments petits", das vom Marquis de l'Hopital veröffentlicht wurde, und welches auch aus heutiger Sicht eine sehr ordentliche und klare Darstellung ist. Eine Probe aus dem Umgang mit unendlich kleinen Größen dieses Buches:

Postulat I

Definition: "Zwei Größen, deren Unterschied unendlich klein ist, können ohne Unterschied ("indifferemment") füreinander verwendet werden; oder (was dasselbe ist) eine Größe, die um eine unendlich kleine Größe vergrößert oder verkleinert wird, kann als gleichgeblieben betrachtet werden."

De l'Hospital leitet beispielsweise aus diesem Postulat die Produktregel auf folgende Weise ab:

$$\begin{aligned} d(xy) &= (x+dx)(y+dy) - xy \\ &= xdy + ydx + dxdy \\ &= xdy + ydx, \end{aligned}$$

denn, so argumentiert er, "dxdy ist unendlich klein, verglichen mit dx oder dy".

Das Buch ist nicht nur von großer Bedeutung (es leitet die Tradition der großen Analysis-Lehrbücher ein), es hat auch eine interessante Geschichte: Johann Bernoulli, der während seines Medizinstudiums in Basel unter Anleitung seines um 13 Jahre älteren Bruders Jakob sich rasch in die Mathematik - insbesondere in die Leibniz'sche Infinitesimalrechnung - eingearbeitet hatte, unternahm 1691 (24-jährig) eine Reise nach Paris; dort wurde er Privatlehrer des begüterten Aristokraten Marquis de l'Hospital, den er in die neue Rechenmethode einführte.

Zweifellos war de l'Hospital schon zu Beginn seiner Bekanntschaft mit Johann Bernoulli ein geschickter und einfallsreicher Autodidakt auf mathematischem Gebiet. Die beiden schlossen schließlich ein interessantes Abkommen: Der Marquis zahlte an Bernoulli ein fürstliches monatliches Salär, wofür dieser seine neuen mathematischen Forschungsergebnisse ausschließlich dem Marquis mitteilen würde. Das Buch von de l'Hospital ist auch nichts anderes als eine überarbeitete Fassung des Unterrichts von Bernoulli an de l'Hospital. Bernoulli erhob nach de l'Hospital's Tod auch Prioritätsansprüche auf das Buch; der Streit war lange ungeklärt und erst im 20. Jh. wurde Bernoulli's Original-Manuskript aus den Jahren 1691-92 gefunden und schließlich 1924 veröffentlicht. Die berühmte "Regel von de l'Hospital" stammt übrigens von Johann Bernoulli und ist in dem erwähnten Manuskript enthalten.

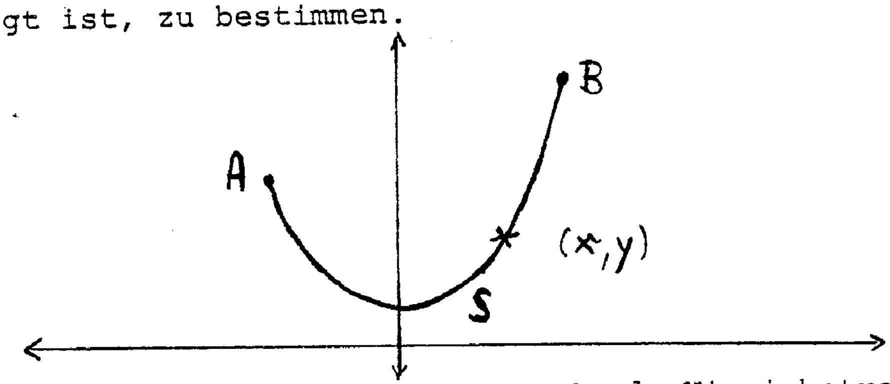
Mit dem ausgehenden 17. Jh. sehen wir, daß die Infinitesimalrechnung entwickelt ist und sich im stürmischen Fortschreiten befindet. Die mathematische Entwicklung des 18. Jh. bis etwa 1780 wird darauf hinzielen, eine ungeheure Fülle von Anwendungen für die neue Rechenmethode zu finden.

Wir haben uns in unserer bisherigen Betrachtung darauf konzentriert, wie die fundamentalen Konzepte und Methoden der Infinitesimalrechnung entwickelt wurden. Diese Betrachtungsweise verfälscht aber etwas den historischen Prozeß: Das Ziel der Mathematiker war nämlich keineswegs, diese Konzepte und Methoden zu entwickeln, sondern sie wollten ganz konkrete, schwierige Probleme lösen. (Dieser Satz gilt allerdings für Leibniz nicht ganz, der hier einen Sonderfall darstellt). Newton etwa wollte seine astronomischen Probleme lösen und bei dieser Gelegenheit hat er als Hilfsmittel die Fluxions-Rechnung entwickelt.

Im folgenden möchte ich zwei berühmte Probleme behandeln, die beide zu "Testfällen" für die neue Rechenmethode wurden.

Die Kettenlinie

Das Problem besteht darin die Form einer vollkommen flexiblen und homogenen Kette (oder Schnur) die an 2 Nägeln befestigt ist, zu bestimmen.



Dieses Problem wurde schon von L. da Vinci betrachtet und später von Galilei untersucht, der glaubte, die Lösung sei eine Parabel. 1642 zeigte der junge Christian Huygens, daß diese Lösung falsch ist, konnte aber die korrekte Lösung nicht bestimmen.

Im Jahre 1690 griff Jakob Bernoulli die Frage wieder auf und stellte es als Problem in den "Acta eruditorum". In den "Acta" von Juni 1691 gaben Leibniz, Huygens und Johann Bernoulli unabhängige Lösungen. Die Lösung von Huygens war noch im alten, geometrischen Stil der Infinitesimalrechnung gehalten und es bedurfte des ganzen Genies eines Huygens, um mit dieser schwerfälligen Methode zum Ziel zu kommen.

Johann Bernoulli dagegen verwendete den neuen Leibniz - schen Kalkül. Seine Lösungsmethode findet man noch heute in den Analysis-Büchern. Aus einfachen physikalischen Überlegungen leitet er die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s}{c}$$

ab, wobei s die Bogenlänge und c eine Konstante ist. Wir wissen, daß die Lösung $y = c.\cosh(x/c)$ beträgt, aber um 1691 war der cosh natürlich nocht nicht bekannt. Die Frage drängt sich auf, wie denn dann Bernoulli's Lösung aussehen konnte. Nun, Bernoulli drückte den cosinus hyperbolicus ($\cosh(x) = (e^{x} + e^{-x})/2$), bzw. dessen Umkehrfunktion, in der Form des unbestimmten Integrals der Hyperbel (also des Logarithmus) aus und er zeigte auch noch, daß man den cosh auch auf das unbestimmte Integral der Bogenlänge der Parabel zurückführen konnte. Wenn ein Problem auf so eine "unmögliche" Quadratur zurückgeführt war, galt es zu dieser Zeit als zufriedenstellend gelöst.

Johann Bernoulli war ungeheuer stolz auf seine Lösung und auf die Tatsache, daß sein Bruder Jakob sie nicht geschafft hatte. In einem Brief an Pierre de Montmort (1678-1719) brüstet er sich: "Die Versuche meines Bruders waren erfolglos; ich dagegen war glücklicher und geschickt genug (ich sage das, ohne mich zu brüsten, aber warum sollte ich die Wahrheit verschweigen), das Problem vollständig zu lösen und auf die Rektifizierung der Parabel zurückzuführen. Es ist wahr, daß mich die Lösung den Schlaf einer ganzen Nacht gekostet hat. Aber am nächsten Tag, erfüllt mit Freude, lief ich zu meinem Bruder, der sich noch immer ohne Erfolg an diesem gordischen Knoten abmühte und immer wie Galilei glaubte, die Lösung wäre eine Parabel. Halt! Halt! rief ich, quäle dich nicht und versuche nicht zu beweisen, daß die Parabel die Lösung ist, denn das ist vollkommen falsch! Die Parabel wird wohl verwendet in der Konstruktion der Kettenlinie, aber die beiden Kurven sind vollkommen verschieden: die eine ist algebraisch, die andere transzendent." Im weiteren Verlauf dieses Briefes geht er auf die Behauptungen ein, sein Bruder Jakob hätte das Problem vor ihm gelöst: "Ich frage sie, glauben Sie wirklich, daß mein Bruder, wenn er das Problem gelöst hätte, so höflich und zuvorkommend gewesen wäre, mir den Ruhm zu überlassen, auf der Bühne der Geschichte als erster

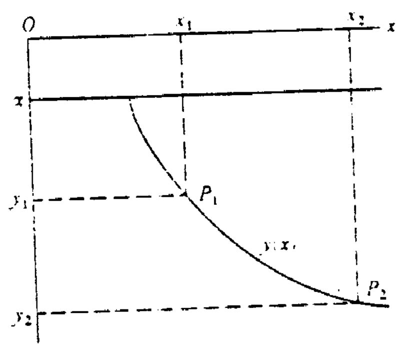
Löser des Problems aufzutreten, gemeinsam mit den Herrn Huygens und Leibniz?"

In den Jahren 1691 und 1692 lösten Johann und Jakob noch einige Verallgemeinerungen des Problems: etwa die Kettenlinie für eine Kette von variabler Dicke. Johann löste auch das umgekehrte Problem: Gegeben die Form einer hängenden Kette, bestimmte er die (variable) Dicke so, daß diese Kette in der gegebenen Form hängen würde.

Jakob veröffentlichte 1691 den Beweis dafür, daß unter allen Kurven, die eine an zwei Punkten befestigte Kette annehmen kann, die Kettenlinie diejenige mit dem niedrigsten Schwerpunkt ist. Damit weist er den Weg zur Variationsrechnung, deren Problem darin besteht, unter einer Schar von Kurven (in heutiger Terminologie: einer Teilmenge eines ∞-dimensionalen Vektorraumes) diejenige zu finden, die eine gegebene Funktion minimiert oder maximiert. Auch das folgende Problem ist von dieser Art und - ausgehend von diesen 2 Beispielen - sollte die Variationsrechnung einer der wichtigsten mathematischen Zweige im 18. Jh. werden; sie führte schließlich zur Entdeckung des Energieerhaltungssatzes.

<u>Das Brachystochronen-Problem (brachystos = die schnellste, chronos = Zeit):</u>

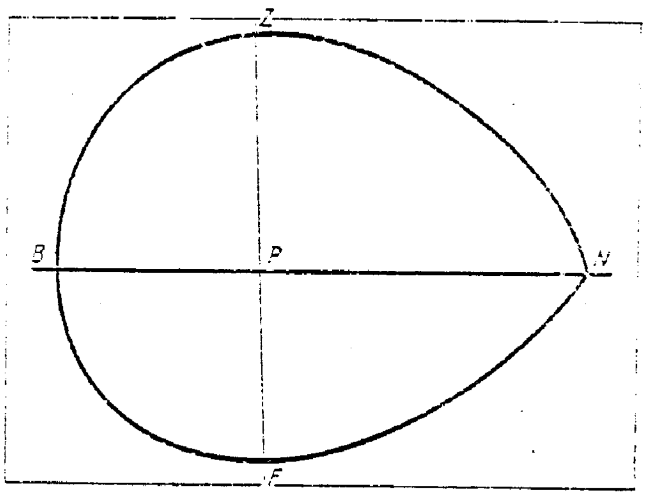
Dieses Problem wurde von Johann Bernoulli 1696 in den "Acta eruditorum" gestellt: Gegeben seien zwei Punkte p_1, p_2; derjenige Weg $y(x)$ ist zu finden, auf dem eine rollende Kugel mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit v_1 am schnellsten von p_1 nach p_2 gelangt.



Dieses Mal waren zahlreiche Leute erfolgreich und erzielten - unabhängig voneinander - die Lösung (die Zykloide): Newton, Leibniz, l'Hospital, Johann und Jakob Bernoulli. Alle Lösungen wurden im Maiheft 1697 der "Acta Eruditorum" veröffentlicht. Die Methoden der Brüder Bernoulli sind am interessantesten: Johann führt das Problem auf die Brechung eines Lichtstrahles der durch ein Medium mit variabler Dichte ($n(x,y) = c/\sqrt{y-a}$) dringt, zurück. Jakobs Lösung war länger und mühseliger, er findet dabei aber (im wesentlichen) die Grundidee der Variationsrechnung. Damit $y(x)$ die Lösung ist, auf der die zu optimierende Funktion F ihr Extremum annimmt, muß für jede Kurve $z(x)$, $x \in [x_1, x_2]$, mit $z(x_1) = z(x_2) = 0$ gelten

$$\frac{\partial}{\partial t} F(y + t.z)\Big|_{t=0} = 0.$$

(Die Funktionen z heißen "die Variationen", eine später von Euler eingeführte Bezeichnung). Jakob erkannte, daß sich dieses Prinzip auf eine große Klasse von Aufgabenstellungen anwenden läßt, insbesondere auf die sogenannten isoperimetrischen (Isos = gleich, Perimeter = Umfang) Probleme: Bei gegebenen Umfang diejenige Kurve zu finden, welche "irgendeine Wirkung am besten hervorruft".



Isoperimetrisches Problem

Jakob hatte seine Abhandlung "Lösung der Aufgaben meines Bruders, dem ich zugleich dafür andere vorlege" genannt. Er forderte von Johann die Lösung des verallgemeinerten isoperimetrischen Problems: "Besonders aber möge er, wenn er Vergeltung üben will, folgendes allgemeine Problem zu lösen versuchen. Unter allen isoperimetrischen Figuren über der gemeinsamen Basis BN soll die Kurve BFN bestimmt werden, welche zwar nicht selbst den größten Flächeninhalt hat, aber bewirkt, daß es eine andere Kurve BZN tut, deren Ordinate PZ irgend einer Potenz oder Wurzel der Strecke PF oder des Bogens BF proportional ist.. Und da es unbillig ist, daß jemand für eine Arbeit nicht entschädigt wird, die er zugunsten eines anderen mit Aufwand seiner eigenen Zeit und zum Schaden seiner eigenen Angelegenheiten unternimmt, so will ein Mann, für den ich bürge, meinem Bruder, wenn er die Aufgabe lösen sollte, außer dem verdienten Lobe ein Honorar von fünfzig Dukaten unter der Bedingung zusichern, daß er binnen drei Monaten nach dieser Veröffentlichung verspricht, es zu versuchen, und bis Ende des Jahres die Lösung mittels Quadraturen, was möglich ist, vorlegt."
Johann ließ sich provozieren. Drei Tage nach Erhalt des Problems teilte er Leibniz mit, daß er zur Lösung nur wenige Minuten benötigt habe. Doch die Lösung war falsch. Jakob fragte mehrfach bei Johann an, ob sich dieser seiner Lösung sicher sei. Johann bejahte stets. Doch dann unterzog Jakob die Lösung seines Bruders einer vernichtenden Kritik, wies die Fehlerhaftigkeit nach und fügte hinzu, er habe auch niemals angenommen, daß Johann imstande sein würde, diese schwierige Aufgabe zu lösen. Im Sommer 1700 teilte Jakob seine eigene, richtige und vollständige Lösung mit.

Die Grundlagen-Probleme

Wir sehen also, daß der Infinitesimalkalkül mit dem ausgehendem 17. Jh. seinen Siegeszug angetreten hat. Die verwendeten Methoden stimmen im wesentlichen mit den heutigen überein. Binnen kürzestem tauchten auch eine Vielzahl von (gewöhnlichen) Differentialgleichungen auf, auf die wir hier leider nicht näher eingehen können. Nur soviel: Die vielen elementaren Tricks, die noch heute in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen angewendet werden, waren alle bis etwa 1730 bekannt. Es herrschte aber größte Unklarheit über die Grundlagen der Infinitesimalrechnung. Inbesondere waren folgende Fragen unbeantwortet.

Frage 1: "Existieren" unendlich kleine Größen?

Frage 2: Ist die Verwendung von unendlich kleinen Größen in der Infinitesimalrechnung verläßlich (d.h. führt sie nicht zwangsläufig auf Widersprüche)?

Aus heutiger Sicht ist die erste Frage keine mathematische Frage. Denn für uns ist es heute selbstverständlich, daß wir in der Mathematik die Objekte, mit denen wir arbeiten, selbst definieren; daher scheint uns die metaphysische Frage, ob unendlich kleine Größen "wirklich existieren", eigentlich unsinnig.

Der heute übliche Aufbau der Analysis verwendet keine unendlichkleinen Größen, sondern beruht auf der im Laufe des 19. Jh. vor allem von Cauchy und Weierstraß entwickelten "Epsilontik". Sie führt allerdings zu erstaunlich großen pädagogischen Schwierigkeiten. Es geht aber auch anders: E. Robinson entwickelte etwa 1960 ein sogenanntes "Non-Standard-Modell" der reellen Zahlen, bei dem die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ sei definiert wie gewöhnlich) eingebettet werden in einen größeren Körper $\mathbb{R}^*$, in dem auch unendlich kleine und unendlich große Elemente enthalten sind. Mit diesem erweiterten Körper kann man - auf moderne, das heißt axiomatisch fundierte Weise - ganz in der Art des 17. und 18. Jh. rechnen; zum Beispiel kann man den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ tatsächlich als Quotienten von zwei unendlich kleinen Größen interpretieren. Man kann die gesamte Analysis auf diesem "Non-Standard-Modell" aufbauen (siehe etwa J. Keisler: "Elementary Calculus and Foundations of Infinitesimal Calculus").

Allerdings muß ich sagen, daß dieser Zugang zur Analysis - meiner persönlichen Meinung nach - keine wesentlichen Vorteile bietet. Die Grundlagen-Probleme des 17. und 18. Jh. sind heute - so oder so - gelöst und bieten keine Schwierigkeiten mehr.

Was nun die zweite Frage betrifft: Es tauchten natürlich immer wieder Widersprüche auf. Jeder, der in der Schule die

Rechenregel $1/0 = \infty$ oder vielleicht gar $0/0 = 1$ gelernt hat (ich hoffe, das wird heute nicht mehr gelehrt!), weiß, daß man ganz schnell auf Paradoxa und Widersprüche stößt.

Man soll diese Schwierigkeiten aber nicht überbewerten. Für die konkreten, physikalisch motivierten Probleme war es immer klar, daß die mit dem Infinitesimalkalkül erhaltene Lösung korrekt ist. Newton schreibt einmal, daß er seine Methode der Fluxionsrechnung leichter kurz erklären als genau beweisen könne.

