AUFGABEN ZUM SCHULSTOFF FÜR DIE STUDIENANFÄNGERINNEN BACHELOR MATHEMATIK

Selbststudium, Workshops und E-Learning zur Aufarbeitung des Schulstoffs sind mit 4 ECTS (entsprechend also einem geschätzten Arbeitsaufwand der Studierenden von 100 Stunden) Teil des StEOP Pflichtmoduls *Grundlagen der Höheren Mathematik* im Bachelorstudium Mathematik an der Universität Wien. Aufgaben zum Schulstoff sind dann Teil der schriftlichen Prüfung zur *Einführung in das mathematische Arbeiten.*

Mathematik ist über weite und wichtige Strecken Handwerk. Die Aufgaben, die wir hier zusammengestellt haben, sind ein aufrichtiger Versuch, alles Handwerk aus dem Schulstoff, von dem wir hoffen, dass es die StudienanfängerInnen aus ihrer Vorbildung und der StEOP in die weiterführenden Lehrveranstaltungen mitbringen, abzubilden. Die Prüfungsfragen zum Schulstoff werden sich am Stoffumfang und an der Art der Fragen dieser Sammlung orientieren. Die Anleitungen, die kleingedruckten Tipps zur Bearbeitung der Aufgaben, die Tabelle der Ableitungen elementarer Funktionen und Wiederholungen im Appendix, die wir hier geben, sind bei der Prüfung nicht dabei. Wir hoffen, dass die StudienanfängerInnen das Angebot der Lernräume, die wir an unserer Fakultät im Wintersemester 2016 zum ersten Mal anbieten, nutzen, um miteinander über Mathematik und das Studium an sich ins Gespräch zu kommen, einander zu unterstützen, und gemeinsam mit den TutorInnen den Schulstoff aufzuarbeiten.

Die Aufgaben sind allesamt ohne Taschenrechner zu bearbeiten. Bei der Prüfung zur Einführung in das mathematische Arbeiten ist ebenfalls kein Taschenrechner erlaubt.

Wir hoffen, dass wir diesen Aufgabenpool im Laufe der ersten Semesterwochen weiter verbessern werden. Es werden aber im Abschnitt 1 keine Aufgaben mehr dazukommen.

1. Aufgabenpool

Aufgabe 1.1. Die Zahlen $(10-1)\cdot(10+1)$, $(100-1)\cdot(100+1)$, $(1000-1)\cdot(1000+1)$ sind alle drei durch 99 teilbar. Ist das ein Zufall? Entscheide, ob zum Beispiel $(100000000-1)\cdot(100000000+1)$ durch 99 teilbar ist. Wie war das nochmals mit den Teilbarkeitsregeln für 9 und 11, und weshalb?

Aufgabe 1.2. Erkläre warum das Produkt von 3 unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen bestimmt durch 6 teilbar ist. Was ist die größte natürliche Zahl, durch die *jedes* Produkt von 10 unmittelbar aufeinanderfolgenden Zahlen bestimmt teilbar ist?

Aufgabe 1.3. Wie sind die Winkelfunktionen Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkeligen Dreieck definiert? Was sind die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, wenn

Date: 30. September 2016.

1) $\alpha = 0$
2) $\alpha = \pi/6$
3) $\alpha = \pi/4$
4) $\alpha = \pi/3$
5) $\alpha = \pi/2$
6) $\alpha = \pi/8$ und $\alpha = \pi/12$?

Begründe deine Antworten elementar mit Argumenten aus der Unterstufe. Bei der letzten Aufgabe kann man sich mit einem gleichschenkeligen Dreieck mit Schenkeln der Länge 1 und mit Öffnungswinkel $2 \cdot \alpha$ helfen. Man interessiert sich dann für die Höhe auf die Basis und die halbe Länge der Basis dieses Dreiecks. (Weshalb?) Wie kann man sich diese Größen elementar ausrechnen, wenn man $\cos(2 \cdot \alpha)$ und $\sin(2 \cdot \alpha)$ genau kennt?

Aufgabe 1.4. Ordne jeweils der Größe nach.

1) $\sin\left(\frac{7 \cdot \pi}{27}\right)$, $\cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{27}\right)$, $\tan\left(\frac{7 \cdot \pi}{27}\right)$ Winkelfunktionen am Einheitskreis.
2) π, $\frac{17}{2} \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{17}\right)$, $17 \cdot \tan\left(\frac{\pi}{17}\right)$ Regelmäßige Vielecke im Einheitskreis und um ihn herum.
3) 2, 3, $\log_2 3$, $\frac{3}{2}$, $\log_3 2$, $\sqrt{3}$ Gib $\frac{8}{5}$ zur Liste dazu. Was will uns $\log_a b = x$ mit $a, b > 0$ überhaupt sagen?

Wir stellen diese Aufgabe, um in dir das kritische Reflektieren über die mathematischen Objekte, die du aus der Schulzeit kennst, zu fördern.

Aufgabe 1.5. Schreibe jeweils in der Form a/b wo $a, b \in \mathbb{Z}$ und $b \neq 0$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$:

1) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}$
2) $(1 - 3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - 3^5 + 3^6 - 3^7)/(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7)$
3) $(x^6 - y^6)/\sqrt{5}$ wobei $x = (1 + \sqrt{5})/2$ und $y = (1 - \sqrt{5})/2$. Ist $(x^{37} - y^{37})/\sqrt{5}$ rational oder irrational?

