Von Schwarzen Löchern und dem Urknall

Die Singularitätentheoreme von Penrose und Hawking

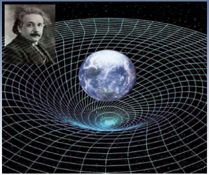
Roland Steinbauer

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

VHS, Planetarium

Wien, 26. April 2023

Singularitätentheoreme: Worum geht es?

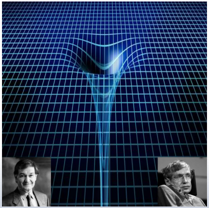


- Albert Einstein,
  Allgemeine Relativitätstheorie:

  Gravitation ist Raumzeitgeometrie

- Roger Penrose & Stephen Hawking,
  Singularitätentheoreme:

  Raumzeitgeometrie bricht unter extremen Bedingungen zusammen:
  Raumzeitsingularitäten entstehen!



- Mathematische Sätze der
  (Lorentz-)Differentialgeometrie

  Mathematische Beschreibung für
  Schwarze Löcher und Urknall

Mathematik/Geometrie für die Grenzen des Universums.

Inhalt

Inhalt

ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- Startpunkt, November 1915:
  Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:
  Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der

  gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit

General Relativity in a nutshell **(J. A. Wheeler)**

Matter tells spacetime how to curve.
Spacetime tells matter how to move.

ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- Startpunkt, November 1915:
  Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:
  Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der

  gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit

General Relativity in a nutshell **(J. A. Wheeler)**

Matter tells spacetime how to curve.
Spacetime tells matter how to move.

ART—Erste Standortbestimmung

Derzeit beste physikalische Beschreibung von Gravitation, Materie, Raum & Zeit im Großen

- Startpunkt, November 1915:
  Feldgleichungen der ART durch Albert Einstein
- Vorläufiger Höhepunkt, September 2015:
  Direkter Nachweis von Graviationswellen (GW150914) durch LIGO
- deutet Gravitation als geometrische Eigenschaft der

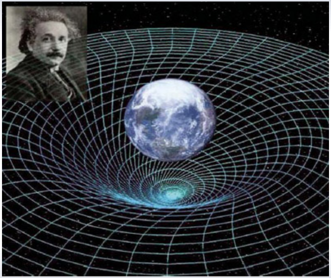
  gekrümmten vierdimensionalen Raumzeit-Mannigfaltigkeit

General Relativity in a nutshell **(J. A. Wheeler)**

Matter tells spacetime how to curve.
Spacetime tells matter how to move.

Matter tells spacetime how to curve

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine **geometrische Theorie**: Die Einsteingleichungen verknüpfen die Raum-Zeit-Geometrie mit dem Materieinhalt.



$$\underbrace{\mathbf{R_{ik}} - \frac{1}{2}\,\mathbf{R}\,\mathbf{g_{ik}}}_{\textbf{Krümmung}} = \underbrace{\frac{8\pi \mathbf{G}}{\mathbf{c}^4}\,\mathbf{T_{ik}}}_{\textbf{Masse/Energie}}$$

$$E = mc^2$$

Krümmung der Raumzeit proportional ihrem Energieinhalt

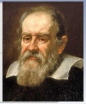
2 Fragen:

- Warum kann Gravitation geometrisch beschrieben werden?
- Warum gerade die Krümmung? (Und was genau ist Krümmung?)

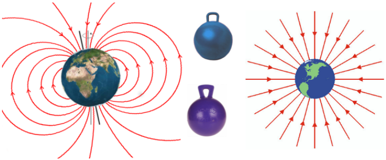
Warum ist die Schwerkraft geometrisch?

Warum kann sie als Eigenschaft des Raumes aufgefasst werden?

Äquivalenzprinzip **Galileo Galilei [1564–1642]**



Alle Körper fallen gleich schnell

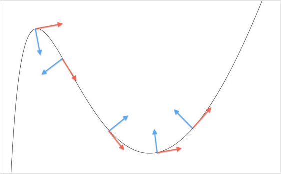


Manget- vs. Gravitationsfeld

Antwort: Schwerkraft ist universell; wirkt für alle Massen gleich.

