Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Mai 2021 — Nr. 108

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Der Satz von H. Holditch

Ein bemerkenswertes Resultat der ebenen Geometrie stammt von H. Holditch und geht auf das Jahr 1858 [2] zurück. Dieses interessante Resultat wurde immer wieder neu aufgegriffen und auch verallgemeinert. In letzter Zeit werden nun immer wieder Beispiele von Animationen mit dynamischer CAD-Software angegeben, siehe z.B. [3].

Die Ausgangslage. Gegeben sind eine geschlossene, konvexe Kurve $k^* \in C^1$ und eine Strecke AB fester Länge $\overline{AB} \neq 0$ — siehe Abbildung 1. Die Strecke AB soll so kurz sein, dass sie mit ihren Endpunkten so auf der Kurve k^* rundherum geführt werden kann, dass die Strecke einmal um insgesamt $360°$ gedreht wird und wieder in die Ausgangslage gelangt. Dann fällt k^* bei diesem einparametrigen Bewegungsvorgang (*Zwanglauf*) mit den Bahnkurven b_A^* und b_B^* der beiden Streckenendpunkte A und B zusammen.

Für die Bahn b_C^* eines im Inneren der Strecke fest gewählten Punktes C gilt dann der folgende

Satz (von H. Holditch) *Der Flächeninhalt F des von $k^* = b_A^* = b_B^*$ und b_C^* berandeten ringförmigen Bereiches hat unabhängig von der gewählten konvexen Ausgangskurve k^* stets den Wert*

$$F = c \cdot d \cdot \pi,$$

wenn wir $c := \overline{AC}$ und $d := \overline{CB}$ setzen (es seien $c, d > 0$).

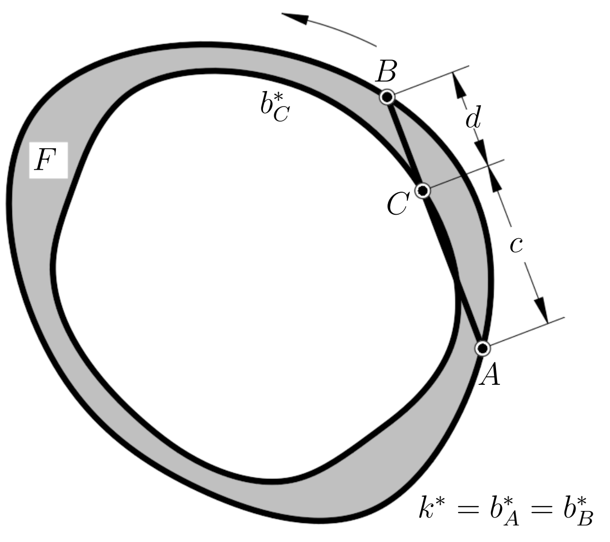

Abb. 1. Zum Satz von Holditch.

Im Folgenden soll ein kinematischer Beweis dieses Ergebnisses angeführt werden. Dazu benötigen wir die Definition des *orientierten Flächeninhalts* einer geschlossenen C^1-Kurve.

Der orientierte Flächeninhalt. Als sogenannte LEIBNIZsche Flächenformel ist eine Formel bekannt, die die Berechnung des (orientierten) Flächeninhalts einer geschlossenen ebenen Kurve erlaubt. Gegeben ist dabei eine geschlossene ebene Kurve mit ihrer einmal stetig differenzierbaren Parametrisierung $(x(t), y(t))$ in einem kartesischen Normalkoordinatensystem mit der Periode $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $t \in \mathbb{R}$. Wenn Ableitungen nach dem Parameter t mit Punkten gekennzeichnet werden, bezeichnet

$$F := \frac{1}{2} \int_0^T \big(x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)\big) dt \tag{1}$$

den *orientierten Flächeninhalt* des durch die parametrisierte ebene Kurve umschlossenen ebenen Bereiches. Diese Formel geht auf G. W. LEIBNIZ zurück und wird daher als LEIBNIZsche Flächenformel bezeichnet.