Aufgabe 1.6. Seien r der Radius des Inkreises, R der Radius des Umkreises und F der Flächeninhalt eines Dreiecks mit Seitenlängen a, b, c und jeweils gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ. Erkläre die Formeln

$$\frac{a + b + c}{2} \cdot r = F \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2 \cdot R \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma).$$

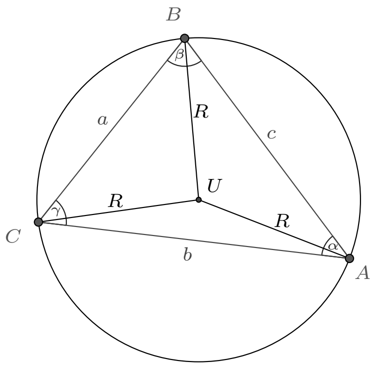
Die beiliegenden Skizzen helfen dir vielleicht dabei. Warum gilt

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{a + b + c} = 2 \cdot r \cdot R?$$

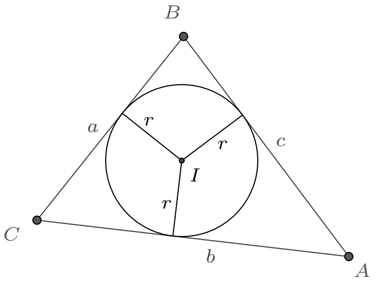
Verwende in dieser Aufgabe bitte nur Schulstoff der Unterstufe und die Definition der Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck.

Aufgabe 1.7. Berechne das Volumen und die Oberfläche einer dreiseitigen Pyramide, in der alle Seitenkanten die Länge a haben. Was sind Sinus, Cosinus und Tangens des Winkels, in dem die Seitenflächen einander treffen? Was ist der Radius der größten Kugel, die in dieser Pyramide Platz hat? So eine Pyramide heißt dann Tetraeder.

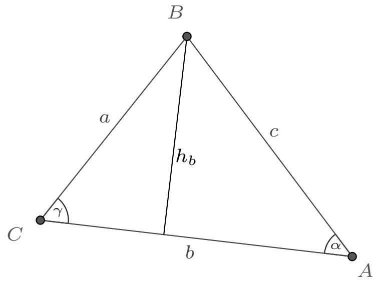
Aufgabe 1.8. Berechne das Volumen und die Oberfläche einer quadratischen Pyramide, bei der alle Seitenkanten Länge a haben. Was sind Sinus, Cosinus und Tangens des Winkels, in dem die Seitenflächen einander treffen? Wie stehts mit dem Winkel, in dem die Basis auf die Seitenflächen steht? Was ist der Radius der größten Kugel, die in dieser Pyramide Platz hat?



(A) Umkreismittelpunkt U



(B) Inkreismittelpunkt I



(C) Höhe auf Seite b

Die Scheitelpunktform der quadratischen Polynomfunktion $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$, ist

$$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S \qquad \text{wobei} \qquad x_S = -b/(2 \cdot a) \quad \text{und} \quad y_S = c - b^2/(4 \cdot a).$$

Die Nullstellen der Funktion lassen sich aus der Scheitelpunktform berechnen. Beachte, dass die sogenannte Lösungsformel eine Konsequenz aus der Scheitelpunktform ist. Erinnere, dass das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ und genau dann null ist, wenn die ursprüngliche Zahl null ist. Es folgt, dass die quadratische Polynomfunktion an der Stelle x_S ein globales Minimum hat wenn $a > 0$, und ein globales Maximum wenn $a < 0$. Wir legen dir ans Herz, die Scheitelpunktform nicht als Formel auswendig zu lernen, sondern sie durch quadratisches Ergänzen — man spricht auch von der Methode der *vollständigen Quadrate* — zu gewinnen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 1 &= 2 \cdot \left(x^2 - \frac{3}{2} \cdot x\right) + 1 = 2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16}\right) + 1 = 2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{8} + 1 \\ &= 2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Das globale Minimum wird klar in $x_S = 3/4$ angenommen und hat den Wert $y_S = -1/8$. Nun gilt

$$2 \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = 0 \iff \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \iff x - \frac{3}{4} = \pm\frac{1}{4} \iff x = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}.$$

Die Nullstellen sind also in $1/2$ und 1.

Aufgabe 1.9. Verwende die Scheitelpunktform um die Nullstellen und globalen Extremwerte der folgenden quadratischen Funktionen zu finden.

1) $x^2 - 6 \cdot x + 8$
2) $-x^2 + 4 \cdot x - 8$
3) $-9 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 13$

Aufgabe 1.10. Bestimme ohne Differentialrechnung die reellen Nullstellen und die kleinsten beziehungsweise größten Werte folgender Polynomfunktionen (und wo diese angenommen werden).