Tatsächlich erkennt - meiner Meinung nach - jeder intelligente und "gutwillige" Mensch die Korrektheit von Newton's Schlüssen (in bezug auf die Probleme, auf die er sie anwendet!). Aber es gab auch "nicht gutwillige" Menschen, die nicht diesen pragmatischen Standpunkt einnahmen, sondern - aus philosophischer Sichtweise - die Verläßlichkeit und Korrektheit des Infinitesimalkalküls in Frage stellten.

Eine berühmte - und durchaus scharfsinnige - Kritik wurde von Bischof Berkeley (1685-1753) im Jahr 1734 verfaßt. Der lange Titel lautet: "Der Analytiker; oder ein Diskurs gerichtet an einen untreuen Mathemtiker. Worin untersucht wird, ob der Gegenstand, die Prinzipien und die Auswirkungen der modernen Analysis genauer gefaßt oder logischer abgeleitet werden als religiöse Mysterien oder Glaubenssätze. Untertitel: Erst sollst Du den Balken aus dem eigenen Auge entfernen; und dann sollst Du klar genug sehen, um den Splitter aus dem Auge Deines Nächsten zu entfernen". Mit dem "untreuen Mathematiker" war der Astronom Edmond Halley (1659-1742), Freund und Bewunderer von I. Newton, gemeint.

Berkeley kritisierte in dieser polemischen Auseinandersetzung, die logische Inkonsistenz der Mathematik ("In jeder anderen Wissenschaft werden die Folgerungen aus den Grundlagen abgeleitet, und nicht die Grundlagen aus den Folgerungen"). Er hatte auch - in gewissem Sinn - recht und setzte mit seiner Kritik tatsächlich am wunden Punkt an : Er kritisierte bei Newton die Methode, die "kleinen Zuwächse" zuerst endlich anzunehmen (um durchkürzen zu können), schließlich aber als unendlich klein anzunehmen, (um sie wieder loszuwerden). Zitieren wir eine berühmte Stelle:"Was sind diese Fluxionen? Die

Geschwindigkeiten von verschwindenden Zuwächsen? Und was sind diese verschwindenden Zuwächse? Sie sind weder endliche Größen, noch unendlich kleine Größen noch irgendetwas. Sollten wir sie nicht die Geister von entschwundenen Größen nennen?"

Wie erklärte sich Berkeley aber den offensichtlichen Erfolg des Infinitesimalkalküls? Er behauptetete, die richtigen Resultate kämen durch "Kompensation von Fehlern" zustande. Zum Beispiel: Bei der Bestimmung der Tangente nimmt man zuerst an, daß das "charakteristische Dreieck" (= das von Δy und Δx aufgespannte) ähnlich dem von Ordinate, Subtangente und Tangente gebildeten sei, wobei man einen Fehler begeht, da diese Dreiecke nur ungefähr ähnlich sind. Dann wendet man die Regeln der Differentialrechnung an, um dy/dx zu bekommen, wobei man wieder einen Fehler macht, da hiebei die "verschwindenden" Terme außer Acht gelassen werden. Diese beiden Fehler heben sich auf und die Mathematiker erhalten "wenn auch keine Wissenschaft, so doch eine Wahrheit, denn man kann es nicht Wissenschaft nennen, wenn man blindlings vorgeht und eine Wahrheit erhält, ohne zu wissen wie und mit welchen Mitteln".

So weit, so gut. Schließlich verwendet Bischof Berkeley aber seine Argumentation dazu, um zu fragen: "Kann denn irgendein Vertrauen in die Resultate der Himmelsmechanik gesetzt werden, die auf die ordnende Hand Gottes gänzlich verzichtet, solange ihre Grundlage in jener Mathematik besteht, die derartige innere Fehler aufweist?" Es bleibe dem Leser überlassen, wie er diese Frage beantwortet.

Wie oben erwähnt, waren die Probleme der Grundlagen der Infinitesimalrechnung nicht allzu schwerwiegend, solange die mathematischen Ergebnisse sich auf physikalisch verifizierbare Tatsachen bezogen.

Wir wollen aber jetzt zwei typische Beispiele untersuchen, die - gewissermaßen abgehoben von der physikalischen Realität - große Probleme bereiteten und zeigten, wie groß die Konfusion war: Das Problem des Logarithmus von negativen Zahlen und die Frage der Fourier-Entwicklung von Funktionen.

Der "Logarithmen-Streit"

Die komplexen Zahlen traten erstmals im 16. Jh. auf. J. Cardan (1501-1576) untersucht etwa in seiner "Ars Magna" (1545) das Problem, die Zahl 10 so in 2 Zahlen aufzuteilen, daß das Produkt 40 ergibt. Die Gleichung lautet natürlich $x(10-x) = 40$ und er erhält die Lösung $5 + \sqrt{-15}$ und $5 - \sqrt{-15}$. Er sagt dann: "Lassen wir alle geistigen Qualen beiseite und multiplizieren wir $5 + \sqrt{-15}$ mit $5 - \sqrt{-15}$; das Produkt ist $25 - (-15)$, das heißt 40. So kommt die Subtilität der Arithmetik schließlich zu einem Punkt, an dem sie ebenso raffiniert wie nutzlos wird."

Obwohl die komplexen Zahlen nicht wirklich akzeptiert wurden - von Descartes stammt die Bezeichnung "imaginäre (=eingebildete) Zahlen", Newton bezeichnet sie als "unmögliche Zahlen" - lernten die Mathematiker schnell, formal mit ihnen zu rechnen. Der Mangel an Klarheit über den Begriff der komplexen Zahlen geht aus folgendem Satz von Leibniz hervor: "Der göttliche Geist fand eine feine und wunderbare Ausflucht in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der idealen Welt, diesem Amphibium zwischen Sein und Nicht-Sein, welches wir die imaginäre Wurzel nennen."

Nach diesen kurzen Bemerkungen über die komplexen Zahlen, wollen wir darauf eingehen, wie diese in der Infinitesimalrechnung Eingang fanden (und Verwirrung stifteten).

Jakob Bernoulli zeigte 1699, daß das Integral

$$\int \frac{a^2}{a^2-x^2}\, dx$$

durch die Substitution $x = a\,\frac{b^2-t^2}{b^2+t^2}$ auf das Integral

$$\int \frac{dt}{2at} ,$$

also auf den Logarithmus, zurückgeführt werden kann. Zu diesem Zeitpunkt war das Konzept des (Brigg'schen) Logarithmus als Funktion im heutigen Sinn (für positives Argument) schon ziemlich klar. Die Schreibweise $\log x$ bzw. lx war kurz davor von Leibniz eingeführt worden. Johann Bernoulli zeigte daraufhin 1702, daß

$$\frac{a^2}{a^2-x^2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

gilt, sodaß die Integration ohne Substitution direkt ausgeführt werden kann. Hier taucht zum ersten Mal die Methode der Partialbruchzerlegung auf, die unabhängig von Leibniz ebenfalls 1702 gefunden wurde.

In Briefen zwischen Johann Bernoulli und Leibniz wird diese Methode angewandt zur Berechnung von

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} .$$

Da aber die Wurzeln von ax^2+bx+c komplex sein konnten, führte diese Methode auf Integrale der Form

$$\int \frac{dx}{cx+d},$$

wo zumindest d komplex sein konnte. Leibniz und Johann Bernoulli hatten trotz der Unklarheit über komplexe Zahlen aber nicht die geringsten Skrupel, die gewohnte Regel für die Integration zu benutzen und hatten damit Logarithmen von komplexen Zahlen eingeführt.

Beide verwenden diese Rechenmethode in einigen Arbeiten und Johann Bernoulli zeigt etwa, daß das unbestimmte Integral von

$$\int \frac{dx}{1+x^2} ,$$

das bekanntlich der Arcus Tangens ist, durch Logarithmen von komplexen Zahlen ausgedrückt werden kann. Hier taucht also zum ersten Mal die Vergindung zwischen trigonometrischen und logarithmischen Funktionen auf.

Diese Resultate lösten aber bald lebhafte Diskussionen über die Natur des Logarithmus von komplexen und negativen Zahlen aus. Leibniz behauptete 1712, daß der Logarithmus von negativen Zahlen nicht existieren kann ("er ist imaginär"), während Bernoulli zu beweisen versuchte, daß er reell sei (nämlich $\log(-x) = \log(x)$). Leibniz's Argument war, daß positive Logarithmen für die Zahlen größer 1 verwendet werden, während negative Logarithmen für die Zahlen zwischen 0 und 1 verwendet werden. Daher könne es keinen Logarithmus für negative Zahlen geben (sic!). Darüber hinaus fügte er noch hinzu: "Gäbe es einen Logarithmus für -1, dann wäre der Logarithmus von $\sqrt{-1}$

die Hälfte davon." Aber einen Logarithmus von $\sqrt{-1}$ könne es sicher nicht geben. Es erscheint unverständlich, wie Leibniz so argumentieren konnte, nachdem er selbst die Logarithmen von komplexen Zahlen zur Integration verwendet hatte.

Bernoulli dagegen argumentierte, daß wegen

$$\frac{d(-x)}{-x} = \frac{dx}{x}$$

die Gleichheit $\log(-x) = \log(x)$ gelten müsse. Leibniz hielt dem entgegen, daß $d(\log x) = dx/x$ nur für positive x gelte. Es konnte keine Einigung in dieser polemisch geführten Auseinandersetzung erzielt werden.

Eine zweite Runde in der Auseinandersetzung fand - nach Leibniz's Tod - etwa 20 Jahre später zwischen Leonard Euler (1707-1783) und Johann Bernoulli statt. Bernoulli beharrte auf seiner Meinung, Euler widersprach, hatte aber zu diesem Zeitpunkt selbst noch keine konsistente Lösung des Problems.

Die endgültige Lösung des Wertes von komplexen Logarithmen wurde möglich durch damit zusammenhängende Entwicklungen, die selbst von Bedeutung sind und schließlich zur Entdeckung des Zusammenhangs zwischen den trigonometrischen und den Exponentialfunktionen führten. Im Jahr 1714 publizierte Roger Cotes (1682-1716) einen Satz über komplexe Zahlen, der in heutiger Notation so niedergeschrieben werden kann:

$$i\varphi = \ln\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi).$$

Diese Gleichung ist natürlich äquivalent zur berühmten Euler'schen Formel $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\sin\varphi$; allerdings wurde diese Publikation von Cotes von niemandem ernst genommen und geriet in Vergessenheit, sodaß Euler das Resultat tatsächlich wiederfinden mußte.

In einem Brief an Johann Bernoulli - vom 18. Oktober 1740 stellt Euler fest, daß die Funktionen $y = 2\cos x$ und $y = e^{ix} + e^{-ix}$ beide Lösungen derselben Differentialgleichung sind (was er durch die Entwicklung der "Taylor-Reihe" verifizierte) und daher gleich sein müssen. Im Jahre 1743 publizierte er diese Bemerkung, und zwar in der Form

$$\cos s = \frac{e^{is} + e^{-is}}{2}$$

$$\sin s = \frac{e^{is} - e^{-is}}{2i}$$

Im Jahre 1748 entdeckte er wieder die oben angeführte Formel von Cotes (ohne dessen Publikation zu kennen).

Zu dieser Zeit entdeckte auch Abraham de Moivre (1667-1754), der als Hugenotte nach Aufhebung des Edikts von Nantes von Frankreich nach England emigriert war, im wesentlichen die nach ihm benannte Formel. In einer Publikation aus dem Jahre 1722, die sich bereits auf eine Veröffentlichung von 1707 stützt, zeigt er, daß man das Verhältnis zwischen x und t, die die Versinus von zwei Winkel sind [Def.: Versinus $(\alpha) = 1 - \cos\alpha$] , welche im Verhältnis 1 zu n stehen erhalten kann, indem man z aus den zwei Gleichungen eliminiert:

$$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^n t$$

und

$$1 - 2z + z^2 = -2z\,x.$$

In diesem Resultat ist - wenn auch sehr versteckt - die "Formel von de Moivre" enthalten: Man setze $x = 1-\cos\gamma$ und $t = 1-\cos n\gamma$; durch Elimination von z aus den beiden Gleichungen erhält man:

$$(\cos\gamma + i\sin\gamma)^n = \cos(n\gamma) + i\sin(n\gamma)$$

De Moivre hat aber das Resultat niemals in dieser Form angeschrieben; die endgültige Formulierung stammt von Euler, der die Formel für beliebige $n \in \mathbb{R}$ verallgemeinerte.

Im Jahre 1747 schließlich hatte Euler genügend Erfahrung mit den Beziehungen zwischen der Exponentialfunktion, dem Logarithmus und den trigonometrischen Funktionen, um das korrekte Resultat über den Logarithmus von komplexen Zahlen zu erhalten. In einem 1749 veröffentlichten Artikel mit dem Titel "Über die Kontroverse zwischen den Herrn Leibniz und Bernoulli über die negativen und imaginären Logarithmen" stimmt Euler dem Argument von Leibniz nicht zu, daß $d(\log x) = dx/x$ nur für positive x gilt. Er meint, daß Leibniz's Argument - falls korrekt - "die Grundlagen der Analysis erschüttert, nämlich, daß die Regeln und Operationen der Analysis anwendbar sind, unabhängig von der Natur der Objekte, auf die sie angewendet werden." Er bekräftigt, daß $d(\log x) = dx/x$ korrekt ist für positive wie für negative x, fügt aber hinzu, daß man daraus nur schließen kann, daß $\log(-x)$ und $\log(x)$ sich nur um eine Konstante unterscheiden. Diese Konstante muß $\log(-1)$ sein, da $\log(-x) = \log(-1.x) = \log(-1) + \log(x)$.

So folgert Euler, daß Bernoulli in Wirklichkeit angenommen hat, daß $\log(-1) = 0$; dieses aber müßte bewiesen werden.

Bernoulli gab noch andere Argumente, die Euler ebenfalls beantwortete. Zum Beispiel hatte Bernoulli argumentiert: Da $(-a)^2 = a^2$ ist $\log((-a)^2) = \log a^2$ und daher $2\log(-a) = 2\log(a)$, bzw. $\log(-a) = \log(a)$. Euler entgegnet, daß aus $(ia)^4 = a^4$ ebenso folgen würde, daß $\log(a) = \log(ai) = \log(a) + \log(i)$, woraus man schließen müßte, daß $\log(i)=0$. Aber, so bemerkt Euler, Bernoulli selbst hat in einem anderen Zusammenhang gezeigt, daß $\log(i) = i\pi/2$.

Nun wendet sich Euler wieder den Argumenten von Leibniz zu und entkräftet sie ebenfalls. Leibniz hatte z.B. so argumentiert:

$$\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 \pm \ldots.$$

Einsetzen für $x = -2$ ergibt

$$\log(-1) = -2 - 4/2 - 8/3 - 4 - \ldots.$$

woraus folgt, daß $\log(-1)$ nicht null sein kann. (Leibniz hat genau gesagt, daß $\log(-1)$ nicht "existieren" kann).
Euler kontert nun:

$$1/(1+x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \pm \ldots$$

Einsetzen für $x = -3$ ergibt:

$$-\frac{1}{2} = 1 + 3 + 9 + 27 + \ldots$$

Für $x = 1$ erhälte man

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

Addition ergibt

$$0 = 2 + 2 + 10 + 28 + \ldots$$

Daher, so schließt Euler, beweist das Argument von Leibniz überhaupt nichts.

Nachdem Euler auf diese Art die Behauptungen von Leibniz und Bernoulli entkräftet hat, gibt er seine (aus heutiger Sicht korrekte) Lösung, wobei seine Schlußweise vom heute üblichen Stil stark abweicht, aber den Kern der Sache trifft. Er schreibt:

$$x = e^y = \left(1 + \frac{y}{\infty}\right)^{\infty},$$

wobei ∞ für eine unendliche Größe steht. (Übrigens verwendete Euler für unser heutiges i die Schreibweise $\sqrt{-1}$, während er für ∞ den Buchstaben i schrieb - für infinitus; erst 1777 führt er die Bezeichnung $i = \sqrt{-1}$ ein).
Daher gilt

$$x^{1/\infty} = 1 + \frac{y}{\infty}$$

und daher

$$y = \infty.(x^{1/\infty} - 1)$$

Da $x^{1/\infty}$, "die Wurzel mit unendlich großem Exponenten", unendlich viele komplexe Werte hat, hat auch y unendlich viele komplexe Werte und da $y = \log(x)$, gilt das für den Logarithmus. Euler schreibt nun

$$x = a + ib = c\ (\cos \gamma + i \sin \gamma).$$

Mit $c = e^d$ erhält er

$$x = e^d(\cos \gamma + i \sin \gamma) = e^d.e^{i(\gamma+2\pi\lambda)}$$

und daher

$$\log x = d + i(\gamma+2\pi\lambda),$$

wobei $\lambda \in \mathbb{Z}$. Euler schließt daraus, daß für positive, reelle x nur ein Wert des Logarithmus reell ist und alle anderen komplex. Aber für negative, reelle x bzw. für komplexe x ist kein Wert des Logarithmus reell.

Trotz dieser glanzvollen Lösung (die die aufgetretenen Paradoxa erklärt) wurde die Arbeit von Euler nicht allgemein anerkannt. Z.B. zeigt d'Alembert (1717-1783) noch 20 Jahre später mit metaphysischen, analytischen und geometrischen Argumenten, daß $\log(-1) = 0$ gilt.

Trigonometrische Reihen

Wir haben bereits an mehreren Stellen gesehen, daß seit Newton die Manipulation von Reihen ein zentrales Gebiet der Mathematik war. Allerdings war der Begriff der Konvergenz keineswegs klar. Bei der Untersuchung von Funktionen erkannte man bald auch die Bedeutung der Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe (d.h. die Taylor-Entwicklung).

Wir wollen hier aber nur einen speziellen Aspekt der Reihen-Entwicklungen von Funktionen betrachten, nämlich die Entwicklung in trigonometrische Reihen. Diese wurden im 18. Jahrhundert schon häufig verwendet (lange vor Fourier (1768-1830) also) vor allem bei astronomischen Untersuchungen. Die Nützlichkeit in der Astronomie kommt vor allem daher, daß astronomische Phänomene weitgehend periodisch sind.

Unter einer trigonometrischen Reihe verstehen wir Reihen der Form

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

wobei a_n und b_n Konstanten sind. Wenn diese Reihe eine Funktion $f(x)$ darstellt, dann gilt - unter geeigneten Bedingungen, wie z.B. $f \in L^2(0,2\pi)$ -

$$a_n = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

Die Entwicklung dieser Formeln - die letztlich zu Beginn des 20. Jahrhunderts zu derjenigen geometrischen Denkweise führte, die wir heute Funktional-Analysis nennen - war eines der hauptsächlichen Resultate der Theorie.