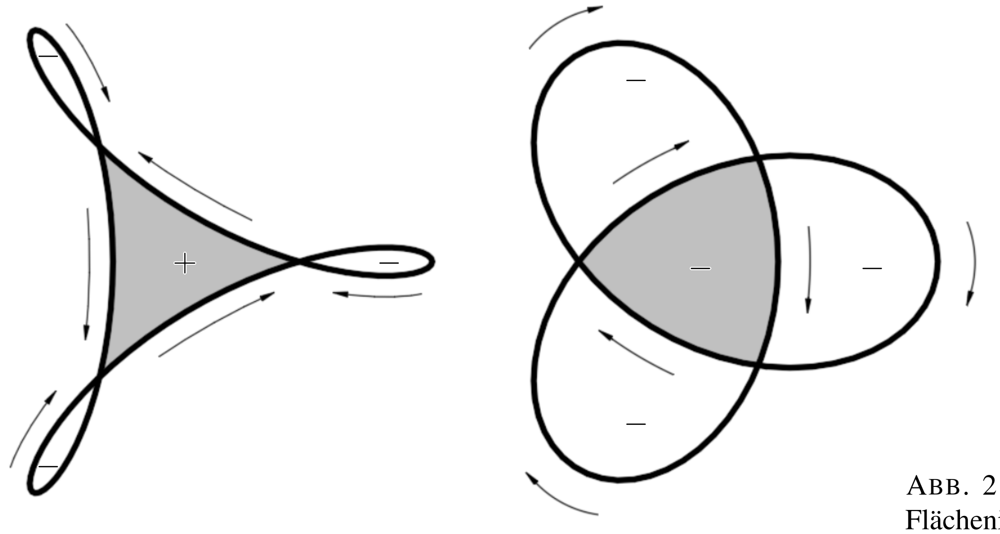

ABB. 2. Zum orientierten Flächeninhalt.

Bemerkungen.

- Der so definierte Flächeninhalt hängt von der Orientierung der Parametrisierung diese Kurve ab. Wird vom Inneren aus gesehen die geschlossene Kurve einmal mathematisch positiv und einmal negativ durchlaufen, so unterscheiden sich die orientierten Flächeninhalte dieser beiden Parametrisierungen durch ihr Vorzeichen.

- Besonders aufzupassen ist, wenn die parametrisierte geschlossene ebene Kurve Selbstschnitte besitzt. In diesem Falle stimmt der nach (1) gemessene orientierte Flächeninhalt nicht mit dem absolut zu messenden Flächeninhalt der umschlossenen Bereiche überein. Umschlossene ebene Teilgebiete, deren Ränder mathematisch positiv durchlaufen werden, tragen mit positiven Werten zum orientiereten Flächeninhalt bei, solche mit neagtiv durchlaufenen Rändern mit negativen Werten (vgl. den linken Teil der Abbildung 2). Die Orientierungen des Durchlaufs sind hier durch Pfeile angedeutet - der Rand des grau hinterlegten Gebietes wird im mathematischen Sinn positiv durchlaufen, die Ränder der „Schlaufen" jedoch negativ. Die Teilflächeninhalte werden daher einmal positiv (grau) und einmal negativ zum gesamten orientierten Flächeninhalt beitragen.

• Im Falle von Selbstschnitten kann es auch passieren, dass Teilbereiche mehrfach zum orientierten Flächeninhalt beitragen. Das ist in der rechten Figur der Abbildung 2 angedeutet: Der Kernbereich (grau gefärbt) wird von der parametrisierten Kurve doppelt umschlossen, wobei die Parametrisierung des Durchlaufs beide Male dieselbe Orientierung besitzt. Die Fläche des Kernbereichs trägt daher insgesamt doppelt zum orientierten Flächeninhalt dieser geschlossenen Kurve bei.

• In Abbildung 2 sind die Kurven $(A\cos t + B\cos 2t,\, A\sin t - B\sin 2t)$ $(t \in [0, 2\pi])$ dargestellt, wobei links $A = -3, B = 2$ und rechts $A = 1.5,\, B = 3$ gewählt wurden. Mit der Leibniz-Formel erhalten wir für den orientierten Flächeninhalt der von diesen Kurven berandeten ebenen Gebiete den Wert $F = (A^2 - 2B^2)\pi$. Die zugehörigen orientierten Flächeninhalte der Kurven in Abbildung 2 haben daher die Werte π (links) sowie $-\frac{63}{4}\pi$ (rechts).

