

# Von Schwarzen Löchern und dem Urknall

## Die Singularitätentheoreme von Penrose und Hawking

---

**Roland Steinbauer**

**Fakultät für Mathematik, Universität Wien**

VHS, Planetarium

Wien, 26. April 2023

---

# Singularitätentheoreme: Worum geht es?

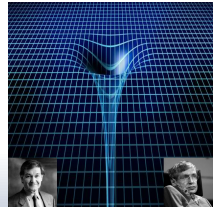
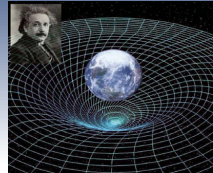
- Albert Einstein,  
Allgemeine Relativitätstheorie:  
**Gravitation ist Raumzeitgeometrie**
- Roger Penrose & Stephen Hawking,  
Singularitätentheoreme:

Raumzeitgeometrie bricht unter  
extremen Bedingungen zusammen:  
**Raumzeitsingularitäten entstehen!**

- Mathematische Sätze der  
(Lorentz-)Differentialgeometrie

Mathematische Beschreibung für  
**Schwarze Löcher** und **Urknall**

Mathematik/Geometrie für die Grenzen des Universums.



# Inhalt

- 1 Die ART in 20 Minuten**
  - Standortbestimmung
  - Masse & Energie krümmen Raum & Zeit
  - Die Raumzeit bestimmt die Bewegung
- 2 Singularitäten in der ART**
  - Die Schwarzschildlösung
  - Gravitationskollaps
  - Hinweise auf Singularitäten
- 3 Singularitätentheoreme**
  - Schwarze Löcher & das Penrose-Theorem
  - Urknall & das Hawking-Theorem
  - Technisches & Weiterentwicklung

# Inhalt

- 1 Die ART in 20 Minuten**
  - Standortbestimmung
  - Masse & Energie krümmen Raum & Zeit
  - Die Raumzeit bestimmt die Bewegung
- 2 Singularitäten in der ART**
  - Die Schwarzschildlösung
  - Gravitationskollaps
  - Hinweise auf Singularitäten
- 3 Singularitätentheoreme**
  - Schwarze Löcher & das Penrose-Theorem
  - Urknall & das Hawking-Theorem
  - Technisches & Weiterentwicklung

# ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- **Startpunkt, November 1915:**  
Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- **Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:**  
Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der  
**gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit**

General Relativity in a nutshell

(J. A. Wheeler)

Matter tells spacetime how to curve.  
Spacetime tells matter how to move.

# ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- Startpunkt, November 1915:  
Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:  
Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der  
**gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit**

General Relativity in a nutshell

(J. A. Wheeler)

Matter tells spacetime how to curve.  
Spacetime tells matter how to move.

# ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- Startpunkt, November 1915:  
Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:  
Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der  
**gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit**

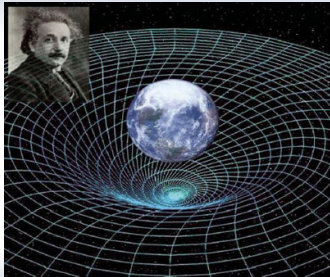
**General Relativity in a nutshell**

**(J. A. Wheeler)**

Matter tells spacetime how to curve.  
Spacetime tells matter how to move.

# Matter tells spacetime how to curve

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine **geometrische Theorie**: Die Einsteingleichungen verknüpfen die Raum-Zeit-Geometrie mit dem Materieinhalt.



$$\underbrace{R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}}_{\text{Krümmung}} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}}_{\text{Masse/Energie}}$$

$$E = mc^2$$

Krümmung der Raumzeit  
proportional ihrem Energieinhalt

2 Fragen:

- Warum kann Gravitation geometrisch beschrieben werden?
- Warum gerade die Krümmung? (Und was genau ist Krümmung?)



# Warum ist die Schwerkraft geometrisch?

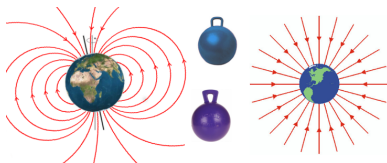
Warum kann sie als Eigenschaft des Raumes aufgefasst werden?

Äquivalenzprinzip

Galileo Galilei [1564–1642]



Alle Körper fallen gleich schnell

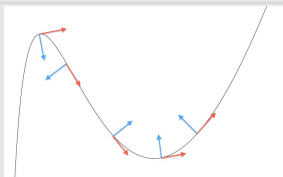


Manget- vs. Gravitationsfeld

**Antwort:** Schwerkraft ist universell; wirkt für alle Massen gleich.

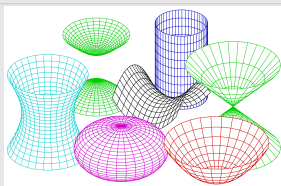
# Was genau ist Krümmung?

