

# Vorstellungen von zentralen mathematischen Begriffen beim Lernen und Lehren

**Stefan Götz**   **Roland Steinbauer**   Christoph Ableitinger

Fakultät für Mathematik  
Universität Wien  
Oskar-Morgenstern-Platz 1  
A-1090 Wien

stefan.goetz@univie.ac.at  
roland.steinbauer@univie.ac.at  
christoph.ableitinger@univie.ac.at

31. August 2022

- 1 Fachliche Grundlagen
- 2 Ein fachdidaktisches Konzept
- 3 Die Studie
- 4 Ergebnisse
- 5 Resümee
- 6 Literatur

## Lehrplan der AHS Oberstufe:

### 6. Klasse, 3. Semester, Kompetenzmodul 3

#### *Folgen*

- Zahlenfolgen als auf  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{N}^*$  definierte reelle Funktionen kennen [...];
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, **Grenzwert**) (Hervorhebung von den Autoren)

# Was sind Folgen?

Lehrplan der AHS Oberstufe:

6. Klasse, 3. Semester, Kompetenzmodul 3

*Folgen*

- Zahlenfolgen als auf  $\mathbb{N}$  bzw.  $\mathbb{N}^*$  definierte reelle Funktionen kennen [...];
- Eigenschaften von Folgen kennen und untersuchen können (Monotonie, Beschränktheit, **Grenzwert**) (Hervorhebung von den Autoren)

1	2	3	4	...	n	...	Natürliche Zahlen
↓	↓	↓	↓	...	↓	...	↓
$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	...	$a_n$	...	Reelle Zahlen

Abbildung: <https://wirtschaftslexikon.gabler.de/definition/folge-35196>

# Zwei Arten der graphischen Darstellung

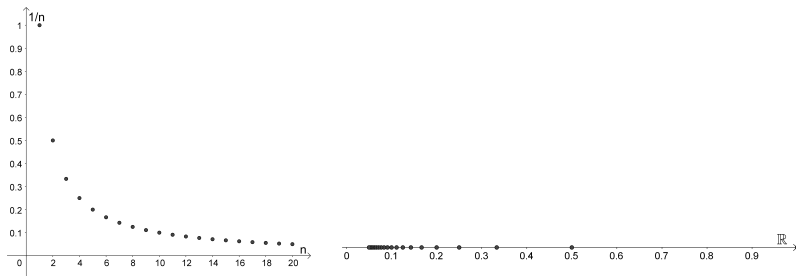


Abbildung: Graph und Bild einer Folge

# Zwei Arten der graphischen Darstellung

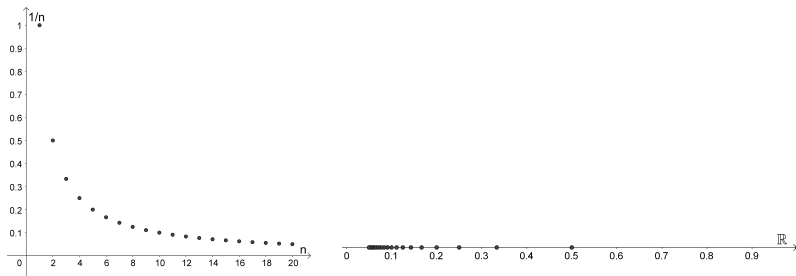


Abbildung: Graph und Bild einer Folge

## Interpretation

- Graph: Zuordnung „**Schritt für Schritt**“  $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$
- Bild:  $a_n \in \mathbb{R}$  „**fallen auf einmal**“ auf den Zahlenstrahl

# Grenzwert einer Folge



Abbildung: Ein „Stau“ der Bilder: Was passiert hier?

# Grenzwert einer Folge



Abbildung: Ein „Stau“ der Bilder: Was passiert hier?

## Verbale Definition

Eine Zahl  $a$  heißt **Grenzwert** einer Folge  $\langle a_n \rangle$ , wenn es für jeden noch so kleinen Abstand  $\varepsilon$  einen Index  $N$  gibt, sodass **alle Folgenglieder ab diesem Index** näher als  $\varepsilon$  bei  $a$  liegen.



# Grenzwert einer Folge



Abbildung: Ein „Stau“ der Bilder: Was passiert hier?

