Raumzeitsingularitäten

Die Theoreme von Penrose und Hawking

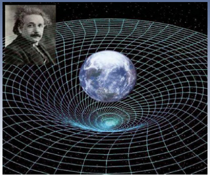
Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

ÖMG-Fortbildungstagung für Lehrkräfte

Wien, 22. April 2022

Singularitätentheoreme: Worum geht es?



- Albert Einstein,
  Allgemeine Relativitätstheorie:

  Gravitation ist Raumzeitgeometrie

- Roger Penrose & Stephen Hawking,
  Singularitätentheoreme:

  Raumzeitgeometrie bricht unter extremen Bedingungen zusammen: Raumzeitsingularitäten entstehen!

- Mathematische Sätze der (Lorentz-)Differentialgeometrie

  Mathematische Beschreibung für Schwarze Löcher und Urknall

  Mathematics/Geometry for the limits of the universe.

Inhalt

Inhalt

ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- Startpunkt, November 1915:
  Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:
  Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der

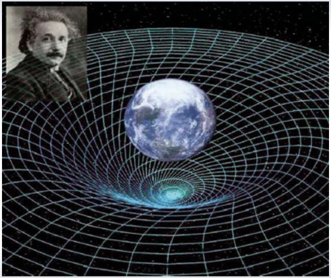
  gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit

General Relativity in a nutshell (J. A. Wheeler)

Matter tells spacetime how to curve.
Spacetime tells matter how to move.

Matter tells spacetime how to curve

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine **geometrische Theorie**: Die Einsteingleichungen verknüpfen die Raum-Zeit-Geometrie mit dem Materieinhalt.



$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik}}_{\textbf{Krümmung}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{\textbf{Masse/Energie}} T_{ik}$$

$$E = mc^2$$

Krümmung der Raumzeit proportional ihrem Energieinhalt

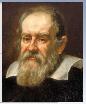
2 Fragen:

- Warum kann Gravitation geometrisch beschrieben werden?
- Warum gerade die Krümmung? (Und was genau ist Krümmung?)

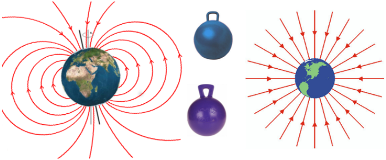
Warum ist die Schwerkraft geometrisch?

Warum kann sie als Eigenschaft des Raumes aufgefasst werden?

Äquivalenzprinzip **Galileo Galilei [1564–1642]**



Alle Körper fallen gleich schnell

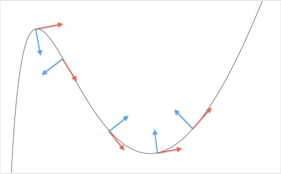


Manget- vs. Gravitationsfeld

Antwort: Schwerkraft ist universell; wirkt für alle Massen gleich.

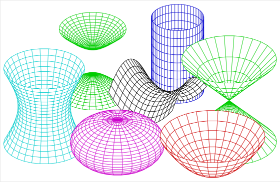
Was genau ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



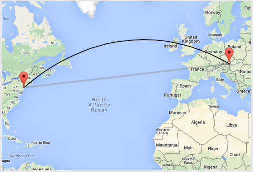
Abweichung von Geraden

Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

Konsequenzen der Krümmung



Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

Geodäten ersetzen Geraden

Was genau ist Krümmung?

Differentialgeometrie **Bernhard Riemann [1826–1866]**

Mannigfaltigkeit & Metrik: (M, g)

Skalarprodukt in jd. Pkt. einer n-dim. gekr. Fläche

Krümmungstensor: fasst 2-dim. Kr. zusammen

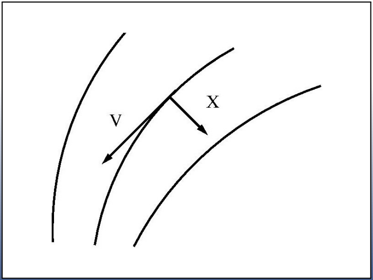
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Geodätische Deviation

relative Beschleunigung

Krümmung in Form von R bestimmt **Abstände** zw. Geodäten

$$\ddot{X} = R(V, X)\, X$$



Warum gerade die Krümmung?