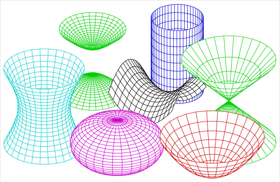
Was genau ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



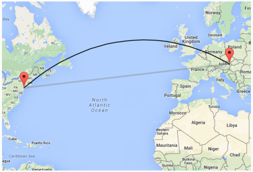
Abweichung von Geraden

Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

Konsequenzen der Krümmung



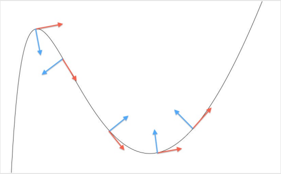
Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

Geodäten ersetzen Geraden

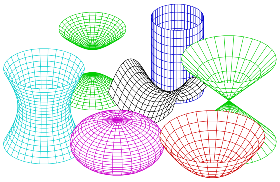
Was genau ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



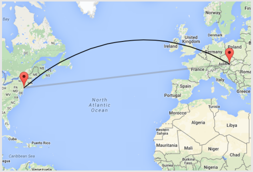
Abweichung von Geraden

Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

Konsequenzen der Krümmung



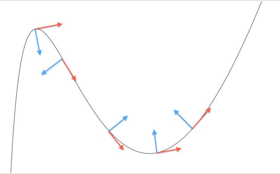
Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

Geodäten ersetzen Geraden

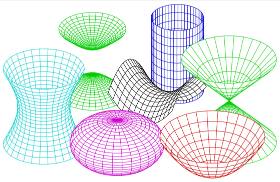
Was genau ist Krümmung?

Krümmung von Kurven



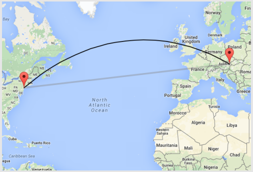
Abweichung von Geraden

Krümmung v. Flächen



Abweichung von Ebene

Konsequenzen der Krümmung



Kürzeste Verbindungen

- sind nicht gerade
- können sich schneiden

Geodäten ersetzen Geraden

Was genau ist Krümmung?

Differentialgeometrie Bernhard Riemann [1826–1866]

Mannigfaltigkeit & Metrik: (M, g)

Skalarprodukt in jd. Pkt. einer n-dim. gekr. Fläche

Krümmungstensor: fasst 2-dim. Kr. zusammen

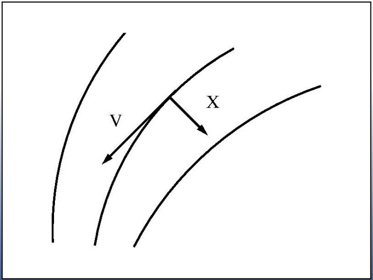
$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Geodätische Deviation

relative Beschleunigung

Krümmung in Form von R bestimmt **Abstände** zw. Geodäten

$$\ddot{X} = R(V, X)\, X$$



Warum gerade die Krümmung?

Berechne relative Beschleunigung frei fallender Körper

- Newtonsche Gezeitenkräfte: $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m} = \Delta\phi\,\vec{x} = 4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho \cdot \vec{x}$$

- Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V, X)\,X$$

Warum gerade die Krümmung?

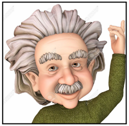
Berechne relative Beschleunigung frei fallender Körper

- Newtonsche Gezeitenkräfte: $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{\vec{x}}$

$$\ddot{\vec{x}} = \frac{\vec{F}}{m} = \Delta\phi\,\vec{x} = 4\cdot\pi\cdot G\cdot\rho\cdot\vec{x}$$

- Geodätische Deviation

$$\ddot{X} = R(V,X)\,X$$



Kombiniere das!

$$R(V,X) \sim 4\cdot\pi\cdot G\cdot\rho$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\mathbf{R_{ik} - \frac{1}{2}\,R\,g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{ik}}}$$

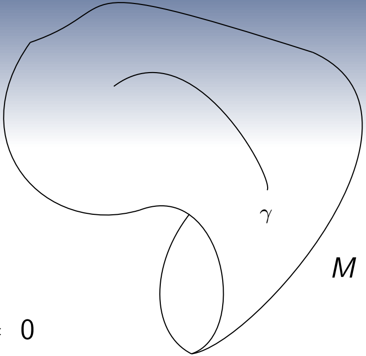
Spacetime tells matter how to move

Teilchen bewegen sich auf **Geodäten**
d.h. auf Kurven in M

$$\gamma : [a, b] \to M$$

die **möglichst gerade** sind
$\rightsquigarrow$ erfüllen **Geodätengleichung**

$$\underbrace{\ddot{\gamma}^i}_{\text{Beschl.}} + \underbrace{\Gamma^i_{jk}}_{\text{Geom.}} \underbrace{\dot{\gamma}^j \, \dot{\gamma}^k}_{\text{Geschw.}} = 0$$