## Verbale Definition

Eine Zahl  $a$  heißt **Grenzwert** einer Folge  $\langle a_n \rangle$ , wenn es für jeden noch so kleinen Abstand  $\varepsilon$  einen Index  $N$  gibt, sodass **alle Folgenglieder ab diesem Index** näher als  $\varepsilon$  bei  $a$  liegen.

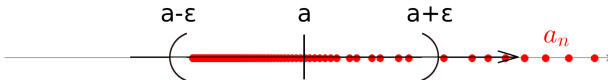


Abbildung: In der „ $\varepsilon$ -Umgebung“ von  $a$  liegen „fast alle“ Folgenglieder  $a_n$ , außerhalb nicht (nur endlich) viele

# Eine typische Fehlvorstellung bzw. -formulierung

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Der Wert dem sich die Folge annähert aber den sie nie  
wirklich erreicht



**Abbildung:** ... und die „zugehörige“ Fehlvorstellung (vgl. CORNU 2002, S. 154 f.; ABLEITINGER, GÖTZ & STEINBAUER eingereicht)

# Eine typische Fehlvorstellung bzw. -formulierung

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

Der Wert dem sich die Folge annähert aber den sie nie  
wirklich erreicht



**Abbildung:** ... und die „zugehörige“ Fehlvorstellung (vgl. CORNU 2002, S. 154 f.; ABLEITINGER, GÖTZ & STEINBAUER eingereicht)

## Tatsächlich

wird in der Grenzwertdefinition weder gefordert, dass die Folge den Grenzwert annimmt, noch ist es ausgeschlossen!

(STEINBAUER 2021, S. 148)

# Eine typische Fehlvorstellung bzw. -formulierung

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

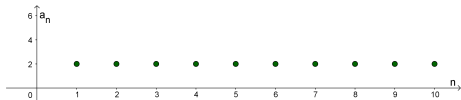
Der Wert dem sich die Folge annähert aber den sie nie wirklich erreicht



**Abbildung:** ... und die „zugehörige“ Fehlvorstellung (vgl. CORNU 2002, S. 154 f.; ABLEITINGER, GÖTZ & STEINBAUER eingereicht)

## Tatsächlich

wird in der Grenzwertdefinition weder gefordert, dass die Folge den Grenzwert annimmt, noch ist es ausgeschlossen!  
(STEINBAUER 2021, S. 148)



**Abbildung:** Eine konstante Folge erreicht ihren Grenzwert permanent

# Grundvorstellungen (VOM HOFE 1995, S. 97 f.)

(Hervorhebungen von den Autoren)

„Die Grundvorstellungsidee beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung**.

In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie [...] drei Aspekte dieses Phänomens:

- **Sinnkonstituierung** eines Begriffs durch **Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge** bzw. Handlungsvorstellungen.
- **Aufbau** entsprechender (visueller) **Repräsentationen** bzw. ‚Verinnerlichungen‘, die **operatives Handeln** auf der Vorstellungsebene ermöglichen.
- Fähigkeit zur **Anwendung eines Begriffs** auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur **in Sachzusammenhängen** oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.“

# Drei unterschiedliche Aspekte

[https://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen\\_in\\_der\\_Mathematik](https://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen_in_der_Mathematik)

## ① **Normativer** Aspekt:

Welche **Vorstellung sollten sich Schüler und Schülerinnen zu mathematischen Inhalten machen?**

„Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des/r Lehrenden adäquat?“

# Drei unterschiedliche Aspekte

[https://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen\\_in\\_der\\_Mathematik](https://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen_in_der_Mathematik)

## ① **Normativer** Aspekt:

Welche **Vorstellung sollten sich Schüler und Schülerinnen zu mathematischen Inhalten machen?**

„Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des/r Lehrenden adäquat?“

## ② **Deskriptiver** Aspekt:

**individuelle kognitive Strukturen, die aktiviert werden**

„Welche Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des/der Schülers/in erkennen?“

# Drei unterschiedliche Aspekte

[https://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen\\_in\\_der\\_Mathematik](https://de.wikipedia.org/wiki/Grundvorstellungen_in_der_Mathematik)

## ① **Normativer** Aspekt:

Welche **Vorstellung sollten sich Schüler und Schülerinnen zu mathematischen Inhalten machen?**

„Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des/r Lehrenden adäquat?“

## ② **Deskriptiver** Aspekt:

**individuelle kognitive Strukturen, die aktiviert werden**

„Welche Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des/der Schülers/in erkennen?“

## ③ **Diagnostischer** Aspekt:

„**Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben?**“



# Drei Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge

GREEFRATH, OLDENBURG, SILLER, ULM & WEIGAND 2016, S. 105 f.