Berechne relative Beschleunigung frei fallender Körper

- Newtonsche Gezeitenkräfte: $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m} = \Delta\phi\,\vec{x} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \vec{x}$$

- Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V,X)\,X$$

Kombiniere das!

$$R(V,X) \sim 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho$$

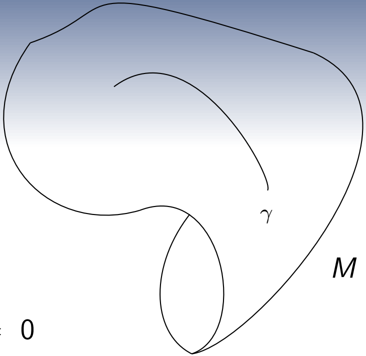
$$\vdots$$

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} R\, g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}$$

Spacetime tells matter how to move

Teilchen bewegen sich auf **Geodäten**
d.h. auf Kurven in M

$$\gamma : [a, b] \to M$$



die **möglichst gerade** sind
$\rightsquigarrow$ erfüllen **Geodätengleichung**

$$\underbrace{\ddot{\gamma}^i}_{\text{Beschl.}} + \underbrace{\Gamma^i_{jk}}_{\text{Geom.}} \underbrace{\dot{\gamma}^j \, \dot{\gamma}^k}_{\text{Geschw.}} = 0$$

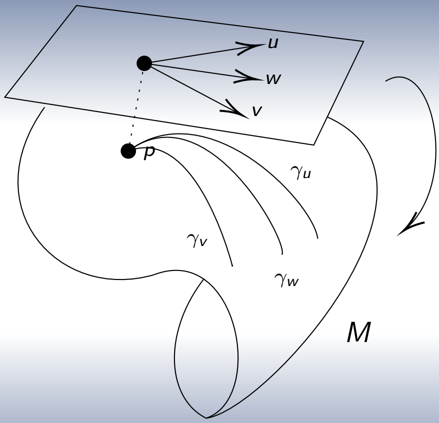
$$\left.\begin{array}{llll} \bullet\ \text{Beobachter:} & v < c, & \langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle < 0, & \text{zeitartig} \\ \bullet\ \text{Lichtteilchen:} & v = c, & \langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle = 0, & \text{lichtartig, null} \end{array}\right\} \text{kausal}$$

Geodäten & Vollständigkeit

$$\boxed{\ddot\gamma + \Gamma\,\dot\gamma^2 = 0}$$

Gewöhnliche Diffgleichung

- 2. Ordnung:
  in jd. Pkt. & in jd. Richtung
  gibt es eine eindeutige Lösung
- nichtlinear:
  Lösungen i.a. **nicht** global
- alle Lösungen global:
  M schön $\rightsquigarrow$ **vollständig**
- Lösung nicht global:
  unvollständige Geodäte



Inhalt

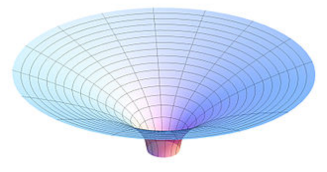
Die Schwarzschildmetrik

Einfachste Lösung der Einsteingleichungen

Karl Schwarzschild [1873–1916]

Raumzeit außerhalb
nichtrotierender Kugel mit Masse M

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$



Außenraumlösung

Singularität (?!?)
am Schwarzschildradius
$r_s = 2M$, genauer

$$r_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Die Schwarzschildsingularität

Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der "physikalische Größen divergieren" d.h. „unendlich groß" werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	Radius	r_s
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	10^{-26} cm

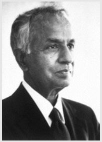
ABER . . .

Gravitationskollaps

Ausgebrannte Sterne fallen zu **weißen Zwergen** zusammen.

