Grenzwert – quo vadis?

Ein Pilotprojekt zur Analysis-Ausbildung von Lehramtsstudierenden im Unterrichtsfach Mathematik

Einreichung zum Lehrpreis Ars docendi 2013 - Staatspreis für exzellente Lehre an den öffentlichen Universitäten Österreichs (Innovative Lehrkonzepte)

Stefan Götz und Roland Steinbauer

1. Motivation

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen." (Klein 1908, S. 1).

Diese oben in einem klassischen Zitat beschriebene sogenannte doppelte Diskontinuität stellt eine seit vielen Jahrzehnten gut dokumentierte aber nichtsdestotrotz aktuelle Problematik der Lehramtsausbildung im Unterrichtsfach Mathematik dar. Der jüngere Diskurs geht davon aus, dass sich die gewünschte Verbindung zwischen Schulmathematik und der Mathematik als Wissenschaft während des Studiums nicht etwa von selbst einstellt, sondern explizit in der Ausbildung thematisiert werden muss, siehe etwa Bauer und Partheil 2009 oder Beutelspacher et al. 2011. Insbesondere wird die hohe Schulrelevanz der zu Studienbeginn vermittelten grundlegenden Konzepte der Analysis von Seiten der Studierenden kaum gesehen und von Seiten der Lehrenden auch nicht betont. Folglich werden diese Konzepte weder als fundamentale Ideen der Mathematik wahrgenommen noch werden sie in den Grundvorstellungsvorrat aufgenommen. Eine Sinnstiftung dieser im Studium prominent platzierten Ausbildungsteile passiert auf diese Weise also nicht. Als Konsequenz reihen Studierende des Unterrichtsfaches Mathematik die Fachwissenschaft an die vorletzte Stelle in einer Relevanzbewertung der Wissensbereiche ihrer Ausbildung (Etzlstorfer 2010, S. 105).

Das eingereichte Projekt stellt einen ersten Versuch dar, die fachliche mit der fachdidaktischen Ausbildung im Lehramtsstudium Mathematik an der Universität Wien geeignet zu verzahnen, um so die vielfältigen Beziehungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik explizit aufzuzeigen und für die Studierenden nutzbar zu machen.

2. Das Konzept

Die Antragsteller haben im Wintersemester 2012/13 in einem Pilotprojekt – im starren Rahmen des derzeitigen Studienplans – eine enge Anbindung der fachdidaktischen an die fachmathematische Grundausbildung im Fach Analysis hergestellt. Konkret nahm das Wahlpflichtfach Schulmathematik 6 „Differential- und Integralrechnung" von S. Götz unmittelbaren Bezug auf den ersten und auf den zeitgleich stattfindenden zweiten, speziell auf die Bedürfnisse des Lehramtsstudiums zugeschnittenen Teil des Hauptvorlesungszyklus „Analysis" von R. Steinbauer. Um den gegenseitigen Bezug dieser Lehrveranstaltungen auch durch die personelle Besetzung zu unterstreichen hielten die Antragsteller wechselweise Übungsgruppen zur jeweiligen anderen Lehrveranstaltung und machten somit auch die konkrete Kooperation zwischen Fachdidaktiker und Fachmathematiker für die Studierenden erlebbar.

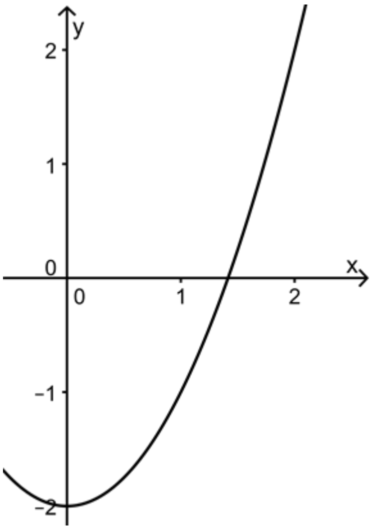
In der Analysis-Vorlesung wurden bewusst explizite Referenzpunkte gesetzt, die in der Schulmathematik aufgegriffen wurden. So konnten vielfach inhaltliche Zusammenhänge aufgezeigt werden, und die unterschiedlichen Zugänge der Hochschulanalysis einerseits und der Schuldifferential- und integralrechnung andererseits zusammengeführt werden. Auf diese Weise floss Sinnstiftung gezielt in die fachliche Grundausbildung von Lehramtsstudierenden ein. Insgesamt wurde so das Hintergrundwissen der Lehramtsstudierenden in dem in Rede stehenden Bereich geformt und fundiert, um ein möglichst lückenloses bzw. friktionsfreies Bild der zentralen Konzepte der elementaren Analysis (Folgen und Reihen, Stetigkeit reeller Funktionen, Ableitung einer Funktion, Integration) zu erreichen.

