

Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff

Roland Steinbauer & Christoph Ableitinger
Fakultät für Mathematik, Universität Wien

GDM 2020

Motivation

Wichtiges Ziel der fachl. &-didaktischen LA-Ausbildung

Aufbau von belastbaren Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der (Schul-)Mathematik.

Wie kann das (effizient) erreicht werden?

Insbesondere unter widrigen Umständen wie:

- wenig fachliche/fachdidaktische Ausbildung
- wenig Operieren \rightsquigarrow wenig technisches Verständnis
- vorhandenen Fehlvorstellungen

Projekt & Studie im Überblick

BELLA (=Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis)

Hochschuldidaktisches Projekt zur empirischen Erforschung von
Beliefs und Vorstellungen
von B.Ed.-Studierenden im UF Mathematik zu
Kernbegriffen der Analysis.

- **WER:** Didaktiker/innen, Mathematiker/innen Verbund Nord-Ost
C. Ableitinger, A. Anger, S. Götz, R. Steinbauer, E. Süss-Stepancik
- **Wann:** seit dem Studienjahr 2018/19,
- **Was:** 3 Erhebungsinstrumente
 - Fragebögen zu (A) Vorstellungen & (B) Fachwissen
 - Repertory Grids zu (C) Beliefs
- **Hier:** (A) und (B) speziell zum Grenzwertbegriff
- **Verweis:** (C) zum Grenzwertbegriff \rightsquigarrow Beitrag von S. Götz

Forschungsfragen & curricularer Hintergrund

Curricularer Hintergrund

Geometrie & lin. Algebra, Stochastik, Analysis:

Fach-LVAs xxx → Schulmathematik-LVAs xxx

- getrennt vom Fachstudium
- adressatenspez. gestaltet (?)
- Relevanz/angemessene Verwendung fachmath. Konzepte für/im MU
- typische Fehlvorstellungen
- passende Interventionsmöglichkeiten

Forschungsfragen

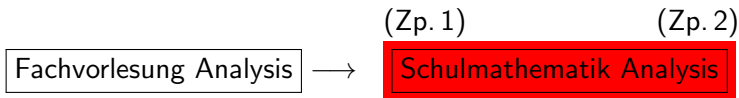
- 1 Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?
- 2 In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

Hier: Vorstellungen zum Grenzwertbegriff

Die Untersuchung(1): Setup

Fragebogenuntersuchung

- Wintersemester 2018/19
- rund um VO „Schulmathematik Analysis“ (R.S. & E.S-S.)
- 5. Semester, BEd



- Zeitpunkt1: (A1) Vorstellungen & (B) Fachwissen

- Zeitpunkt2: (A2) Vorstellungen

Die Untersuchung(2): Vorstellungen

(A1) Vorstellungen & (A2) Vorstellungen

- Umfrage in erster/letzter Vorlesungseinheit
- Vorstellungen **vor** dem Fachwissen abgefragt.
- Durch Präambel Kontext gesetzt.

Die Untersuchung(2): Vorstellungen

(A1) Vorstellungen & (A2) Vorstellungen

- Umfrage in erster/letzter Vorlesungseinheit
- Vorstellungen **vor** dem Fachwissen abgefragt.
- Durch Präambel Kontext gesetzt.

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist [...] die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind. [...]

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern. [...]

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese **nicht** als Testfragen.

Die Untersuchung(2): Vorstellungen

(A1) Vorstellungen & (A2) Vorstellungen

- Umfrage in erster/letzter Vorlesungseinheit
- Vorstellungen **vor** dem Fachwissen abgefragt.
- Durch Präambel Kontext gesetzt.
- Direkte Frage nach Vorstellung(en) zum Grenzwertbegriff

Die Untersuchung(2): Vorstellungen

(A1) Vorstellungen & (A2) Vorstellungen

- Umfrage in erster/letzter Vorlesungseinheit
- Vorstellungen **vor** dem Fachwissen abgefragt.
- Durch Präambel Kontext gesetzt.
- Direkte Frage nach Vorstellung(en) zum Grenzwertbegriff

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem **Grenzwert einer Folge** stelle ich mir vor ...