## Krümmung von Kurven



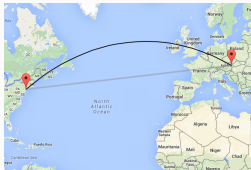
Abweichung von Geraden

## Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

## Konsequenzen der Krümmung



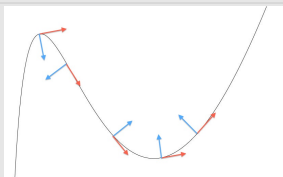
Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

Geodäten ersetzen Geraden

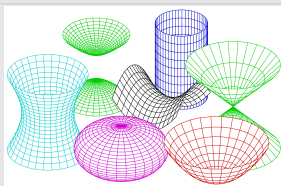
# Was genau ist Krümmung?

## Krümmung von Kurven



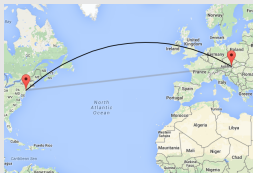
Abweichung von Geraden

## Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

## Konsequenzen der Krümmung



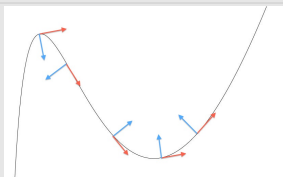
Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

**Geodäten** ersetzen Geraden

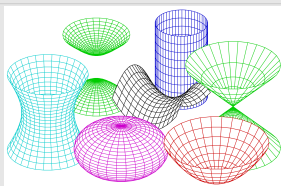
# Was genau ist Krümmung?

## Krümmung von Kurven



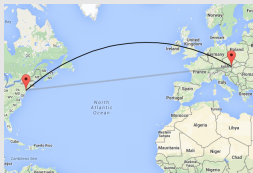
Abweichung von Geraden

## Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

## Konsequenzen der Krümmung



Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

**Geodäten** ersetzen Geraden

# Was genau ist Krümmung?

Differentialgeometrie

Bernhard Riemann [1826–1866]

**Mannigfaltigkeit & Metrik:**  $(M, g)$

Skalarprodukt in jd. Pkt. einer  $n$ -dim. gekr. Fläche

**Krümmungstensor:** fasst 2-dim. Kr. zusammen

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

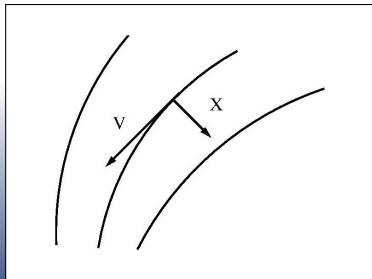


## Geodätische Deviation

relative Beschleunigung

Krümmung in Form von  $R$  bestimmt **Abstände** zw. Geodäten

$$\ddot{X} = R(V, X) X$$



# Warum gerade die Krümmung?

Berechne relative Beschleunigung frei fallender Körper

- Newtonsche Gezeitenkräfte:  $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m} = \Delta\phi \vec{x} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \vec{x}$$

- Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V, X) X$$



# Warum gerade die Krümmung?

Berechne relative Beschleunigung frei fallender Körper

- Newtonsche Gezeitenkräfte:  $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m} = \Delta\phi \vec{x} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \vec{x}$$

- Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V, X) X$$



**Kombiniere das!**

$$R(V, X) \sim 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho$$

⋮

$$\mathbf{R}_{ik} - \frac{1}{2} \mathbf{R} g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}_{ik}$$

# Spacetime tells matter how to move

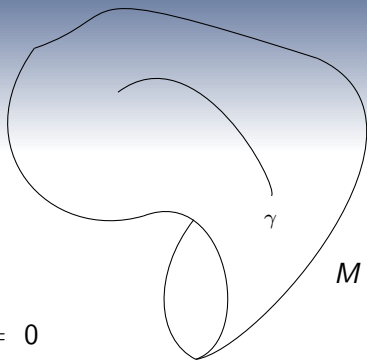
Teilchen bewegen sich auf **Geodäten**  
d.h. auf Kurven in  $M$

$$\gamma : [a, b] \rightarrow M$$

die **möglichst gerade** sind  
 $\rightsquigarrow$  erfüllen **Geodätengleichung**

$$\underbrace{\ddot{\gamma}^i}_{\text{Beschl.}} + \underbrace{\Gamma^i_{jk}}_{\text{Geom.}} \underbrace{\dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k}_{\text{Geschw.}} = 0$$

- Beobachter:  $v < c$ ,  $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle < 0$ , zeitartig
  - Lichtteilchen:  $v = c$ ,  $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$ , lichtartig, null
- } kausal



