



DIE LOGARITHMISCHE SPIRALE - TEIL 2

Im ersten Teil dieses Mathebriefs (Mathebrief Nr. 116, Juni 2022) haben wir die logarithmische Spirale beschrieben, auf ihre Loxodromeneigenschaft und ihre Selbstähnlichkeit hingewiesen und DÜRERS *ewige Linie* als logarithmische Spirale erkannt.

Wir wollen nun im zweiten Teil ein paar der unzähligen weiteren Eigenschaften der Wunderspirale vorstellen, ihre Verbindung zu räumlichen Spiralen beleuchten und ihr Vorkommen in der Natur zeigen. Zuerst und im Anschluss an den vorangegangenen Brief, wollen wir auf zwei mögliche technische Anwendungen der logarithmischen Spirale hinweisen.

Rollung der logarithmischen Spirale. Die logarithmische Spirale kann als Profil für Wälzlager verwendet werden, worauf schon W. WUNDERLICH in [5] hingewiesen hat. In FIG. 1 ist folgender Sachverhalt illustriert: *Rollt eine logarithmische Spirale (ohne zu gleiten) auf einer ihrer Tangenten ab, dann durchläuft ihr Wickelpunkt eine Gerade.*

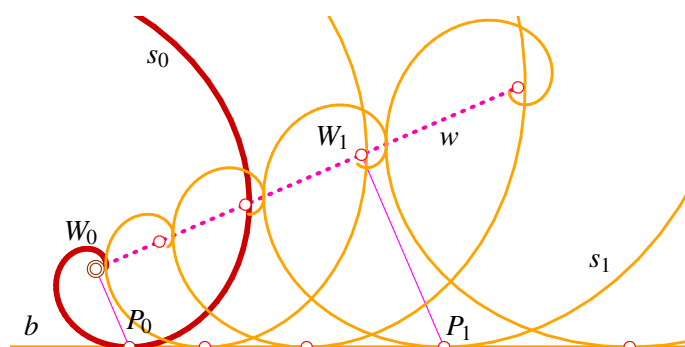


FIG. 1. Rollt die logarithmische Spirale s auf einer ihrer Tangenten b , dann durchläuft ihr Wickelpunkt W eine Gerade w .

Das kann man ganz leicht einsehen, denn beim gezeigten Rollvorgang wird die Spirale aus der Position s_0 in die Position s_1 gerollt. Da die Tangente und der Polarstrahl stets denselben Winkel einschließen und der Polarradius von e^{pt_0} auf e^{pt_1} anwächst, geht die Spirale s_0 durch eine Drehstreckung in die Spirale s_1 über (abgesehen von einer Translation). Dabei wird der Bogen $L(t_0, t_1) = \frac{1}{p} (e^{pt_1} - e^{pt_0}) \sqrt{1 + p^2}$ auf der Tangente b abgewickelt, und der Wickelpunkt W_0 wandert auf einer Geraden w mit der Steigung p gegenüber der Tangente b .

Rollen über spezielle Stufen. Diese Eigenschaft der logarithmischen Spirale kann zur geradlinigen Überwindung von Stufen genutzt werden. Rollen oder Räder mit logarithmischem Profil rollen

dann auf den Auftrittsflächen von Stufen, wobei der Wickelpunkt als Achslager oder Nabe des Rades dient und proportional zum zurückgelegten horizontalen Weg (abgewickelter Bogen) an Höhe verliert oder gewinnt. Allerdings ist der Vorgang ein wenig „unrund“, weil sich die Bahngeschwindigkeit des Wickelpunkts während einer gleichförmigen Rollung rhythmisch ändert (siehe dazu das Video <https://tethys.uni-ak.ac.at/rolling-snail.mp4>). Der genaue Vorgang wird in [1] beschrieben. Dabei ist darauf zu achten, dass es zu keinen „Unterschnitten“ in der Nähe der Kanten der Stufen kommt.

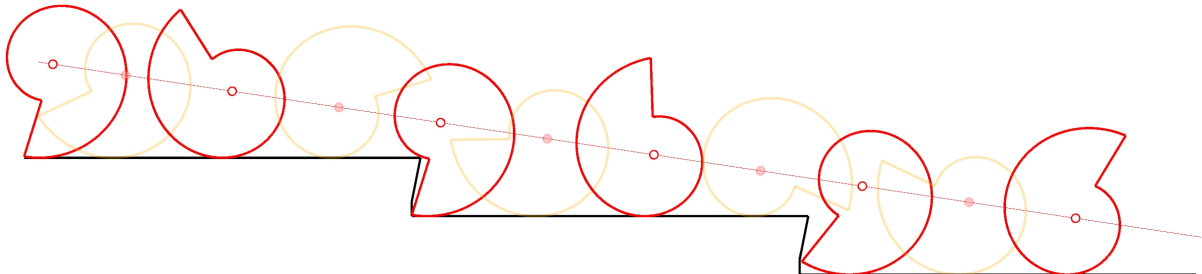


FIG. 2. Eine logarithmische Spirale rollt über spezielle Stufen.