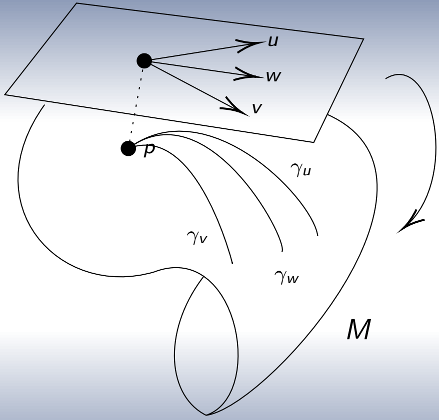
$$\left.\begin{array}{llll} \text{Beobachter:} & v < c, & \langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle < 0, & \text{zeitartig} \\ \text{Lichtteilchen:} & v = c, & \langle\dot\gamma,\dot\gamma\rangle = 0, & \text{lichtartig, null} \end{array}\right\} \text{kausal}$$

Geodäten & Vollständigkeit

$$\boxed{\ddot{\gamma} + \boldsymbol{\Gamma}\,\dot{\gamma}^2 = \mathbf{0}}$$

Gewöhnliche Diffgleichung

- 2. Ordnung:
  in jd. Pkt. & in jd. Richtung
  gibt es eine eindeutige Lösung
- nichtlinear:
  Lösungen i.a. **nicht** global
- alle Lösungen global:
  M schön $\rightsquigarrow$ **vollständig**
- Lösung nicht global:
  unvollständige Geodäte



Inhalt

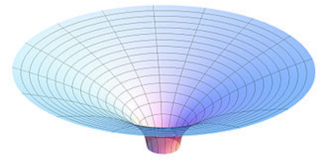
Die Schwarzschildmetrik

Einfachste Lösung der Einsteingleichungen

Karl Schwarzschild [1873–1916]

Raumzeit außerhalb
nichtrotierender Kugel mit Masse M

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

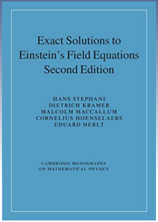


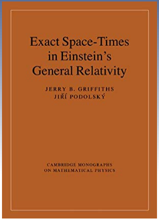
Außenraumlösung

Singularität (?!?)
am Schwarzschildradius
$r_s = 2M$, genauer

$$r_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Intermezzo: Exakte Lösungen der Einsteingl.





Historsich erster, nach wie vor aktueller Zugang

Exact solutions to Einstein's field equations include the mathematical truth about the physical reality. Unfortunately, it is often obscured, usually very deeply hidden. To dig out the physically measurable invariant quantities and consequences, is a painful mining process involving various techniques and methods. It is the real art of science.

(Jiří Podolský)

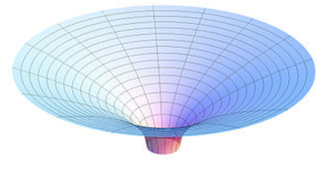
Die Schwarzschildmetrik

Einfachste Lösung der Einsteingleichungen

Karl Schwarzschild [1873–1916]

Raumzeit außerhalb
nichtrotierender Kugel mit Masse M

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$



Außenraumlösung

Singularität (?!?)
am Schwarzschildradius
$r_s = 2M$, genauer

$$r_S = \frac{2\,G\,M}{c^2}$$

Die Schwarzschildsingularität

Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der "physikalische Größen divergieren" d.h. „unendlich groß" werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	Radius	r_s
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	10^{-26} cm

ABER . . .

Die Schwarzschildsingularität

Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der "physikalische Größen divergieren" d.h. „unendlich groß" werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	Radius	r_s
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	10^{-26} cm

ABER ...

Die Schwarzschildsingularität

Was ist eine Singularität?

- Mathematik: ein isolierter Punkt mit ungewöhnlichem Verhalten
- Physik: Gegebenheit, bei der “physikalische Größen divergieren“ d.h. „unendlich groß“ werden

Ist die Schwarzschildsingularität ernstzunehmen?

	Radius	r_s
Sonne	700000 km	3 km
Erde	6300 km	9 mm
Käsesemmel	10 cm	10^{-26} cm

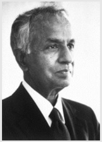
ABER ...