Subrahmanyan Chandrasekhar [1910–95]

Chandrasekhar-Grenze (1930 Nobelp. 1983):
Ein weißer Zwerg, dessen Masse größer als $1.4\,M_\odot$ ist instabil und stürzt unter seiner eigenen Gravitation weiter zusammen.

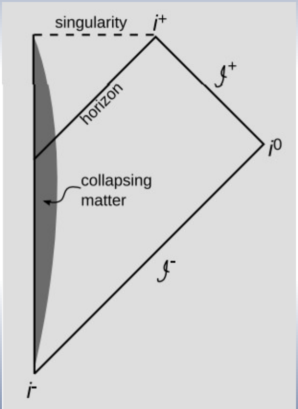


Robert Oppenheimer [1906–67], H. Snyder [1910–62]

Oppenheimer-Snyder Kollaps (1939):
Schwarzschild-Außenraum geklebt an Stern (Staub ohne Druck) führt zu Kollaps über den Schwarzschildradius hinaus.
. $\rightsquigarrow$ Schwarzes Loch

Kollaps & die innere Schwarzschildmetrik

Penrose-Carter Diagramm



- Die Schwarzschildsingularität ist gar keine Singularität, sondern nur ein Koordinatenproblem.
- Die Fläche $r_S = 2M$ ist ein Ereignishorizont: Einmal überquert ist eine Rückkehr ausgeschlossen
- Der Stern im OS-Modell kollabiert bis zum Radius $r = 0$.
- Dort ist Krümmung unendlich: „echte" Singularität

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

Die Situation in den frühen 1960-ern

Einerseits: Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, aber

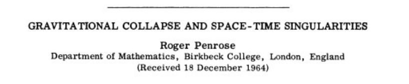
- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind nicht generisch, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

Andererseits: Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...

Inhalt

Das 1965-Paper von Roger Penrose


GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES

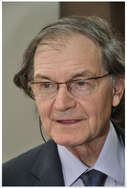
Roger Penrose

Department of Mathematics, Birkbeck College, London, England

(Received 18 December 1964)

3 Seiten, 3 brilliante Ideen

Nobelpreis 2020



1. Neue Definition von Singularitäten
2. Begriff der gefangenen Fläche
3. Erstes Singularitätentheorem

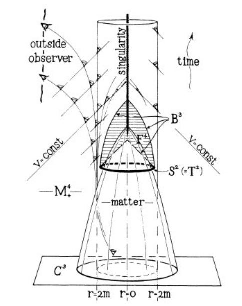


FIG. 1. Spherically symmetrical collapse (one space dimension surpressed). The diagram essentially also serves for the discussion of the asymmetrical case.

Singularitäten in der ART

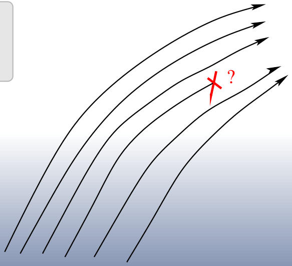
Problem:

- Singularitäten sind nicht einfach Punkte, wo eine physikalische Größe (z.B. Masse, Krümmung, etc.) unendlich wird
- sondern, „Punkte, die nicht zur Raumzeit gehören"

Lösung: Moderne Definition von Singularitäten (Penrose 1965)

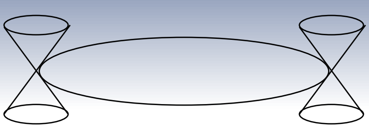
> Eine Raumzeit heißt singulär, wenn es **unvollständige kausale Geodäten** gibt.

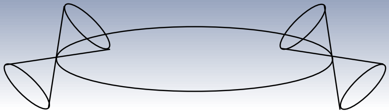
- Intuitiv: Die Weltlinie eines Beobachters endet...
- Technisch: Lösung der Geodätengleichung lässt sich nicht fortsetzen.



Gefangene Flächen

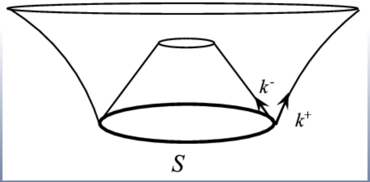
Punkt im Gravitationskollaps, nachdem es kein Zurück mehr gibt.