Ein kinematischer Beweis des Satzes von H. HOLDITCH. Der hier angegebene Zugang findet sich z.B. bei O. BOTTEMA und B. ROTH in [1, S. 260ff]. Gegeben sei ein geschlossener einmal stetig differenzierbarer Zwanglauf in der euklidischen Ebene, der auf den Drehwinkel $t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden kann und sich das erste Mal nach $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ vollen Umdrehungen schließt. In kartesischen Koordinaten kann so ein Zwanglauf wie folgt parametrisiert werden: Die Bahnkurve b_P^* eines im bewegten System Σ festen Punktes P mit Koordinaten (x, y) wird im Rastsystem Σ^* durch

$$\begin{aligned} x^*(x,y,t) &= a(t) + x\cos t - y\sin t \\ y^*(x,y,t) &= b(t) + x\sin t + y\cos t \end{aligned} \tag{2}$$

erfasst $(t \in [0, 2k\pi])$, wobei $a(t)$ und $b(t)$ geeignete periodische C^1-Funktionen mit Peridode $T = 2k\pi$ mit festem $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ sind: $a(t + 2k\pi) = a(t)$ und $b(t + 2k\pi) = b(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Die oben beschriebene Bahnkurve b_P^* ist eine geschlossene C^1-Kurve und umschließt einen ebenen Bereich, dessen orientierter Flächeninhalt $F(b_P^*)$ sich über die LEIBNIZ-Formel zu

$$F(b_P^*) = \frac{1}{2}\int_0^{2k\pi} \big(x^*(x,y,t)\dot{y}^*(x,y,t) - y^*(x,y,t)\dot{x}^*(x,y,t)\big)dt \tag{3}$$

berechnen lässt. Dabei bezeichnen Punkte Ableitungen nach t. Unter Verwendung von (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} 2F(b_P^*) = &\textstyle\int_0^{2k\pi} \big(a(t)\dot{b}(t) - b(t)\dot{a}(t)\big)dt \\ &+ x\textstyle\int_0^{2k\pi} \big(a(t)\cos t + \dot{b}(t)\cos t - \dot{a}(t)\sin t + b(t)\sin t\big)dt \\ &+ y\textstyle\int_0^{2k\pi} \big(-a(t)\sin t - \dot{b}(t)\sin t - \dot{a}(t)\cos t + b(t)\cos t\big)dt \\ &+ xy\textstyle\int_0^{2k\pi} \big(-2\cos t\sin t + 2\cos t\sin t\big)dt + (x^2+y^2)\textstyle\int_0^{2k\pi} \big(\cos^2 t + \sin^2 t\big)dt \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} 2F(b_P^*) = &\textstyle\int_0^{2k\pi} \big(a(t)\dot{b}(t) - b(t)\dot{a}(t)\big)dt \\ &+ x\textstyle\int_0^{2k\pi} \big((a(t) + \dot{b}(t))\cos t - (\dot{a}(t) - b(t))\sin t\big)dt \\ &- y\textstyle\int_0^{2k\pi} \big((a(t) + \dot{b}(t))\sin t + (\dot{a}(t) - b(t))\cos t\big)dt + 2k\pi(x^2+y^2). \end{aligned} \tag{4}$$

Wir setzen abkürzend

$$\begin{aligned} K &:= \int_0^{2k\pi} \big(a(t)\dot b(t) - b(t)\dot a(t)\big)\,dt \\ L &:= \int_0^{2k\pi} \big((a(t)+\dot b(t))\cos t - (\dot a(t) - b(t))\sin t\big)\,dt \\ M &:= -\int_0^{2k\pi} \big((a(t)+\dot b(t))\sin t + (\dot a(t) - b(t))\cos t\big)\,dt, \end{aligned} \tag{5}$$

was die zu (4) äquivalente Form

$$2F(b_P^*) = K + xL + yM + 2k\pi(x^2+y^2) \tag{6}$$

ergibt. Dabei hängen die Werte K, L und M sowie das feste k nur vom gewählten Zwanglauf ab.