Schon 1729 untersucht der damals 22-jährige Euler trigonometrische Reihen und zwar im Zusammenhang mit der Interpolation von Kurven die an diskreten Punkten vorgegeben sind. Seit der systematischen Verwendung von Tafeln (Logarithmen etc.) war dies ein wichtiges Problem. Euler stellt sich die Frage nach der "allgemeinsten" Interpolation einer Kurve $\hat{f}(x)$ deren Werte für $x \in \mathbb{Z}$ gegeben sind. Die Überlegungen von 1729 greift er 1747 für ein astronomisches Problem wieder auf und veröffentlicht die Methode schließlich 1753.

Zuerst betrachtet er das Problem, wenn die vorgegebenen Werte an den Stützstellen alle 1 sind, d.h. $f(n) = 1$, für alle $n \in Z$. Seine Argumentation ist interessant, da es die Schlußweisen dieser Zeit schön beleutet. Er setzt $f(x) = y$ und erhält aus dem Taylor'schen Lehrsatz

$$f(x+1) = y + y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y''' + \ldots + \frac{1}{n!}\, y^{(n)} + \ldots$$

Da $f(x+1) = f(x)$ (Euler nimmt also an, daß die Interpolation periodisch ist) muß y folgende Differentialgleichung von unendlicher Ordnung erfüllen:

$$y' + \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{6}y''' + \ldots + \frac{1}{n!}\, y^{(n)} + \ldots = 0$$

Nun hat Euler kurz davor (1743) seine Methode zur Lösung von Differentialgleichungen von endlicher Ordnung entwickelt, die ja noch heute angewandt wird. D.h., er betrachtete die Hilfsgleichung

$$z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \ldots = 0$$

Von dieser Gleichung, $e^z = 1$, berechnete er die Nullstellen ($z = 2\pi i\, k,\ k \in \mathbb{Z}$) auf ebenso kunstvolle wie interessante Art und Weise. Dem konjugierten Paar $z = \pm\, 2k\pi i$ von (einfachen) Nullstellen entsprechen die Lösungen

$$\alpha_k \sin 2k\pi x + A_k \cos 2k\pi x,$$

$\alpha_k, A_k \in \mathbb{R}$, während die Nullstelle $z = 0$ der konstanten Lösung entspricht. Da $f(0) = 1$ gelten muß, ist daher die "allgemeine Lösung" des Interpolationsproblems

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha_k \sin 2k\pi x + A_k (\cos 2k\pi x - 1)\}$$

wobei α_k und A_k "willkürliche" reelle Konstanten sind.

Wir haben hier also im Jahre 1729 bereits eine trigonometrische Reihe vor uns, wobei hier jedoch keinerlei Aussagen über die Berechnung der Koeffizienten oder die Konvergenz der Reihe gemacht werden.

Die schwingende Saite

Wir betrachten nun das Problem der schwingenden Saite, das in mehrfacher Hinsicht interessant ist:

a) Es war die erste partielle Differentialgleichung, auf die man stieß;

b) der Funktionsbegriff wurde auf Grund dieses Problems neu überdacht und

c) bei der Lösung wurde von Daniel Bernoulli die Entwicklung in eine trigonometrische Reihe verwendet.

Schon 1727 betrachtete Johann Bernoulli den diskreten Fall: Auf einer elastischen gewichtslosen Saite seien k Massenpunkte fixiert (wie bei einer Perlenkette) und dieses System schwinge. Die Untersuchung führt auf k (gewöhnliche) Differentialgleichungen und Bernoulli löste das Problem für $k \leq 6$.

Wie so oft in der Mathematik wird aber vieles leichter und einfacher, wenn man "zum limes" übergeht, d.h. anstatt einer diskreten Verteilung von Massenpunkten zu einer kontinuierlichen Verteilung der Masse entlang der Saite übergeht. Das System von k gewöhnlichen Differentialgleichung geht dabei über in die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$y(t,x)$ sei die Position der Saite zum Zeitpunkt t an der Stelle x wobei x aus dem Intervall $[0,\ell]$ sei; Anschaulich gesprochen drückt die Gleichung folgenden plausiblen Sachverhalt aus: die Beschleunigung $\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2}$, die die Saite im Punkt x in Richtung zur Ruhelage erfährt, also die Kraft die im Punkt x auf die Saite wirkt, ist proportional der zweiten Abteilung der Funktion der Saite (zum Zeitpunkt t) an der Stelle x, d.h. im wesentlichen der Krümmung der Saite in diesem Punkt x. Den Faktor a^2 nennt man die "Materialkonstante" der Saite.

Diese Gleichung erhielt Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) im Jahre 1747, indem er bei den von Johann Bernoulli betrachteten Differentialgleichungen "zum limes überging".

Nehmen wir nun an, die Saite ist an den Endpunkten fixiert und zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ in einer gewissen vorgegebenen Gestalt $f(x)$ und wird dann freigelassen, so muß die Funktion $y(t,x)$ noch folgende Bedingungen erfüllen:

$$y(t,0) = y(t,\ell) = 0 \qquad \forall t \in [0,\infty[$$

$$(2) \qquad y(0,x) = f(x) \qquad \forall x \in [0,\ell]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,x)\big|_{t=0} = 0.$$

A) D'Alembert:

Dieses Problem löste d'Alembert 1746 auf so schöne Weise, daß man seine Lösung im wesentlichen noch in den heutigen Mathematikbüchern findet.

Seien φ und ψ Funktionen auf $\mathbb{R}$, dann zeigt d'Alembert, daß mit den Ansatz

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\varphi(at+x) + \frac{1}{2}\psi(at-x) \qquad (3)$$

eine Funktion definiert ist, die (1) erfüllt (das folgt einfach durch Einsetzen und Ausrechnen). Der Leser sollte sich veranschaulichen, daß die Funktion $(t,x) \to \varphi(at+x)$ eine "von rechts nach links fließende Welle" und die Funktion $(t,x) \to \psi(at-x)$ eine "von links nach rechts fließende Welle" beschreibt.

D'Alembert zeigt nun, daß jede Lösung von (1) in der Gestalt (3) dargestellt werden kann: Er muß die Funktionen φ und ψ in Abbhängigkeit von den Randbedingungen (2) noch bestimmen. Die Bedingungen $y(t,0) = 0$ impliziert

$$\frac{1}{2}\varphi(at) + \frac{1}{2}\psi(at) = 0. \qquad (4)$$

Da für jedes (x,t), $ax + t = at'$ für einen geeigneten Wert t' gilt, folgt aus (4) sogar, daß für jedes (x,t)

$$\varphi(x+at) = -\psi(x-at) \qquad (5)$$ gilt.

Die Bedingungen $y(t,\ell) = 0$ impliziert wegen (3) und (5)

$$\frac{1}{2}\varphi(at+\ell) = \frac{1}{2}\varphi(at-\ell)$$

Mit anderen Worten ist die Funktion φ periodisch mit der Periode 2ℓ und die Funktion ψ ist nichts anderes als $-\varphi$.

Nun verwenden wir die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial t} y(t,x)\Big|_{t=0} = 0.$$

Sie impliziert wegen $\varphi = -\psi$, daß

$$\varphi'(x) = \psi'(-x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Durch Integration erhält man

$$\varphi(x) = -\varphi(-x)$$

d.h. φ muß eine ungerade Funktion sein. Die Anfangsbedingung $y(0,x) = f(x)$ impliziert, wieder wegen $\varphi = -\psi$, daß

$$\varphi(x) = f(x) \qquad \forall x \in [0,\ell]$$

Zusammenfassend gilt

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\,\varphi(at+x) - \frac{1}{2}\varphi(at-x)$$

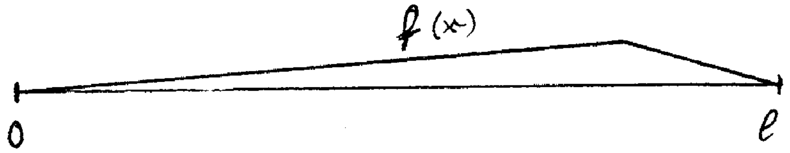
wobei φ diejenige (eindeutig bestimmte) Funktion ist, die ungerade und von Periode 2ℓ ist und die auf $[0,\ell]$ mit f übereinstimmt. Das ist wirklich eine glanzvolle Lösung des Problems!

B) Euler

Wenige Monate, nachdem Euler diese Arbeit von d'Alembert gelesen hatte, schrieb Euler selbst eine Arbeit "Über die Schwingung von Saiten" im Jahre 1748. Obwohl er in der Lösung dem Ansatz von d'Alembert folgte, gab es einen wesentlichen Unterschied. Euler hatte zu diesem Zeitpunkt eine vollständig andere Auffassung als d'Alembert, welche Kurven als Anfangswerte zugelassen werden dürfen.

Wie wir schon erwähnten galten zu diesem Zeitpunkt nur Funktionen wie Potenzen, trigonometrische, logarithmische und exponentielle Funktionen und deren (unendliche) Reihenentwicklungen als "zulässige" Funktionen. Dieser Begriff umfaßte etwa jene Klasse von Funktionen, die wir heute "analytisch" nennen; die damalige Bezeichnung dafür war (verwirrender Weise) aber "stetige" Funktionen, ein Begriff, den wir heute in einem viel breiteren Sinn verwenden.

D'Alembert hatte sich ganz in dieser Tradition bewegt und nur "stetige" Funktionen (damalige Terminologie) als Anfangswerte zugelassen. Nun treten aber gerade bei den Anfangswerten einer schwingenden Saite typischer Weise Funktionen auf, die zumindest in einem Punkt <u>nicht</u> differenzierbar sondern nur stetig (heutige Terminologie) sind. Man denke nur an das Zupfen einer Gitarre; eine typische Anfangsbedingung sieht etwa so aus.



Euler hatte schon 1734 - in anderem Zusammenhang - Funktionen betrachtet, die aus dem Rahmen der "stetigen" Funktionen fielen, aber die Behandlung der schwingenden Saite dürfte seine Hauptmotivationen für die Propagierung von "unstetigen" oder "mechanischen" Funktionen gewesen sein, wie er sie im Gegensatz zu den "stetigen" Funktionen nannte. Obwohl Euler immer nur stückweise analytische Funktionen betrachtet ("wildere" Funktionen, wie sie dann im 19. Jh. betrachtet wurden, kamen den Mathematikern damals wohl noch nicht in den Sinn), ist eine Definition aus dem Jahr 1755 dieser Funktionen bemerkenswert, die außerordentlich modern anmutet: "Wenn gewisse Größen von anderen Größen in einer Weise abhängen, daß sie sich verändern, wenn die letzteren sich verändern, so heißen die ersteren Größen <u>Funktionen</u> der letzteren Größeren." Und in einer anderen Arbeit stellt Euler ausdrücklich fest, daß eine "unstetige" Funktion in verschiedenen Intervallen nicht durch dieselbe Gleichung determiniert sein muß.

Diese Ideen müssen als revolutionäre Neuerung gesehen werden: Die vorher aufgetretenen Funktionen waren immer so beschaffen gewesen, daß es ein "Bildungsgesetz" dafür gab und damit die Funktion global festgelegt war. Man denke etwa nur an Pendelbewegungen, Planetenbahnen, Geschoßbahnen etc. - Lieblingsobjekte der damaligen Analysis - wo es genügt, daß man die Situation zu einem bestimmten Zeitpunkt kennt; die Weiterentwicklung des Systems ist dann in eindeutiger Weise bestimmt. Es schien also selbstverständlich, daß (in heutiger Terminologie) das lokale Verhalten einer Funktion das globale Verhalten determiniert.

Übrigens ist dieser Glaube an ein eindeutig bestimmtes Bildungsgesetz nach wie vor tief verwurzelt: Denken sie etwa an typische Fragen bei Intelligenz-Tests wie: "Setzen Sie die folgende Zahlenreihe fort: 1,4,9,16,.." Offensichtlich schließen die Psychologen hier jeden von höheren IQ-Rängen aus, der - wie Euler - der Ansicht ist, daß keineswegs sicher ist, daß diese Reihe nur mit 25 fortgesetzt verden kann.

Euler hielt die Untersuchung von "unstetigen" Funktionen für sehr wichtig und schrieb 1763 an d'Alembert, daß "die Betrachtung von Funktionen, die nicht von einem stetigen Gesetz abhängen, uns ein völlig neues Gebiet der Analysis erschließt."

In seiner Arbeit "Über die Schwingung von Saiten" stellt Euler fest, daß alle möglichen Bewegungen der schwingenden Saite periodisch (bezüglich der Zeit) sind, unabhängig von der Anfangskruve; das heißt, die Periode ist im allgemeinen das, was wir heute die "Fundamental-Periode" nennen. Er bemerkte aber auch, daß für gewisse Anfangskurven kürzere Perioden, nämlich die Hälfte, ein Drittel etc. auftreten können. Er gibt spezielle Lösungen wie

$$y(t,x) = \Sigma\ An \sin (n\pi x/\ell) \cos (n\pi at/\ell),$$

wenn die Anfangsgestalt durch

$$y(0,x) = \Sigma\ An \sin (n\pi x/\ell)$$

gegeben ist. Euler schweigt sich aber darüber aus, ob eine endliche oder unendliche Reihe gemeint ist. Aber für Euler ist auf jeden Fall die Idee der Superposition von Schwingungen klar.

C) Daniel Bernoulli:

Ähnliche Ideen wie Euler hatte jedoch schon früher Daniel Bernoulli (1700-1782), ein Sohn von Johann Bernoulli (mit dem er die meiste Zeit seines Lebens verfeindet war). Er war von 1725-1733 Professor an der gerade gegründeten Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; als ihn auf diesem Posten der sieben Jahre jüngere Euler ablöste, war er dann, nacheinander Professor für Medizin, Metaphysik und Naturphilosophie in Basel. Sein Hauptarbeitsgebiet war Hydrodynamik und Elastizität und er ist als ein herausragender Physiker zu bezeichnen (z.B. stammt das sogenannte "Coulombsche Gesetz" von ihm). In einer Arbeit Bernoullis aus dem Jahre 1740 findet man (in einem anderen Zusammenhang und als Randbemerkung): "Ähnlich kann eine straff gespannte Saite ihre isochronen Schwingungen auf viele Arten - theoretisch sogar auf unendlich viele Arten - ausführen,.. .Der erste und natürlichste Zustand entsteht, wenn die Saite in ihrer Oszillation einen einfachen Bogen beschreibt; dann macht sie die langsamste Oszillation und sendet den tiefsten aller möglichen Töne aus, fundamental für alle anderen. Der nächste Zustand entsteht, wenn die Saite in ihrer Oszillation zwei Bögen in entgegengesetzter Richtung beschreibt; die Oszillation ist dann doppelt so schnell und nun sendet die Saite einen um eine Oktave höheren Ton aus."

Daniel Bernoulli gibt keinerlei mathematische Begründungen, aber offensichtlich waren ihm die Zusammenhänge klar. Bernoulli stellt auch ausdrücklich fest, daß eine schwingende Saite nicht nur verschiedene Töne aussenden kann, sondern daß sie diese auch gleichzeitig aussenden kann. Als Daniel Bernoulli schließlich von den Arbeiten d'Alemberts (1746) und Eulers (1748) erfuhr, publizierte er 1753 seine Ideen über die schwingende Saite in einer eigenen Arbeit.

Nachdem er sich zuerst ausgiebig über die Abstraktheit von d'Alembert und Euler lustig gemacht hat, bekräftigt er erneut, daß viele Grundschwingungen simultan existieren können (Superposition), und behauptet schließlich, daß das alles ist, was d'Alembert und Euler gezeigt haben.

Dann kommt ein wichtiger Punkt. Er behauptet, daß jede mögliche Anfangskurve $f(x)$ darstellbar ist in der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/\ell) \quad . \qquad (*)$$

Einzige Begründung: Es gibt unendlich viele Konstanten a_n, die frei zu wählen sind, daher ist genügend Möglichkeit vorhanden, um den rechten Ausdruck einer beliebig vorgegebenen Kurve anzupassen. Daher folgert Bernoulli, daß jede Bewegung der schwingenden Saite von der Form

$$y(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x/\ell) . \cos(n\pi at/\ell)$$

ist.

D) Vergleich der 3 Standpunkte:

Unmittelbar nach Erscheinen von Bernoullis Arbeit schreibt Euler eine Entgegnung, in der er abstreitet, daß jede Funktion $f(x)$ in der Form $(*)$ darstellbar sei.

Erster Einwand: Jede Funktion $f(x)$ der Gestalt $(*)$ ist ungerade, und von Periode 2ℓ. In seiner (und d'Alembert's) Lösung.

$$y(t,x) = \frac{1}{2}\Phi(at+x) - \frac{1}{2}\Phi(at-x)$$

dagegen sei keine Einschränkung über die Funktion Φ getroffen worden. Φ sei also nicht notwendig eine ungerade Funktion von Periode 2ℓ, sondern könne eine beliebige Funktion sein. Hier macht Euler folgenden Fehler: Wie wir bei der Herleitung von d'Alembert's Lösung gesehen haben, ist Φ durch die Bedingung

$$\Phi(x) = f(x)$$

nur für $x \in [0,\ell]$ determiniert; Φ kann also nur im Intervall $[0,\ell]$ beliebig vorgegeben werden; wie wir aber schon oben festgestellt haben, erhält man die übrigen Werte von Φ, indem die Funktion ungerade und mit Periode 2ℓ auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Wir sehen also, daß dieser Einwand von Euler ins Leere geht.

Zweiter Einwand: Eine unendliche Reihe von Sinus-Funktionen sei wiederum eine "stetige" Funktion, da nur "stetige" Funktionen zu ihrer Bildung verwendet würden. Er (Euler) lasse aber auch "unstetige" Funktionen als Anfangswerte zu; daher seien in Bernoullis Lösung nicht alle möglichen Fälle enthalten. Eulers Schluß wird verständlich, wenn man sich etwa vor Augen hält, daß damals niemand die gliedweise Differentiation einer Summe der Form (*) in Frage gestellt hätte. Daher war die Folgerung selbstverständlich, daß jede Funktion der Form (*) beliebig oft differenzierbar ist; dagegen hatte Euler jedoch auch Funktionen mit Knickstellen als Anfangskurven zugelassen.

Bei diesem Einwand wird deutlich, wie die damalige Mathematik an "die Grenzen des Wachstums" stieß. Aus heutiger Sicht ist klar, daß man über diesen Einwand nur dann vernünftig argumentieren kann, wenn man einen einigermaßen präzisen Begriff über die Konvergenz von Reihen hat. Aber dafür war die Zeit noch nicht reif.