Wir bemerken auch, dass die Gerade w (Bahn der Wickelpunkte) im rechten Winkel zu den Polarstrahlen steht, die zu den Berührungspunkten zeigen. Daher enthält sie auch die Krümmungsmitten der logarithmischen Spiralen in den Berührungspunkten mit b . Die Gerade w ist folglich das Diagramm der Krümmungsradien in Abhängigkeit von der Bogenlänge der logarithmischen Spirale. Nun ist zum einen die Bogenlänge $L(t) = \frac{1}{p} \sqrt{1+p^2} e^{pt}$ bis zum Punkt $c(t)$ und zum anderen gilt für den Krümmungsradius ebendort $\rho(t) = \overline{P_0 P_0^*} e^{pt} = \sqrt{1+p^2} e^{pt}$. Deshalb ergibt sich die folgende einfache Beziehung zwischen der Bogenlänge l und dem Krümmungsradius ρ als

$$pl = \rho,$$

welche man auch als die *natürliche Gleichung* der logarithmischen Spirale bezeichnet. Sie beschreibt die Gerade w im kartesischen Koordinatensystem, das in $b \cap w$ zentriert ist und dessen positive l -Achse in Richtung b (nach rechts) zeigt (siehe Fig. 1).

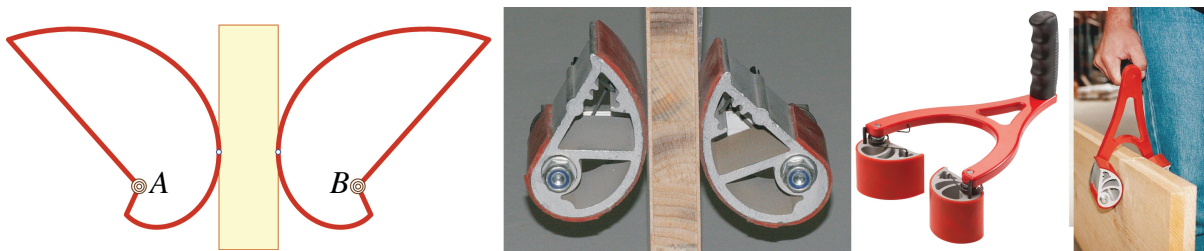


FIG. 3. Zwei Keile mit logarithmischen Spiralen als Profil, die in ihren Wickelpunkten drehgelenkig gelagert sind, können zum Einklemmen und als Halterung dienen.

Halterung für Platten. Die zweite Verwendung der logarithmischen Spirale ist in FIG. 3 vereinfacht dargestellt. Zwei zylindrische Keile, deren Profilkurve eine logarithmische Spirale ist, werden in einem bestimmten (aber festen) Abstand drehgelenkig gelagert. Die Achsen gehen durch die Wickelpunkte A und B. Ein zwischen beiden Keilen eingeklemmtes Objekt kann so nicht nach unten rutschen und gehoben oder getragen werden.

Annäherung der logarithmischen Spiralen mittels Fibonacci-Zahlen. Im Mathebrief Nr. 69 wurde die Fibonacci-Folge $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ besprochen. Die Folge kann rekursiv definiert werden mit $F(0) = F(1) = 1, F(i+1) = F(i) + F(i-1)$. Die nächste Zahl der Folge ist also die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Zahlen konvergiert gegen die „goldene Zahl“ $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1,618034$.

Die Zahlenfolge ergab sich aus folgender, der Natur angepassten (wenn auch stark vereinfachten) Überlegung: Ein junges Kaninchen-Pärchen braucht einen Monat, um geschlechtsreif zu werden, und kann ab dann jedes weitere Monat ein Pärchen zur Welt bringen, das sich seinerseits nach einem Monat fortpflanzt.