Gravitationskollaps

Ausgebrannte Sterne fallen zu **weißen Zwergen** zusammen.

Subrahmanyan Chandrasekhar [1910–95]

Chandrasekhar-Grenze (1930 Nobelp. 1983):
Ein weißer Zwerg, dessen Masse größer als $1.4\,M_\odot$ ist instabil und stürzt unter seiner eigenen Gravitation weiter zusammen.



Robert Oppenheimer [1906–67], H. Snyder [1910–62]

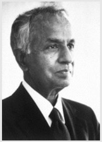
Oppenheimer-Snyder Kollaps (1939):
Schwarzschild-Außenraum geklebt an Stern (Staub ohne Druck) führt zu Kollaps über den Schwarzschildradius hinaus.
$\rightsquigarrow$ Schwarzes Loch

Gravitationskollaps

Ausgebrannte Sterne fallen zu **weißen Zwergen** zusammen.

Subrahmanyan Chandrasekhar [1910–95]

Chandrasekhar-Grenze (1930 Nobelp. 1983):
Ein weißer Zwerg, dessen Masse größer als 1.4 $M_\odot$ ist instabil und stürzt unter seiner eigenen Gravitation weiter zusammen.



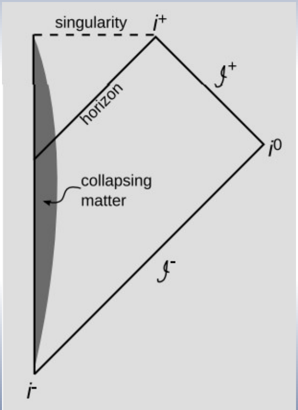
Robert Oppenheimer [1906–67], H. Snyder [1910–62]

Oppenheimer-Snyder Kollaps (1939):
Schwarzschild-Außenraum geklebt an Stern (Staub ohne Druck) führt zu Kollaps über den Schwarzschildradius hinaus.

$\rightsquigarrow$ Schwarzes Loch

Kollaps & die innere Schwarzschildmetrik

Penrose-Carter Diagramm



- Die Schwarzschildsingularität ist gar keine Singularität, sondern nur ein Koordinatenproblem.
- Die Fläche $r_S = 2M$ ist ein Ereignishorizont: Einmal überquert ist eine Rückkehr ausgeschlossen
- Der Stern im OS-Modell kollabiert bis zum Radius $r = 0$.
- Dort ist Krümmung unendlich: „echte“ Singularität

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega^2$$

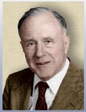
Die Situation in den frühen 1960-ern

Einerseits: Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, aber

- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind nicht generisch, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

Andererseits: Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...



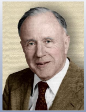
Die Situation in den frühen 1960-ern

Einerseits: Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, aber

- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind nicht generisch, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

Andererseits: Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...



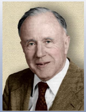
Die Situation in den frühen 1960-ern

Einerseits: Theoretische Evidenz für Singularitäten/Schwarze Löcher, aber

- nur sehr einfache Modelle (Staub)
- mit sehr hoher Symmetrie (Kugelsymmetrie)
- Zweifel (Lifshitz & Khalatnikov): Singularitäten sind nicht generisch, kommen nur in exakten Lösungen wegen deren hoher Symmetrie vor (Vergleich mit Kollaps von Staub in Newton'scher Theorie)

Andererseits: Astrophysikalische Evidenz (Quasar 3C 273)

John Archibald Wheeler [1911–2008] ermutigt Roger Penrose sich des Problems anzunehmen...



Inhalt

Das 1965-Paper von Roger Penrose

GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES

Roger Penrose
Department of Mathematics, Birkbeck College, London, England
(Received 18 December 1964)

3 Seiten, 3 brilliante Ideen
Nobelpreis 2020

1. Neue Definition von Singularitäten
2. Begriff der gefangenen Fläche
3. Erstes Singularitätentheorem

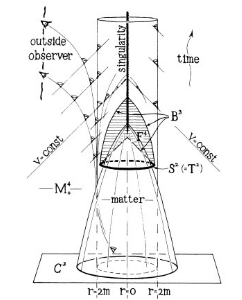
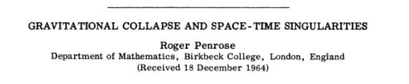


FIG. 1. Spherically symmetrical collapse (one space dimension surpressed). The diagram essentially also serves for the discussion of the asymmetrical case.