1) $x^4 - 8 \cdot x^2 + 7$
2) $-x^4 + 6 \cdot x^2 - 18$
3) $x^4 + 2 \cdot x^2 + 2$
4) $x^6 - 7 \cdot x^3 - 8.$

Zum Beispiel ist $x^4 - 8 \cdot x^2 + 7 = (x^4 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 + 16) - 16 + 7 = (x^2 - 4)^2 - 9.$

Aufgabe 1.11. Der Punkt $(-2 \mid 4)$ liegt auf der Parabel $y = x^2$. Sei $k \in \mathbb{R}$. In wie vielen Punkten schneidet die Gerade mit Steigung k, die ebenfalls durch den Punkt $(-2 \mid 4)$ verläuft, die Parabel? Sei auf der Hut! Die Antwort hängt von k ab. Interpretiere dein Ergebnis auch geometrisch.

Aufgabe 1.12. Wir nehmen zwei reelle Zahlen mit Summe 10 und bilden ihr Produkt. Was ist das größte Produkt, das man so bilden kann? Finde eine Lösung über vollständige Quadrate, die ohne Differentialrechnung auskommt.

Aufgabe 1.13. Wir betrachten ein rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten der Länge a und b und schreiben ihm Rechtecke ein, deren Seiten parallel zu den Katheten liegen. Was ist die größte Fläche, die ein solches Rechteck haben kann? Finde eine Lösung über vollständige Quadrate, die ohne Differentialrechnung auskommt.

Aufgabe 1.14. Wir suchen nach jenem Punkt der Ebene, sodass die Summe der Quadrate der Abstände dieses Punkts von den drei Punkten $A = (1 \mid -4)$, $B = (2 \mid -7)$ und $C = (3 \mid 6)$ kleinstmöglich ist. Nochmal ein Triumph der vollständigen Quadrate.

Aufgabe 1.15 (Abstand Punkt zu Gerade — nochmals vollständige Quadrate)**.** Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das Quadrat des Abstands vom Punkt $P = (5 \mid -3 \mid 13)$ zum Punkt $(4 - 2 \cdot t \mid 3 \cdot t \mid 3 + 4 \cdot t)$ am kleinsten? Tipp: Ergänze quadratisch. Erkläre anschaulich, wie du mit dieser Überlegung den nächsten Punkt an P auf der Geraden $\ell = \{(4 - 2 \cdot t \mid 3 \cdot t \mid 3 + 4 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ findest. Dieser nächste Punkt wird manchmal auch als Lotpunkt bezeichnet. Ein Lot hat immer etwas mit einem rechten Winkel zu tun. Kannst du erklären, warum diese Bezeichnung sinnvoll ist? Der Abstand zwischen dem Punkt P und seinem Lotpunkt auf der Geraden ist dann der Abstand von P zur Geraden. Berechne den Lotpunkt und den Abstand des Punkts von der Geraden in den folgenden Fällen:

1) $\ell = \{(4 - 5 \cdot t \mid 7 - 5 \cdot t \mid 12 - 10 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $P = (5 \mid 0 \mid 0)$
2) $\ell = \{(-4 + 10 \cdot t \mid -t \mid 6 + 3 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $P = (4 \mid 1 \mid -2)$

Aufgabe 1.16. Durch den Punkt P ist eine Gerade, die normal auf die Ebene π steht, zu legen. Schneide dann die Ebene mit dieser Geraden. Der Schnittpunkt P_0 ist dann der *Lotpunkt* des Punktes P auf die Ebene π. Er hat die ausgezeichnete Eigenschaft, dass jeder andere Punkt auf der Ebene noch größeren Abstand zu P hat. Erkläre möglichst elementar aus der Konstruktion, warum ausgerechnet dieser Punkt diese besondere Eigenschaft hat. Tipp: Sei X irgendein Punkt auf der Ebene. Wir interessieren uns für die Länge des Vektors $\overrightarrow{XP}$ — den wir ja als $\overrightarrow{XP} = \overrightarrow{XP_0} + \overrightarrow{P_0P}$ zerlegen können. Wie würdest du diese Aufteilung geometrisch anschaulich erklären? Erläutere, warum die Vektoren $\overrightarrow{XP}$ und $\overrightarrow{P_0P}$ normal aufeinander stehen und verwende den Satz von Pythagoras.

1) $\pi\colon\ -2 \cdot x + 3 \cdot y - 6 \cdot z = -6$, $P = (-1 \mid 10 \mid -10)$
2) $\pi\colon\ 4 \cdot x - 4 \cdot y - 7 \cdot z = 8$, $P = (-5 \mid 8 \mid 3)$
3) $\pi\colon\ -14 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = -7$, $P = (-13 \mid 8 \mid -2)$.

Aufgabe 1.17. Sei π die Ebene mit der Gleichung $-2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 14$, P der Punkt $(2 \mid 1 \mid 3)$ und ℓ die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 1 \mid 2)$ mit Richtungsvektor $(1 \mid 2 \mid -1)$. Finde den Richtungsvektor für eine Gerade durch P, die parallel zu π ist und die ℓ schneidet. Überlege, warum es nur eine solche Gerade gibt.

Aufgabe 1.18. Die Seiten eines ebenen Dreiecks liegen auf den Geraden

$$\begin{aligned} \ell_1 &: 3 \cdot x + 4 \cdot y = 42 \\ \ell_2 &: 3 \cdot y - 4 \cdot x = 19 \\ \ell_3 &: 7 \cdot x - 24 \cdot y = 98. \end{aligned}$$

Bestimme die Eckpunkte des Dreiecks, sowie dessen Seitenlängen. Weise mit einem Argument aus der Unterstufe nach, dass dieses Dreieck rechtwinkelig ist und berechne seinen Flächeninhalt.