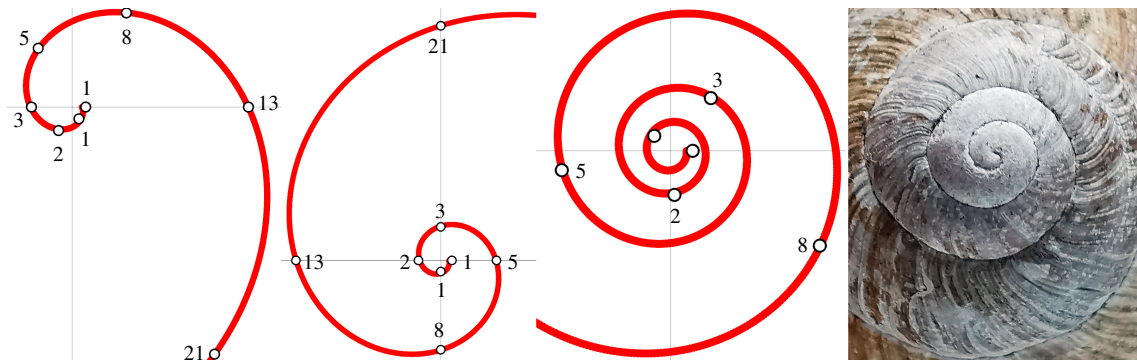


FIG. 4. Links bis Mitte: Annäherung logarithmischer Spiralen mittels Fibonacci-Zahlen (Drehwinkel -60° , -90° und der „goldene Winkel“ $-360^\circ/\Phi$). Rechts: Bemerkenswerte Ähnlichkeit der 3. Spirale mit der Draufsicht einer Weinbergschnecke (Detail ohne Umriss).

Trägt man den i -ten Wert der Folge $F(i)$ ($i = 1, 2, \dots$) zunächst auf der x -Achse auf und verdreht man die so erhaltenen Punkte jeweils um das i -fache eines vorgegebenen festen Winkels (in Fig. 4 wurde jeweils um -60° , -90° bzw. $-360^\circ/\Phi$ gedreht), so erhält man Punkte, die mit zunehmendem i immer genauer auf einer logarithmischen Spirale liegen. Die Abstände für die Spirale sind (auf 4 Kommastellen gerundet) $0.7236, 1.1708, 1.8944, 3.0652, 4.9597, 8.0249, 12.9846, 21.0095, 33.9941, \dots$

Der erste Wert ist $\Phi/\sqrt{5}$. Jeder folgende Wert entsteht durch Multiplikation mit Φ . Zusätzlich gilt wie bei der Fibonacci-Folge, dass die nächste Zahl der Folge zugleich die Summe der beiden vorangegangenen Zahlen ist.

Phyllotaxis. Die Blätter von vielen Pflanzen ordnen sich um einen Stiel oder den Leitspross meist einem Spiralgesez folgend an. Das kann besonders deutlich bei manchen Sukkulentenarten beobachtet werden. Häufig wird im Zusammenhang mit spiralförmigem Wuchs auch die Verteilung der Samenkörner in den Blüten der Sonnenblume genannt. Diese Beobachtung dürfte wohl schon LEONARDO DA VINCI gemacht haben. Genauere Untersuchungen von Blattanordnungen und deren Beschreibungen gehen auf den Schweizer Naturwissenschaftler CHARLES BONNET (1720–1793) zurück.

Insbesondere die Kerne der Sonnenblume scheinen in Mustern angeordnet, die ein Netz von annähernd logarithmischen Spiralen bilden. Diese haben den Spiralparameter $p = 2 \frac{\ln \Phi}{\pi}$ und heißen daher *goldene Spiralen*. Näherungsweise können diese Spiralen durch Viertelkreisbögen gezeichnet werden, deren Radien gerade die Fibonacci-Zahlen sind. Je vier aufeinander folgende kollineare Punkte P_1, \dots, P_4 (also zu 180° -Schritten) auf der goldenen Spirale (2. Spirale von links in Fig. 4) bilden ein harmonisches Punktequadrupel (P_1, P_4, P_2, P_3) .