3. Fachdidaktischer Hintergrund

Themen- und zugangsabhängig tritt die Schulrelevanz in sehr unterschiedlichen Intensitäten auf. Während beispielsweise das Folgenkonzept in der Schule nahezu unverändert von der Hochschule übernommen wird, können bei der Einführung der Winkelfunktionen große Differenzen und damit Brüche in den Grundvorstellungen der Studierenden auftreten: hier die Definition am rechtwinkeligen Dreieck, dort über die komplexe Exponentialreihe.

Diese Diversität ist Ausdruck der Sonderrolle, die die Analysis innerhalb der Schulmathematik spielt, und wird durch die folgenden drei **Spannungsfelde**r charakterisiert ist.

1. **Anschauung – Strenge**: Das Alltagsdenken findet keine bruchlose Fortsetzung in der Analysis. Zum Beispiel garantiert erst die Vollständigkeit der reellen Zahlen die Gültigkeit des Nullstellensatzes. Eine Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, mit $f(x) = x^2 - 2$, hat auf dem Intervall $I = \{x \in \mathbb{Q} | 0 \leq x \leq 2\}$ keine Nullstelle, obwohl $f(0) = -2 < 0$ und $f(2) = 2 > 0$ gilt. In nebenstehendem Graph sieht man das nicht.



2. Ein weiteres Spannungsfeld besteht zwischen den **normativen Stoffbildern** der Lehrenden und den **individuellen Sinnkonstruktionen** der Lernenden, z. B. bei der Stetigkeit einer reellen Funktion: ε-δ-Definition versus der Graph hat keine Sprünge.

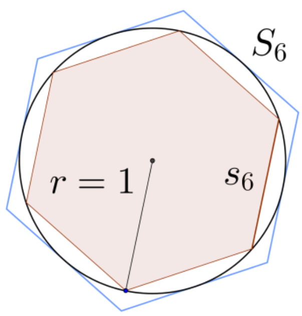
3. **Systematik – Heuristik**: Schließlich ist der Systematik eine gewisse Kalküllastigkeit inhärent, die oft auf Kosten der Heuristik geht und eine Sinnstiftung verhindert. Dann können Fragen wie „Was ist hier passiert?" bei folgender Rechnungen auftreten:
   $\int \sin 2x \, dx = \int \sin z \cdot \frac{1}{2} \, dz = -\frac{1}{2} \cos 2x + c$, wenn 2*x* durch *z* substituiert wird, bzw.
   $\int \sin 2x \, dx = \int 2 \sin x \cos x \, dx = \int 2z \cos x \frac{dz}{\cos x} = \sin^2 x + c'$, wenn $z = \sin x$ gesetzt wird (Götz et al. 2013a, S. 54).

4. Eine inhaltliche Kostprobe

Wir geben im Folgenden zwei Beispiele, wie der in Rede stehende Ansatz realisiert worden ist.

Eine innermathematische Anwendung des **Folgenkonzepts** enthält die Approximation des Umfanges des Einheitskreises nach Archimedes. Schuppar 1999, S. 35 und S. 40, entnehmen wir Rekursionsformeln für die Seitenlängen s_n der dem Einheitskreis eingeschriebenen (Umfänge $u_n < 2\pi$) und S_n der umschriebenen regelmäßigen *n*-Ecke (Umfänge $U_n > 2\pi$):

$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}$ und $S_n = \frac{s_n}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}}$. Geometrisch anschaulich scheint es evident zu sein, dass mit wachsendem *n* die (Umfänge der) *n*-Ecke sich dem (Umfang des) Kreis(es) annähern. Numerisch ist das nicht unbedingt so: es kann zur Subtraktionskatastrophe kommen, vgl. Schuppar 1999, S. 35 f.