Das 1965-Paper von Roger Penrose



GRAVITATIONAL COLLAPSE AND SPACE-TIME SINGULARITIES

Roger Penrose
Department of Mathematics, Birkbeck College, London, England
(Received 18 December 1964)

3 Seiten, 3 brilliante Ideen
Nobelpreis 2020

1. Neue Definition von Singularitäten
2. Begriff der gefangenen Fläche
3. Erstes Singularitätentheorem

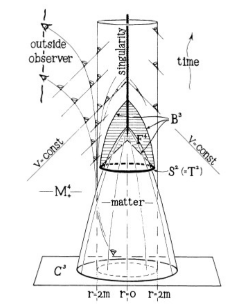


FIG. 1. Spherically symmetrical collapse (one space dimension surpressed). The diagram essentially also serves for the discussion of the asymmetrical case.

Singularitäten in der ART

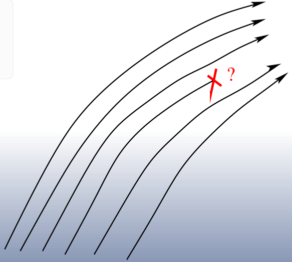
Problem:

- Singularitäten sind nicht einfach Punkte, wo eine physikalische Größe (z.B. Masse, Krümmung, etc.) unendlich wird
- sondern, „Punkte, die nicht zur Raumzeit gehören"

Lösung: Moderne Definition von Singularitäten (Penrose 1965)

Eine Raumzeit heißt singulär, wenn es **unvollständige kausale Geodäten** gibt.

- Intuitiv: Die Weltlinie eines Beobachters endet...
- Technisch: Lösung der Geodätengleichung lässt sich nicht fortsetzen.



Singularitäten in der ART

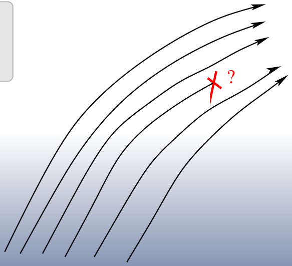
Problem:

- Singularitäten sind nicht einfach Punkte, wo eine physikalische Größe (z.B. Masse, Krümmung, etc.) unendlich wird
- sondern, „Punkte, die nicht zur Raumzeit gehören“

Lösung: Moderne Definition von Singularitäten (Penrose 1965)

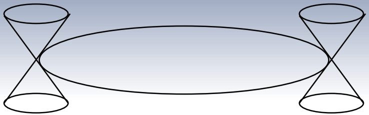
> Eine Raumzeit heißt singulär, wenn es **unvollständige kausale Geodäten** gibt.

- Intuitiv: Die Weltlinie eines Beobachters endet...
- Technisch: Lösung der Geodätengleichung lässt sich nicht fortsetzen.

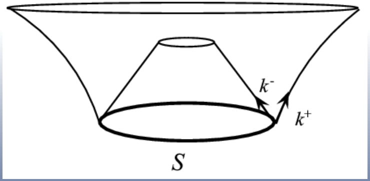


Gefangene Flächen

Punkt im Gravitationskollaps, nachdem es kein Zurück mehr gibt.

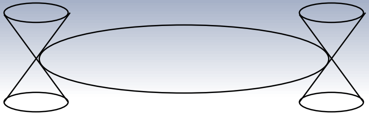


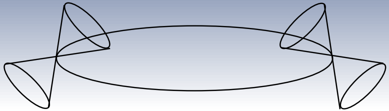
Normal: Licht kann nach
Innen und Aussen laufen.



Gefangene Flächen

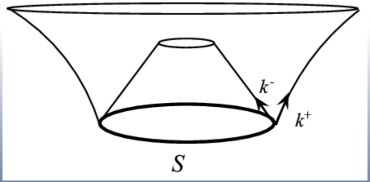
Punkt im Gravitationskollaps, nachdem es kein Zurück mehr gibt.

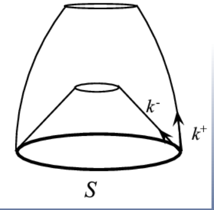




Normal: Licht kann nach Innen und Aussen laufen.

Gefangen: Licht kann nur nach Innen laufen.