Wir kommen jetzt zur Differentialrechnung.

Beim *umgekehrten Kurvendiskutieren* von Polynomfunktionen kann man viel lernen. Wir empfehlen euch, eure Schulbücher nach solchen Aufgaben zu durchstöbern und zu üben. Die folgenden drei Beispiele finden wir besonders hübsch.

Aufgabe 1.19. Gesucht ist eine Polynomfunktion 3. Grades. Der Punkt $(-1 \mid 1)$ liegt auf dem Graphen. Die Tangente an den Graphen in diesem Punkt ist horizontal. Die Gleichung der Tangente des Graphen in jenem Punkt, wo der Graph die y-Achse schneidet, lautet $y + 6 \cdot x + 3 = 0$.

Aufgabe 1.20. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat eine Wendestelle in -1 mit Wendetangente $y+3\cdot x+5 = 0$ und eine Nullstelle in -2. Gesucht sind die Gleichung der Polynomfunktion, die Nullstellen, die kritischen Stellen (also jene, wo die erste Ableitung verschwindet) gemeinsam mit einer Charakterisierung, sowie der Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den der Graph der Polynomfunktion gemeinsam mit der x-Achse berandet.

Aufgabe 1.21. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat in 2 eine Wendestelle mit Wendetangente $9\cdot y+3\cdot x-8 = 0$. Der Graph verläuft durch den Ursprung. Die Tangente an den Graphen der Funktion im Ursprung schließt mit der positiven x-Achse einen Winkel von $\pi/4$ ein. Diese Tangente berandet mit dem Graphen der Polynomfunktion einen endlichen Bereich. Was ist sein Flächeninhalt? Berechne außerdem die Nullstellen und die kritischen Punkte (sowie deren Natur) der Polynomfunktion.

Es folgen einige typische Extremwertaufgaben.

Aufgabe 1.22. Wir betrachten Geraden durch den Punkt $A = (1 \mid 2)$ mit Steigung $k < 0$. Wie muss k gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks, das von der Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird, möglichst klein wird?

Aufgabe 1.23. Wir betrachten einen Drehkegel mit Radius r und Höhe h. Wir schreiben ihm einen Drehzylinder auf der Basis des Kegels ruhend ein. Was ist das größte Volumen, das ein solcher Zylinder haben kann, und was die größte Oberfläche? Beim zweiten Teil der Frage bitte noch mehr mitdenken als sonst.

Aufgabe 1.24. Wir betrachten einen Kreis mit Radius r und schreiben ihm Dreiecke ein. Was ist die größte Fläche, die so ein Dreieck haben kann? Warum müssen wir hier nur über gleichschenkelige Dreiecke nachdenken, deren Höhe größer als der Radius ist?

Aufgabe 1.25. Gesucht ist das gleichschenkelige Dreieck kleinsten Flächeninhalts, dessen Inkreis Radius r hat.

Aufgabe 1.26 (Kurvendiskussion)**.** Berechne die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen

$$a :]0,\infty[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto a(x) = \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{x+1}$$
$$b :]0,\infty[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto b(x) = \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{x}$$

Wie verhalten sich die Funktionen, wenn das Argument sehr groß wird? Wie viele Nullstellen haben die Funktionen? Zeige nun, dass die Funktion

$$f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^x$$

monoton wachsend und die Funktion

$$g\colon]0,\infty[\to \mathbb{R} \qquad x \mapsto g(x) = \Big(1 + \frac{1}{x}\Big)^{x+1}$$

monoton fallend ist.

Aufgabe 1.27 (Ableiten — nach allen Regeln der Kunst)**.** Berechne die ersten und zweiten Ableitungen der Funktionen auf den angegebenen Intervallen. Auf welchen (offenen) Intervallen sind diese Funktionen fallend, auf welchen wachsend?

1) $x \mapsto e^{-x^2/2}$ auf $\mathbb{R}$
2) $x \mapsto e^{\sin(2\cdot x)}$
3) $x \mapsto (x \cdot \ln(2\cdot x))^3$ auf $]0,\infty[$
4) $x \mapsto (1-\sqrt{x})/(1+\sqrt{x})$ auf $]0,\infty[$
5) $x \mapsto (x^2 - 2\cdot x + 2)/(x^2 + 2\cdot x + 2)$
6) $x \mapsto 2^x$ auf $]0,\infty[$ Erinnere, dass $2^x = e^{(\ln 2)\cdot x}$.
7) $x \mapsto (1/3)^x$ auf $]0,\infty[$
8) $x \mapsto x^x$ auf $]0,\infty[$.

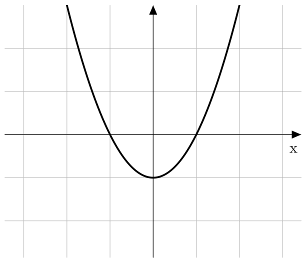
Kurzum, uns ist wichtig, dass du jede Funktion, die es in Schulbüchern zu differenzieren gibt, auch differenzieren kannst. Diese Funktionen sind immer durch Summen, Produkte, Quotienten und Hintereinanderausführungen von elementaren Funktionen, gebildet. Die Ableitungen der elementaren Funktionen solltest du auswendig kennen. Wir geben hinten eine Tafel zur Erinnerung bei.