Erst eine analytische Untersuchung schafft Gewissheit: wegen $s_n > 0$ für alle *n* > 2 und $s_{2n} < s_n$ ebenfalls für alle *n* > 2 ist die Folge $\langle s_n \rangle$

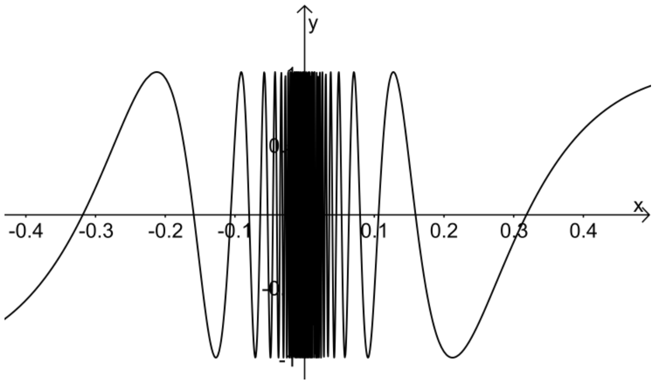
konvergent. Ihr Grenzwert s ergibt sich aus der Rekursion $s = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s^2}}$ zu $s = 0$. Damit ist die Differenz der Seitenlängen $S_n - s_n = s_n \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right)$ eine Nullfolge und die Differenz der Umfänge ebenso:

$$U_n - u_n = n \cdot S_n - n \cdot s_n = n \cdot (S_n - s_n) = \underbrace{n \cdot s_n}_{= u_n < 2\pi} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{s_n}{2}\right)^2}} - 1 \right).$$

Also ist $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n = 2\pi$.

In der Schule wird die Zahl π aufgrund der Ähnlichkeit aller Kreise zueinander als das konstante Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises definiert. In der Analysis-Vorlesung ist die Zahl π das Doppelte der Nullstelle der Kosinus-Funktion im Intervall [0,2]. Erst die Berechnung der Bogenlänge eines (Viertel-)Kreises gemäß $\int \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$ zeigt den Zusammenhang, sie kann viel zeitnäher in der Schulmathematik passieren.

Ein weiteres grundlegendes Konzept der Analysis ist die **Stetigkeit** reeller Funktionen. Die Folgenstetigkeit setzt dabei das Konzept „Grenzwert von Folgen" auf Bildern von Folgengliedern fort: Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ für alle Folgen $\langle x_n \rangle$ mit $x_n \to a$ gilt, dann heißt f stetig an der Stelle a. In der Analysis-Vorlesung ist diese Definition ein Theorem. Sie eignet sich gut, um Unstetigkeitsstellen nachzuweisen. Zwei **Grundvorstellungen** dazu: Sprungstellen und Oszillationsstellen.



Die reelle Funktion $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ zum Beispiel ist an der Stelle Null nicht stetig:

Für die Nullfolge $y_n = \frac{1}{(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}$ ist $|g(y_n)| = \left|\sin(2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}\right| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die ε-δ-Definition ist hingegen oft dann heranzuziehen, wenn die Stetigkeit einer reellen Funktion (an einer bestimmten Stelle) nachgewiesen werden soll.

5. Eine fachdidaktische Anknüpfung

Das Projekt hat zu einer hochschuldidaktischen Erweiterung des ursprünglich erst einmal für den schulischen Unterricht gedachten fachdidaktischen Konzepts der **Grundvorstellungen** nach dem Konzept von vom Hofe 1995 geführt: Zum Beispiel wurden drei Grundvorstellungen zum Thema „Folgen und Reihen" postuliert (Götz et al. 2013b) :

- Eine monoton wachsende/fallende und nach oben/unten beschränkte reelle Folge ist konvergent.
- Der in der Schulanalysis wichtigste Grenzwert ist $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$.
- Die geometrische Reihe ist – unter passenden Voraussetzungen – berechenbar.

Für mögliche Unstetigkeitsstellen einer reellen Funktion finden sich Vorschläge dazu in Punkt 4.

Es geht dabei darum, welche Bilder, Vorstellungen, Implikationen etc. sollen in den Köpfen der Studierenden zu bestimmten Begriffen abgerufen werden. Dies zu entscheiden, setzt natürlich eine hohe fachliche Kompetenz der Lehrenden neben einer Verankerung im aktuellen fachdidaktischen Diskurs voraus.