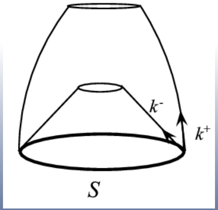




Normal: Licht kann nach Innen und Aussen laufen.

Gefangen: Licht kann nur nach Innen laufen.





Das Penrose-Theorem

Theorem (Penrose 1965)

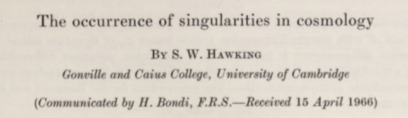
Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Es gibt eine gefangene Fläche — Punkt ohne Wiederkehr erreicht
2. Es gilt die Null-Energiebedingung — Gravitation ist immer anziehend
3. Es gibt eine nicht-kompakte Cauchyfläche — Abgeschlossenes System

Dann ist sie singulär.

Beim Gravitationskollaps entstehen gefangene Flächen
daher generisch, d.h. **ohne Symmetrien** eine Singularität.

Hawking's Publikationsserie 1965–67



The occurrence of singularities in cosmology

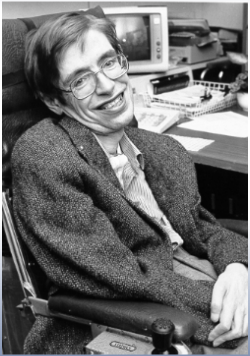
By S. W. Hawking

Gonville and Caius College, University of Cambridge

(*Communicated by H. Bondi, F.R.S.—Received 15 April 1966*)

Fünf fundamentale Arbeiten in kürzester Zeit

1. Sofortige Anwendung der Penrose-Ideen & Methoden in der Kosmologie
2. Import wesentlicher Techniken aus der Riemann-Geometrie
3. kausale Geodäten maximieren Eigenzeit



Das Hawking-Theorem

Theorem (Hawking 1966)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Es gibt 3-Fläche m. positive Expansion
2. Es gilt die starke Energiebedingung
3. Es gibt eine kompakte Cauchyfläche

Dann ist sie singulär.

Kosmologisches Analogon zu gefangener Fläche

Gravitation anziehend; stärker!

Kosmologische Situation

Ein expandierendes Universum hat in der Vergangenheit eine Singularität $\rightsquigarrow$ Urknall

Das Muster der Theoreme & Beweise

Muster-Theorem (José Senovilla, 1998)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

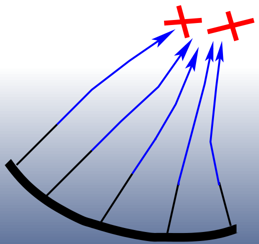
1. Ein geeignete Anfangsbedingung — Gravitation ist hier stark
2. Eine Energie- oder Krümmungs-Bedingung — Gravitation ist anziehend
3. Eine geeignete Kausalitätsbedingung — Globale Struktur der Raumzeit

Dann ist sie singulär.

1. **Anfangsbedingung** $\rightsquigarrow$ kausale Geodäten beginnen zu fokussieren
2. Energiebedingung $\rightsquigarrow$ Fokussierung geht weiter (Raychaudhuri-Gleichung) $\rightsquigarrow$ fokaler Punkt
3. Kausalitätsbed. $\rightsquigarrow$ kein fokaler Punkt

   Einziger Ausweg:

   kausale Geodäten sind enden vorher



Fokussierung (Raychaudhuri-Gleichung)

$$\dot\theta(t) = \underbrace{-\mathrm{Ric}\Big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\Big)}_{\geq 0 \quad \text{(EB)}} - \underbrace{\mathrm{tr}\big(\sigma^2(t)\big)}_{\geq 0} - \frac{1}{3}\,\theta^2(t) \leq -\frac{1}{3}\,\theta^2(t)$$

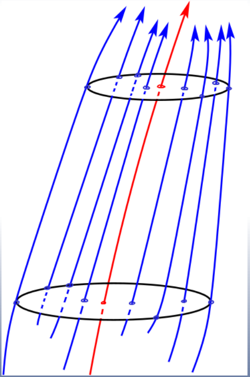
- (EB) $\Longrightarrow$ $\dot\theta(t) \leq 0$
- (AB) $\Longrightarrow$ $\theta(0) < 0$

$\rightsquigarrow$ $\theta(t) \to -\infty$ in endl. Zeit

$\rightsquigarrow$ $\exists$ fokaler Punkt
falls Geodäte solange ex.