Aufgabe 1.28 (Umkehrung von Produkt- und Kettenregel)**.** Die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ sind stetig auf $D \subset \mathbb{R}$. Finde jeweils eine explizite Funktion $F\colon D \to \mathbb{R}$ so, dass $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$.

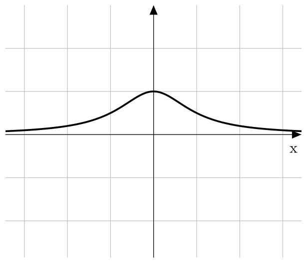
1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x/(1+x^2)$
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \cos^6(x)\cdot\sin(x)$
3) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x\cdot\cos(x)$
4) $f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x\cdot\ln(x)$
5) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x\cdot e^{-x^2}$
6) $f\colon]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \tan(x)$
7) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x\cdot\sqrt{1+x^2}$
8) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto (x-2)/\sqrt[3]{x^2 - 4\cdot x + 8}$
9) $f\colon \mathbb{R} \to]0\,,\infty[$ mit $x \mapsto \ln(x) = 1\cdot\ln(x)$
10) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x)\cdot e^{-3\cdot\cos(x)}$
11) $f\colon]1\,,\infty[\to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto 2/(x^2-1)$.
Tipp: Schreibe $2 = (x+1) - (x-1)$.

Es wäre vielen von uns lieber, wenn man das *Integrieren* an der Schule strenger vom Umkehren des Differenzierens trennen würde. Historisch liegen die Entwicklung dieser Kulturdisziplinen der Menschheit fast 2000 Jahre auseinander! Erst der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (aus dem 17. Jahrhundert) bringt die beiden auf einen Nenner: Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)\cdot dt$ stetig. Auf $]a,b[$ ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in]a,b[$. Das *partielle Integrieren* und die *Integration durch Substitution* sind genau die Umkehrung von Produkt- und Kettenregel. Sie werden halt oft völlig unnötig mit dem Hauptsatz verwischt dargestellt.

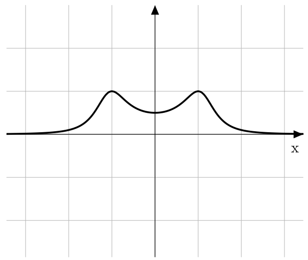
Aufgabe 1.29. Wir sehen hier die Graphen von fünf differenzierbaren Funktionen.



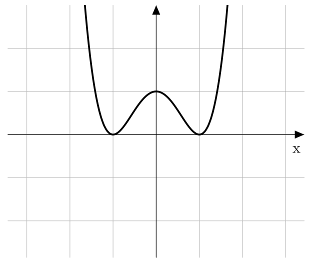
(1)



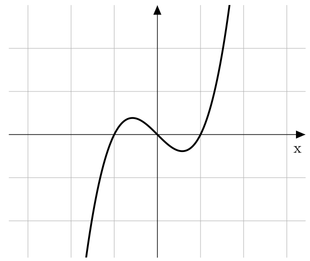
(2)



(3)



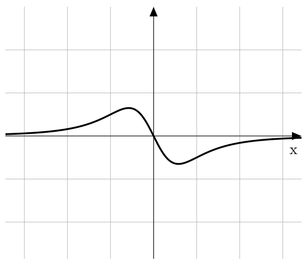
(4)



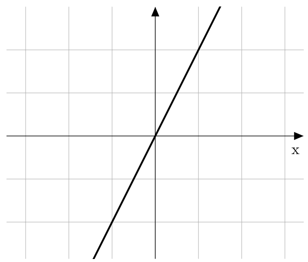
(5)

Ordne jeder der Funktionen (1) – (5) die entsprechende Ableitungsfunktion (a) – (e) zu.

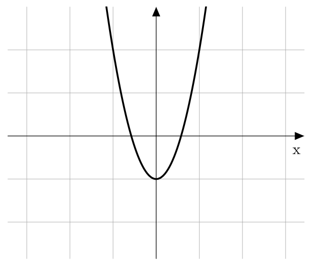
(a)



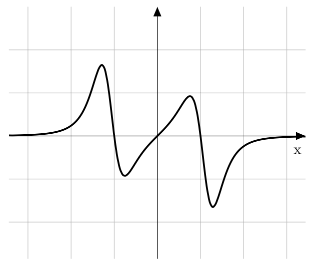
(b)



(c)

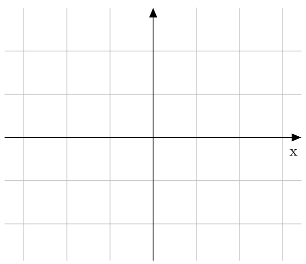


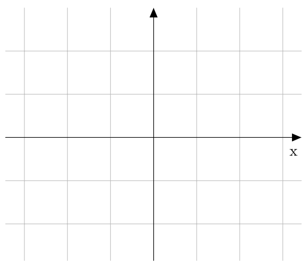
(d)