Die Untersuchung(2): Vorstellungen

(A1) Vorstellungen & (A2) Vorstellungen

- Umfrage in erster/letzter Vorlesungseinheit
- Vorstellungen **vor** dem Fachwissen abgefragt.
- Durch Präambel Kontext gesetzt.
- Direkte Frage nach Vorstellung(en) zum Grenzwertbegriff
- Insgesamt 9 Items zu Vorstellungen:
 - Reihen
 - Vollständigkeit
 - Stetigkeit
 - Differenzierbarkeit
 - (un)bestimmtes Integral
 - Nullstellensatz

Die Untersuchung(3): Fachwissen

(B) Fachwissen

- **Nach** Erhebung der Vorstellungen
- nur zum Zeitpunkt 1 (= nach Ende Fach-VO)
- 18 Items, davon 4 zum Grenzwertbegriff

Die Untersuchung(3): Fachwissen

(B) Fachwissen

- **Nach** Erhebung der Vorstellungen
- nur zum Zeitpunkt 1 (= nach Ende Fach-VO)
- 18 Items, davon 4 zum Grenzwertbegriff

10. Wie verhalten sich die Eigenschaften „konvergent“ und „beschränkt“ einer reellen Folge zueinander? Setzen Sie für beide Richtungen jeweils den korrekten Pfeil \Rightarrow oder \nRightarrow , sowie \Leftarrow oder \nLeftarrow ein!

konvergent

.....
.....

beschränkt

Die Untersuchung(3): Fachwissen

(B) Fachwissen

- **Nach** Erhebung der Vorstellungen
- nur zum Zeitpunkt 1 (= nach Ende Fach-VO)
- 18 Items, davon 4 zum Grenzwertbegriff

14. Für die EULER'sche Zahl e gilt (Mehrfachnennungen möglich):

$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$e = 2.718$

$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Die Untersuchung(3): Fachwissen

(B) Fachwissen

- **Nach** Erhebung der Vorstellungen
- nur zum Zeitpunkt 1 (= nach Ende Fach-VO)
- 18 Items, davon 4 zum Grenzwertbegriff

Verbundene Stichprobe aller 3 Erhebungen: $n = 59$

Auswertung

- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen

Auswertung

Annäherungsvorstellung (AV): Das Zustreben oder Annähern der Folgenglieder an einen festen Wert

Umgebungsvorstellung (UV): In jeder Umgebung um den Limes liegen schließlich alle weiteren Folgenglieder.

Objektvorstellung (OV): Limes als math. Objekt, das durch Folge definiert/konstruiert wird.

vgl. (Greefrath et. al., 2016)

Auswertung

- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Bewertung der geäußerten Vorstellungen

Auswertung

- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Bewertung der geäußerten Vorstellungen

	Qualität der Ausprägung	Beispielformulierungen (AV)
U	Unspezifisch; kein Zugriff auf Vorstellung möglich	Wert, der angestrebt wird
1	GV naiv ausgedrückt	nähert sich im Unendlichen an
2	GV schwach ausgeprägt/ungenau formuliert	kommt immer näher
3	GV vorhanden, nicht korrekt formuliert	kommt unendlich nahe
4	GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert	kommt schließlich beliebig nahe
F	Fehlvorstellung erkennbar	letztes Folgenglied

Auswertung

- Abgleich mit (normativen) Grundvorstellungen
- Kategoriensystem zur Bewertung der geäußerten Vorstellungen
- Ähnliche Äußerungen zu geglätteten Formulierungen zusammengefasst
- Innerhalb der Kategorien U, 1-4, F nach Qualität gereiht
- Fehlvorstellungen erfasst, kategorisiert & Literaturabgleich mit (Fehl-)Vorstellungen von Schüler*innen
(z.B. Marx, 2013)

Vorhandene Vorstellungen

#... Gesamtzahl der Nennungen

Ø... Arith. Mittel der Ausprägungsqualität, exkl. U und F = 1

	AV #	AV Ø	UV #	UV Ø	OV #	OV Ø
Zp. 1	44	1.39	3	2.0	9	1.0
Zp. 2	45	1.81	14	2.5	1	4.0

Vorhandene Vorstellungen

#... Gesamtzahl der Nennungen

\emptyset ... Arith. Mittel der Ausprägungsqualität, exkl. U und F = 1

	AV #	AV \emptyset	UV #	UV \emptyset	OV #	OV \emptyset
Zp. 1	44	1.39	3	2.0	9	1.0
Zp. 2	45	1.81	14	2.5	1	4.0