6. Resonanz der Studierenden

„Die Verbindung zwischen Analysis und Schulmathe wird sichtbar (sehr interessant!)“ und „Mir hat sich oft das eine oder andere, das wir in der Analysis VO durchgenommen hatten, besser erschlossen, als wir es wiederholt und dann aus einem anderen Blickwinkel betrachtet haben. […]“ sind positive Rückmeldungen zur Schulmathematik-Vorlesung im Rahmen der institutionalisierten Lehrveranstaltungsevaluation gewesen. Auf der anderen Seite ist „(Bei) Manchen Themen nicht klar, warum die Analysis in der Schule gebraucht wird. Habe ich persönlich in der Schule noch nie gehört und finde es auch nicht notwendig, dies zu erläutern.“ ebenfalls ebendort zu konstatieren gewesen.

Wie aus diesen Zitaten ersichtlich hat die Lehrveranstaltung die Studierenden polarisiert. Bei einem Teil der Studierenden ist die intendierte Wirkung, nämlich die Analysis als ein einheitliches Ganzes zu erkennen, erreicht worden. Die explizite Darstellung der Schulrelevanz der Hochschulanalysis hat dazu den entscheidenden Beitrag geleistet. Allerdings konnte dieser Effekt nicht bei allen Studierenden erreicht werden, wie die Rückmeldungen auch zeigen. Hier muss noch viel an Bewusstseinsarbeit und Auseinandersetzung mit den Studierenden von Seiten der Lehrenden passieren, um das gegenseitige Verständnis zu erhöhen und eine Effizienzsteigerung der Linderungsbemühungen der doppelten Diskontinuität zu erreichen. Eine genauere Analyse der Rückmeldungen gibt deutliche Hinweise auf eine Weiterentwicklung des Konzepts für zukünftige Durchführungen.

7. Resümee und Ausblick

Das vorgestellte Unternehmen kann als gelungener Auftakt einer Annäherung zweier Säulen der Lehramtsausbildung an der Universität Wien im Unterrichtsfach Mathematik gewertet werden. Es hat sehr zur Verständigung von Fach und Fachdidaktik und ihren Vertretern innerhalb der Fakultät beigetragen und stellt eine bereichernde Erfahrung für die beiden Lehrenden dar. Darüber hinaus hat auch die internationale Community positiv auf unser Unterfangen reagiert. Ein Vortrag von S. G. bei der 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Münster 2013 hat interessierte Reaktionen hervorgerufen.

Ein weiterer Aspekt unseres Versuchs ist es, im Hinblick auf das neu zu erstellende Curriculum für das Unterrichtsfach Mathematik Erfahrung für die Konzeption geeigneter „Schnittstellenmodule“ zwischen Hochschul- und Schulmathematik zu sammeln. Solche, in Kooperation zwischen Fachmathematik und Fachdidaktik gestaltete Ausbildungsteile gelten als wertvoller Bestandteil einer modernen, qualitätsvollen Ausbildung (vgl. etwa Beutelspacher et al. 2011) und sind unserer Auffassung nach im Rahmen der Diskussion um die LehrerInnenbildung NEU ein gewichtiges Argument für eine auch institutionelle Anbindung der fachdidaktischen an die fachliche Ausbildungsstätte.

Literatur

- Thomas Bauer, Ulrich Partheil, Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. Math. Semesterber. 56, 85 – 103 (2009).
- Albrecht Beutelspacher, Rainer Danckwerts, Gregor Nickel, Susanne Spies, Gabriele Wickel, Mathematik neu denken. Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2011.
- Sandra Etzlstorfer, $a^2 + b^2 = c^2$ – ¿Qué significa eso? Vergleich der Fachdidaktiken in Mathematik und Romanistik an der Universität Wien. Diplomarbeit an der Universität Wien, 2010.
- Stefan Götz, Hans-Christian Reichel (Hrsg.), Mathematik 8. Von R. Müller und G. Hanisch. öbv, Wien, 2013a.
- Stefan Götz, Hans-Stefan Siller, Evelyn Süss-Stepancik, „Es nähert sich an, erreicht ihn aber nie.“ – Grundvorstellungen zum Begriff des Grenzwertes. mathematik lehren (2013b, eingereicht).
- Felix Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Band I. B.G. Teubner, Berlin, 1908.

- Berthold Schuppar, Elementare Numerische Mathematik. Eine problemorientierte Einführung für Lehrer und Studierende. vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1999.
- Rudolf vom Hofe, Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Texte zur Didaktik der Mathematik. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg u. a., 1995.

Anschrift der Verfasser

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. **Stefan Götz** Stefan.Goetz@univie.ac.at

Ao. Univ.-Prof. Mag. Dr. **Roland Steinbauer** Roland.Steinbauer@univie.ac.at

Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15 (UZA 4)
A-1090 Wien