Zwischen Euler, d'Alembert und Daniel Bernoulli begann nun eine ziemlich fruchtlose und erbitterte Streiterei über das Problem der schwingenden Saite, die fast 2 Jahrzehnte lang währen sollte, und auf die wir hier nicht im Detail eingehen wollen. Aus heutiger Sicht ist es eher schwierig, diesen Streit zu verstehen, da ja alle 3 in den wesentlichen Punkten Recht hatten. Über die zentrale Frage, ob sich jede "beliebige" Funktion $f(x)$ als

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin (n\pi x/\ell)$$

schreiben läßt, wurde aber kein weiterer Fortschritt mehr erzielt. Jeder beharrte nur auf seinem Standpunkt. 1759 schließlich kam dann noch der damals junge und unbekannte Joseph Louis Lagrange (1736-1813) hinzu, der nach Euler wohl als zweitwichtigster Mathematiker des 18. Jh. zu bezeichnen ist, der ebenfalls eine Arbeit über die schwingende Saite veröffentlichte; er behauptete, daß seine Arbeit Eulers Behauptungen beweise. Sie enthielt jedoch in Wahrheit keine neuen Erkenntnisse, sondern verwirrte die Sache eher noch.

Um zu zeigen, wie persönlich die Auseinandersetzung geführt wurde, zitiere ich aus einem Brief von Euler an Lagrange aus dem Jahr 1759: "Ich bin erfreut, zu hören, daß sie meine Lösung anerkennen, ... , welche d'Alembert durch verschiedene Tricks zu bekämpfen versucht, und zwar nur deswegen, weil er selbst sie nicht erlangt hatte. Er hat gedroht, eine schwerwiegende Entgegnung zu schreiben; ich weiß nicht, ob er es wirklich tun wird. Er glaubt, er kann die Halbgebildeten mit seiner Eloquenz täuschen. Ich glaube nicht, daß er es ernst meint, außer er ist tatsächlich blind vor Eitelkeit."

Wir sehen also, daß im Zusammenhang mit dem Problem der schwingenden Saite die Frage der Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe wohl auftaucht, aber nicht geklärt werden kann. Ich möchte aber nicht den Eindruck erwecken, daß die Mathematiker nur diesen akademischen Streit führten; unabhängig von den offenen Grundsatzfragen studierten vor allem Euler und Daniel Bernoulli erfolgreich viele Blas-Instrumente (Orgelpfeifen, Flöten, Hörner, Trompeten etc.), bei denen partielle Differentialgleichungen in drei oder vier Variablen auftreten. Auch studierten sie die schwingende Saite mit variabler Dicke (an Stelle der Konstanten a in der Gleichung der schwingenden Saite tritt nun eine von x abhängige Funktion $a(x)$) und zeigten, daß hier im allgemeinen die Periode der höheren Eigenschwingungen nicht mehr Vielfache der Fundamentalperiode sind und erklärten somit mathematisch, warum schlecht gebaute Musik-Instrumente häßlich klingen. Euler schrieb eine lange Arbeit "Tentamen Novae Theoriae Musicae", von der gesagt wurde, daß sie zu mathematisch für Musiker und zu musikalisch für Mathematiker sei.

Andere Anwendungen von trigonometrischen Reihen im 18. Jahrh.

Die Frage der Entwickelbarkeit von Funktionen in trigonometrischen Reihen tauchte auch noch in anderem Zusammenhang im 18. Jh. auf. So etwa behauptet der Mathematiker und Astronom Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) in einer Arbeit aus dem Jahr 1757 über Perturbationen der Bewegung des Mondes durch die Sonne, daß jede Funktion in der Form

$$f(x) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$$

darstellbar sei und er erkannte auch die korrekten Formeln zur Berechnung der Koeffizienten

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

Auch Euler, Lagrange und d'Alembert benützten in anderem Zusammenhang trigonometrische Reihen und erhielten ebenfalls die korrekten Formeln für die Koeffizienten.

Schließlich möchte ich noch ein Beispiel einer Rechnung Eulers aus dem Jahr 1754 anführen, die zeigt, wie dünn die Trennungslinie zwischen wahren und falschen Aussagen ist, bzw. wie sehr die "Wahrheit" einer Aussage bei unpräzisen Definitionen von der richtigen Interpretation abhängen kann.

Euler beginnt mit der trigonometrischen Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n (\cos x + i \sin x)^n = \frac{1}{1-a(\cos x + i \sin x)}$$

Ausgehend von dieser Formel benützt Euler die de Moivre'sche Formel , trennt den Realteil und Imaginärteil in der oberen Formel und erhält mit ein paar elementaren Manipulationen

$$\frac{a \cos x - a^2}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx$$

und

$$\frac{a \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin nx.$$

So weit, so gut. Nun setzt er aber für $a = \pm 1$ ein und erhält zum Beispiel

$$-\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

oder

$$-\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos nx.$$

Offensichtlich ist diese Formel im Sinne der punktweisen Konvergenz falsch; jedoch möchte ich nicht verschweigen, daß die Formel im Sinne der Konvergenz von Distributionen weitgehend richtig ist (da muß allerdings auf der linken Seite noch eine "singuläre" Distribution hinzugefügt werden).

Euler differenziert nun diese Formeln noch und erhält etwa

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n \sin (nx)$$

oder

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cos (nx).$$

Im Sinne der punktweisen Konvergenz werden die Formeln dadurch natürlich nur "noch falscher". Im Sinne der Konvergenz von Distributionen sind die Formeln allerdings wieder im wesentlichen korrekt (wobei wiederum eine "singuläre" Distribution hinzugefügt werden muß).

Die Sache sieht viel besser aus, wenn man integriert statt differenziert. Euler erhielt etwa

$$\frac{x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}.n^{-1}\sin (nx)$$

und

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-2}.\cos(nx).$$

Die erste Formel ist korrekt für alle $x \in \,]-\pi,\pi[$ und die zweite Formel ist korrekt für alle $x \in [-\pi,\pi]$, wobei im letzteren Fall die Konvergenz sogar gleichmäßig auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ erfolgt.

Euler glaubte allerdings, daß diese Formeln für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten; wir sehen hier also wieder die Schwierigkeit, zu erkennen, daß man zu periodischen Fortsetzungen von Funktionen, die in bestimmten Intervallen gegeben sind, übergehen muß.

Aber ich hoffe, daß der Leser nun ein Gefühl dafür bekommen hat, warum die Mathematiker des 18. Jh. in diesem Zusammenhang so große Schwierigkeiten hatten: Sie hatten eben noch nicht genügend exakte Begriffe entwickelt um die Dinge sauber in Griff zu bekommen und erzielten (durch die formalen Rechnungsmethoden) oft Ergebnisse, die entweder schlicht falsch waren, oder nur bei geeigneter Interpretation zu retten sind.

Die Wärmeleitungsgleichung

Wir kommen nun zum Beginn des 19. Jahrhunderts und treffen hier auf Jean Fourier (1768-1830). Er studierte an der neugegründeten Ecole Polytechnique bei Lagrange und Laplace und war eine Zeit lang Assistent bei ihnen. Er war jedoch auch politisch und militärisch engagiert, nahm an Napoleons Ägypten-Feldzug (1798-1801) teil und war von 1802 bis 1815 Präfekt des

Departments Isère, nahe der italienischen Grenze (noch heute heißt das Mathematik-Institut der Universität Grenoble ihm zu Ehren "Institut Fourier").

Er beschäftigte sich, wie viele Mathematiker zu dieser Zeit, mit der Wärmeleitung. Die Verteilung der Wärme in einem dünnen (= 1-dimensionalen) homogenen Stab etwa gehorcht der "Wärmeleitungsgleichung"

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} = a.\ \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2}\ ,$$

also einer ähnlichen Gleichung wie die der schwingenden Saite; nur steht jetzt auf der linken Seite die erste anstatt der zweiten Ableitung.

Das Problem ist nun ähnlich wie bie der schwingenden Saite: Bei einer vorgegebenen Temperaturverteilung $f(x) = y(0,x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die Entwicklung der Temperaturverteilung berechnet werden, also die Funktion $y(t,x)$ für $t > 0$ bestimmt werden.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß unser Stab die Länge 2π habe, an den Enden die Temperatur konstant gehalten werde und daß die Materialkonstante a in der Wärmeleitungsgleichung gleich 1 sei.

Wenn die Anfangsbedingungen etwa $f(x) = \sin(nx)$ ist, so ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch $y(t,x) = e^{-n^2t} \sin(nx)$ gegeben (sieht man sofort durch Einsetzen in die Gleichung), und eine ähnlich einfache Lösung erhält man für $f(x) = \cos(nx)$. Wenn daher die Anfangsbedingung $f(x)$ von der Form

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right)$$

ist, kann man die Lösung - ganz ähnlich wie bei der schwingenden Saite - sehr einfach (als formale Reihe) hinschreiben.

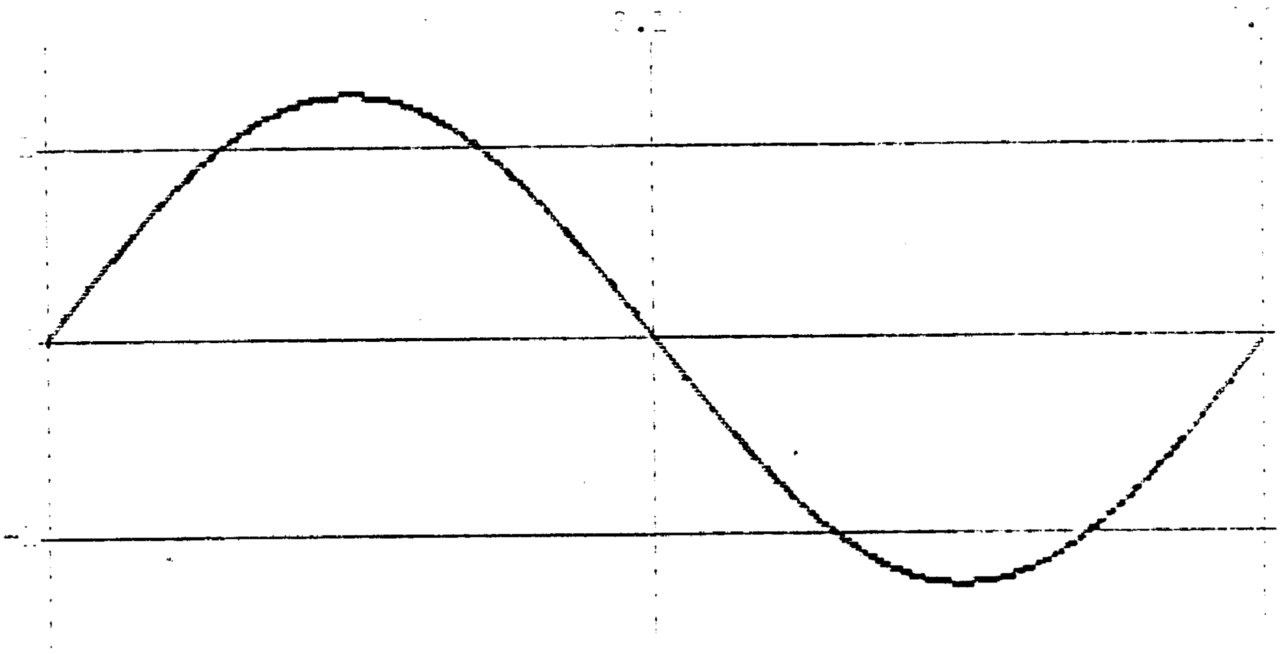
Fourier behandelte das Problem der Wärmeleitung in einer Arbeit, die er 1807 an der Pariser Akademie der Wissenschaften präsentierte; er behauptete, daß eine beliebige Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$ darstellbar sei in der Form

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

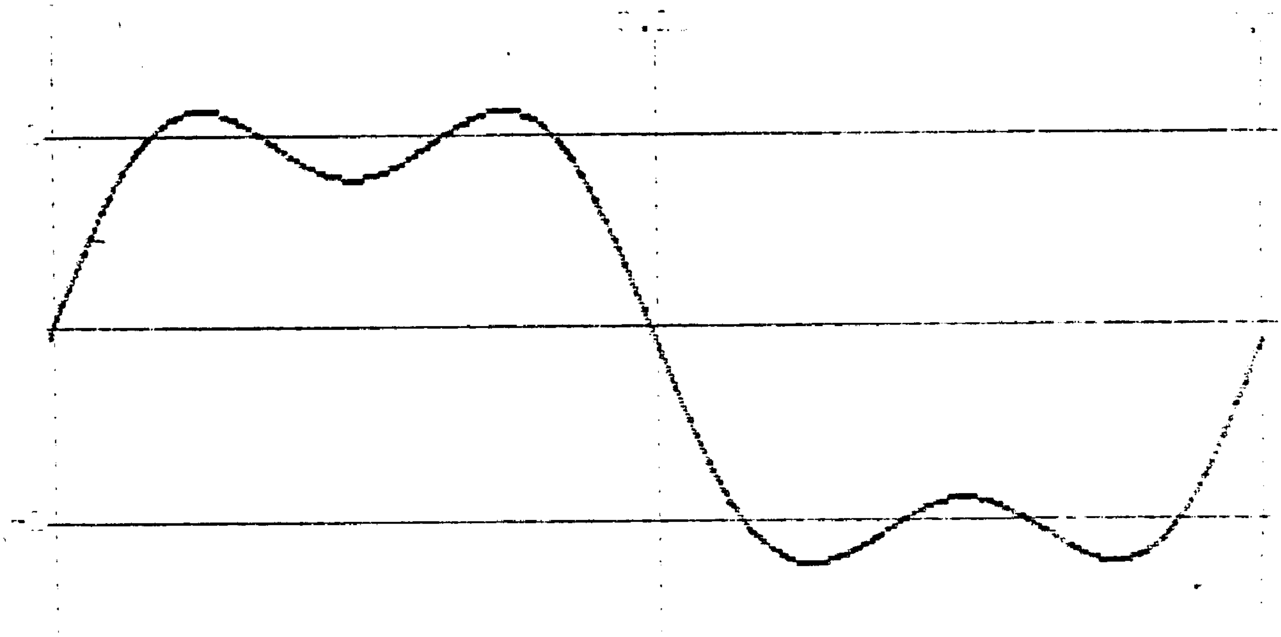
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \,]0, \pi[\\ -1 & x \in \,]\pi, 2\pi[\end{cases}$$

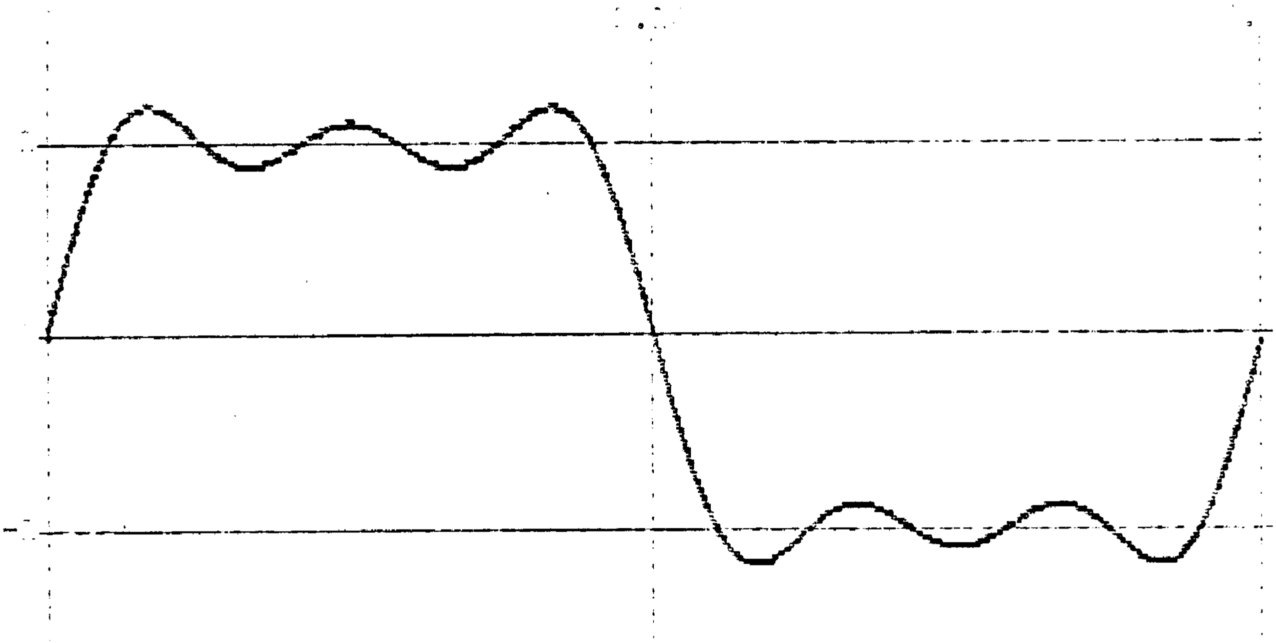
$$f_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{N} \frac{\sin kx}{k}$$