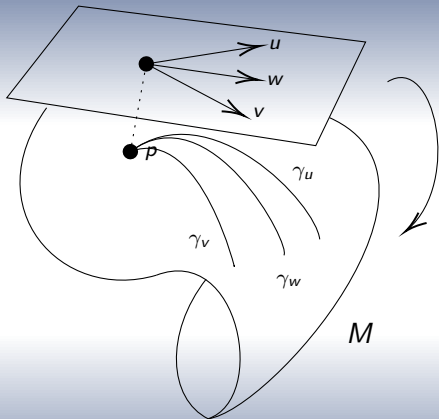


# Geodäten & Vollständigkeit

$$\ddot{\gamma} + \Gamma \dot{\gamma}^2 = 0$$

Gewöhnliche Diffgleichung

- 2. Ordnung:  
in jd. Pkt. & in jd. Richtung  
gibt es eine eindeutige Lösung
- nichtlinear:  
Lösungen i.a. **nicht** global
- alle Lösungen global:  
 $M$  schön  $\leadsto$  **vollständig**
- Lösung nicht global:  
**unvollständige** Geodäte



# Inhalt

- 1 **Die ART in 20 Minuten**
  - Standortbestimmung
  - Masse & Energie krümmen Raum & Zeit
  - Die Raumzeit bestimmt die Bewegung
- 2 **Singularitäten in der ART**
  - Die Schwarzschildlösung
  - Gravitationskollaps
  - Hinweise auf Singularitäten
- 3 **Singularitätentheoreme**
  - Schwarze Löcher & das Penrose-Theorem
  - Urknall & das Hawking-Theorem
  - Technisches & Weiterentwicklung

# Die Schwarzschildmetrik

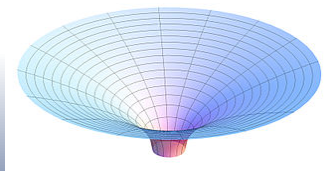
Einfachste Lösung der Einsteingleichungen

## Karl Schwarzschild [1873–1916]

Raumzeit außerhalb  
nichtrotierender Kugel mit Masse  $M$



$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

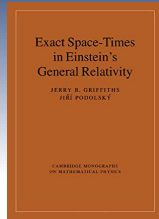
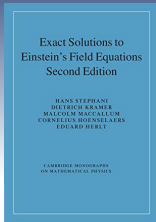


Außenraumlösung

**Singularität (?!?)**  
am Schwarzschildradius  
 $r_s = 2M$ , genauer

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

# Intermezzo: Exakte Lösungen der Einsteingl.



Historisch erster, nach wie vor  
aktueller Zugang

*Exact solutions to Einstein's field equations include the mathematical truth about the physical reality. Unfortunately, it is often obscured, usually very deeply hidden. To dig out the physically measurable invariant quantities and consequences, is a painful mining process involving various techniques and methods. It is the real art of science.*

*(Jiří Podolský)*

# Die Schwarzschildmetrik

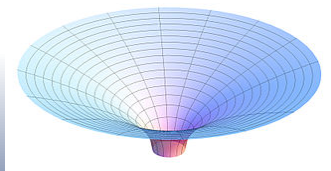
Einfachste Lösung der Einsteingleichungen

## Karl Schwarzschild [1873–1916]

Raumzeit außerhalb  
nichtrotierender Kugel mit Masse  $M$



$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$



Außenraumlösung

Singularität (?!?)  
am Schwarzschildradius  
 $r_s = 2M$ , genauer

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

# Die Schwarzschildsingularität

## Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der “physikalische Größen divergieren“  
d.h. „unendlich groß“ werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	Radius	$r_s$
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	$10^{-26}$ cm

ABER ...

# Die Schwarzschildsingularität

## Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der “physikalische Größen divergieren“  
d.h. „unendlich groß“ werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	<b>Radius</b>	$r_s$
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	$10^{-26}$ cm

ABER ...

# Die Schwarzschildsingularität

## Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der “physikalische Größen divergieren“  
d.h. „unendlich groß“ werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	<b>Radius</b>	$r_s$
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	$10^{-26}$ cm

ABER ...



# Gravitationskollaps

Ausgebrannte Sterne fallen zu **weißen Zwergen** zusammen.

## Subrahmanyan Chandrasekhar [1910–95]

### Chandrasekhar-Grenze (1930 Nobelp. 1983):

Ein weißer Zwerg, dessen Masse größer als  $1.4 M_{\odot}$  ist instabil und stürzt unter seiner eigenen Gravitation weiter zusammen.