- AV bei weitem am häufigsten genannt; Zunahme bei UV

Vorhandene Vorstellungen

#... Gesamtzahl der Nennungen

Ø... Arith. Mittel der Ausprägungsqualität, exkl. U und F = 1

	AV #	AV Ø	UV #	UV Ø	OV #	OV Ø
Zp. 1	44	1.39	3	2.0	9	1.0
Zp. 2	45	1.81	14	2.5	1	4.0

- AV bei weitem am häufigsten genannt; Zunahme bei UV
- Qualität bei UV besser als bei AV

Ausprägung Annäherungsvorstellung

- AV häufiger genannt (79% / 75%) als UV, obwohl Standarddef.
- Qualität schlechter als bei UV (2.5 zum ZP. 2)

Ausprägung Annäherungsvorstellung

- AV häufiger genannt (79% / 75%) als UV, obwohl Standarddef.
- Qualität schlechter als bei UV (2.5 zum ZP. 2)

	U	1,F	2	3	4	#	Ø
Zp. 1	8	19	14	2	0	44	1.39
Zp. 2	9	9	23	4	0	45	1.81

Ausprägung Annäherungsvorstellung

- AV häufiger genannt (79% / 75%) als UV, obwohl Standarddef.
- Qualität schlechter als bei UV (2.5 zum ZP. 2)
- leichte Verbesserung nach der Schulmathematik
- aber keine optimale Formulierung!

	U	1,F	2	3	4	#	\emptyset
Zp. 1	8	19	14	2	0	44	1.39
Zp. 2	9	9	23	4	0	45	1.81

Ausprägung Umgebungsvorstellung

- selten genannt obwohl Standarddefinition
- Zunahme nach der Schulmathematik (5% \rightsquigarrow 23%)

	U	1,F	2	3	4	#	\emptyset
Zp. 1	0	1	1	1	0	3	2.0
Zp. 2	0	2	6	3	3	14	2.5

- UV weist höhere Qualität auf als AV; insbes. zum Zp. 2

Ausprägung Umgebungsvorstellung

- selten genannt obwohl Standarddefinition
- Zunahme nach der Schulmathematik (5% \rightsquigarrow 23%)
- UV weist höhere Qualität auf als AV; insbes. zum Zp. 2

	U	1,F	2	3	4	#	∅
AV Zp. 2	9	9	23	4	0	45	1.81
UV Zp. 2	0	2	6	3	3	14	2.5

Fehlvorstellungen

Fehlvorstellungen AV (# Zp. 1 / # Zp. 2)

- Limes als Schranke (12/10)
- letztes Folgenglied (1/2)
- Nichterreichen des GW (13/8)
- Formale Missverst. (2/2)

Vergleich mit

- Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen“
(Marx 2013, Bender 1991)
- „Basic metaphor of infinity“ (Lakoff, Nunez 2000)

Fehlvorstellungen

Fehlvorstellungen AV (# Zp. 1 / # Zp. 2)

- Limes als Schranke (12/10)
- letztes Folgenglied (1/2)
- Nichterreichen des GW (13/8)
- Formale Missverst. (2/2)

Vergleich mit

- Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen“
(Marx 2013, Bender 1991)
- „Basic metaphor of infinity“ (Lakoff, Nunez 2000)

Ergebnis eines unendlichen Prozesses als
Verbindung vom potentiell zum aktual Unendlichen

Fehlvorstellungen

Fehlvorstellungen AV (# Zp. 1 / # Zp. 2)

- Limes als Schranke (12/10)
- letztes Folgenglied (1/2)
- Nichterreichen des GW (13/8)
- Formale Missverst. (2/2)

Vergleich mit

- Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen“
(Marx 2013, Bender 1991)
- „Basic metaphor of infinity“ (Lakoff, Nunez 2000)

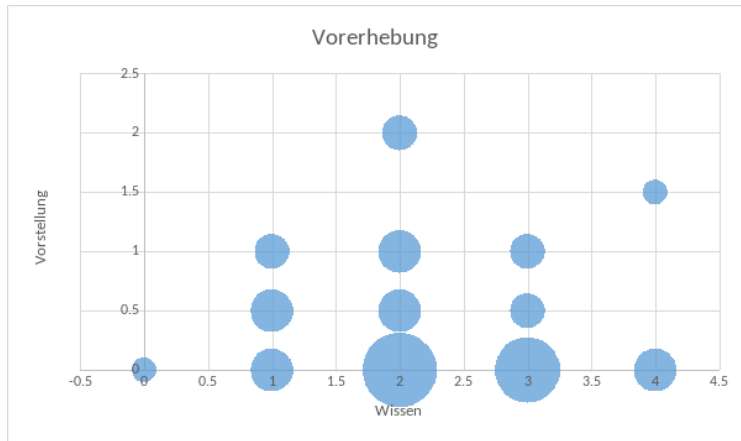
weisen auf Permanenz von

Verständnisproblemen aus der Schule

hin.