f_1

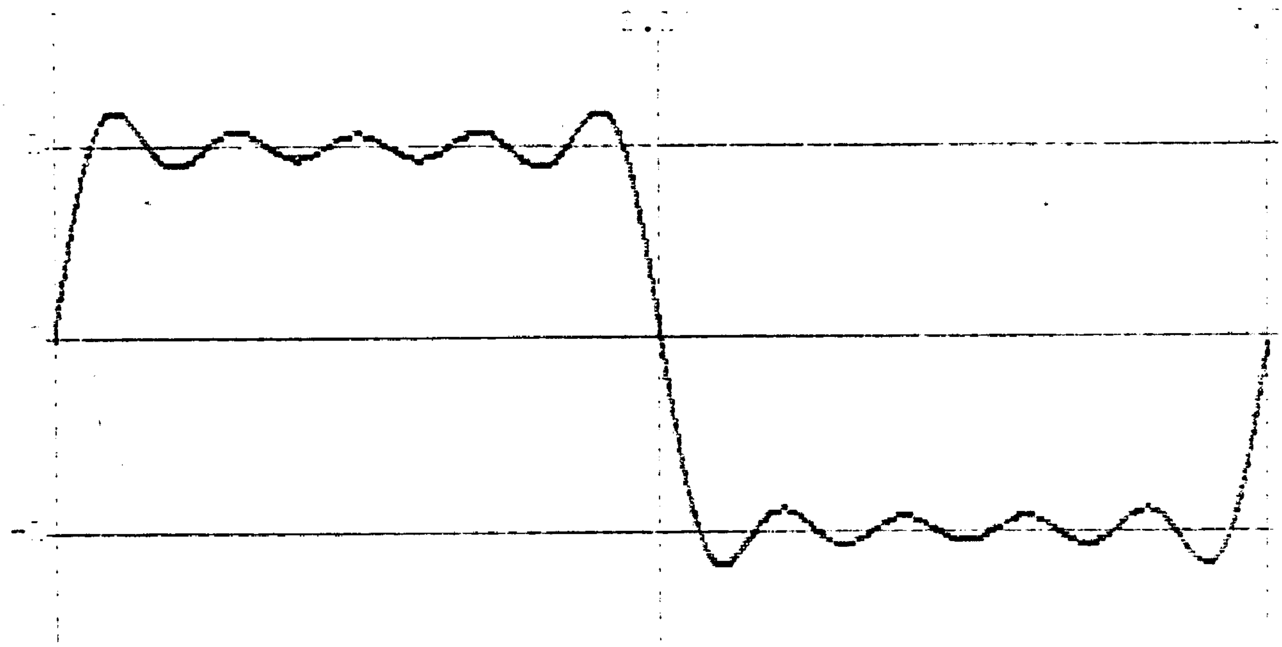


f_3



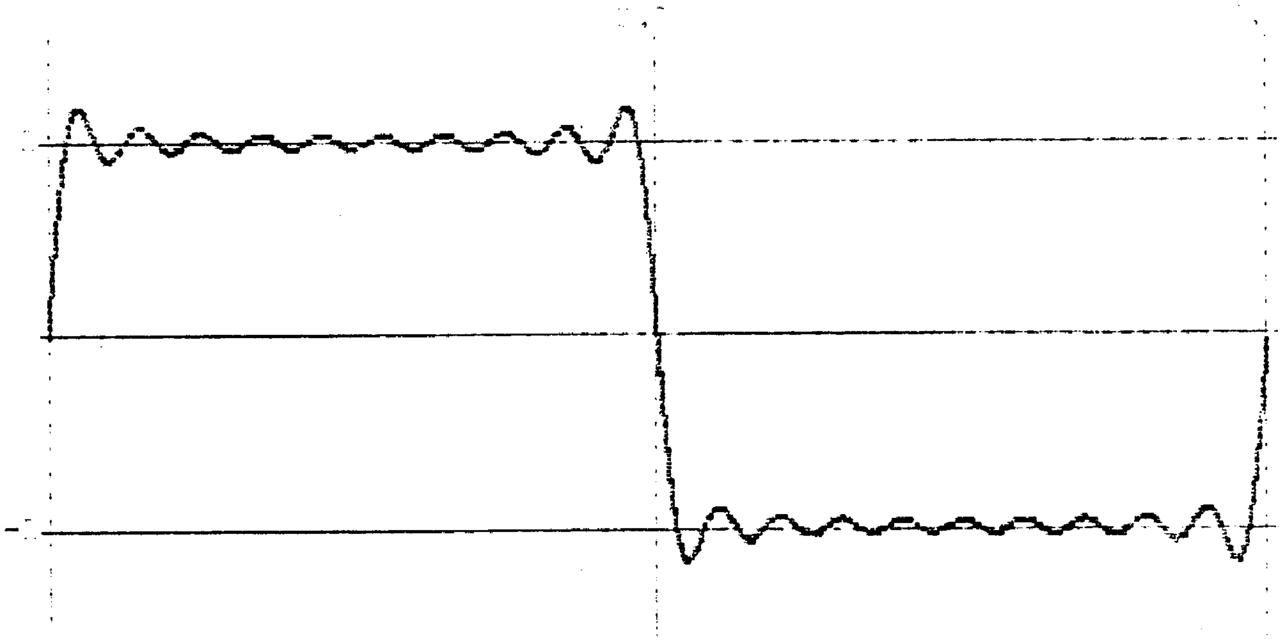


f_5

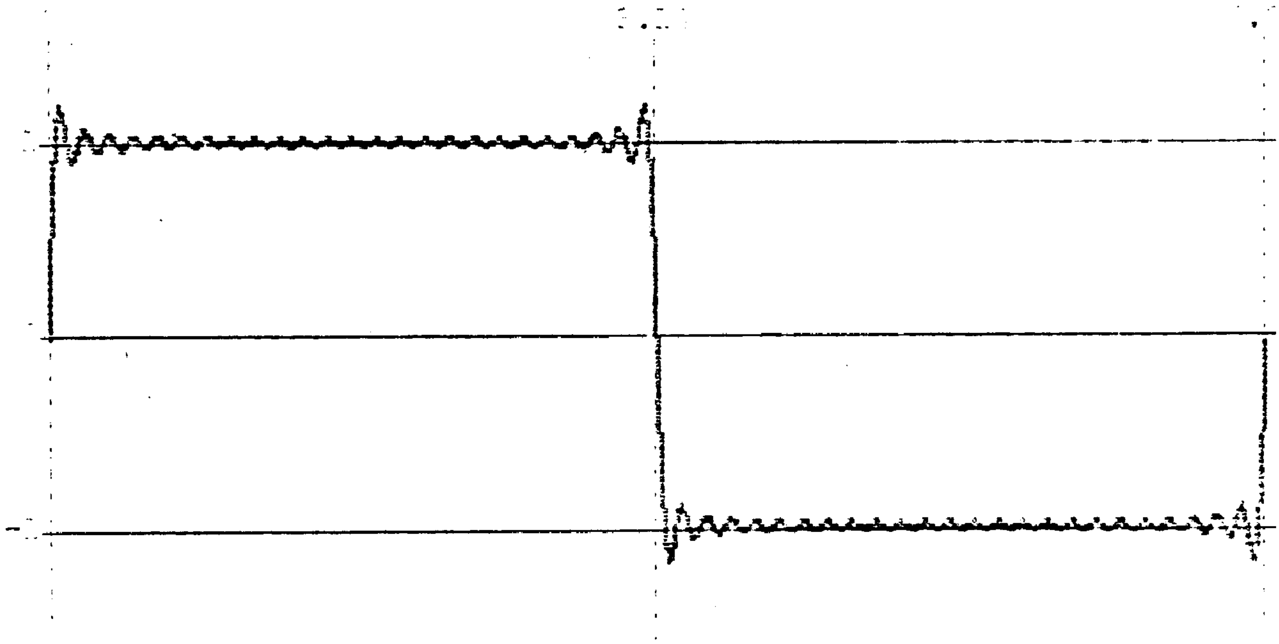


f_{10}

f_{20}



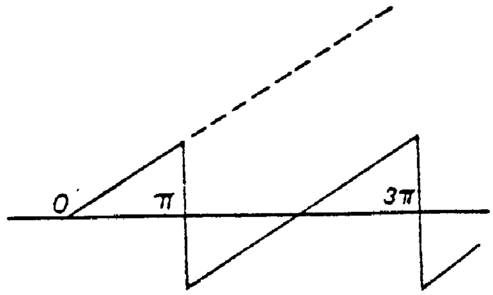
f_{50}

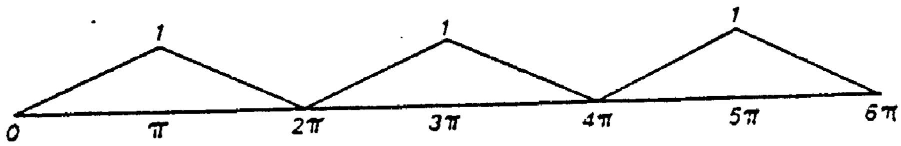


Fourier stellte also im wesentlichen die selbe Behauptung wie Daniel Bernoulli 70 Jahre früher auf. Fourier hatte aber anscheinend zu jenem Zeitpunkt (obwohl er Schüler von Langrange war!) keine Kenntnis über die Untersuchungen über trigonometrische Reihen, die im 18. Jh. angestellt worden waren. Auch hatte Fourier keinen Beweis - im heutigen Sinn - anzubieten, sondern nur einige numerische Berechnungen von speziellen Beispielen. So untersucht er etwa die Funktion f die auf $]0,\pi[$ gleich $+1$ und auf $]\pi,2\pi[$ gleich -1 ist und zeigt, daß die "Fourier-Reihe" (diese Bezeichnung war natürlich nicht von Fourier, sondern erst später eingeführt worden) in allen Punkten gegen die Funktion f konvergiert und in den Punkten 0 und π gegen 0 konvergiert. Da dieses Beispiel sehr instruktiv ist, habe ich einige Partialsummen vom Computer plotten lassen (ich bedanke mich beim Kollegen Sinwell, der das Programm dazu geschrieben hat, sehr herzlich), wo man sehr schön sieht, wie sich die Fourier-Reihe an die Funktion anschmiegt.

Was war nun das Neue an Fouriers Beitrag?

1) Fourier formulierte die volle Fourier-Reihe (mit Sinus- und Cosinus-Termen).
2) Fourier betrachtete als erster die Entwickelbarkeit einer Funktion als Fourier-Reihe aus einer uns heute selbstverständlich anmutenden Sicht: nämlich als die Frage, in welchen Punkten die Partialsummen der Fourier-Entwicklung gegen die vorgegebene Funktion konvergieren.
3) Fourier strich als erster klar heraus, daß die Fourier-Reihe eine auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion nur im betrachteten Intervall (hier $[-\pi,\pi]$) darstellt und außerhalb die periodische Fortsetzung ergibt. So betrachtete Fourier etwa die Funktion $y = x/\pi$ auf $[0,\pi]$ und entwickelte sie in eine Fourier-Reihe mit nur Sinus-Termen bzw. nur Cosinus-Termen und zeigte, wie die betreffenden Fourier-Reihen die Funktion auf $\mathbb{R}$ fortsetzen (die beiden Skizzen finden sich in Fouriers Arbeit aus dem Jahr 1807).





Im ersten Fall wird f also in eine ungerade Funktion und im zweiten Fall in eine gerade Funktion mit Periode 2π fortgesetzt. Wir sehen hier also endlich die begriffliche Schwierigkeit, an der wir oben Euler scheitern sahen, gelöst.

4) Fourier gab die Formeln für die Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$

an. Dieser Punkt war nicht wirklich neu, da analoge Formeln schon im 18. Jh. entwickelt worden waren, wie wir gesehen haben.

Reaktionen auf Fourier:

Die Arbeit von Fourier aus dem Jahr 1807 spaltete die Pariser Mathematiker in zwei Lager: Auf der einen Seite stand der (inzwischen alte) Lagrange (1736-1813), der Fouriers Behauptung, man könne eine "beliebige Funktion" über $[-\pi,\pi]$ in eine Fourier-Reihe entwickeln, im wesentlichen mit denselben Argumenten zurückwies, die er schon gegen Daniel Bernoulli vorgebracht hatte. Bemerkenswert dabei ist, daß der Hauptkritikpunkt nicht das Fehlen eines Beweises war, sondern wieder die alten Trugschlüsse, die sich auf die periodische Fortsetzung von Funktionen beziehen. Auf der Seite von Lagrange standen noch Denis Poisson (1781-1840) und Jean-Baptiste Biot (1774-1862) und später der junge Cauchy (1789-1857).

Auf der anderen Seite würdigten vor allem Laplace (1749-1827), Monge (1746-1818) und Lacroix (1765-1843) die Arbeit Fouriers durchaus positiv.

Es entstand ein heftiger Streit in der französischen Akademie, ob man die Arbeit Fouriers veröffentlichen solle oder nicht, der schließlich mit einem Kompromiß endete: Ein Preis für eine Arbeit über Wärmeleitung wurde für das Jahr 1811 ausgelobt; Fourier sollte auf diese Weise Gelegenheit geboten werden, seinen Artikel noch zu überarbeiten. Er schrieb auch eine überarbeitete Fassung mit der er 1812 tatsächlich den Preis gewann. Bemerkenswert ist, daß er etwa die oben angegebenen Betrachtungen über eine gerade bzw. ungerade Fortsetzung der Funktion $y = x/\pi$ auf dem Intervall $[0,\pi]$, in der neuen Fassung wegließ, offensichtlich um der Polemik um den Funktions-Begriff auszuweichen.

Obwohl Fourier nun den Preis gewonnen hatte, wurde dennoch auch die zweite Arbeit nicht veröffentlicht, sodaß Fourier schließlich gezwungen war, noch ein drittes Mal sein Opus umzuschreiben. (Ich glaube, daß jeder, der einmal in einer ähnlichen Situation war, ihm den Frust nachfühlen kann). Diese Fassung erschien schließlich 1822 als Buch unter dem Titel "Théorie Analytique de la Chaleur" (analytische Theorie der Wärme) und gehört zu den Klassikern der Mathematik-Literatur. Neben den Fourier-Reihen und deren physikalischen Anwendungen und neben vielen anderen Dingen wird in diesem Buch etwa auch die "Fourier-Transformation" (das kontinuierliche Analogon zu den Fourier-Reihen) behandelt, die auf eine Anregung von Laplace aus dem Jahr 1809 zurückgeht. Hier ist man nicht mehr auf periodische Funktionen beschränkt.

Das Original-Manuskript von Fourier aus dem Jahr 1807 wurde übrigens erst im 20. Jh. veröffentlicht.

Wie steht es nun mit der zentralen Behauptung Fouriers, eine "beliebige Funktion" über $[-\pi,\pi]$ kann in eine "Fourier-Reihe" entwickelt werden. Fourier versuchte zwar, einen allgemein gültigen Beweis dafür zu geben; alle seine Versuche sind aber lückenhafte Beweise, in denen unter anderem Vertauschungen von Summen und Integralen ohne ausreichende Begründung druchgeführt werden. Aus heutiger Sicht ist auch klar, daß Fourier keine Chance hatte, seine Behauptungen zu beweisen, wenn er nicht vorher den schwammigen Begriff "willkürliche Funktion" präzisiert.

Anders als siebzig Jahre zuvor, wo diese Frage zu einem fruchtlosen Gelehrtenstreit führte, wurde aber nun diese Frage in sehr konstruktiver Weise behandelt und sie zieht sich wie ein roter Faden durch die Entwicklung der Analysis im 19. Jh. und bis tief ins 20. Jh. hinein : Dirichlets erster sauberer Beweis der Konvergenz von Fourier-Reihen, Riemann's Integralbegriff, Cantors Entwicklung der Mengenlehre und schließlich die Entwicklung des Lebesgue'schen Integralbegriffs, der Funktionalanalysis und der harmonischen Analyse, um nur stichwortartig die wichtigsten Gebiete zu nennen, die weitgehend aus dem Studium der Fourier-Reihen entstanden.

Dirichlets Beweis der Konvergenz einer Fourier-Reihe

Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859), trotz des französischen Namens ein Deutscher, reiste 1822 17-jährig nach Paris, zu diesem Zeitpunkt das unbestrittene Zentrum der Mathematik, um seine mathematischen Studien zu vertiefen. Kurz zur "Geographie" der damaligen Mathematik: der größte zu diesem Zeitpunkt lebende Mathematiker (vielleicht der größte Mathematiker überhaupt), Carl Friedrich Gauß (1777-1855), wirkte in Göttingen, arbeitete aber sehr isoliert und galt als ziemlich unansprechbar. Es wird berichtet, daß es für Studenten oftmals die einzige Möglichkeit war, um mit Gauß mathematische Fragen zu besprechen, zur gleichen Zeit wie Gauß den Barbier aufzusuchen, um während der Rasur mit ihm zu reden. Abgesehen von Gauß gab es aber damals nur wenige bedeutende Mathematiker in Deutschland und Dirichlet war gut beraten, nach Paris zu gehen, wo nach dem Tod von Lagrange (1736-1813) und Monge (1746-1818) Leute wie Laplace (1781-1840), Lacroix (1765-1843), Cauchy (1789-1857), Poisson (1781-1840), Fourier (1768-1830) etc. eine lebhafte mathematische Aktivität entfalteten. In den nachfolgenden Jahrzehnten verlagerte sich das Zentrum der Mathematik zunehmend nach Deutschland, wobei hier Göttingen eine besondere Rolle spielte: Dirichlet wurde dort Nachfolger von Gauß, ihm folgte sein genialer Schüler Bernhard Riemann (1826-1866) und später wirkten Felix Klein (1849-1925) und David Hilbert (1864-1943) in Göttingen. Die hervorragende Stellung von Göttingen hielt dann bis ins 20. Jh. an, um allerdings 1933 ein sehr abruptes Ende zu finden.

Dirichlet, dessen Hauptleistungen auf dem Gebiet der Zahlentheorie liegen, studierte während seines Aufenthaltes in Paris die Arbeiten von Cauchy und Fourier und stieß dabei auf das Problem der Konvergenz von Fourier-Reihen. Fourier's Behauptung, daß eine "willkürliche Funktion in eine trigonometrische Reihe entwickelt werden kann" war ja nach wie vor Gegenstand heftiger Diskussionen. Wie schon erwähnt, hatte Fourier in seinem 1822 erschienenen Buch (und schon davor in den Arbeiten von 1807 und 1811) versucht, diese Behauptung zu beweisen und auch Poisson hatte 1820 einen "Beweis" dafür gegeben. Beide "Beweise" sind aber aus heutiger Sicht lückenhaft, und beruhen auf zahlreichen Vertauschungen von Integralen und unendlichen Summen. Es war darüber hinaus keineswegs klar, was mit einer "willkürlichen Funktion" gemeint war. Cauchy definierte zwar zu dieser Zeit in seinem "Cours d'Analyse" (1821) (eine Niederschrift seiner an der Ecole Polytechnique gehaltenen Vorlesung) den Begriff einer stetigen Funktion im heutigen Sinn, aber die Handhabung der Begriffe war noch keineswegs klar.

So beweist etwa Cauchy in seinem "Cours d'Analyse", daß für jede auf $[a,b]$ stetige Funktion, das Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}^k)(x_i^k - x_{i-1}^k),$$

konvergiert, wenn die Partitionen $a = x_0^k < x_1^k < \ldots < x_n^k = b$ eine "ausgezeichnete Zerlegungsfolge" bilden, d.h. der Maximalabstand von zwei aufeinanderfolgenden Elementen der k-ten Zerlegung für $k \to \infty$ nach 0 strebt.

Dieses Resultat ist bekanntlich richtig und von großer historischer Bedeutung: Das Integrieren wird nicht mehr nur als die Suche nach analytisch gegebenen Stammfunktionen von speziellen Funktionen betrachtet, sondern die Frage untersucht, ob das "bestimmte Integral" von einer allgemeinen Klasse von Funktionen definiert werden kann.

Allerdings ist der von Cauchy gegebene Beweis falsch, da er die Begriffe von Stetigkeit und gleichmäßiger Stetigkeit vermengt; das macht zwar in diesem Fall nichts aus, da eine stetige Funktion auf einen Intervall $[a,b]$ bekanntlich automatisch gleichmäßig stetig ist und die Begriffe daher zusammenfallen.