## Robert Oppenheimer [1906–67], H. Snyder [1910–62]

### Oppenheimer-Snyder Kollaps (1939):

Schwarzschild-Außenraum geklebt an Stern (Staub ohne Druck) führt zu Kollaps über den Schwarzschildradius hinaus.

~> Schwarzes Loch



# Gravitationskollaps

Ausgebrannte Sterne fallen zu **weißen Zwergen** zusammen.

## Subrahmanyan Chandrasekhar [1910–95]

### Chandrasekhar-Grenze (1930 Nobelp. 1983):

Ein weißer Zwerg, dessen Masse größer als  $1.4 M_{\odot}$  ist instabil und stürzt unter seiner eigenen Gravitation weiter zusammen.



## Robert Oppenheimer [1906–67], H. Snyder [1910–62]

### Oppenheimer-Snyder Kollaps (1939):

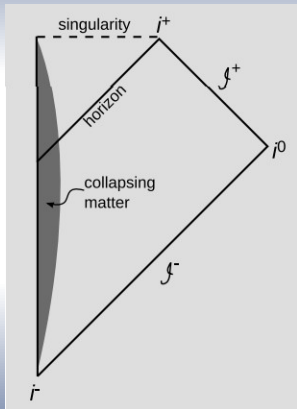
Schwarzschild-Außenraum geklebt an Stern (Staub ohne Druck) führt zu Kollaps über den Schwarzschildradius hinaus.

~> Schwarzes Loch



# Kollaps & die innere Schwarzschildmetrik

## Penrose-Carter Diagramm



- Die Schwarzschildsingularität ist gar keine Singularität, sondern nur ein **Koordinatenproblem**.
- Die Fläche  $r_S = 2M$  ist ein **Ereignishorizont**: Einmal überquert ist eine Rückkehr ausgeschlossen
- Der Stern im OS-Modell kollabiert bis zum Radius  $r = 0$ .
- Dort ist Krümmung unendlich:  
„echte“ Singularität

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left( 1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

# Die Situation in den frühen 1960-ern

**Einerseits:** Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, **aber**

- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind **nicht generisch**, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

**Andererseits:** Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...



# Die Situation in den frühen 1960-ern

**Einerseits:** Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, **aber**

- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind **nicht generisch**, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

**Andererseits:** Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...



# Die Situation in den frühen 1960-ern

**Einerseits:** Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, **aber**

- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind **nicht generisch**, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

**Andererseits:** Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...



# Inhalt

- 1 Die ART in 20 Minuten**
  - Standortbestimmung
  - Masse & Energie krümmen Raum & Zeit
  - Die Raumzeit bestimmt die Bewegung
- 2 Singularitäten in der ART**
  - Die Schwarzschildlösung
  - Gravitationskollaps
  - Hinweise auf Singularitäten
- 3 Singularitätentheoreme**
  - Schwarze Löcher & das Penrose-Theorem
  - Urknall & das Hawking-Theorem
  - Technisches & Weiterentwicklung

# Das 1965-Paper von Roger Penrose

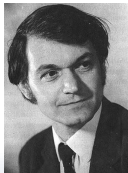
GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES

Roger Penrose

Department of Mathematics, Birkbeck College, London, England

(Received 18 December 1964)

3 Seiten, 3 brillante Ideen  
Nobelpreis 2020



- 1 Neue Definition von Singularitäten
- 2 Begriff der gefangenen Fläche
- 3 Erstes Singularitätentheorem

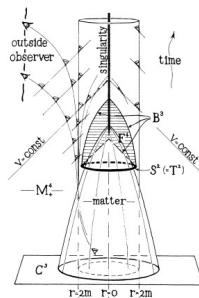


FIG. 1. Spherically symmetrical collapse (one space dimension suppressed). The diagram essentially also serves for the discussion of the asymmetrical case.



# Das 1965-Paper von Roger Penrose

GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES

Roger Penrose

Department of Mathematics, Birkbeck College, London, England

(Received 18 December 1964)

3 Seiten, 3 brillante Ideen  
Nobelpreis 2020



- 1 Neue Definition von Singularitäten
- 2 Begriff der gefangenen Fläche
- 3 Erstes Singularitätentheorem

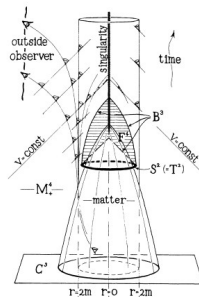


FIG. 1. Spherically symmetrical collapse (one space dimension suppressed). The diagram essentially also serves for the discussion of the asymmetrical case.