- 1 **Annäherungsvorstellung (AV):** Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

# Drei Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge

GREEFRATH, OLDENBURG, SILLER, ULM & WEIGAND 2016, S. 105 f.

- 1 **Annäherungsvorstellung (AV):** Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.
- 2 **Umgebungsvorstellung (UV):** Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.

# Drei Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge

GREEFRATH, OLDENBURG, SILLER, ULM & WEIGAND 2016, S. 105 f.

- 1 **Annäherungsvorstellung (AV):** Das Zustreben oder Annähern der Werte der Folgenglieder an einen festen Wert oder ein Objekt liefert die Annäherungsvorstellung als intuitive Vorstellung vom Grenzwert.
- 2 **Umgebungsvorstellung (UV):** Zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert liegen ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung.
- 3 **Objektvorstellung (OV):** Grenzwerte werden als mathematische Objekte — etwa (feste) Werte, [...] — angesehen, die durch eine Folge — etwa eine Zahlenfolge, [...] — konstruiert oder definiert werden.

Zum Beispiel: Die EULER'sche Zahl

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

# Die Umgebungsvorstellung ist fachlich die wichtigste!

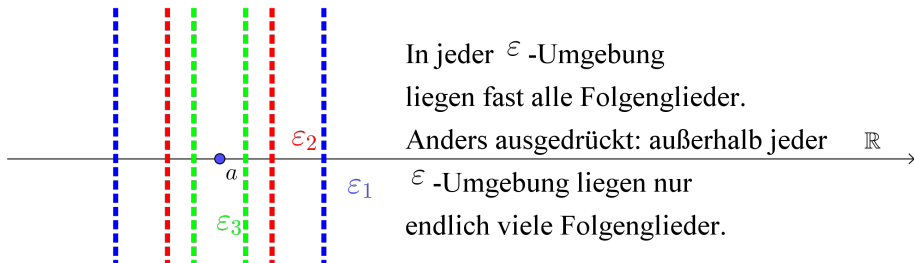
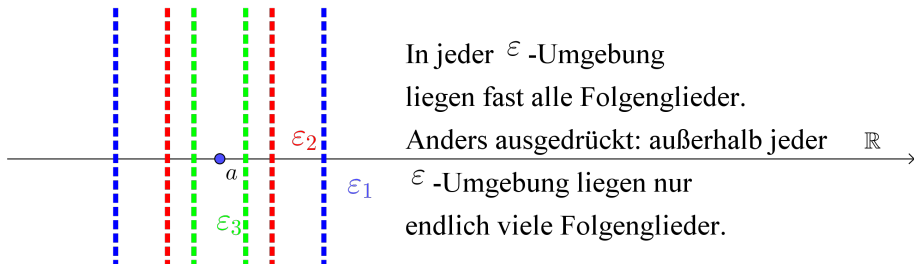


Abbildung: Zur Umgebungsvorstellung

# Die Umgebungsvorstellung ist fachlich die wichtigste!



In jeder  $\varepsilon$ -Umgebung  
liegen fast alle Folgenglieder.

Anders ausgedrückt: außerhalb jeder  $\varepsilon$ -Umgebung liegen nur endlich viele Folgenglieder.

Abbildung: Zur Umgebungsvorstellung

## Dynamische versus statische Sichtweise

- **Dynamische Annäherungsvorstellung:** Die Folge wird geistig „von Beginn an (gliedweise) durchlaufen“, die Folge entsteht Schritt für Schritt.
- **Statische Umgebungs- und Objektvorstellung:** Die Folge und ihre Glieder werden „als Ganzes“ gesehen, sie sind alle auf einmal da.

- 1 Welche **Vorstellungen** äußern **Studierende im Lehramt nach dem Besuch der entsprechenden fachlichen Lehrveranstaltung** zum Grenzwertbegriff (einer Folge) und wie lassen sich diese kategorisieren?

# Drei Forschungsfragen

- 1 Welche **Vorstellungen** äußern **Studierende im Lehramt nach dem Besuch der entsprechenden fachlichen Lehrveranstaltung** zum Grenzwertbegriff (einer Folge) und wie lassen sich diese kategorisieren?
- 2 Welche **Korrelation** zeigt sich zwischen diesen geäußerten **Vorstellungen** und der **Beurteilung der fachlichen Leistungen** der Studierenden?