Aber der Beweis dieser wesentlichen Tatsache ist keineswegs selbstverständlich und führte schließlich zum Begriff der Kompaktheit.

In einem anderen Fall hatte Cauchy weniger Glück: Er "bewies" zum Beispiel auch den (falschen) Satz, daß für eine konvergente Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ von stetigen Funktionen der Grenzwert $f = \lim f_n$ ebenfalls stetig ist. Hier ist es eben wesentlich, den Begriff der punktweisen Konvergenz von dem der gleichmäßigen Konvergenz auseinanderzuhalten. Obwohl dieser Satz in offensichtlichem Widerspruch zu Fourier's Beispielen von der Entwickelbarkeit von unstetigen Funktionen in Fourier-Reihen steht und etwa N. Abel (1802-1829) Cauchy entrüstet Gegenbeispiele zeigte, korrigierte Cauchy erst 1846 in der 3. Auflage seines Cours d'Analyse diesen Fehler. Ich möchte hier einen Ausspruch von G. Jacobi (1804-1851) zitieren, der zeigt, daß sich die Mathematiker der Notwendigkeit von strengen Beweisen zunehmend bewußt wurden: "Wenn Cauchy etwas behauptet, dann kann man etwa 1 zu 1 wetten, daß es wahr ist oder falsch, wenn Gauß etwas behauptet, kann man ziemlich sicher sein, daß es wahr ist, wenn aber Dirichlet etwas behauptet, dann ist es sicher wahr."

Nun zu Dirichlet's Beitrag zur Konvergenz von Fourier-Reihen:

Satz: Sei f eine Funktion auf $]-\pi,+\pi]$, sodaß eine Partition $-\pi = a_o < a_1 < \dots < a_n = \pi$ existiert für die f auf jedem Intervall $]a_i,a_{i+1}[$ stetig und monoton ist.

Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f in allen Punkten $x \in]-\pi,+\pi]$ gegen $f(x)$ und an den Sprungstellen der Funktion f gegen den Mittelwert zwischen rechtsseitigem und linksseitigem Limes.

Bevor wir den von Dirichlet gegebenen Beweis untersuchen, einige Bewerkungen zur Bedeutung des Satzes: Hier wird zum ersten Mal eine sauber formulierte hinreichende Bedingung für die Konvergenz gegeben, anstatt von "willkürlichen Funktionen" zu reden. Übrigens ist die naheliegende (und lange Zeit vermutete) Annahme, daß für jede stetige Funktion die Fourier-Reihe in allen Punkten konvergiert, falsch, wie zum ersten Mal von du Bois Reymond (1813-1889) im Jahre 1873 (also erst 44 Jahre nach Dirichlet's Beweis) gezeigt wurde. Eine zusätzliche

Bedingung wie etwa die stückweise Monotonie der Funktion ist also tatsächlich notwendig.

Das bemerkenswerteste an diesem Satz ist aber der exakte und strenge Beweis, der nicht mehr auf formaler Manipulation von unendlichen Reihen beruht, sondern den Stil der heutigen Mathematik einleitet, und den wir daher in seinen wesentlichen Ideen skizzieren wollen. Wir betrachten die Partialsummen

$$S_n(x) = a_o/2 + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

und formen sie um, indem wir für die Koeffizienten die Integralausdrücke einsetzen und die (endliche!) Summation mit der Integration vertauschen.

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (\cos\nu t \cos\nu x + \sin\nu t \sin\nu x)\}dt$$

oder (Additionstheorem)

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \{\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu (t-x)\}dt$$

Nun verwendet Dirichlet die (leicht zu beweisende) trigonometrische Identität

$$\frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} \cos \alpha = (\sin (n+\tfrac{1}{2})\alpha)/2 \sin (\tfrac{\alpha}{2})$$

und er erhält:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) \frac{\sin ((n+\frac{1}{2})(t-x))}{\sin ((t-x)/2)} dt$$

oder nach Substitution $\tau = t - x$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x-\tau) \frac{\sin ((n+\frac{1}{2})\tau)}{\sin (\tau/2)} . d\tau \qquad (1)$$

Bis hierher folgte Dirichlet im wesentlichen den Gedanken Fourier's, der ähnliche Überlegungen angestellt hatte, allerdings eine andere trigonometrische Identität verwendet hatte. Dirichlet nimmt nun eine genaue Untersuchung des Integranden vor: Die Formel (1) besagt, daß - in moderner, physikalischer Sprachweise formuliert - die Dirichlet-Kern-Funktion

$$k_n : \tau \to \frac{1}{2\pi} \frac{\sin ((n+\frac{1}{2})\tau)}{\sin (\tau/2)}$$

gegen die sogenannte "Delta-Funktion" (besser "Delta-Distribution", da es eben keine Funktion ist) $\delta_{\{0\}}$ konvergiert, die man (in erster Näherung) so definieren kann:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} g(\tau) \cdot \delta_{\{0\}}(\tau) = g(0).$$

Es ist sehr instruktiv, sich den Kern für einige Werte von n anzusehen, wodurch plausibel wird, daß er sich "gegen die δ-Funktion auffaltet". (Wieder danke ich Koll. Sinwel, der die beigelegten Kurven plottete).

Dirichlet zeigt nun, daß für jedes $h > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{h}^{\pi} f(x+\tau) \cdot \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\tau)}{\sin(\tau/2)} \, d\tau = 0 \qquad (2)$$

Da $\sin(\tau/2)$ auf $[h,\pi]$ größer als $\arcsin(h)$ ist, ist die Funktion $\sin((n+\frac{1}{2})\tau)/\sin(\tau/2)$ auf $[h,\pi]$ kleiner als $\mathrm{arcin}(h)^{-1}$ (unabhängig von n).

Wenn die Funktion etwa auf $[h,\pi]$ monoton fallend ist, so zerfällt das Integral in (2) in Flächen von abwechselndem Vorzeichen und abnehmendem Absolutbetrag und eine einfache Überlegung (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) zeigt, daß die Behauptung (2) richtig ist. Im allgemeinen Fall einer stückweise monotonen Funktion schließt man analog, indem man das Intervall $[h,\pi]$ in (endlich viele) Monotonie-Intervalle zerlegt. Derselbe Schluß zeigt natürlich, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{+\pi}^{-h} f(x+\tau) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\tau)}{\sin(\tau/2)} \, d\tau = 0.$$

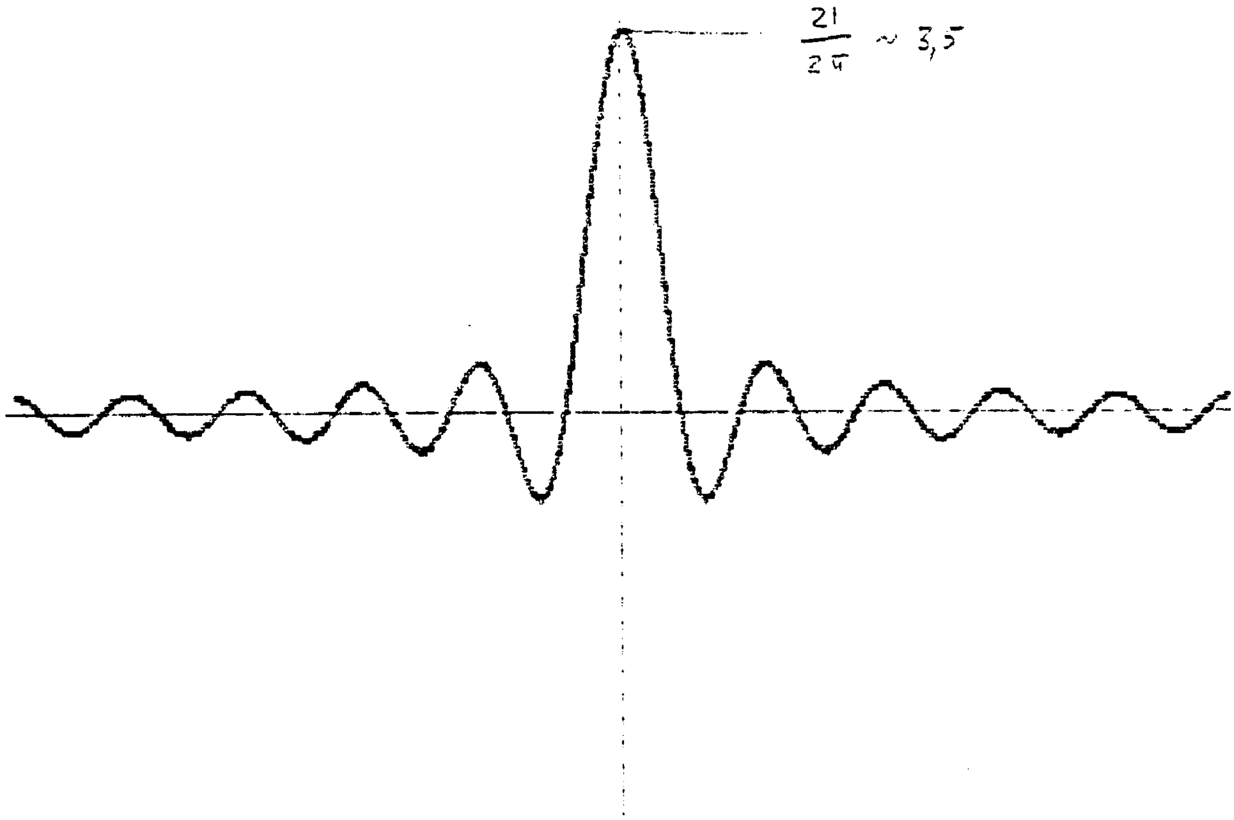
Also gilt für jedes feste $h > 0$, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^{+h} f(x+\tau) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\tau)}{\sin(\tau/2)} \, d\tau =$$

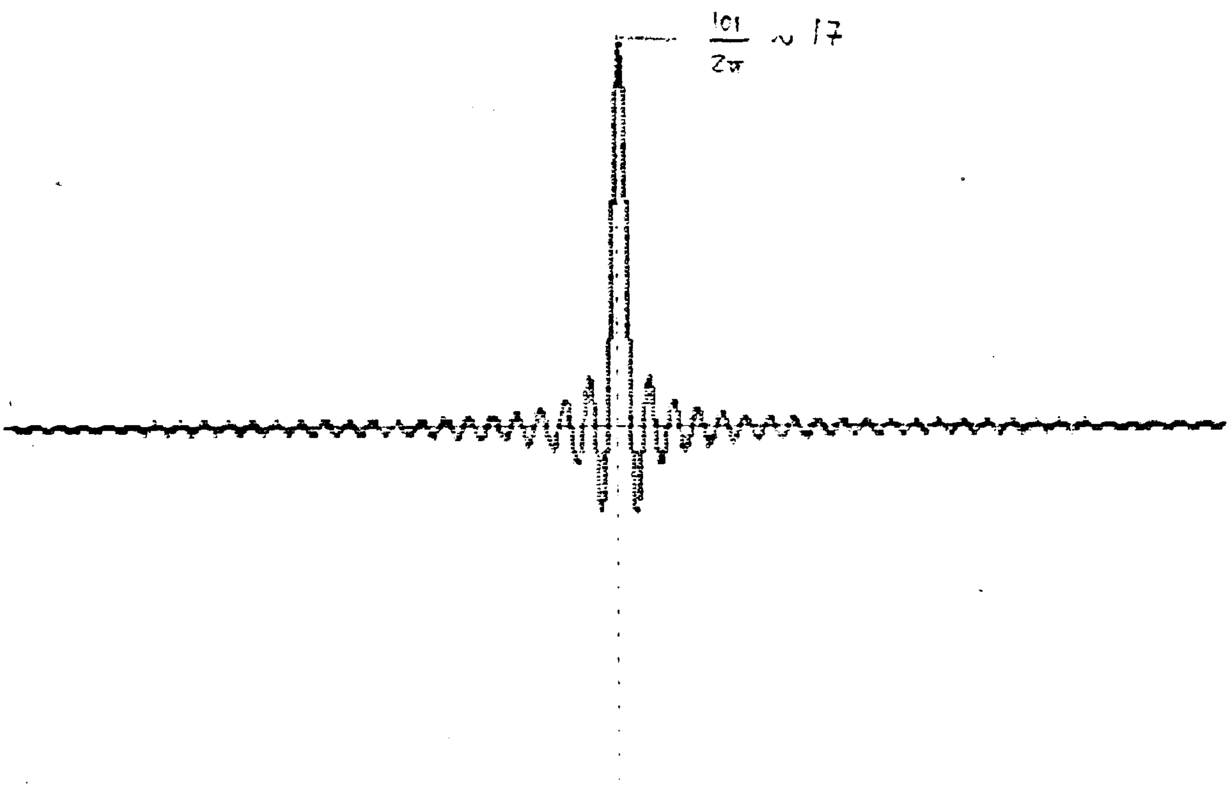
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+\tau) \frac{\sin((n+\frac{1}{2})\tau)}{\sin(\tau/2) d\tau}.$$

Dies ist das sogenannte "Lokalisierungsprinzip" für Fourier-Reihen. Das Verhalten der Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt x ist nur abhängig vom Verhalten der Funktion in einer Umgebung des Punktes x und unabhängig vom Verhalten der Funktion außerhalb der Umgebung.

$n = 10$:

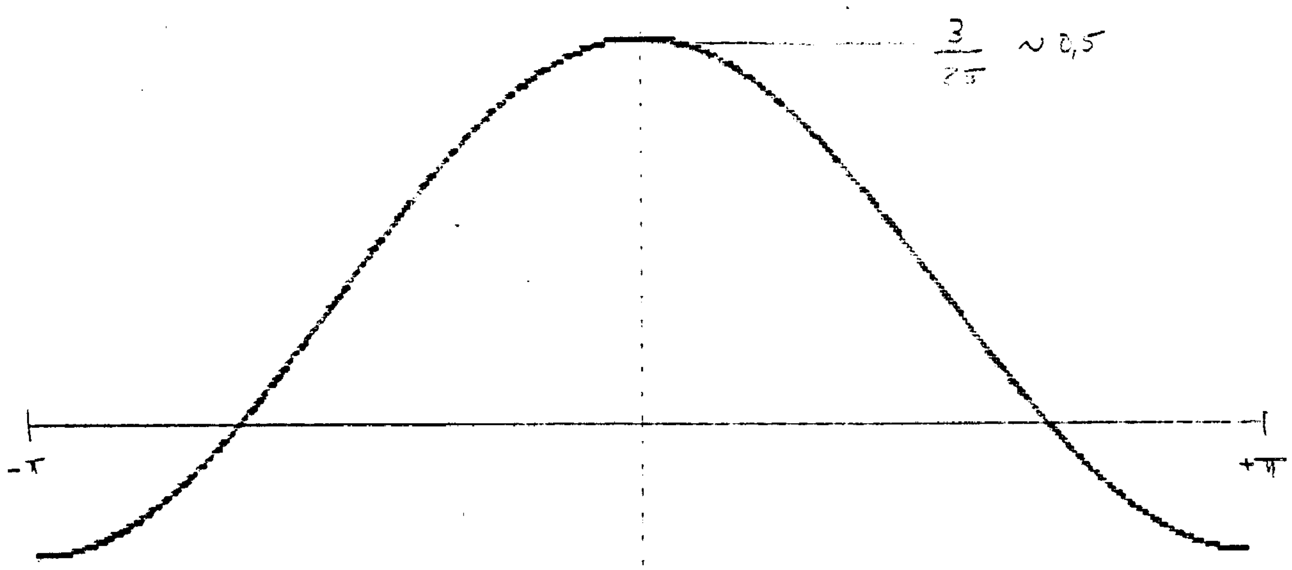


$n = 50$:

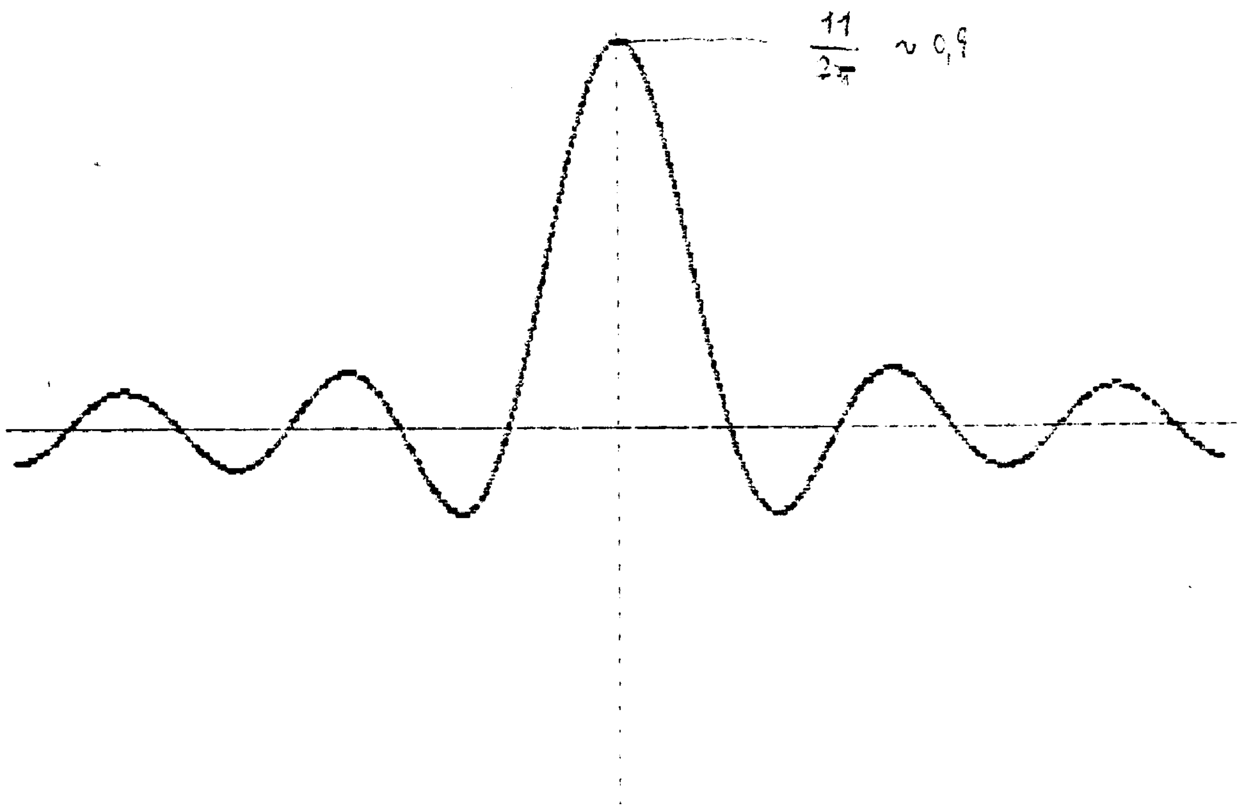


Dirichlet-Kern $k_n : \tau \to \frac{1}{2\pi} \; \frac{\sin((n+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)}$

$n=1$:



$n=5$:



Der Beweis des Satzes reduziert sich daher darauf, zu beweisen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^h f(x+\tau) \frac{\sin((n+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)} d\tau = f(x+0) \tag{3}$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-h}^0 f(x+\tau) \frac{\sin((n+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)} d\tau = f(x-0)$$

wobei $f(x+0)$ (bzw. $f(x-0)$) den rechtsseitigen (bzw. den linksseitigen) Limes von f an der Stelle x bedeutet. (Diese Schreibweise wurde übrigens von Dirichlet in diesem Zusammenhang eingeführt). Der Beweis von Dirichlet besteht nun in einer äußerst sorgfältigen Analyse des Integrals (3). Wir werden hier den Beweis nur unter der (einschränkenderen) Annahme zeigen, daß f an der Stelle x eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung besitzt, d.h., daß

$$\lim_{\substack{k\to 0\\ k>0}} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$$

und $$\lim_{\substack{k\to 0\\ k<0}} \frac{f(x+k) - f(x)}{k}$$ existiert.