# Singularitäten in der ART

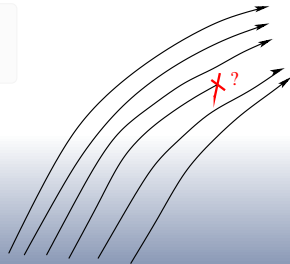
## Problem:

- Singularitäten sind nicht einfach Punkte, wo eine physikalische Größe (z.B. Masse, Krümmung, etc.) unendlich wird
- sondern, „Punkte, die nicht zur Raumzeit gehören“

## Lösung: Moderne Definition von Singularitäten (Penrose 1965)

Eine Raumzeit heißt singularär, wenn es **unvollständige kausale Geodäten** gibt.

- Intuitiv: Die Weltlinie eines Beobachters endet...
- Technisch: Lösung der Geodätengleichung lässt sich nicht fortsetzen.



# Singularitäten in der ART

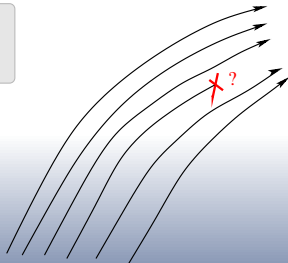
## Problem:

- Singularitäten sind nicht einfach Punkte, wo eine physikalische Größe (z.B. Masse, Krümmung, etc.) unendlich wird
- sondern, „Punkte, die nicht zur Raumzeit gehören“

## Lösung: Moderne Definition von Singularitäten (Penrose 1965)

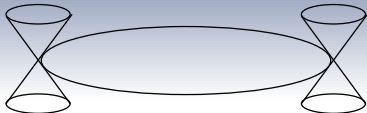
Eine Raumzeit heißt singularär, wenn es **unvollständige kausale Geodäten** gibt.

- Intuitiv: Die Weltlinie eines Beobachters endet...
- Technisch: Lösung der Geodätengleichung lässt sich nicht fortsetzen.

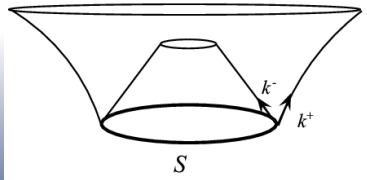


# Gefangene Flächen

Punkt im Gravitationskollaps, nachdem es kein Zurück mehr gibt.

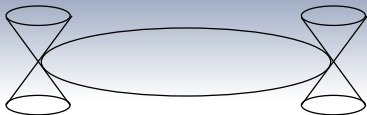


Normal: Licht kann nach  
**Innen und Aussen** laufen.

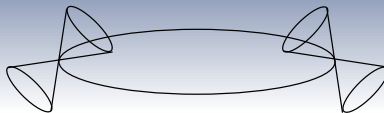


# Gefangene Flächen

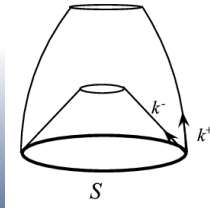
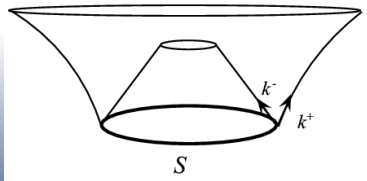
Punkt im Gravitationskollaps, nachdem es kein Zurück mehr gibt.



Normal: Licht kann nach  
**Innen und Aussen** laufen.



Gefangen: Licht kann  
**nur nach Innen** laufen.



# Das Penrose-Theorem

## Theorem (Penrose 1965)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

- 1 Es gibt eine gefangene Fläche Punkt ohne Wiederkehr erreicht
- 2 Es gilt die Null-Energiebedingung Gravitation ist immer anziehend
- 3 Es gibt eine nicht-kompakte Cauchyfläche Abgeschlossenes System

Dann ist sie singulär.

Beim Gravitationskollaps entstehen gefangene Flächen  
daher generisch, d.h. ohne Symmetrien eine Singularität.

# Das Penrose-Theorem

## Theorem (Penrose 1965)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

- 1 Es gibt eine gefangene Fläche Punkt ohne Wiederkehr erreicht
- 2 Es gilt die Null-Energiebedingung Gravitation ist immer anziehend
- 3 Es gibt eine nicht-kompakte Cauchyfläche Abgeschlossenes System

Dann ist sie singulär.

Beim Gravitationskollaps entstehen gefangene Flächen  
daher generisch, d.h. **ohne Symmetrien** eine Singularität.

# Die kosmologische Situation

Kosmologie: Teilgebiet der Astronomie, das sich mit der Entwicklung (und dem Ursprung) des Universums auseinandersetzt.

- Relativistische Modelle geben Hinweis auf Singularität in ferner Vergangenheit (Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker Raumzeiten)



A. A. Friedmann [1888–1925]  
Georges Lemaitre [1894–1966]  
H. P. Robertson [1903–1961]  
Arthur G. Walker [1909–2001]

- Beobachtungen zeigen, dass sich das Universum ausdehnt. Und zwar immer schneller.