Das oben angegebene Resultat des Satzes von HOLDITCH kann daraus für $k = \pm 1$ rasch gefolgert werden: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir im bewegten System Σ die Punkte A, B und C aus Abbildung 1 auf der x-Achse mit den Koordinaten $A(0,0)$, $B(c+d,0)$ und $C(c,0)$ wählen. Da die Punkte A und B (inklusive Orientierung) dieselbe Bahn $b_A^* = b_B^*$ durchlaufen, stimmen auch die zugehörigen orientierten Flächeninhalte $F(b_A^*)$ und $F(b_B^*)$ überein. Wir haben daher mit (6)

$$2F(b_A^*) = K = 2F(b_B^*) = K + (c+d)L \pm 2\pi(c+d)^2, \tag{7}$$

woraus wir wegen $c+d \neq 0$ für L den Wert $L = \mp 2\pi(c+d)$ gewinnen. Der Flächeninhalt F des von $k^* = b_A^* = b_B^*$ und b_C^* berandeten Bereiches hat daher den Wert $F = |F(b_A^*) - F(b_C^*)|$, für den sich mit (7) sofort

$$F = \frac{1}{2}\left|K - (K + cL \pm 2\pi c^2)\right| = \frac{1}{2}\left|\pm 2\pi c(c+d) \mp 2\pi c^2\right| = c \cdot d \cdot \pi$$

ergibt. Damit ist das eingangs angegebene Resultat von HOLDITCH für das kinematische Vorgehen verifiziert.

Aus der allgemeinen Formel (6) lassen sich sofort einige Eigenschaften der Flächeninhalte der Bahnkurven herleiten:

- Alle Punkte $P(x,y)$ des bewegten Systems Σ, für die die Flächeninhalte $F(b_P^*)$ denselben Wert $W \in \mathbb{R}$ haben, sind durch die Gleichung

$$W = \frac{1}{2}K + \frac{x}{2}L + \frac{y}{2}M + k\pi(x^2+y^2)$$

gekennzeichnet. Sie liegen daher im Allgemeinen jeweils auf einem Kreis, dessen feste Mitte in Σ die Koordinaten $(-\frac{L}{4k\pi}, -\frac{M}{4k\pi})$ besitzt.

- Bei bekannter Umlaufzahl k können aus der Kenntnis der Flächeninhalte $F(b_A^*)$, $F(b_B^*)$ und $F(b_C^*)$ dreier nicht kollinearer Punkte A, B und C in Σ die Werte K, L und M aus der Formel (6) berechnet werden. Damit ist dann auch der orientierte Flächeninhalt der Bahn b_P^* jedes weiteren Punktes $P(x,y) \in \Sigma$ sofort zu ermitteln.

Ein Beispiel. Als Beispiel betrachten wir als geschlossenen Zwanglauf die durch

$$\begin{aligned} x^*(x,y,t) &= \cos 2t + x\cos t - y\sin t \\ y^*(x,y,t) &= -\sin 2t + x\sin t + y\cos t \end{aligned} \tag{8}$$

parametrisierte „Kreisrollung“ mit Periode $T = 2\pi$, also Umlaufzahl $k = 1$, mit $t \in [0, 2\pi]$ — vgl. [4]. Dabei rollt der gangfeste Kreis p mit Mitte in $O(0,0) \in \Sigma$ und Radius 2 im Inneren des rastfesten Kreises p^* mit Mitte $O^*(0,0) \in \Sigma^*$ und Radius 3. Abbildung 3 zeigt diesen Zwanglauf mit den Bahnkurven der gangfesten Punkte $O(0,0)$, $1(1,0)$, $2(2,0)$ und $3(3,0)$. Das Gangsystem Σ wurde an der Position $t = 0.82$ dargestellt.