Denn dann besitzt die Funktion

$$\tau \to \frac{f(x+\tau) - f(x+0)}{\sin(\tau/2)}$$

einen rechtsseitigen (und einen linksseitigen) Limes an der Stelle x wegen

$$\lim_{\substack{\tau\to 0\\ \tau>0}} \frac{f(x+\tau) - f(x+0)}{\sin(\tau/2)} = \lim_{\substack{\tau\to 0\\ \tau>0}} \frac{f(x+\tau) - f(x+0)}{\tau} \cdot \frac{\tau}{\sin(\tau/2)} .$$

Daher ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^h f(x+\tau)\,\frac{\sin((n+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)}\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\{\int_0^h f(x+0)\,\frac{\sin((n+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)}\,d\tau$$

$$+\int_0^h \frac{f(x+\tau)-f(x+0)}{\sin(\tau/2)}\quad \sin((n+1/2)\tau)\,d\tau\}.$$

Da die Funktion $\frac{f(x+\tau)-f(x+0)}{\sin(\tau/2)}$ stetig auf $[0,h]$ folgt wieder wegen des Ozsillierens von $\sin((n+1/2)\tau)$, daß der Wert d. zweiten Integrals für $n\to\infty$ nach 0 strebt. Daher müssen wir nur mehr zeigen, daß

$$f(x+0) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^h f(x+0)\,\frac{\sin((n+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)}\,d\tau\ .$$

Das ist aber nichts anderes als die Aussage

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^h \frac{\sin(\lambda\tau)}{\sin(\tau/2)}\,d\tau = \pi$$

oder nach der Transformation $t = \lambda\tau$.

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda h} \frac{\sin t}{\sin(t/2\lambda)\cdot\lambda}\,dt = \pi$$

was auf das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

zurückgeführt wird.

Damit ist Dirichlets Beweis beendet. Den hier skizzierten Beweis kann man detailliert etwa in [R. Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Springer 1967, Kap. 9, § 4] nachlesen.

Ich glaube, daß der Leser mit mir übereinstimmt, daß es sich hier um einen sehr sorgfältigen und schwierigen Beweis handelt. Übrigens gibt es bis heute keinen wesentlich einfacheren Beweis für die (punktweise) Konvergenz von Fourier-Reihen.

Dirichlet hat hier also eine hinreichende Bedingung (stückweise Monotonie und Stetigkeit) für die Konvergenz von Fourier-Reihen angegeben. Er stellte sich aber auch die Frage nach notwendigen Bedingungen. Er wollte damit aufzeigen, daß der Begriff "willkürliche Funktion" in Fouriers Behauptung nicht allzu weit gefaßt werden darf. Dirichlet definierte die sogenannte "Dirichlet-Funktion" auf $]-\pi,\pi]$

$$f(x) = \begin{matrix} 1 & \text{wenn} & x & \text{rational} \\ 0 & \text{wenn} & x & \text{irrational.} \end{matrix}$$

Von dieser Funktion behauptete Dirichlet, daß sie sicher nicht in eine Fourier-Reihe entwickelbar sei. Seine Begründung: Die Integrale

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \quad \cos\ (n x)\ dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \quad \sin\ (n x)\ dx$$

mit denen die Koeffizienten a_n und b_n berechnet werden müßten, ergeben offensichtlich keinen Sinn. Denn im Sinne des Cauchy'schen (und auch im Sinne des Riemann'schen) Integralbegriffs kann man keinen Wert dieses Integrals bestimmen.

Diese Argumentation Dirichlet's ist zwar - aus heutiger Sicht - nicht korrekt, da sich unter Verwendung des Lebesgue - schen Integralbegriffs die Integrale sehr wohl berechnen lassen; dies ist aber nicht der zentrale Punkt: Viel bemerkenswerter erscheint mir die moderne Denkweise von Dirichlet, der notwendige Bedingungen und hinreichende Bedingungen für die Konvergenz von Fourier-Reihen aufzeigen wollte.

Bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten tritt eine sehr wichtige Frage zu Tage: Für welche Funktionen $f(x)$ existiert das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\ dx.$$

Zu diesem Zeitpunkt (1829) war, wie bereits erwähnt, bekannt, daß für jede stetige Funktion f das Integral existiert; es folgt leicht, daß es auch für jede stückweise stetige Funktion existiert. Dirichlet behauptete jedoch, daß eine Funktion unendlich viele Unstetigkeitsstellen auf $[-\pi,+\pi]$ haben und dennoch integrierbar sein können. Er stellte die folgende interessante Behauptung auf: " Sei f eine Funktion auf $[-\pi,\pi]$;

für alle $-\pi \leq a < b \leq \pi$ existiere ein r und ein s, sodaß $-\pi < a < r < s < b \leq \pi$ und sodaß f auf dem Intervall r,s stetig ist. Dann ist f integrierbar" (im Cauchy'schen Sinn der im wesentlichen mit dem Riemann-Integral übereinstimmt).

Dirichlet gab für diese Behauptung keinen Beweis, denn "ein genauer Beweis benötigt einige Details, die sich auf die fundamentalen Prinzipien der infinitesimalen Analysis beziehen, die in einer anderen Arbeit erscheinen werden ...".
Die versprochene Arbeit erschien aber niemals und es scheint wahrscheinlich, daß Dirichlet bemerkt hat, daß er keinen Beweis dafür geben kann. Die Aussage ist nämlich tatsächlich falsch.
Dirichlet fordert nämlich (in moderner Sprechweise) die Stetigkeit auf einer offenen dichten Menge, also auf einer Menge die "im topologischen Sinn groß" ist. Wie sich aber herausstellen wird, braucht man zur Charakterisierung der Integrierbarkeit Mengen, die "im maßtheoretischen Sinn groß" sind. Diese beiden Begriffe fallen aber nicht zusammen und Dirichlet ist der erste, der sie verwechselt; er ist aber keineswegs der letzte und noch tief bis ins 20. Jh. werden diese Begriffe noch oft durcheinander gebracht.

Trotz ihrer Unkorrektheit ist die Aussage von eminenter Bedeutung: Analog zur Fragestellung nach hinreichenden Bedingungen für die Entwickelbarkeit einer Funktion in eine Fourier-Reihe wird hier die "moderne" Frage untersucht: "Was sind hinreichende Bedingungen für die Integrierbarkeit einer Funktion?" Der zweite wesentliche Punkt besteht darin, daß hier zum ersten Mal topologische Begriffe ins Spiel kommen, nämlich die Idee der Intervall-Schachtelung, die noch eine große Rolle spielen wird (Satz von Heine-Borel (1880), Satz von Baire (1899) etc.).

Bernhard Riemann:

Wir wollen uns hier nur mit demjenigen kleinen Ausschnitt aus dem Schaffen des genialen Mathematikers Bernhard Riemann (1826-1866) beschäftigen, der mit Fourier-Reihen und Integrations-Theorie zu tun hat.

Riemann hatte 1851 sein Doktorat in Göttingen erhalten und nach Studien bei Dirichlet, der zu diesem Zeitpunkt Professor in Berlin war, präsentierte er 1854 als Habilitationsschrift in Göttingen seine berühmte Abhandlung: "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine geometrische Reihe". Riemann erzielt in dieser systematischen Untersuchung viele Resultate (mit Beweisen, die den heutigen Standards genügen), die an Tiefe weit die bis dahin erzielten Ergebnisse übertreffen. Trotzdem kann er aber das ursprüngliche Problem, das er sich gestellt hatte, nicht lösen, nämlich notwendige und hinreichende Bedingungen zu finden, die eine Funktion $f(x)$ in einer Umgebung eines Punktes x_o erfüllen muß, damit ihre Fourier-Reihe in diesem Punkt gegen $f(x_o)$ konvergiert. Man kennt übrigens bis heute noch keine wirklich befriedigende Antwort auf diese Frage.

Riemann beweist unter anderem das (heute sogenannte) "Lemma von Riemann-Lebesgue": "Wenn f eine beschränkte und integrierbare (hier: im Sinne des Riemann-Integrals) Funktion auf $]-\pi, \pi]$ ist, so konvergieren die Fourier-Koeffizienten

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{und}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

gegen 0."

Ausgehend von diesem (keineswegs trivialen!) Resultat erhält Riemann viele Sätze über Fourier-Reihen, deren Behandlung aber den Rahmen dieses Skriptums sprengen würde.

Wir wollen uns hier nur mit der Frage der Integration beschäftigen. Ähnlich wie Dirichlet wurde Riemann zur Frage geführt: Für welche Funktionen f ist das Integral

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx$$

überhaupt definiert?

Zuerst präzisierte Riemann den von Cauchy (in nicht ganz sauberer Form eingeführten) Integralbegriff und definierte das, was man heute als "Riemann-Integral" in den Einführungsvorlesungen lernt.

Riemann formulierte eine wichtige notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Riemann-Integral einer beschränkten Funktion definiert ist. Er zeigte damit, daß die von Dirichlet angegebenen Bedingung für die Integrierbarkeit nicht notwendig ist: Eine Funktion kann "viel unstetiger" sein, als es Dirichlet sich hatte vorstellen können und dennoch integrierbar. Sie kann in jedem Intervall, gleichgültig wie klein es sein mag, unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben. Wie Riemann meinte, "ist es gut mit einem speziellen Beispiel zu beginnen, da diese Funktionen bisher noch nie betrachtet wurden." Das bemerkenswerte Beispiel, das er angibt, sollte sich darüber hinaus als wichtig bezüglich vieler Aspekte erweisen, die Riemann gar nicht im Auge hatte.

Riemann beginnt mit der "Sägezahnfunktion" auf $\mathbb{R}$ nämlich

$$g : x \to x - [x],$$

wobei $[x]$ die größte ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich x ist. g hat Sprungstellen von der Höhe 1 an allen ganzen Zahlen. Riemann definiert nun

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g(nx)/n^2.$$

Die Funktion $g(nx)/n^2$ hat Sprungstellen von der Höhe n^{-2} an allen Punkten der Form k/n, wobei $k \in \mathbb{Z}$. Man sieht leicht, daß die Funktion f an allen rationalen Punkten unstetig ist, während sie an allen irrationalen Punkten stetig ist.

Andererseits ist die Funktion f auf jedem Intervall Riemann-integrierbar: Aus heutiger Sicht ist das selbstverständlich, da die Summe gleichmäßig konvergiert und jedes $x \to g(nx)$ natürlich eine Riemann-integrierbare Funktion ist. Riemann's Beweis lief im wesentlichen auch auf diesen Sachverhalt hinaus, allerdings war es für ihn viel komplizierter, den Beweis zu führen, da er noch nicht über den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz verfügte, dessen Bedeutung erst 15 Jahre später von Weierstraß erkannt wurde.

Was war nun Riemann's notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit einer beschränkten Funktion f auf $[-\pi,\pi]$? Es ist bequemer, ein wenig moderne Terminologie zu verwenden. Man nennt die "Oszillation von f an einem Punkt x" den Wert

$$\operatorname{osz}(f(x)) = \limsup_{y\to x} f(y) - \liminf_{y\to x} f(y).$$

Die Oszillation ist also null an genau den Punkten, an denen f stetig ist; an einer Sprungstelle von f beträgt sie genau die Höhe des Sprungs.

Nach dieser Vorbemerkung können wir Riemann's Bedingung in etwas eleganterer Weise formulieren:

Satz: Eine beschränkte Funktion f auf einem Intervall $[a,b]$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ und $\eta > 0$ die Menge der Punkte, an denen die Oszillation von f größer als ε ist, durch endlich viele Intervalle $[c_i,d_i]$, $i=1,\dots,n$, überdeckt werden kann, deren Gesamtlänge kleiner η ist, i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} d_i - c_i < \eta.$$

Diese Charakterisierung ist in vieler Hinsicht bemerkenswert: Zum ersten Mal taucht ein maßtheoretischer Begriff auf, nämlich Mengen die von (endlich vielen) Intervallen beliebig kleiner Gesamtlänge überdeckt werden können. Weiters ist bemerkenswert, daß erstmals das Konzept einer "Menge von Punkten" und die Idee der Überdeckung explizit auftaucht (obwohl Riemann den Namen "Menge" natürlich nicht verwendete). Auch verwendete Riemann nicht die Symbolik "für jedes $\varepsilon>0$ und $\eta>0$ ..", die erst zwanzig Jahre später von Weierstraß eingeführt wurde, sondern formulierte die angegebene Bedingung verbal; aber wir sehen, daß hier die Idee von "Größen, die kleiner als eine beliebige vorgegebene Größe sind", notwendig ist, um den Satz überhaupt formulieren zu können.

Bei den Problemen der Differential- und Integralrechnung konnte man sich bis dahin immer noch mit einem naiven, nicht präzis gefaßten Limes-Begriff durchschlagen. Aber ab diesem Zeitpunkt (um 1854) kommt man, will man die von Riemann angeschnittenen Fragen weiterbehandeln, einfach um die "Epsilontik" nicht mehr herum.

Ich möchte nicht weiter auf die Meriten der angegebenen Charakterisierung der Riemann-Integrierbarkeit einfehen, sondern nur noch aufzeigen, daß auch dieser - für die damalige Zeit unerhört allgemeine - Begriff der Integrierbarkeit noch nicht alle Wünsche erfüllt, die man gegenüber einem Integral hat: Der wesentliche Mangel der Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen besteht darin, daß sie nicht abgeschlossen ist unter der Bildung von punktweisen Limiten. Es kann vorkommen, daß eine (gleichmäßig beschränkte) Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ in jedem Punkt x gegen eine Funktion $f(x)$ konvergiert, daß aber die Funktion f nicht mehr Riemann-integrierbar ist. Das impliziert, daß diejenige Formel, an der man vor allem interessiert ist, nämlich

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\, dx$$

schon deshalb in diesen Fällen nicht gilt, da der Ausdruck auf der rechten Seite keinen Sinn ergibt.

Diese Schwierigkeit kann erst durch das um etwa 1900 entwickelte "Lebesgue-Integral" gelöst werden. Der Unterschied zum Riemann-Integral besteht im wesentlichen darin, daß man anstatt der in der Riemann'schen Charaktersierung auftretenden <u>endlichen</u> Folge von Intervallen $[c_i,d_i]$ eine <u>unendliche</u> Folge $[c_i,d_i]$ zuläßt, deren Gesamtlänge $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i-c_i)$ kleiner als η zu sein hat.

Aber dafür war die Zeit um 1854 wirklich noch nicht reif, denn dafür braucht man unbedingt eine präzise Definition der reellen Zahlen, einige grundlegende topologische Ideen (insbesondere die Idee einer kompakten Menge) und die Unterscheidung zwischen abzählbaren und überabzählbaren Mengen. Für alle diese Fragen sollten die Arbeiten von Georg Cantor von entscheidender Bedeutung sein.

GEORG CANTOR

Obwohl Georg Cantor (1845-1918) mit seinen Arbeiten nicht isoliert dasteht, sondern Mathematiker wie Riemann, Weierstraß, Dedekind, Hankel, Harnack und du Bois Reymond (neben vielen anderen) in ähnlicher Richtung gearbeitet haben, so sind doch Cantors Beiträge in vieler Hinsicht einzigartig. Seine Schöpfung der transfiniten Zahlen war von Anfang an umstritten und seine berufliche Karriere war nur darauf ausgerichtet, seine Arbeiten zu verteidigen und zu fördern, was schließlich eine Art Verfolgungswahn hervorrief. Die Mengenlehre trägt - wahrscheinlich stärker als andere Zweige der modernen Mathematik - den Stempel der Interessen und der Persönlichkeit ihres Schöpfers. Die geschichtliche Entwicklung der Cantorschen Mengenlehre zeigt, wie die abstrakte Objektivität, die gerade der Mathematik so oft zugeschrieben wird, beeinflußt werden kann durch den Charakter und die Person des Begründers der Theorie. Dies ist insbesondere der Fall für ein so umstrittenes Gebiet, wie es das Unendliche in der Mathematik darstellt, wo Cantor sich nicht nur gegen heftige Opposition von zahlreichen Mathematikern verteidigen mußte, sondern auch Theologen und Philosophen sich sehr lautstark in die Diskussion einmischten. Cantor verteidigte die Gültigkeit der transfiniten Mengenlehre geradezu fanatisch und führte seine Untersuchungen weiter, bis ihre Bedeutung in praktisch allen Zweigen der Mathematik schließlich erkannt wurde.

Cantor studierte in Berlin und schrieb seine Dissertation bei Kummer und Kronecker 1867 über ein schwieriges Problem der Zahlentheorie. Auch seine Habilitationsschrift 1869 (Cantor war also mit 24 Dozent) behandelte ein zahlentheoretisches Thema. Die ersten wichtigen Forschungsergebnisse von Cantor sollten aber nicht auf diesem Gebiet sein.

1869 verließ Cantor Berlin um als Privat-Dozent an der Universität von Halle zu arbeiten. Cantor versuchte übrigens in der Folge sein Leben lang, diese Provinz-Universität zu verlassen und in Berlin eine Anstellung zu bekommen, aber ohne Erfolg.