Edwin P. Hubble  
[1889–1953]



# Hawking's Publikationsserie 1965–67

The occurrence of singularities in cosmology

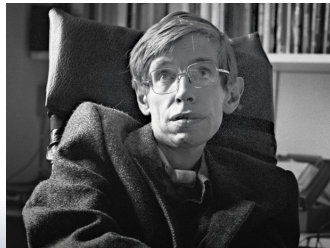
BY S. W. HAWKING

*Gonville and Caius College, University of Cambridge*

*(Communicated by H. Bondi, F.R.S.—Received 15 April 1966)*

Fünf fundamentale Arbeiten in kürzester Zeit

- 1 Sofortige Anwendung der Penrose-Ideen & Methoden in der Kosmologie
- 2 Import wesentlicher Techniken aus der Riemann-Geometrie
- 3 kausale Geodäten maximieren Eigenzeit



Stephen Hawking [1942–2018]

# Das Hawking-Theorem

## Theorem (Hawking 1966)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

- 1 Es gibt 3-dim. Fläche m. positive Expansi
- 2 Es gilt die starke Energiebedingung
- 3 Es gibt eine kompakte Cauchyfläche

Kosmologisches Analogon zu gefangener Fläche

Gravitation anziehend; stärker!

Kosmologische Situation

Dann ist sie singulär.

Ein expandierendes Universum hat in der Vergangenheit eine Singularität  $\leadsto$  Urknall

# Das Hawking-Theorem

## Theorem (Hawking 1966)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

- 1 Es gibt 3-dim. Fläche m. positive Expansi
- 2 Es gilt die starke Energiebedingung
- 3 Es gibt eine kompakte Cauchyfläche

Kosmologisches Analogon zu gefangener Fläche

Gravitation anziehend; stärker!

Kosmologische Situation

Dann ist sie singulär.

Ein expandierendes Universum hat in der Vergangenheit eine Singularität  $\rightsquigarrow$  Urknall

# Das Muster der Theoreme & Beweise

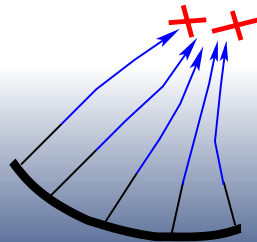
## Muster-Theorem (José Senovilla, 1998)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

- ① Ein geeignete Anfangsbedingung Gravitation ist hier stark
- ② Eine Energie- oder Krümmungs-Bedingung Gravitation ist anziehend
- ③ Eine geeignete Kausalitätsbedingung Globale Struktur der Raumzeit

Dann ist sie singularär.

- ① **Anfangsbedingung**  $\leadsto$  kausale Geodäten beginnen zu fokussieren
- ② **Energiebedingung**  $\leadsto$  Fokussierung geht weiter (Raychaudhuri-Gleichung)  $\leadsto$  fokaler Punkt
- ③ **Kausalitätsbed.**  $\leadsto$  kein fokaler Punkt  
Einziger Ausweg: kausale Geodäten enden vorher



# Das Muster der Theoreme & Beweise

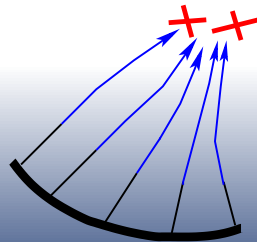
## Muster-Theorem (José Senovilla, 1998)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

- ① Ein geeignete Anfangsbedingung Gravitation ist hier stark
- ② Eine Energie- oder Krümmungs-Bedingung Gravitation ist anziehend
- ③ Eine geeignete Kausalitätsbedingung Globale Struktur der Raumzeit

Dann ist sie singulär.

- ① **Anfangsbedingung**  $\leadsto$  kausale Geodäten beginnen zu fokussieren
- ② **Energiebedingung**  $\leadsto$  Fokussierung geht weiter (Raychaudhuri-Gleichung)  
 $\leadsto$  fokaler Punkt
- ③ **Kausalitätsbed.**  $\leadsto$  kein fokaler Punkt  
**Einziger Ausweg:** kausale Geodäten **enden vorher**



# Fokussierung (Raychaudhuri-Gleichung)

$$\dot{\theta}(t) = \underbrace{-\text{Ric}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}_{\geq 0 \text{ (EB)}} - \underbrace{\text{tr}(\sigma^2(t))}_{\geq 0} - \frac{1}{3} \theta^2(t) \leq -\frac{1}{3} \theta^2(t)$$

- (EB)  $\implies \dot{\theta}(t) \leq 0$

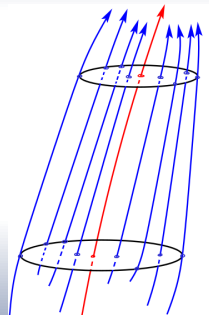
- (AB)  $\implies \theta(0) < 0$

$\rightsquigarrow \theta(t) \rightarrow -\infty$  in endl. Zeit

$\rightsquigarrow \exists$  fokaler Punkt  
falls Geodäte solange ex.