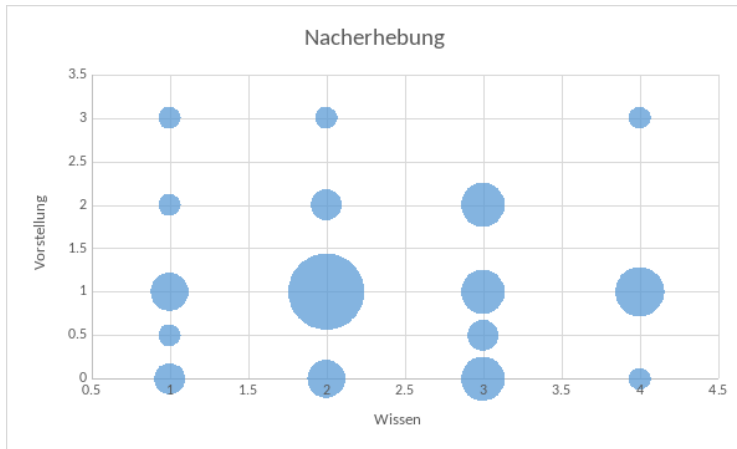
Vorstellungen & Fachwissen

keine Korrelation zw. Qualität GV & Fachwissen



Vorstellungen & Fachwissen

keine Korrelation zw. Qualität GV & Fachwissen



leichte Verbesserung der Qualität GV, **unabhängig** vom Fachwissen

Conclusio

Forschungsfragen

- 1 Welche (Grund-)Vorstellungen werden im Laufe der (fachlichen) Ausbildung aufgebaut?

- Hauptstächlich AV ausgeprägt (79% / 75%)
- AV hat niedrigere Qualität als UV
- OV nicht oder nur unspezifisch ausgeprägt
- GV eher durch MU entstanden als durch Fachausbildung
- ca. 1/3 hat Fehlvorstellungen ähnlich zu Schüler*innen

Conclusio

Forschungsfragen

2 In wie weit können diese durch den schulmathematischen Teil der Ausbildung verändert bzw. verbessert werden?

- Auftreten der UV gesteigert (5% \rightsquigarrow 23%)
- Qualität der Ausprägung aller GV gesteigert
- Qualität der Ausprägung UV (2.5) besser als AV (1.81)
- Qualität insgesamt verbesserungswürdig!

Empfehlung, Ausblick, Diskussion

Schon in der Fachausbildung, aber generell

- explizites Ansprechen der GV (va. AV, UV), evtl. im Kontext dynamischer vs. statischer Sichtweisen im Kontext potentiell vs. aktual Unendlich
- explizites Aufdecken schlechter Formulierungen der AV
- explizites Ansprechen der häufigsten Fehlvorstellungen

... conceptual change theory

Empfehlung, Ausblick, Diskussion

Schon in der Fachausbildung, aber generell

- explizites Ansprechen der GV (va. AV, UV), evtl. im Kontext dynamischer vs. statischer Sichtweisen im Kontext potentiell vs. aktual Unendlich
- explizites Aufdecken schlechter Formulierungen der AV
- explizites Ansprechen der häufigsten Fehlvorstellungen

... conceptual change theory

Für die Zukunft

- Vergleich mehrerer Jahrgänge
- Vergleich mit Fachstudierenden
- Weitere Themen (Stetigkeit, Diff. und Integralbegriff)
- Einfluss des „Operierens“ auf Entwicklung von GV
- ...

Literatur

Ableitinger, C., Kittinger, H., Steinbauer, R. (2020).
Adressatenspezifische Gestaltung von Fachvorlesungen im Lehramt: eine Fallstudie als Anstoß für vertiefte Reflexionen. Math. Did. 43.

Bender, P. (1991). *Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten.* MNU 44:238-243.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis.* Berlin: Springer-Spektrum.

Lakoff, G., Nunez, G. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* New York: Basic Books.

Marx, A.(2013). *Schülervorstellungen zu unendlichen Prozessen.* J. Math. Did. 34:73-97.

Vielen Dank für ihre Aufmerksamkeit!