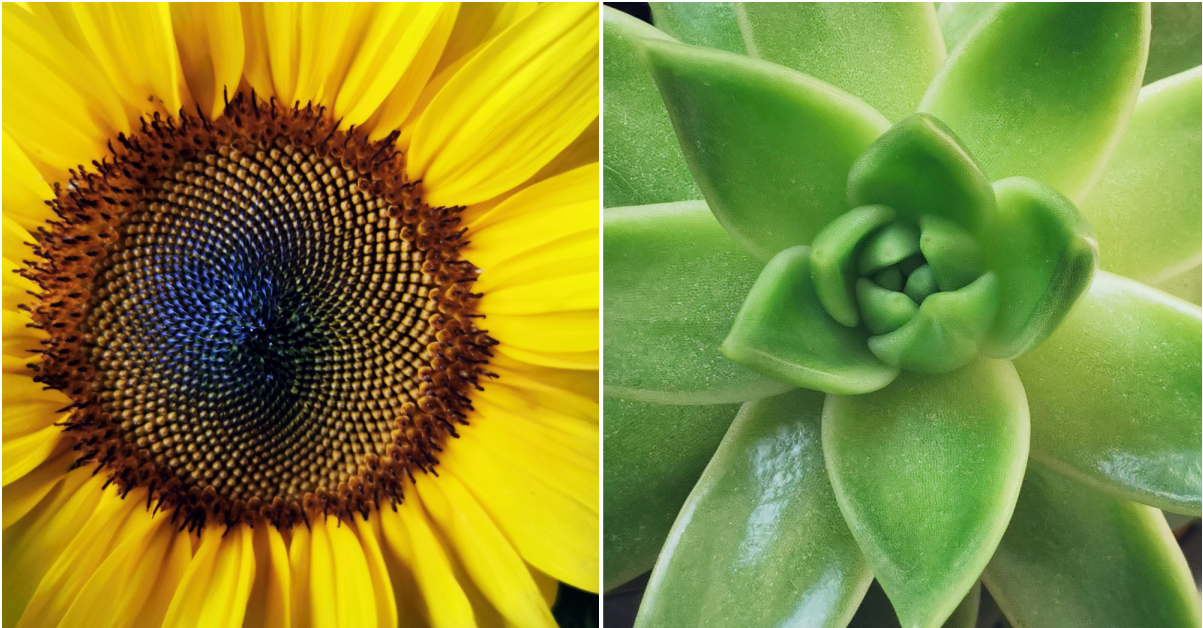


FIG. 5. Links: „Goldene Spiralen“ bei der Sonnenblume, rechts: Durch Verdrehen der Blätter um den goldenen Winkel ist maximale Lichtausbeute bei der Photosynthese möglich. Die Spitzen der Blätter liegen recht genau auf einer logarithmischen Spirale wie in Fig. 4 rechts.