- (KB)  $\nexists$  fokaler Punkt

$\rightsquigarrow$  Geodäte muss  
zu existieren aufhören

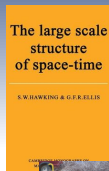


Flächenänderung  $\sim \dot{\theta}$

# Das Problem mit der Regularität

Theoreme funktionieren nur für glatte Metriken  $g$

- !  $g$  muss 2-mal stetig diffbar. vom Pkt. abhängen
- ↪ Theoreme gelten z.B. nicht für O.S.-Kollaps
- ↪ **Frage nach Erweiterbarkeit**  
Kann Singularität vermieden werden, für  $g \notin C^2$ ?  
Besonders relevant:  $g \in C^1$ ; Krümmung ok.
- ✗ Problem schon in [Hawking & Ellis, 1973] erkannt
- ✗ Lange Liste offener Probleme [Senovilla, 1998]
- ✓ Seit 2011  
spez. Regularisierungen für nicht-glatte Metriken  
[Piotr Chruściel & James Grant]  
Kausalitätstheorie in niedriger Regularität  
[Ettore Minguzzi]
- ✓ seit 2014  
Singularitätentheoreme für  $g \in C^{1,1}$  und  $g \in C^1$



# Das Problem mit der Regularität

Theoreme funktionieren nur für glatte Metriken  $g$

- !  $g$  muss 2-mal stetig diffbar. vom Pkt. abhängen
- ↪ Theoreme gelten z.B. nicht für O.S.-Kollaps
- ↪ **Frage nach Erweiterbarkeit**  
Kann Singularität vermieden werden, für  $g \notin C^2$ ?  
Besonders relevant:  $g \in C^1$ ; Krümmung ok.
- ✗ Problem schon in [Hawking & Ellis, 1973] erkannt
- ✗ Lange Liste offener Probleme [Senovilla, 1998]
- ✓ Seit 2011  
spez. Regularisierungen für nicht-glatte Metriken  
[Piotr Chruściel & James Grant]  
Kausalitätstheorie in niedriger Regularität  
[Ettore Minguzzi]
- ✓ seit 2014  
Singularitätentheoreme für  $g \in C^{1,1}$  und  $g \in C^1$





# Singularitätenthms. in niedriger Regularität

## $C^1$ -Hawking-Penrose Thm.

[KOSS 2022]

Eine  $C^1$ -Raumzeit is singularär, wenn gilt:

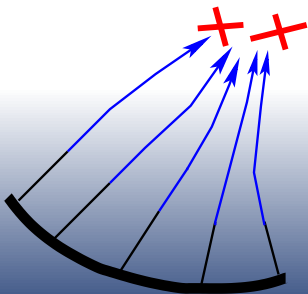
- ① Es gibt gefangene Fläche/3-Fl. m. pos. Exp.
- ② Es gelten geeignete Energiebedingung
- ③ Es gibt keine geschlossenen kausalen Kurven
- ④ **Kausale Geodäten verzweigen sich nicht**

(AB) wie gehabt

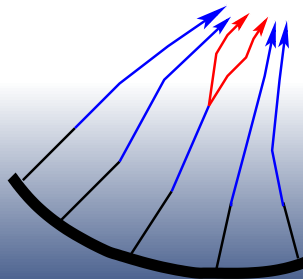
(EB) wie gehabt, aber...

(KB) fast wie gehabt

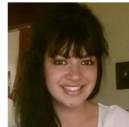
**NEU: non-branching**



oder



## Das Team



41-1179 (2021)  
https://doi.org/10.1007/s00220-021-04431-6

Communications in  
Mathematical  
Physics

Commun. Math. Phys.  
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s00220-021-04431-6

Communications in  
Mathematical  
Physics



### The Hawking–Penrose Singularity Theorem for $C^{1,1}$ -Lorentzian Metrics

Melanie Graf<sup>1</sup>, James D. E. Grant<sup>2</sup>, Michael Kunzinger<sup>3</sup>, Roland Steinbauer<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Mathematics, University of Vienna, Vienna, Austria. E-mail: melanie.graf@univie.ac.at