Das Penrose-Theorem

Theorem (Penrose 1965)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Es gibt eine gefangene Fläche — Punkt ohne Wiederkehr erreicht
2. Es gilt die Null-Energiebedingung — Gravitation ist immer anziehend
3. Es gibt eine nicht-kompakte Cauchyfläche — Abgeschlossenes System

Dann ist sie singulär.

Beim Gravitationskollaps entstehen gefangene Flächen

daher generisch, d.h. **ohne Symmetrien** eine Singularität.

Das Penrose-Theorem

Theorem (Penrose 1965)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Es gibt eine gefangene Fläche — Punkt ohne Wiederkehr erreicht
2. Es gilt die Null-Energiebedingung — Gravitation ist immer anziehend
3. Es gibt eine nicht-kompakte Cauchyfläche — Abgeschlossenes System

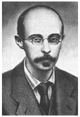
Dann ist sie singulär.

Beim Gravitationskollaps entstehen gefangene Flächen
daher generisch, d.h. **ohne Symmetrien** eine Singularität.

Die kosmologische Situation

Kosmologie: Teilgebiet der Astronomie, das sich mit der Entwicklung (und dem Ursprung) des Universums auseinandersetzt.

- Relativistische Modelle geben Hinweis auf Singularität in ferner Vergangenheit (Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker Raumzeiten)

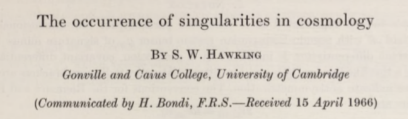



A. A. Friedmann [1888–1925]
Georges Lemaitre [1894–1966]
H. P. Robertson [1903–1961]
Arthur G. Walker [1909–2001]

- Beobachtungen zeigen, dass sich das Universum ausdehnt.
  Und zwar immer schneller.

Edwin P. Hubble [1889–1953]

Hawking's Publikationsserie 1965–67



The occurrence of singularities in cosmology

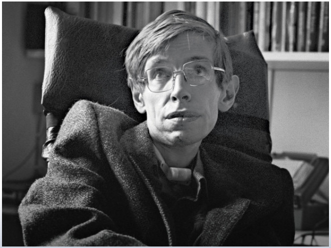
By S. W. Hawking

Gonville and Caius College, University of Cambridge

(*Communicated by H. Bondi, F.R.S.—Received* 15 *April* 1966)

Fünf fundamentale Arbeiten in kürzester Zeit

1. Sofortige Anwendung der Penrose-Ideen & Methoden in der Kosmologie
2. Import wesentlicher Techniken aus der Riemann-Geometrie
3. kausale Geodäten maximieren Eigenzeit



Stephen Hawking [1942–2018]

Das Hawking-Theorem

Theorem (Hawking 1966)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Es gibt 3-dim. Fläche m. positive Expansi
2. Es gilt die starke Energiebedingung
3. Es gibt eine kompakte Cauchyfläche

Dann ist sie singulär.

Kosmologisches Analogon zu gefangener Fläche

Gravitation anziehend; stärker!

Kosmologische Situation

Ein expandierendes Universum hat in der Vergangenheit eine Singularität $\rightsquigarrow$ Urknall

Das Hawking-Theorem

Theorem (Hawking 1966)

Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Es gibt 3-dim. Fläche m. positive Expansi
2. Es gilt die starke Energiebedingung
3. Es gibt eine kompakte Cauchyfläche

Dann ist sie singulär.

Kosmologisches Analogon zu gefangener Fläche

Gravitation anziehend; stärker!

Kosmologische Situation

Ein expandierendes Universum hat in der Vergangenheit eine Singularität $\rightsquigarrow$ Urknall

Das Muster der Theoreme & Beweise

Muster-Theorem (José Senovilla, 1998)

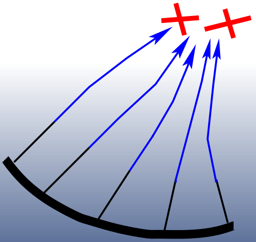
Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Ein geeignete Anfangsbedingung — Gravitation ist hier stark
2. Eine Energie- oder Krümmungs-Bedingung — Gravitation ist anziehend
3. Eine geeignete Kausalitätsbedingung — Globale Struktur der Raumzeit

Dann ist sie singulär.