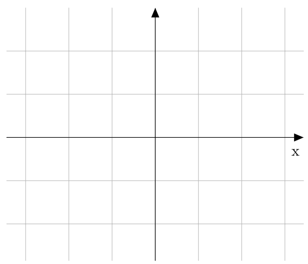


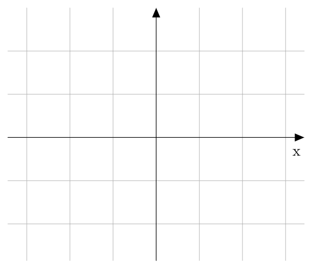
(e)

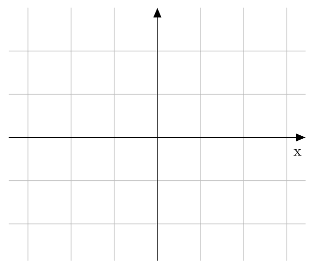
Skizziere nun selbst die Ableitungen der Funktionen, deren Graphen in (a) – (e) abgebildet sind. Achte darauf, dass in deinen Skizzen das Monotonieverhalten in (a)–(e) durch die richtigen Vorzeichen und Nullstellen abgebildet wird. Was haben diese Vorzeichen und Nullstellen mit dem Krümmungsverhalten der entsprechenden ursprünglichen Funktionsgraphen in (1)–(5) zu tun?











2. Weiterführende Aufgaben

Wir finden die folgenden Aufgaben rund um den Schulstoff toll und empfehlen sie dir herzlich — aber nicht als Vorbereitung für die Schulstoffaufgaben zur Prüfung *Einführung in das mathematische Arbeiten.*

Aufgabe 2.1. Wir erklären eine Teilbarkeitsregel durch 7 anhand von zwei Beispielen. Stelle eine Vermutung für die allgemeine Regel auf und beweise sie.

$$7 \mid 8764\,(= 876 \cdot 10 + 4) \qquad \text{genau dann wenn} \qquad 7 \mid 868\,(= 876 - 2 \cdot 4)$$
$$7 \mid 868\,(= 86 \cdot 10 + 8) \qquad \text{genau dann wenn} \qquad 7 \mid 70\,(= 86 - 2 \cdot 8). \qquad \checkmark$$

Fazit ist, dass 7 die Zahl 8764 teilt.

Aufgabe 2.2 (Geometrische Interpretation der komplexen Multiplikation)**.** Uns sind $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $\gamma = \alpha + \beta$. Erkläre, weshalb

$$(\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha) \cdot (\cos\beta + i \cdot \sin\beta) = \cos\gamma + i \cdot \sin\gamma \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\cos\alpha + i \cdot \sin\alpha} = \cos(-\alpha) + i \cdot \sin(-\alpha).$$

Wie kann man diese Identitäten geometrisch in der Gauß'schen Zahlenebene veranschaulichen? Mit den richtigen Bildern im Kopf lässt es sich wunderbar rechnen. Stelle zum Beispiel Darstellungen der komplexen Zahlen

$$\left(\cos\frac{2\cdot\pi}{99} + i \cdot \sin\frac{2\cdot\pi}{99}\right)^{33} \qquad \text{oder} \qquad (1 - i \cdot \sqrt{3})^{100}$$

in der Form $a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. (Finde a, b explizit.) Viele Formeln sind uns über die Zeit unter die Zerstreuungen geraten. Es ist ganz prächtig in der Mathematik, wie sich immer wieder neue Blickwinkel auf ein und dieselbe Formel erschließen, wenn wir offen dafür sind. In der Disziplin der komplexen Zahlen — sie heißt Funktionentheorie — liegen die Zusammenhänge zwischen Algebra, Analysis und Geometrie ganz besonders dicht.

Aufgabe 2.3. Hier geht es um die zwei komplexen Zahlen $w = 1 - i$ und $z = 3 + 4 \cdot i$. Zeichne die Zahlen

$$w + z \qquad w \cdot z \qquad \frac{z}{w} \qquad \overline{z} \qquad i \cdot z \qquad \frac{1}{z} \qquad -z \qquad \frac{1}{\overline{z}}$$

in der Gauß'schen Zahlenebene. Beschreibe, wie diese Zahlen geometrisch mit w und z zusammenhängen. Schreibe alle diese Zahlen in der Form $a + b \cdot i$ wo $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.4. Stelle die komplexen Zahlen

$$\frac{1}{i} \qquad \frac{(3 - 2\cdot i)\cdot(i - 2)}{(2 - i)\cdot(1 + i)} \qquad \frac{2 - i}{1 + 3\cdot i} + \frac{2 - i}{1 + i} \qquad i^{97}$$

in der Form $a + i \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar. Es ist uns wichtig, dass du flink rechnen kannst. Für viele Anwendungen reicht der Taschenrechner — in der mathematischen Praxis ist es aber unerlässlich, dass du eigenständig und verlässlich manipulieren kannst. Es ist ein wenig wie beim Tanzen: Es macht viel mehr Spaß, wenn man sich nicht auf jeden Schritt einzeln konzentrieren muss.

Aufgabe 2.5. Die Unterkante eines kunstvoll gestalteten Großfensters befindet sich a Meter über meiner Augenhöhe. Das Fenster selbst ist h Meter hoch. Wie weit muss ich in Abhängigkeit von a und h von der Fensterwand eben wegtreten, um das Fenster aus dem größten möglichen Winkel bewundern zu können? Wie ist der Winkel, wenn ich sehr nahe stehe? Wie, wenn ich sehr weit weg stehe? Du kannst die Ableitung der Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen in einer Formelsammlung nachschlagen.