<sup>2</sup> Michael Kunzinger@univie.ac.at, roland.steinbauer@univie.ac.at

<sup>3</sup> Department of Mathematics, University of Surrey, Guildford, UK. E-mail: j.grant@surrey.ac.uk

Received: 26 June 2017 / Accepted: 10 October 2017  
© Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature 2017

**Abstract.** We show that the Hawking–Penrose singularity theorem, and the generalisation of this theorem due to Galloway and Senovilla, continue to hold for Lorentzian metrics that are of  $C^{1,1}$ -regularity. We formulate appropriate weak versions of the strong energy condition and genericity condition for  $C^{1,1}$ -metrics, and of  $C^0$ -trapped submanifolds. By regularisation, we show that, under these weak conditions, causal geodesics necessarily become non-maximising. This requires a detailed analysis of the matrix Riccati equation for the approximating metrics, which may be of independent interest.

DOI Publishing

Check: Number One: 88 (2021), 169110 (Open)

Elemental and Quantum Theory

doi:10.1007/s00220-021-04431-6

### The Penrose singularity theorem in regularity $C^{1,1}$

Michael Kunzinger<sup>1</sup>, Roland Steinbauer<sup>2</sup> and James A Vickers<sup>3</sup>

<sup>1</sup> University of Vienna, Faculty of Mathematics, Austria

<sup>2</sup> University of Southampton, School of Mathematics, UK

E-mail: michael.kunzinger@univie.ac.at, roland.steinbauer@univie.ac.at and J.A.Vickers@maths.soton.ac.uk

Received 1 February 2015, revised 12 May 2015

Accepted for publication 17 June 2015

Published 14 July 2015

**Abstract**

We extend the validity of the Penrose singularity of regularity  $C^{1,1}$ . The proof is based on regular with recent results in low regularity causality (I)

**Keywords:** singularity theorems, low regular theory



### The Hawking–Penrose Singularity Theorem for $C^{1,1}$ -Lorentzian Metrics

Michael Kunzinger<sup>1</sup>, Arpan Ghahary<sup>2</sup>, Benedikt Schimmerl<sup>3</sup>, Roland Steinbauer<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Mathematics, University of Vienna, Oskar-Morgenstern-Platz 1, 1080 Wien, Austria.

E-mail: michael.kunzinger@univie.ac.at, arpan.ghahary@univie.ac.at, benediktschimmerl@univie.ac.at, roland.steinbauer@univie.ac.at

Received: 19 October 2021 / Accepted: 18 January 2022

Published online: 26 February 2022 – © The Author(s) 2022

Danke fürs Zuhören!

# Bildnachweis & Disclaimer

p. 2, p. 6: Einstein & Raumkrümmung, courtesy of NASA.

p. 7: Galileo Galilei, open domain, [https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Justus\\_Sustermans\\_-\\_Portrait\\_of\\_Galileo\\_Galilei%2C\\_1636.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei%2C_1636.jpg)  
Galileo at Pisa, By Dan Hanson, <https://www.pinterest.at/pin/348606827381663908/>

p. 7: Bernhard Riemann, By August Weger, Public domain, via Wikimedia Commons,  
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/BernhardRiemannAWeger.jpg>

p. 13: Karl Schwarzschild, Public domain, via Wikimedia Commons  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Karl\\_schwarzschild.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Karl_schwarzschild.jpg)

p. 15: Subrahmanyan Chandrasekhar, Starchild Project NASA, Public domain, via Wikimedia Commons  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Subrahmanyan\\_Chandrasekhar.gif](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Subrahmanyan_Chandrasekhar.gif)  
Robert Oppenheimer, By Department of Energy, Office of Public Affairs, Attribution, via Wikimedia Commons  
<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/JR0ppenheimer-LosAlamos.jpg>

p. 19: Roger Penrose,  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/Roger\\_Penrose\\_9560.JPG](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/Roger_Penrose_9560.JPG), By Biswarup Ganguly, CC BY 3.0, via Wikimedia Commons

p. 24: Stephen Hawking,  
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Stephen\\_Hawking.StarChild.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Stephen_Hawking.StarChild.jpg), By NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

p. 11,12,26,27,29: Sketches by Roland Steinbauer, CC BY-NC-SA

All other pictures used are believed to be in the public domain with no attribution available.

This presentation may use copyrighted material which has not always been specifically authorized by the copyright owner. Such material is made available for educational purposes only. It is believed this constitutes a 'fair use' of any such copyrighted material as provided for in section 107 of the United States Copyright law.

If you wish to use copyrighted material from the the presentation for your own purposes that go beyond fair use, you must obtain permission from the copyright owner.

If you believe your work has been infringed, please contact the author under [roland.steinbauer@univie.ac.at](mailto:roland.steinbauer@univie.ac.at)