- 1 Welche **Vorstellungen** äußern **Studierende im Lehramt nach dem Besuch der entsprechenden fachlichen Lehrveranstaltung** zum Grenzwertbegriff (einer Folge) und wie lassen sich diese kategorisieren?
- 2 Welche **Korrelation** zeigt sich zwischen diesen geäußerten **Vorstellungen** und der **Beurteilung der fachlichen Leistungen** der Studierenden?
- 3 Wie **verändern sich diese geäußerten Vorstellungen** durch die entsprechende **fachdidaktische Lehrveranstaltung**, in der Grundvorstellungen zum Grenzwert einer Folge explizit thematisiert werden?



# Das Design der Studie

→ Verbundene Stichprobe mit

$$n = 59$$

## BELLA – Beliefs zum Lernen und Lehren von Analysis

Ein entscheidendes Kriterium für guten Mathematikunterricht ist laut aktuellen Forschungsbefunden die Art und Weise, wie die verschiedenen Fachbegriffe im Bewusstsein der Lehrkraft repräsentiert sind; es geht also um die „Bilder im Kopf“.

Wir wollen in dieser Untersuchung herausfinden, welche Vorstellungen Sie mit verschiedenen Begriffen der Analysis verbinden und wie sich diese im Laufe Ihrer Ausbildung verändern.

Die Fragen sind selbstverständlich fachlicher Natur, allerdings gibt es nicht immer eine richtige bzw. eine falsche Antwort. Bitte versuchen Sie, die Fragen möglichst spontan zu beantworten und missverstehen Sie diese *nicht* als Testfragen.

### Fragebogen 1A: Vorstellungen zur Analysis

Bitte ergänzen Sie die folgenden Sätze z. B. formal, verbal und/oder bildlich.

1. Unter dem *Grenzwert einer Folge* stelle ich mir vor ...

**Abbildung:** Für die Studie relevanter Teil des Fragebogens

in zwei Schritten konsensual durch

- einen Fachmathematiker (R. S.) und
- einen Fachdidaktiker (C. A.):

in zwei Schritten konsensual durch

- einen Fachmathematiker (R. S.) und
  - einen Fachdidaktiker (C. A.):
- ① **Abgleich der Vervollständigungen** des Satzanfangs „**Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...**“ mit den **Grundvorstellungen** zum Grenzwertbegriff

in zwei Schritten konsensual durch

- einen Fachmathematiker (R. S.) und
  - einen Fachdidaktiker (C. A.):
- 1 **Abgleich der Vervollständigungen** des Satzanfangs „**Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...**“ mit den **Grundvorstellungen** zum Grenzwertbegriff
  - 2 Feststellung der **Qualität der Ausprägung der Grundvorstellung** und Einordnung in ein **System aus sechs Kategorien** aufsteigender Qualität → **rangskalierte** Daten:

U Unspezifisch (Antwort ermöglicht keinen Zugriff auf die Vorstellung)	1(F) Fehlvorstellung erkennbar	1 GV naiv ausgedrückt
	2 GV schwach ausgeprägt/ ungenau formuliert	3 GV vorhanden, nicht korrekt formuliert
		4 GV klar ausgeprägt und adäquat formuliert

# Ein konkretes Beispiel vorher – nachher

AV-Äußerungen niedriger Qualität

→ UV-Äußerungen höherer Qualität

- in 20% der Fälle

## AV-Äußerungen niedriger Qualität

→ UV-Äußerungen höherer Qualität

- in 20% der Fälle
- bei 14% Entwicklung einer AV der Kategorie U, 1 oder 1,5 zu einer UV der Kategorie 2 oder höher



# Ein konkretes Beispiel vorher – nachher

AV-Äußerungen niedriger Qualität

→ UV-Äußerungen höherer Qualität

- in 20% der Fälle
- bei 14% Entwicklung einer AV der Kategorie U, 1 oder 1,5 zu einer UV der Kategorie 2 oder höher

1. Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...

Zahl, die sich die Folgenglieder annähern

# Ein konkretes Beispiel vorher – nachher

## AV-Äußerungen niedriger Qualität

→ UV-Äußerungen höherer Qualität

- in 20% der Fälle
- bei 14% Entwicklung einer AV der Kategorie U, 1 oder 1,5 zu einer UV der Kategorie 2 oder höher

1. Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...