Mit (5) berechnen wir $K = -4\pi$ sowie $L = M = 0$ und gewinnen aus (6) für den orientierten Flächeninhalt der geschlossenen Bahnkurve b_P^* des rastfesten Punktes $P(x,y) \in \Sigma$ den Wert

$$F(b_P^*) = \pi(x^2 + y^2 - 2). \tag{9}$$

Der Mittelpunkt $O(0,0)$ des bewegten Rollkreises p durchläuft einen Kreis b_O^* (Radius = 1) um die Mitte $O^*(0,0)$ des Rastkreises. Er wird beim Zwanglauf im mathematisch negativen Sinn doppelt durchlaufen, sodass der orientierte Flächeninhalt den Wert -2π annimmt. Für die Bahnen der Punkte $1, 2$ und 3 erhalten wir die orientierten Flächeninhalte $F(b_1^*) = -\pi$, $F(b_2^*) = 2\pi$ und $F(b_3^*) = 7\pi$.

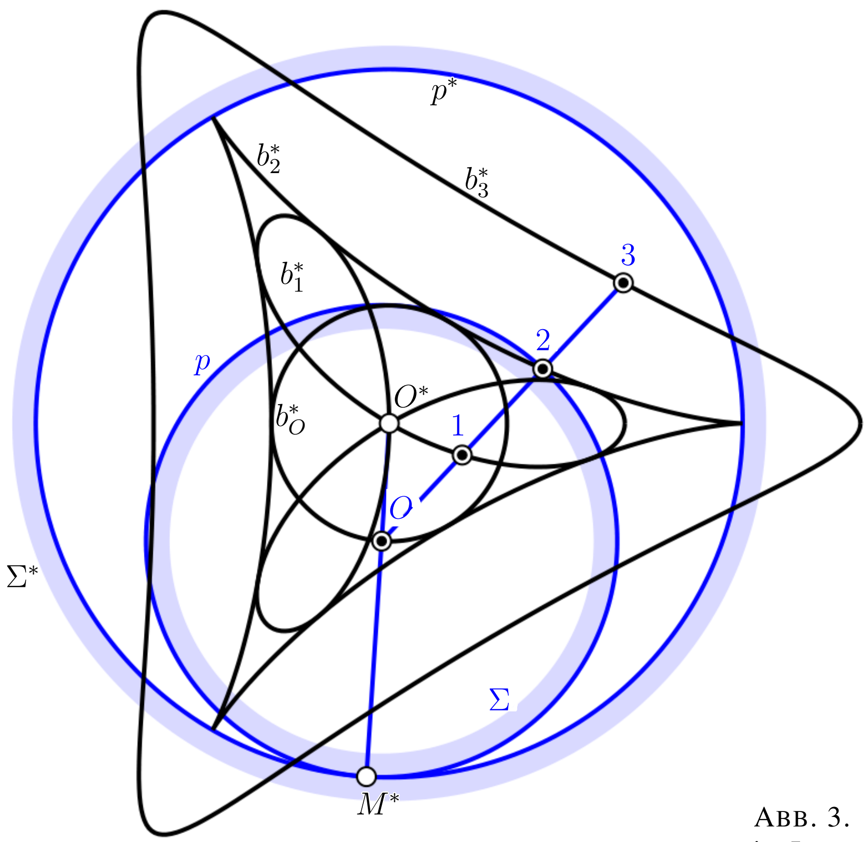

ABB. 3. Der Kreis p mit Radius 2 rollt im Inneren des Kreises p^* mit Radius 3.

LITERATUR

[1] Oene BOTTEMA, Bernard ROTH: Theoretical Kinematics, North-Holland, Amsterdam 1979.

[2] Hamnet HOLDITCH: Geometrical Theorem. Quarterly J. Pure Appl. Math 2 (1858), S. 38. *http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN600494829_0002*

[3] Georg WENGLER: Satz von Holditch. Online-Demonstration mit Hilfe von Geogebra *https://www.geogebra.org/m/RScgNz6J* [19.4.2021]

[4] Walter WUNDERLICH: Ebene Kinematik (Hochschultaschenbuch 447/447a). Bibliograph. Inst., Mannheim 1970.

O. Röschel