Aufgabe 2.6. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen. Wo sind sie monoton?

(1) $x \mapsto \arcsin(x) + \arccos(x)$ auf $]-1,\, 1[$ Fragen?
(2) $x \mapsto \arctan \frac{2\cdot\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$ auf $]-\pi/4\,,\, \pi/4[$ Fragen?
(3) $x \mapsto F(x) = x \cdot \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)$ auf $]-1,\, 1[$ Was rechnest du also mit $F(1)-F(-1)$ aus?

Aufgabe 2.7 (Sekanten und Tangenten an den Graphen einer Funktion)**.** Es geht uns hier zunächst um die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{wobei} \qquad x \mapsto f(x) = x^2.$$

Wir suchen uns eine kleine reelle Zahl $h \neq 0$ aus. Dann sind

$$A = (1 \mid f(1) = 1) \qquad \text{und} \qquad B = (1+h \mid f(1+h) = (1+h)^2)$$

zwei benachbarte Punkte auf dem Graphen. Weil $h \neq 0$ ist, sind diese beiden Punkte verschieden. Die Gerade durch A und B ist eine Sekante an den Graphen. Die Steigung dieser Sekante — man nennt sie auch den *Differenzenquotienten* — ist

$$\frac{f(1+h)-f(h)}{(1+h)-1} = \frac{f(1+h)-f(h)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{2\cdot h+h^2}{h} = 2+h.$$

Die Gleichungen der Sekanten in Normalform

$$y = k\cdot x + d$$

können wir nun leicht bestimmen, weil sie ja alle durch den festen Punkt $A = (1 \mid 1)$ gehen: $k = 2+h$ und $d = -1-h$. Wird jetzt h immer kleiner, rutscht B entlang des Graphen gegen A, und die Steigung der Sekante nähert sich dem Wert 2. In diesem Grenzübergang wird aus den Sekanten die Tangente an den Graphen im Punkt $A = (1 \mid 1)$:

$$y = 2\cdot x - 1.$$

Das funktioniert viel allgemeiner.

Sei $f : \,]a,b[\, \to \mathbb{R}$ eine Funktion. (Etwas allgemeiner lassen wir die auch Definitionsbereiche $\mathbb{R}$, $]a,\infty[$, $]-\infty,\, b[$ zu.)

Wir sagen, dass die Funktion $f\colon \,]a,\, b[\, \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in \,]a,\, b[$ *differenzierbar* ist, wenn es eine Zahl $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ gibt, sodass[1]

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Die Zahl $f'(x_0)$ heißt dann die *Ableitung* der Funktion an der Stelle x_0.

Warum ist die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$ nicht differenzierbar?

Wir geben noch ein Beispiel.

Sei $f\colon \,]0,\, \infty[\, \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ und $x_0 = 3$.

[1] Wir können diese Bedingung völlig gleichwertig auch so ausdrücken: Für jede Folge von Zahlen $h_n \neq 0$ mit $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ muss gelten, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = f'(x_0).$$

Sei $h \neq 0$ eine kleine reelle Zahl. Wir berechnen zunächst den Differenzenquotienten

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} = \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h\cdot(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{(3+h)-3}{h\cdot(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}.$$

Aus der Stetigkeit der Wurzelfunktion folgt, dass $\sqrt{3+h} \to \sqrt{3}$ wenn $h \to 0$ geht. Wir können das auch nachrechnen und dabei auch gleich einen meiner liebsten Kniffe aus der Trickkiste vertiefen:

$$\sqrt{3+h}-\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}} = \frac{h}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}.$$

Der Nenner auf der rechten Seite ist immer mindestens $2\cdot\sqrt{3}$. (Denkst du auch mit weshalb?) Die rechte Seite läuft also auf 0 zu, wenn h es tut, und damit auch $\sqrt{3+h}-\sqrt{3}$. Das ist genau, wie wir behauptet haben. Es folgt also, dass

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{3}}.$$

Die Quadratwurzelfunktion ist also an der Stelle 3 differenzierbar mit Ableitung $1/(2\cdot\sqrt{3})$.

Jetzt bist du an der Reihe. Erkläre, warum die folgenden Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar sind und berechne die Ableitung. Erledige diese Aufgabe ganz von Hand ohne Ableitungsregeln zu verwenden, genau, wie wir es oben gemacht haben.

1) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = -2$;
2) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x^3 - x$ an der Stelle $x_0 = -1$;
3) $f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ an der Stelle $x_0 = 1$;
4) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = 1/(x^2+1)$ an der Stelle $x_0 = 2$;
5) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x}$ an der Stelle $x_0 = 8$; $a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + a\cdot b + b^2)$
6) $f\colon]-5, 5[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ an der Stelle $x_0 = 3$. $a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b)$

Du kannst diese Übung gut vertiefen, indem du die Differenzierbarkeit an jeder Stelle $x_0 \in D$ nachweist und die Ableitung dort berechnest. Im Mathematikunterricht der Oberstufe verbringt man zwei Jahre mit der Infinitesimalrechnung, also Grenzwerten, Differenzieren und Integrieren. Uns ist wichtig, dass du Ableitungen nicht nur mechanisch bilden kannst, sondern auch siehst, was geschieht: die Sekanten gehen zur Tangente über, aus den Differenzenquotienten wird der Differentialquotient. Die Beispiele sind so gewählt, dass du konsequent umformen musst, um zu sehen, was beim Grenzübergang $h \to 0$ geschieht. (Du musst das h im Nenner loswerden, damit es nicht mehr so aussieht, als würdest du schließlich durch Null dividieren.) Dieses zielgerichtete Umformen wird dich durch dein ganzes Studium begleiten. Es gibt ein paar Tricks, die man unbedingt kennen sollte, sie sind aber endlich.