In Halle freundete er sich schnell mit einem älteren Kollegen, Eduard Heine (1821-1881; ihm verdanken wir die Beweis-Idee zum Satz von Heine-Borel) an, der an einem wichtigen Problem der Analysis arbeitete: Wenn eine Funktion f auf $]-\pi,\pi]$ in eine Fourier-Reihe entwickelbar ist, ist diese Darstellung eindeutig ?

Die Antwort auf diese Frage ist keineswegs selbstverständlich. Wir haben ja gesehen, daß etwa Euler um 1754 der Meinung war, daß zum Beispiel

$$\sin x + 2 \sin 2x + 3 \sin 3x + \ldots\ldots = 0$$

oder

$$\cos x - 4 \cos 2x + 9 \cos 3x - \ldots\ldots = 0$$

gilt. Wäre dies tatsächlich der Fall, so hätte die Funktion 0 neben der trivialen Entwicklung in eine Fourier-Reihe $(a_n = b_n \equiv 0)$ auch noch andere Entwicklungen, d.h. die Fourier-Entwicklung wäre nicht eindeutig.

Zur Zeit von 1870 war es allerdings schon längst klar, daß man mit der Konvergenz etwas vorsichtiger umgehen muß als im 18. Jh., um korrekte Resultate zu erhalten.

Heine konnte 1870 zeigen, daß für den Fall, daß die Funktion f stetig ist und die Fourier-Reihe gleichmäßig konvergiert, die Entwicklung eindeutig ist. Der Begriff der gleichmäßigen Konvergenz war kurz davor - unabhängig voneinander - von Stokes, Seidel und Weierstraß eingeführt worden und war sozusagen der Hit der Saison. Er wurde auf viele Probleme der Analysis angewandt und oftmals sogar dort, wo er gar nicht notwendig ist, wie etwa in diesem Fall. Denn spätestens seit Fourier war ja klar, daß man auch unstetige Funktionen in Fourier-Reihen entwickeln kann; (wodurch die Fourier-Reihe sicher nicht gleichmäßig konvergieren kann). Und über diesen Fall wurde von Heines Satz nichts ausgesagt.

Cantor studierte auf Anregung von Heine diese Frage und versuchte, möglichst allgemeine Bedingungen für die Eindeutigkeit der Fourier-Entwicklung einer Funktion. Er verallgemeinerte schnell den Satz von Heine wesentlich, und konnte im selben Jahr (1870) zeigen, daß für eine Funktion f auf.

$]-\pi,\pi]$, zu der eine Fourier-Reihe existiert, die in allen Punkten $x \in]-\pi,\pi]$ gegen die Funktion $f(x)$ konvergiert, diese Fourier-Entwicklung eindeutig ist. Im Jahre 1871 schließlich verallgemeinerte er den Satz noch weiter, indem er zeigte, daß es schon genügt die Konvergenz in allen bis auf endlich viele Punkte zu fordern. Die entscheidende Entwicklung kam aber 1872, als Cantor bewies, daß es genügt die Konvergenz in allen Punkten bis auf eine Ausnahme-Menge zu fordern, wobei diese Ausnahme-Menge aus unendlich vielen Punkten bestehen kann, wenn sie nur in einer bestimmten Weise über $]-\pi,\pi]$ verteilt ist (siehe unten); beispielsweise kann die Ausnahme-Menge eine konvergente Folge von Punkten sein.

Um für diesen Satz einen präzisen Beweis geben zu können, bemerkte Cantor, daß es notwendig ist, eine präzise Definition der reellen Zahlen zu geben. Das war bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht geschehen, obwohl etwa Bernadus Bolzano (1781-1848), ein Theologe und Amateur-Mathematiker in seinem Buch "Paradoxien des Unendlichen" ähnliche Fragen behandelt hatten. Bolzanos Arbeiten waren aber ziemlich wirr und wurden zu seiner Zeit von niemandem wirklich ernst genommen.

Cantor kritisiert die vorherrschende Meinung, die die Existenz der reellen Zahlen einfach unkritisch annimmt, und ist der Auffassung, daß man die reellen Zahlen, ausgehend von den rationalen Zahlen, definieren müsse. Er führt nun die Konstruktion durch, die wir alle als Vervollständigung eines metrischen Raumes kennen: In etwas modernerer Terminologie betrachtet Cantor die Menge aller Cauchy-Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rationalen Zahlen (Cantor nennt sie Fundamental-Folgen) modulo der Äquivalenz-Relation

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\ , \text{ wenn } \lim_n (a_n - b_n) = 0.$$

Uns ist heute selbstverständlich, daß man auf diese Weise den vollständigen metrischen Raum $\mathbb{R}$ erhält. Aber Cantor hatte hier noch einige Schwierigkeiten: Er sah anfangs nicht die Tatsache, daß in dem so vervollständigten Raum jede Cauchy-Folge einen Limes hat, sondern meinte, daß man in der so erhaltenen Menge (Cantor nannte sie B) wieder dieselbe

Operation der Konstruktion von Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen durchführen muß, um eine wiederum größere Menge C zu erhalten, auf C die Operation wiederholen müsse, um ein D zu erhalten usw. Obwohl diese Idee aus heutiger Sicht falsch ist, birgt sie in sich den Keim der transfiniten Induktion.

Neben diesen Problemen hatte Cantor auch Schwierigkeiten, die so konstruierten rellen Zahlen mit Punkten auf der Zahlen-Gerade zu identifizieren. Das ist nämlich in der Tat gar nicht so selbstverständlich, wie es uns heute scheinen mag.

Wir sehen also, daß die Cantor'sche Konstruktion der reellen Zahlen anfangs große Mühe bereitet. In den folgenden Jahren (bis 1880) konnte Cantor (ab1873 in enger Zusammenarbeit mit seinem Freund Richard Dedekind (1831-1916)) diese aber rasch überwinden.

Zurück zu den <u>Ausnahme-Mengen</u> für die Konvergenz der Fourier-Reihen: Gegeben eine Menge von Punkten P in $[-\pi,\pi]$ definierte Cantor die erste Ableitung $P^{(1)}$ von P als die Menge aller Häufüngspunkte. $P^{(1)}$ kann leer sein (das ist der Fall genau dann, wenn P endlich ist) oder auch nicht. Im letzteren Fall definierte Cantor $P^{(2)}$ als die Menge der Häufungspunkte von $P^{(1)}$; induktiv erhält man so eine Folge von n-ten Ableitungen $P^{(n)}$ von P.

Cantor nennt eine Menge P <u>von erster Art</u>, wenn ein n existiert, für das $P^{(n)} = \Phi$; anderenfalls nennt Cantor die Menge <u>von zweiter Art</u>.

Der von Cantor 1872 bewiesene Eindeutigkeitssatz kann nun formuliert werden:

<u>Satz:</u> Sei f eine Funktion auf $[-\pi,\pi]$ und $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\alpha_n)_{n=0}^{\infty}$, $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ Folgen von Koeffizienten so, daß für alle $x \in [-\pi,\pi]$ <u>bis auf eine Ausnahme-Menge P von erster Art</u> gilt

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)).$$

Dann gilt für alle n, $a_n = \alpha_n$ und $b_n = \beta_n$; das heißt die Fourier-Darstellung ist eindeutig.

Der Satz ist beeindruckend. Aber noch wichtiger ist der Begriff der Ausnahme-Mengen, der hier auftaucht und außerordentlich zukunftsweisend ist. Zuerst wollen wir ein einfaches Beispiel einer Punktmenge P_n in $\mathbb{R}$ angeben, für die $P_n^{(n)} \neq \Phi$ aber $P_n^{(n+1)} = \Phi$ gilt. Man kann etwa, für festes n, die Menge

$$P_n = \{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \ldots + \frac{1}{m_k} : m_i \in \mathbb{N}, \; i = 1,\ldots,k, k \leq n\} \cup \{0\}$$

nehmen. Der Leser sollte sich überlegen, daß $P_n^{(1)} = P_{n-1}$, $P_n^{(2)} = P_{n-2}$ usw. gilt.

In diesem Zusammenhang kommt später (ab 1879) Cantor zum ersten Mal auf die Idee der transfiniten Ordinalzahlen: Man kann ja die Menge

$$P^{(\infty)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P^{(n)}$$

definieren; nicht genüg damit kann man, falls $P^{(\infty)} \neq \Phi$, auch die Ableitung dieser Menge bilden, die Cantor $P^{(\infty+1)}$ nennt. So kann man weiter verfahren und $P^{(\infty+2)}$, $P^{(\infty+3)}$, ... $P^{(2\infty)}$, $P^{(2\infty+1)}$, ... , $P^{(3\infty)}$, $P^{(3\infty+1)}$,... bilden. Schließlich kommt man zu Ausdrücken die Cantor $P^{(\infty^2)}$, $P^{(\infty^2+1)}$, $P^{(\infty^2+2)}$,... usw. nennt. Und niemand kann uns hindern, immer wieder um eins weiter zu gehen und so größere und größere "transfinite Ordinalzahlen" zu bilden. Man kann zeigen, daß zu jeder so kontruierten transfiniten Ordinalzahl (nehmen wir z.B. $27\infty+35$) eine Menge P existiert, für die die Ableitungen bis genau zu dieser Ordinalzahl nicht verschwinden (d.h. in unserem Beispiel $P^{(27\infty+35)} \neq \emptyset$ aber $P^{(27\infty+36)} = \emptyset$.

An diesem Beispiel wurde also die Idee der Ordinalzahlen und der transfiniten Induktion geboren. Man kann sich aber gut vorstellen, welche Ressentiments Cantor in der mathematischen Welt hervorrief, als er nun mit Ordinalzahlen wie

$453\infty^{\infty^{\infty}} + 23\infty^{\infty^{73}} + 95\infty + 13$ herumrechnete. Nach jahrhundertelangen schmerzlichen Wehen hatte es gerade geschienen, daß es gelungen war, die Mathematik von aller "Metaphysik des

Unendlichen" zu befreien. Die herrschende Lehre kommt am besten in einem oft zitierten Brief von Gauß an Schumacher vom 12. Juli 1831 zum Ausdruck, in dem es übrigens um eine Kritik von Gauß an einem "Beweis" des Parallelenaxiomes geht, wo Schuhmacher mit "bis ins unendliche weitergezogenen" Geraden argumentiert.

Gauß: "Was aber ihren Beweis betrifft, so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist." Im folgenden zeigt Gauß auf, daß neben der Euklidischen Geometrie auch eine "nicht-euklidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes" hat, eine Erkenntnis von ungeheurer Tragweite, die schließlich wesentlich zur Entdeckung der Relativitätstheorie beitragen sollte. Es ist bezeichnend für den Charakter von Gauß, daß er über seine - wie er selbst meint - "sehr ausgedehnten Untersuchungen" darüber nur briefliche Mitteilung machte. In einem Brief an Lambert schreibt er, daß er "das Geschrei der Boeoter scheue"; seine Ansichten standen nämlich in scharfem Widerspruch zur Kantschen Lehre der "a priorischen" Erkenntnis des Raumes, die nur die euklidische Geometrie als Anschaungsform zuläßt.

Nach diesem kleinen Ausflug zur nicht-euklidischen Geometrie zurück zu den Problemen des Unendlichen: Ähnlich wie Gauß 50 Jahre vor ihm hatte auch Cantor die herrschende Lehre der Wissenschaft gegen sich, welche das Unendliche nur im Sinne des sogenannten "Potential-Unendlichen" akzeptierte, das heißt, als die Möglichkeit, sich einen gewissen Grenzwert beliebig zu nähern, ganz wie das Gauß in seinem Brief dargestellt hat.

Dagegen behauptete Cantor nun, daß es durchaus statthaft sei, auch das "Aktual-Unendliche", d.h. das Unendliche im Sinne eines vollendeten, abgeschlossenen Prozesses zu betrachten. Sehr gute Beispiele dafür sind etwa die oben betrachteten Mengen $P^{(\infty)}$, $P^{(\infty+1)}$, ... , $P^{(\infty^{\infty})}$ usw.

Ich persönlich kann aber auch die Gegner Cantors gut verstehen: Nach jahrhundertelanger Schwierigkeiten schienen nun endlich alle Paradoxien des Unendlichen gelöst, wenn man das Unendliche im oben von Gauß skizzierten Sinn verstand.

Und nach all dem kam nun wieder einer, nämlich Cantor, der auf scheinbar abenteuerlichste Weise mit unendlichen Größen herumrechnete! Ich kann es Leopold Kronecker (1823-1891), damals in Berlin neben Weierstraß der einflußreichste Mathematiker, nachfühlen, daß er Cantor einen "Verderber der Jugend" nannte, seine Arbeit als "Humbug" bezeichnete, gegen ihn intrigierte und zu verhindern wußte, daß Cantor eine Anstellung in Göttingen oder Berlin bekam. Aus heutiger Sicht aber tat er ihm damit bitter unrecht, da eben Cantor das Tor für völlig neuartige Entwicklungen der Mathematik öffnete, die ohne Mengenlehre einfach nicht möglich gewesen wären.

Zum Abschluß möchte ich noch auf eine der wichtigsten Erkenntnisse von Cantor zu sprechen kommen: Die Über-Abzählbarkeit der reellen Zahlen.

Schon Galilei hatte um 1610 in seinen "Discursi" bemerkt, daß (in moderner Sprache) die Abbildung $n \to 2n$ eine ein-eindeutige Zuordnung der Menge der natürlichen Zahlen auf die Menge der natürlichen geraden Zahlen definiert; daher könne man nicht sagen, daß die erste Menge größer als die zweite sei. Galilei schloß, daß es überhaupt sinnlos sei, zu sagen, eine "Unendlichkeit" sei größer als die andere. Diese Ansicht blieb in den folgenden Jahrhunderten eigentlich unbestritten.

Schauen wir uns jetzt noch einmal den Cantor'schen Eindeutigkeitssatz (siehe oben) an.

Die Ausnahmemenge P kann eine unendliche Menge sein, vorausgesetzt nur, daß sie in einer sehr speziellen Weise über $[-\pi,\pi]$ verteilt ist (i.e. $P^{(n)} = \emptyset$ für ein genügend großes n). Die Frage drängt sich auf, ob man auch andere unendliche Mengen als Ausnahmemengen zulassen kann, etwa die rationalen Zahlen in $[-\pi,\pi]$. Cantor wußte zu diesem Zeitpunkt schon, daß man die rationalen Zahlen bijektiv auf

$\mathbb{N}$ abbilden kann, d.h. daß sie abzählbar sind. In einem Brief an Dedekind vom 29. Nov. 1873 wirft Cantor die Frage auf, ob die Menge $[-\pi,\pi]$ abzählbar sei. Er vermutete in dem Brief, daß die Antwort nein sei; er hatte also die richtige Intuition, daß die reellen Zahlen "wesentlich mehr" als die rationalen Zahlen sind.

Noch bevor Dedekinds Antwort eintraf, konnte Cantor zeigen, daß $[-\pi,\pi]$ nicht abzählbar ist. Die Beweismethode (die wir heute alle gut kennen) ist in vieler Hinsicht zukunftsweisend. Angenommen, man kann die Elemente aus $[-\pi,\pi]$ durchnumerieren, d.h. als Folge $\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n,\ldots$ schreiben. Cantor wählt nun ein Intervall $[a_1,b_1]$ so, daß $\omega_1 \notin [a_1,b_1]$; dann ein Intervall $[a_2,b_2]$, das in $[a_1,b_1]$ enthalten und $\omega_2 \notin [a_2,b_2]$ in dieser Weise konstruiert er induktiv eine absteigende Folge von Intervallen $[a_n,b_n]$ mit $\omega_n \notin [a_n,b_n]$.
Nun zeigt Cantor, daß

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] \neq \emptyset$$

und man daher in der Folge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mindestens ein $\omega \in [-\pi,\pi]$ "vergessen" hat, womit ein Widerspruch zu Tage tritt. Um aber zu zeigen, daß der Durchschnitt der Intervalle nicht leer ist, braucht Cantor seine genaue Definition der reellen Zahlen: Er zeigt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und daher $a = \lim a_n$ eine wohldefinierte reelle Zahl ist, die in jedem Intervall $[a_n,b_n]$ liegt. Dieser Sachverhalt ist keineswegs selbstverständlich und mit einem naiven Begriff der reellen Zahlen läßt sich kein befriedigender Beweis dafür angeben.

Cantor hatte damit gezeigt, daß es doch Unterschiede in der "Größe" von unendlichen Mengen gibt. Diese Unterscheidung von unendlichen Größen in "abzählbare" und "überabzählbare" Mengen sollte im weiteren zu einem der Schlüsselbegriffe für die Entwicklung der Mathematik im 20. Jahrhundert werden.

L I T E R A T U R

Ich möchte hier aus der umfangreichen Literatur über Geschichte der Mathematik nur einige Werke herausgreifen und im übrigen auf die darin enthaltenen umfangreichen Literaturverzeichnisse verweisen.

Morris Kline: Mathematical Thought form Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York (1972).

Ein sehr ausführliches (1200 Seiten) und sorgfältig geschriebenes Buch; auch sehr gut als Nachschlagwerk geeignet.

I. Grattan-Guiness: From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. Duckworth Ltd., London (1980).

Der Inhalt des Buches behandelt fast genau den Stoff der Vorlesung (allerdings wesentlich ausführlicher).

Hans Wussing, Wolfgang Anold: Biographien bedeutender Mathematiker. Volk und Wissen, Berlin (1975).

Ein sehr leicht zu lesendes Werk, das den Schwerpunkt auf Biographien und nicht auf das mathematische Werk legt.

N. Bourbaki: Elemente der Mathematikgeschichte. Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen (1971).

Eine Kurzfassung von Bourbakis Sicht der Mathematikgeschichte (ein sehr eigenwilliger aber interessanter Standpunkt);mathematisch etwas anspruchsvoll zu lesen.

Jean Dieudonné: Abregé d'histoire des Mathêmatiques 1700-1900, Band I u. II, Hermann, Paris (1978).

Ausführlich und mathematisch anspruchsvolle Darstellung der Entwicklung der Mathematik zwischen 1700 und 1900 durch den "Propheten von Bourbaki".

C.H. Edwards: The Historical Development of the Calculus, Springer 1979. Ein sehr faktenreiches und interessant zu lesendes Buch, das etwa den in der Vorlesung behandelten Stoff - allerdings wesentlich ausführlicher - präsentiert.

Otto Toeplitz: Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1972. Dieses Buch, das von dem bedeutenden Mathematiker Toeplitz schon in den 30er Jahren geschrieben wurde, ist eine Einführung in die Infinitesimalrechnung - vergleichbar etwa der Vorlesung Analysis I - die konsequent den genetischen Aspekt verfolgt.