1. **Anfangsbedingung** $\rightsquigarrow$ kausale Geodäten beginnen zu fokussieren
2. Energiebedingung $\rightsquigarrow$ Fokussierung geht weiter (Raychaudhuri-Gleichung) $\rightsquigarrow$ fokaler Punkt
3. Kausalitätsbed. $\rightsquigarrow$ kein fokaler Punkt

Einziger Ausweg: kausale Geodäten enden vorher



Das Muster der Theoreme & Beweise

Muster-Theorem (José Senovilla, 1998)

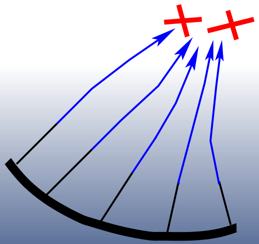
Erfüllt eine Raumzeit folgende drei Bedingungen:

1. Ein geeignete Anfangsbedingung — Gravitation ist hier stark
2. Eine Energie- oder Krümmungs-Bedingung — Gravitation ist anziehend
3. Eine geeignete Kausalitätsbedingung — Globale Struktur der Raumzeit

Dann ist sie singulär.

1. **Anfangsbedingung** $\rightsquigarrow$ kausale Geodäten beginnen zu fokussieren
2. Energiebedingung $\rightsquigarrow$ Fokussierung geht weiter (Raychaudhuri-Gleichung) $\rightsquigarrow$ fokaler Punkt
3. Kausalitätsbed. $\rightsquigarrow$ kein fokaler Punkt

   Einziger Ausweg: kausale Geodäten enden vorher



Fokussierung (Raychaudhuri-Gleichung)

$$\dot\theta(t) = -\underbrace{\mathrm{Ric}\Big(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\Big)}_{\geq 0 \quad \text{(EB)}} - \underbrace{\mathrm{tr}\big(\sigma^2(t)\big)}_{\geq 0} - \frac{1}{3}\,\theta^2(t) \leq -\frac{1}{3}\,\theta^2(t)$$

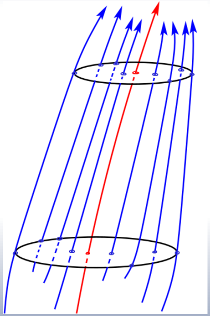
- (EB) $\Longrightarrow$ $\dot\theta(t) \leq 0$
- (AB) $\Longrightarrow$ $\theta(0) < 0$

$\leadsto$ $\theta(t) \to -\infty$ in endl. Zeit

$\leadsto$ $\exists$ fokaler Punkt
falls Geodäte solange ex.

- (KB) $\nexists$ fokaler Punkt

$\leadsto$ Geodäte muss
zu existieren aufhören

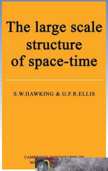


Flächenänderung $\sim \dot\theta$

Das Problem mit der Regularität

Theoreme funktionieren nur für glatte Metriken g

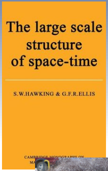
- ! g muss 2-mal stetig diffbar. vom Pkt. abhängen
- $\leadsto$ Theoreme gelten z.B. nicht für O.S.-Kollaps
- $\leadsto$ Frage nach Erweiterbarkeit
  Kann Singularität vermieden werden, für $g \notin C^2$?
  Besonders relevant: $g \in C^1$; Krümmung ok.
- ✗ Problem schon in [Hawking & Ellis, 1973] erkannt
- ✗ Lange Liste offener Probleme [Senovilla, 1998]
- ✓ Seit 2011
  spez. Regularisierungen für nicht-glatte Metriken
  [Piotr Chruściel & James Grant]
  Kausalitätstheorie in niedriger Regularität
  [Ettore Minguzzi]
- ✓ seit 2014
  Singualritätentheoreme für $g \in C^{1,1}$ und $g \in C^1$



Das Problem mit der Regularität

Theoreme funktionieren nur für glatte Metriken g

- ! g muss 2-mal stetig diffbar. vom Pkt. abhängen
- $\rightsquigarrow$ Theoreme gelten z.B. nicht für O.S.-Kollaps
- $\rightsquigarrow$ Frage nach Erweiterbarkeit
  Kann Singularität vermieden werden, für $g \notin C^2$?
  Besonders relevant: $g \in C^1$; Krümmung ok.
- ✗ Problem schon in [Hawking & Ellis, 1973] erkannt
- ✗ Lange Liste offener Probleme [Senovilla, 1998]
- ✓ Seit 2011
  spez. Regularisierungen für nicht-glatte Metriken
  [Piotr Chruściel & James Grant]
  Kausalitätstheorie in niedriger Regularität
  [Ettore Minguzzi]
- ✓ seit 2014
  Singualritätentheoreme für $g \in C^{1,1}$ und $g \in C^1$