Zahl, die sich die Folgenglieder annähern

1. Unter dem Grenzwert einer Folge stelle ich mir vor ...

GW ist Zahl (Cherine)  
in dessen beliebig kleine Umgebung fast alle Folgenglieder liegen

Abbildung: von AV-Kategorie 1 zu UV-Kategorie 4

# Ein Blasendiagramm zur Forschungsfrage 1

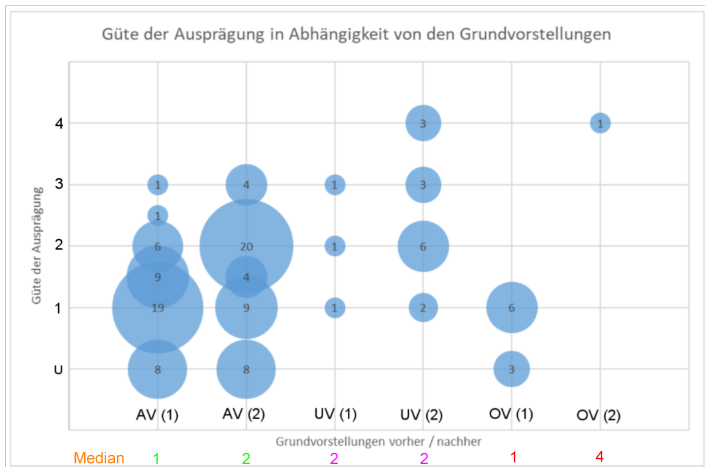


Abbildung: Rangskalierte Daten im Prätest (1) und im Posttest (2)

## Zusammenhang Qualität der Äußerung – Vorlesungsnote

### Rangkorrelation

- ① im **Prätest** (unabhängig von der zugeordneten Grundvorstellung):  
KENDALL'sches Tau von  $\tau = -0,30$  ( $p = 0,04$ ) →  
signifikante, mittlere negative Korrelation

## Zusammenhang Qualität der Äußerung – Vorlesungsnote

### Rangkorrelation

- 1 im **Prätest** (unabhängig von der zugeordneten Grundvorstellung):  
KENDALL'sches Tau von  $\tau = -0,30$  ( $p = 0,04$ ) →  
signifikante, mittlere negative Korrelation
- 2 im **Posttest**: Korrelation verschwindet fast zur Gänze ( $\tau = -0,09$ , nicht signifikant)

## Zusammenhang Qualität der Äußerung – Vorlesungsnote

### Rangkorrelation

- 1 im **Prätest** (unabhängig von der zugeordneten Grundvorstellung):  
KENDALL'sches Tau von  $\tau = -0,30$  ( $p = 0,04$ ) →  
signifikante, mittlere negative Korrelation
- 2 im **Posttest**: Korrelation verschwindet fast zur Gänze ( $\tau = -0,09$ , nicht signifikant)

**Conclusio:** Fachwissen korreliert erst mit Qualität der Formulierungen, nach der Intervention werden auch die Äußerungen von Studierenden mit schwachem oder mittlerem Fachwissen qualitativvoller

## Zusammenhang Qualität der Äußerung – Vorlesungsnote

### Rangkorrelation

- 1 im **Prätest** (unabhängig von der zugeordneten Grundvorstellung):  
KENDALL'sches Tau von  $\tau = -0,30$  ( $p = 0,04$ ) →  
signifikante, mittlere negative Korrelation
- 2 im **Posttest**: Korrelation verschwindet fast zur Gänze ( $\tau = -0,09$ , nicht signifikant)

**Conclusio:** Fachwissen korreliert erst mit Qualität der Formulierungen, nach der Intervention werden auch die Äußerungen von Studierenden mit schwachem oder mittlerem Fachwissen qualitativvoller

## Qualitätsänderung der Äußerungen vom Prä- zum Posttest?

- **JA!** — WILCOXON-Rangsummentest mit  $p = 3,5 \cdot 10^{-5}$ , also hochsignifikant über alle Grundvorstellungsordnungen hinweg

## Zusammenhang Qualität der Äußerung – Vorlesungsnote

### Rangkorrelation

- 1 im **Prätest** (unabhängig von der zugeordneten Grundvorstellung):  
KENDALL'sches Tau von  $\tau = -0,30$  ( $p = 0,04$ ) →  
signifikante, mittlere negative Korrelation
- 2 im **Posttest**: Korrelation verschwindet fast zur Gänze ( $\tau = -0,09$ , nicht signifikant)