- (KB) $\nexists$ fokaler Punkt

$\rightsquigarrow$ Geodäte muss
zu existieren aufhören

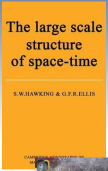


Flächenänderung $\sim \dot\theta$

Das Problem mit der Regularität

Theoreme funktionieren nur für glatte Metriken g

- ! g muss 2-mal stetig diffbar. vom Pkt. abhängen
- $\rightsquigarrow$ Theoreme gelten z.B. nicht für O.S.-Kollaps
- $\rightsquigarrow$ Frage nach Erweiterbarkeit
  Kann Singularität vermieden werden, für $g \notin C^2$?
  Besonders relevant: $g \in C^1$; Krümmung ok.
- ✗ Problem schon in [Hawking&Ellis, 1973] erkannt
- ✗ Lange Liste offener Probleme [Senovilla, 1998]
- ✓ Seit 2011
  spez. Regularisierungen für nicht-glatte Metriken
  [Piotr Chruściel & James Grant]
  Kausalitätstheorie in niedriger Regularität
  [Ettore Minguzzi]
- ✓ seit 2014
  Singualritätentheoreme für $g \in C^{1,1}$ und $g \in C^1$



Singularitätenthms. in niedriger Regularität

C^1-Hawking-Penrose Thm. [KOSS 2022]

Eine C^1-Raumzeit is singulär, wenn gilt:

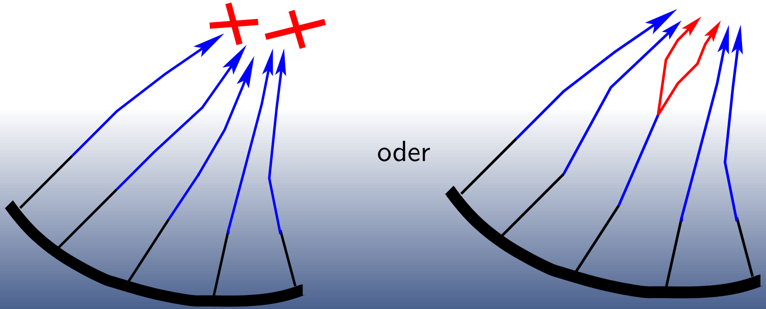
1. Es gibt gefangene Fläche/3-Fl. m. pos. Exp.
2. Es gelten geeignete Energiebedingung
3. Es gibt keine geschlossenen kausalen Kurven
4. Kausale Geodäten verzweigen sich nicht

(AB) wie gehabt

(EB) wie gehabt, aber...

(KB) fast wie gehabt

NEU: non-branching



Das Team

IOP Publishing Classical and Quantum Gravity
Class. Quantum Grav. **32** (2015) 155010 (12pp) doi:10.1088/0264-9381/32/15/155010

The Penrose singularity theorem in regularity $C^{1,1}$

Michael Kunzinger[1], Roland Steinbauer[1] and James A Vickers[2]

[1] University of Vienna, Faculty of Mathematics, Austria
[2] University of Southampton, School of Mathematics, UK

E-mail: michael.kunzinger@univie.ac.at, roland.steinbauer@univie.ac.at and J.A.Vickers@maths.soton.ac.uk

Received 1 February 2015, revised 12 May 2015
Accepted for publication 17 June 2015
Published 14 July 2015

CrossMark

Abstract
We extend the validity of the Penrose singularity theorem to spacetime metrics of regularity $C^{1,1}$. The proof is based on regularization techniques, combined with recent results in low regularity causality theory.