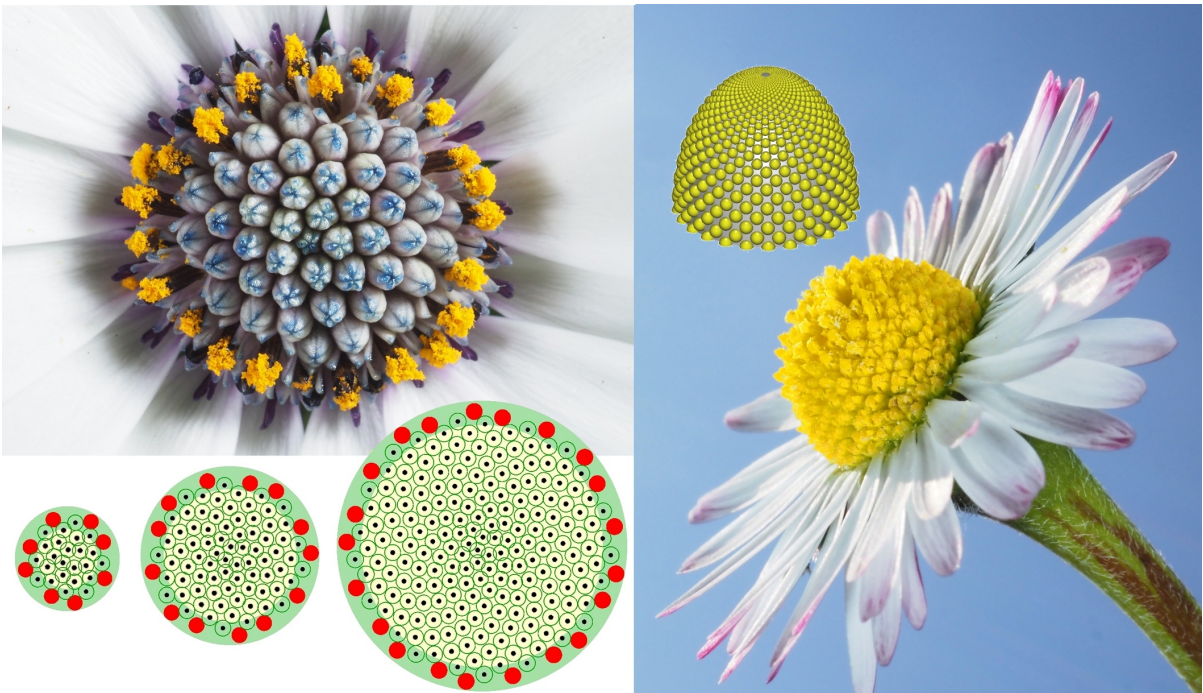


FIG. 6. Phyllotaxis in Theorie (Wachstums-Simulation) und Praxis. Die kreisförmige Fläche wird erweitert, indem Einzelblüten (Samen) so am Rand hinzugefügt werden, dass die zugehörigen Zentriwinkel jeweils um den goldenen Winkel vergrößert werden (siehe dazu das Video <https://tethys.uni-ak.ac.at/phyllotaxis.mp4>).

Ob nun der goldene Schnitt geometrische und physikalische Optima erzeugt oder nicht, im Laufe der Evolution wird sich gerade diese Verteilung von Blättern und Samenkörnern als besonders vorteilhaft erwiesen haben: Zum einen können die Blätter besonders viel Licht einfangen und die Photosynthese wird daher effizienter, zum anderen ist durch diese Anordnung der Samen ein Maximum an Samen auf vorgegebenem Platz möglich. Es handelt sich also um Optimierung durch Probieren.

Nun wenden wir uns den Spiralen im dreidimensionalen Raum zu. Hier tauchen sie zum einen als spezielle Flächenkurven auf und zum anderen als Punktbahnen bei besonderen Bewegungen.

Loxodromen auf der Kugel und zylindrokonische Spiralen. Wir haben schon festgestellt, dass die logarithmischen Spiralen Loxodromen eines Geradenbüschels sind. Mit Hilfe einer stereografischen Projektion, die das Geradenbüschel mit samt seinen Loxodromen auf eine Kugel zieht, erhalten wir auf Grund der Winkeltreue dieser Projektion die Loxodromen des Meridian- und Breitenkreisnetzes auf der Kugel (siehe [2]). Früher wurden diese *Kugelloxodromen* als Kurse in der Seefahrt verwendet. Die Navigation war relativ einfach, auch wenn man damit nicht den kürzesten Weg fuhr (insbesondere in den Polregionen, s. FIG. 7, links).

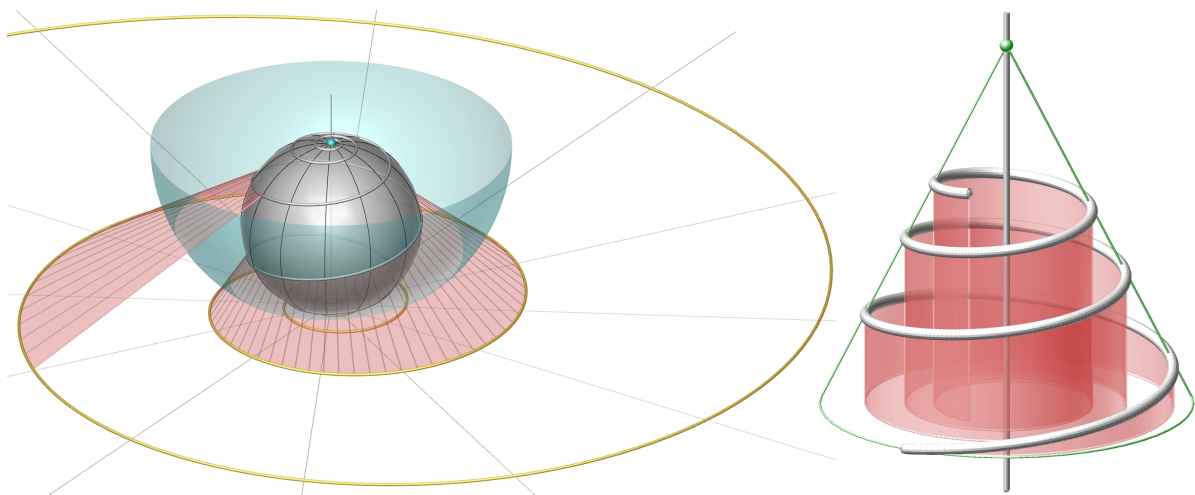


FIG. 7. Links: Kugelloxodromen als stereografische Bilder von logarithmischen Spiralen. Rechts: zylindrokonische Spiralen sind Böschungslinien auf Drehkegeln.