**Conclusio:** Fachwissen korreliert erst mit Qualität der Formulierungen, nach der Intervention werden auch die Äußerungen von Studierenden mit schwachem oder mittleren Fachwissen qualitativvoller

## Qualitätsänderung der Äußerungen vom Prä- zum Posttest?

- **JA!** — WILCOXON-Rangsummentest mit  $p = 3,5 \cdot 10^{-5}$ , also hochsignifikant über alle Grundvorstellungszuordnungen hinweg
- **Nur AV:** ebenfalls hochsignifikantes **JA** mit  $p = 0,001!$



- **Dominanz der AV**, obwohl **UV im Studium priorisiert wird**  $\xrightarrow{?}$  stabiles Vorwissen aus der Schulzeit, das eine tragfähige Grundvorstellung des Konzepts „Grenzwert einer reellen Folge“ behindert:

*Die Hauptthese [...] lautet aber, daß diese sog. dynamische Auffassung von Folgen, die Schülern schon immer [...] nahegebracht werden sollte, mit verantwortlich ist für verbreitete Fehlvorstellungen [...] vom Begriff des Grenzwerts. [...] es gibt eine (nicht zeitliche, sondern epistemologische) Phase bei der Ausbildung des Grenzwertbegriffs, wo eine eher statische Betrachtungsweise geboten ist, weil die vordergründig dynamische in die Irre führt. (Bender 1991, S. 239, Hervorhebung im Original)*

- **Dominanz der AV**, obwohl **UV im Studium priorisiert wird**  $\xrightarrow{?}$  stabiles Vorwissen aus der Schulzeit, das eine tragfähige Grundvorstellung des Konzepts „Grenzwert einer reellen Folge“ behindert:

*Die Hauptthese [...] lautet aber, daß diese sog. dynamische Auffassung von Folgen, die Schülern schon immer [...] nahegebracht werden sollte, mit verantwortlich ist für verbreitete Fehlvorstellungen [...] vom Begriff des Grenzwerts. [...] es gibt eine (nicht zeitliche, sondern epistemologische) Phase bei der Ausbildung des Grenzwertbegriffs, wo eine eher statische Betrachtungsweise geboten ist, weil die vordergründig dynamische in die Irre führt. (Bender 1991, S. 239, Hervorhebung im Original)*

- (tw.) **Erfolg der Intervention** *Explizierung der Grundvorstellungen*

- **Dominanz der AV**, obwohl **UV im Studium priorisiert wird**  $\xrightarrow{?}$  stabiles Vorwissen aus der Schulzeit, das eine tragfähige Grundvorstellung des Konzepts „Grenzwert einer reellen Folge“ behindert:

*Die Hauptthese [...] lautet aber, daß diese sog. dynamische Auffassung von Folgen, die Schülern schon immer [...] nahegebracht werden sollte, mit verantwortlich ist für verbreitete Fehlvorstellungen [...] vom Begriff des Grenzwerts. [...] es gibt eine (nicht zeitliche, sondern epistemologische) Phase bei der Ausbildung des Grenzwertbegriffs, wo eine eher statische Betrachtungsweise geboten ist, weil die vordergründig dynamische in die Irre führt. (Bender 1991, S. 239, Hervorhebung im Original)*

- (tw.) **Erfolg der Intervention** *Explizierung der Grundvorstellungen*
  - UV konnte im Posttest **häufiger zugeordnet** werden als die im Prättest
  - **höhere Qualität** der Äußerungen zur UV als jene zur AV

- Ableitinger, C., Götz, S. & Steinbauer, R. (eingereicht). *Vorstellungen von Lehramtsstudierenden zum Grenzwertbegriff*.
- Bender, P. (1991). Fehlvorstellungen und Fehlverständnisse bei Folgen und Grenzwerten. *MNU*, 44(4), 238–243.
- Cornu, B. (2002). Limits. In D. Tall (Hrsg.), *Advanced Mathematical Thinking* (S. 153–166). Mathematics Education Library, Vol. 11. New York et al.: Kluwer Academic Publishers. [http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47203-1\\_10](http://dx.doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10)
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Berlin Heidelberg: Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Steinbauer, R. (2021). Die Entzauberung des Unendlichen. *Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der ÖMG*, Heft 53, 135–150.  
<http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/2021%20Band%2053/VortragSteinbauer.pdf>
- vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Texte zur Didaktik der Mathematik. Heidelberg Berlin Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.