Singularitätenthms. in niedriger Regularität

C^1-Hawking-Penrose Thm. **[KOSS 2022]**

Eine C^1-Raumzeit is singulär, wenn gilt:

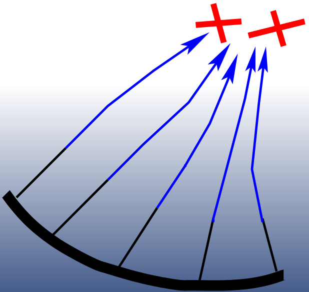
1. Es gibt gefangene Fläche/3-Fl. m. pos. Exp.
2. Es gelten geeignete Energiebedingung
3. Es gibt keine geschlossenen kausalen Kurven
4. Kausale Geodäten verzweigen sich nicht

(AB) wie gehabt

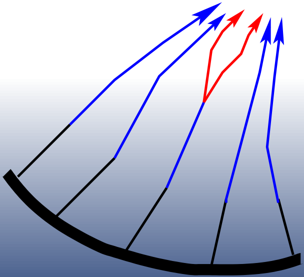
(EB) wie gehabt, aber...

(KB) fast wie gehabt

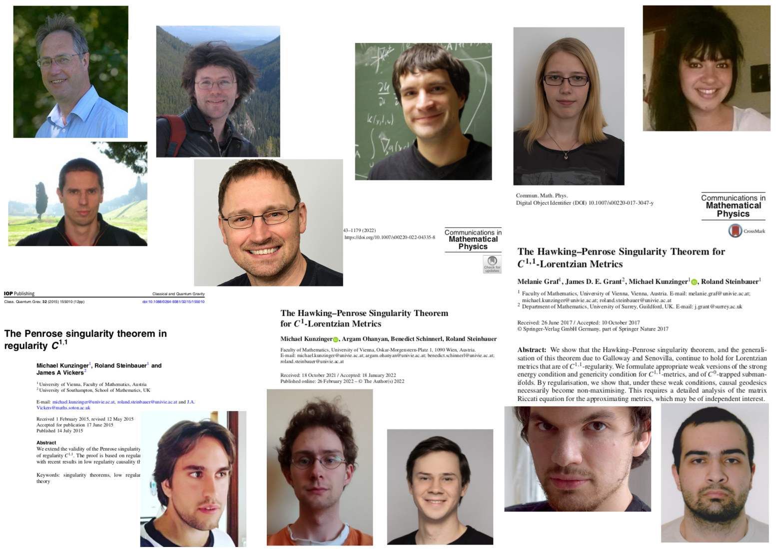
NEU: non-branching



oder



Das Team



Danke fürs Zuhören!

Bildnachweis & Disclaimer

p. 2, p. 6: Einstein & Raumkrümmung, courtesy of NASA.

p. 7: Galileo Galilei, open domain, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d4/Justus_Sustermans_-_Portrait_of_Galileo_Galilei%2C_1636.jpg
Galileo at Pisa, By Dan Hanson, https://www.pinterest.at/pin/348606827381663908/

p. 7: Bernhard Riemann, By August Weger, Public domain, via Wikimedia Commons, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/ba/BernhardRiemannAWeger.jpg

p. 13: Karl Schwarzschild, Public domain, via Wikimedia Commons https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Karl_schwarzschild.jpg

p. 15: Subrahmanyan Chandrasekhar, Starchild Project NASA, Public domain, via Wikimedia Commons https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Subrahmanyan_Chandrasekhar.gif
Robert Oppenheimer, By Department of Energy, Office of Public Affairs, Attribution, via Wikimedia Commons https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/JROppenheimer-LosAlamos.jpg

p. 19: Roger Penrose, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/ab/Roger_Penrose_9560.JPG, By Biswarup Ganguly, CC BY 3.0, via Wikimedia Commons

p. 24: Stephen Hawking, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Stephen_Hawking.StarChild.jpg, By NASA, Public domain, via Wikimedia Commons

p. 11,12,26,27,29: Sketches by Roland Steinbauer, CC BY-NC-SA

All other pictures used are believed to be in the public domain with no attribution available.