Die in FIG. 7 (rechts) gezeigte *zylindrokonische Spirale* ist die zur Trägerebene orthogonale Projektion einer logarithmischen Spirale auf einen Drehkegel. Es handelt sich hierbei ebenfalls um eine Loxodrome, die die Breitenkreise und die Erzeugenden des Drehkegels unter konstantem Winkel schneidet. Darüber hinaus ist sie auch eine *Böschungslinie*: Sie steigt unter konstantem Winkel gegen die Trägerebene der logarithmischen Spirale an.

Räumliche Spiraltung. Eine stetige *räumliche Spiraltung* ist die Zusammensetzung einer stetigen Drehung mit einer zum Drehwinkel proportionalen Streckung aus dem Dreh- bzw. Spiralzentrum O . Dabei geschieht die Drehung um eine Achse, die das Spiral- oder Streckzentrum O enthält. Die achsennormale Ebene π durch O wird als einzige Ebene in sich transformiert (ebene Spiraltung mit dem Spiralzentrum O). Die zylindrokonischen Spiralen sind die Bahnkurven stetiger *räumlicher Spiraltungen*. Sie spielen damit eine ähnliche Rolle wie die gewöhnlichen *Schraublinien* in der euklidischen Geometrie. Verspiralt man nun eine beliebige Kurve, die nicht in π liegt, dann erhält man eine *Spiralfläche*.

Wie schon in [4] vermutet und durch die in [3] angestellten Untersuchungen bestätigt, nähern Spiralflächen die Gehäuse von Schnecken und Muscheln mit hoher Genauigkeit an. Das betrifft zumindest die Gehäuseform, sagt aber nichts über Wachstumspausen und -phasen aus.

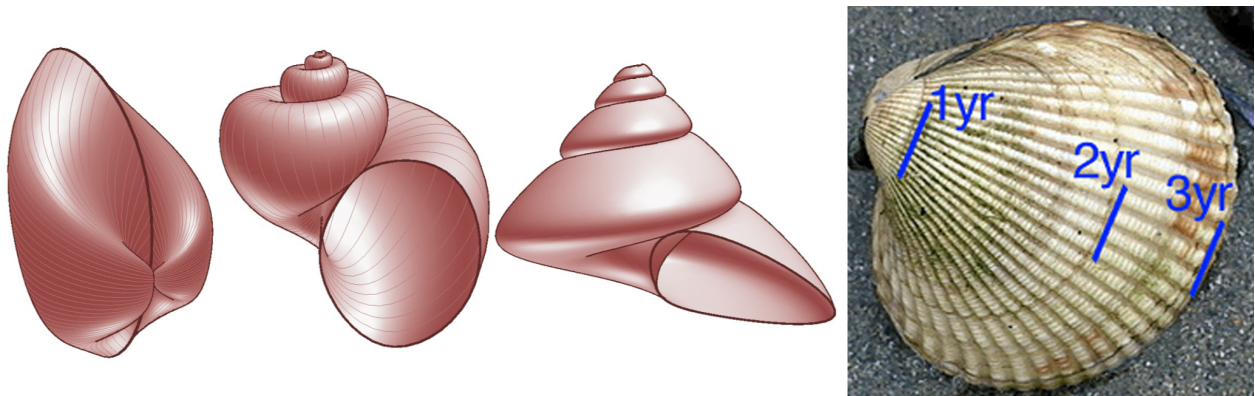


FIG. 8. Links: Computergenerierte Muscheln und Schneckenhäuser, rechts: Wachstums-
marken oder *Jahresringe* auf einer Herzmuschel.

LITERATUR

- [1] G. GLAESER, H.-P. SCHRÖCKER: *Handbook of Open Geometry*. Springer Spektrum, Berlin, 2002.
- [2] G. GLAESER: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*. (4. Auflage) Springer Spektrum, Berlin, 2022.
- [3] M. HOFER, B. ODEHNAL, H. POTTMANN, T. STEINER, AND J. WALLNER: *3D shape recognition and reconstruction based on line element geometry*. In 10th IEEE International Conference on Computer Vision, volume 2, pages 1532-1538. IEEE Computer Society, 2005, ISBN 0-7695-2334-X.
- [4] W. WUNDERLICH: *Darstellende Geometrie*. Band II. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.
- [5] W. WUNDERLICH: *Ebene Kinematik*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1970.

Georg Glaeser und Boris Odehnal