Keywords: singularity theorems, low regularity, regularization, causality theory

ıys. 391, 1143–1179 (2022)
tifier (DOI) https://doi.org/10.1007/s00220-022-04335-8

Communications in Mathematical Physics

Check for updates

The Hawking–Penrose Singularity Theorem for C^1-Lorentzian Metrics

Michael Kunzinger, Argam Ohanyan, Benedict Schinnerl, Roland Steinbauer

Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1090 Wien, Austria.
E-mail: michael.kunzinger@univie.ac.at; argam.ohanyan@univie.ac.at; benedict.schinnerl@univie.ac.at; roland.steinbauer@univie.ac.at

Received: 18 October 2021 / Accepted: 18 January 2022
Published online: 26 February 2022 – © The Author(s) 2022

Abstract: We extend both the Hawking–Penrose theorem and its generalisation due to Galloway and Senovilla to Lorentzian metrics of regularity C^1. For metrics of such low regularity, two main obstacles have to be addressed. On the one hand, the Ricci tensor now is distributional, and on the other hand, unique solvability of the geodesic equation is lost. To deal with the first issue in a consistent way, we develop a theory of tensor distributions of finite order, which also provides a framework for the recent proofs of the theorems of Hawking and of Penrose for C^1-metrics (Graf in Commun Math Phys 378(2):1417–1450, 2020). For the second issue, we study geodesic branching and add a further alternative to causal geodesic incompleteness to the theorem, namely a condition

Commun. Math. Phys.
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s00220-017-3047-y

Communications in Mathematical Physics

CrossMark

The Hawking–Penrose Singularity Theorem for $C^{1,1}$-Lorentzian Metrics

Melanie Graf[1], James D. E. Grant[2], Michael Kunzinger[1], Roland Steinbauer[1]

[1] Faculty of Mathematics, University of Vienna, Vienna, Austria. E-mail: melanie.graf@univie.ac.at; michael.kunzinger@univie.ac.at; roland.steinbauer@univie.ac.at
[2] Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, UK. E-mail: j.grant@surrey.ac.uk

Received: 26 June 2017 / Accepted: 10 October 2017

Abstract: We show that the Hawking–Penrose singularity theorem, and the generalisation of this theorem due to Galloway and Senovilla, continue to hold for Lorentzian metrics that are of $C^{1,1}$-regularity. We formulate appropriate weak versions of the strong energy condition and genericity condition for $C^{1,1}$-metrics, and of C^0-trapped submanifolds. By regularisation, we show that, under these weak conditions, causal geodesics necessarily become non-maximising. This requires a detailed analysis of the matrix Riccati equation for the approximating metrics, which may be of independent interest.

Danke

fürs Zuhören!

Bildnachweis & Disclaimer

p. 2, p. 6: Einstein & Raumkrümmung, courtesy of NASA.

p. 7: Galileo Galilei, open domain, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei%2C_1636.jpg
Galileo at Pisa, By Dan Hanson, https://www.pinterest.at/pin/348606827381663908/

p. 7: Bernhard Riemann, By August Weger, Public domain, via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/BernhardRiemannAWeger.jpg

p. 13: Karl Schwarzschild, Public domain, via Wikimedia Commons https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Karl_schwarzschild.jpg

p. 15: Subrahmanyan Chandrasekhar, Starchild Project NASA, Public domain, via Wikimedia Commons https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Subrahmanyan_Chandrasekhar.gif
Robert Oppenheimer, By Department of Energy, Office of Public Affairs, Attribution, via Wikimedia Commons https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/JROppenheimer-LosAlamos.jpg

p. 19: Roger Penrose, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/Roger_Penrose_9560.JPG, By Biswarup Ganguly, CC BY 3.0, via Wikimedia Commons

p. 24: Stephen Hawking, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Stephen_Hawking.StarChild.jpg, By NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

p. 11,12,26,27,29: Sketches by Roland Steinbauer, CC BY-NC-SA

All other pictures used are believed to be in the public domain with no attribution available.