Aufgabe 2.8 (Integration ohne den Hauptsatz)**.** In dieser Aufgabe berechnen wir das Integral

$$\int_0^1 x^2 \cdot dx$$

als den Flächeninhalt zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $x \mapsto x^2$ zwischen den Abszissen 0 und 1 von Hand. Dabei folgen wir einer klassischen Methode von Pierre de Fermat. Sie stammt aus einer Zeit, als der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung noch nicht bekannt war. Sei dazu $q \in]0, \infty[$ eine beliebe Zahl. Wir denken uns q nahe 1. Wir betrachten nun die Unterteilung

$$0 < q^n < q^{n-1} < \ldots < q^{k+1} < q^k < \ldots < q^2 < q < 1$$

vom Intervall $[0,1]$. Erinnere, dass q^n auf 0 zustrebt, wenn n immer größer wird. Die Distanz

$$q^k - q^{k+1} = q^k \cdot (1-q)$$

zweier aufeinanderfolgender Unterteilungspunkte ist also nie mehr als $1-q$. Überlege, was die Ausdrücke

$$U(n,q) := q^n \cdot 0 + (q^{n-1} - q^n) \cdot q^{2\cdot n} + \ldots + (q^k - q^{k+1}) \cdot q^{2\cdot(k+1)} + \ldots + (q-q^2)\cdot q^4 + (1-q)\cdot q^2$$

und

$$O(n,q) := q^n \cdot q^{2\cdot n} + (q^{n-1} - q^n) \cdot q^{2\cdot(n-1)} + \ldots + (q^k - q^{k+1}) \cdot q^{2\cdot k} + \ldots + (q-q^2)\cdot q^2 + (1-q)\cdot 1^2$$

mit dem Flächeninhalt, den wir suchen, zu tun haben. Erkläre, weshalb

$$U(n,q) = \left(q^2 + q^5 + q^8 + \ldots + q^{3\cdot n-1}\right) = (1-q)\cdot q^2 \cdot \frac{1-q^{3\cdot n}}{1-q^3}$$

$$O(n,q) = q^{3\cdot n} + (1-q)\cdot\left(1 + q^3 + q^6 + \ldots + q^{3\cdot(n-1)}\right) = q^{3\cdot n} + (1-q)\cdot\frac{1-q^{3\cdot n}}{1-q^3}$$

Wir nehmen jetzt n immer größer. Erkläre, wie man auf die Abschätzung

$$\frac{q^2}{1+q+q^2} \le \int_0^1 x^2 \cdot dx \le \frac{1}{1+q+q^2}$$

kommt und was geschieht, wenn wir nun q von links an 1 heran rücken. Denke über Überdenkungen und Ausschöpfungen der Fläche durch Rechtecke, die aneinander liegen, nach. Mache bitte unbedingt eine Skizze. Die Lieblingsformel $(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})\cdot(1-x) = 1-x^n$ kannst du in dieser Aufgabe gleich mehrmals gut gebrauchen. Das Integral $\int_0^1 x^2 \cdot dx$ hat übrigens schon Archimedes vor 2300 Jahren berechnet.

Aufgabe 2.9. Verwende die Methode der geometrischen Unterteilung von Pierre de Fermat, um die Flächeninhalte

$$\int_0^3 x^2 \cdot dx \qquad \int_0^1 x^3 \cdot dx \qquad \int_0^1 x^4 \cdot dx \qquad \int_0^1 \sqrt{x} \cdot dx$$

von Hand auszurechnen.

Anhang A. Ableitungen der elementaren Funktionen

Die Ableitungen der elementaren Funktionen in der untenstehenden Tafel solltest du auswendig kennen.

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto k\cdot x + d$	(k, d reelle Zahlen)	$f'(x) = k$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto x^m$	($m \ge 1$ eine ganze Zahl)	$f'(x) = m \cdot x^{m-1}$
$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto x^m$	($m \le -1$ eine ganze Zahl)	$f'(x) = m \cdot x^{m-1}$
$f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$	$x \mapsto x^\alpha$	(α eine reelle Zahl)	$f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$		$f'(x) = e^x$
$f\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$	$x \mapsto \ln(x)$		$f'(x) = 1/x$

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto \sin(x)$	(Winkel in Radiant)	$f'(x) = \cos(x)$
$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos(x)$	(Winkel in Radiant)	$f'(x) = -\sin(x)$
$f\colon \,]-\pi/2\,,\,\pi/2[\, \to \,]-\pi/2\,,\,\pi/2[$	$x \mapsto \tan(x)$	(Winkel in Radiant)	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$