Österreichische
Mathematische
Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Dezember 2022 — Nr. 118

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http: // www.oemg.ac.at / Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

ÜBERDECKUNGEN, PFLASTERUNGEN UND PACKUNGEN VON $\mathbb{Z}$

Ein Problem, mit dem sich die Mathematik aufgrund seiner unmittelbaren Anwendungen schon lange befasst, betrifft das Schlichten zueinander kongruenter Objekte hinsichtlich einer optimalen Ausnutzung des Platzes in einem vorgegebenen Bereich. Man denke etwa an das Ausstechen von identischen Weihnachtskeksen aus einer ausgerollten Teigmasse oder das Schlichten von Zigarren gleicher Ausmaße in eine Schachtel. Das dazu duale Problem der sparsamsten Ausnutzung kongruenter Objekte zur Überdeckung eines vorgegebenen Bereichs wird ganz gut durch Abdecken des Fußbodens eines Zimmers, das ausgemalt werden soll, durch Zeitungspapier (derselben Zeitung!) illustriert.

Ganz so anwendungsorientiert, soll es aber nicht weitergehen, denn wir wollen im folgenden den Teig bzw. die Schachtel bzw. den Fußboden durch die Menge der ganzen Zahlen ersetzen. Die Rolle des Objekts, also der Keksform, der Zigarre bzw. einer Seite der Zeitung übernimmt dabei eine endliche Menge A ganzer Zahlen aus der man durch beliebige Translation um einen ganzzahligen Wert kongruente Kopien zur Verfügung hat.

Eine Vereinigung von Translaten von A heißt Überdeckung von $\mathbb{Z}$, wenn jedes $n \in \mathbb{Z}$ in zumindest einem der gewählten Translate liegt. Andererseits definiert eine Vereinigung von Translaten von A eine Packung in $\mathbb{Z}$, falls alle gewählten Translate paarweise disjunkt sind, d.h. jedes $n \in \mathbb{Z}$ in höchstens einem der gewählten Translate liegt. Trifft beides auf eine Vereinigung von Translaten von A zu, so spricht man von einer Pflasterung von $\mathbb{Z}$.

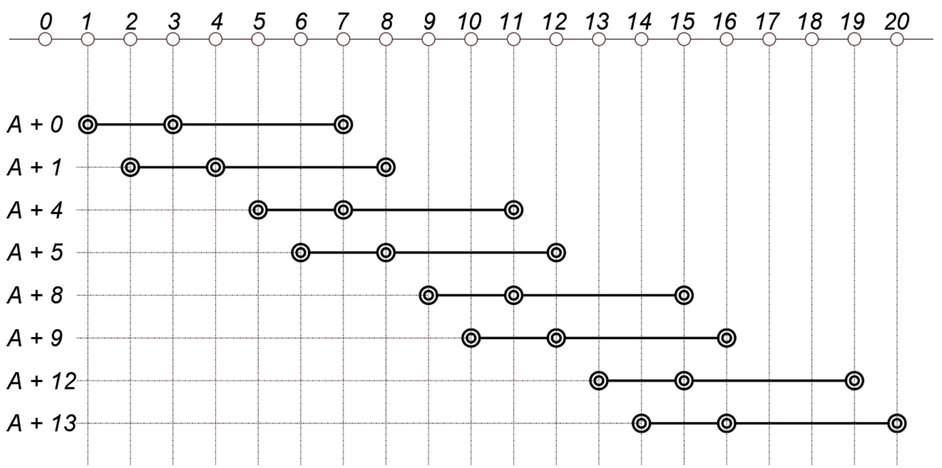

ABB. 1

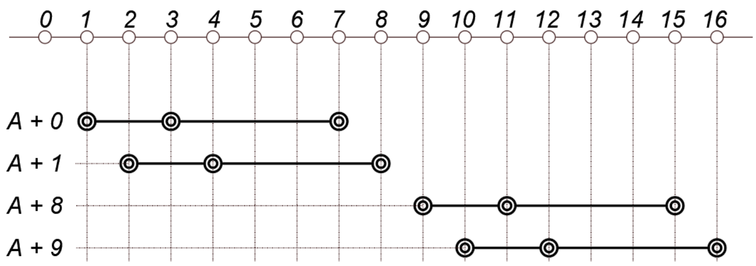

ABB. 2

Ist etwa $A := \{1,3,7\}$, so liefert

$$\bigcup_{k\equiv 0,1,4,5 \mod 8} (A+k)$$

eine Überdeckung von $\mathbb{Z}$, da die gewählte Vereinigung alle ganzen Zahlen enthält (vgl. Abb. 1). Da fuer alle $z \in \mathbb{Z}$ mit $z \equiv 0,3,4,7 \mod 8$ aber stets zwei z enthaltende Translate existieren, liegt keine Pflasterung vor.

Nun versuchen wir, diese doppelten Überdeckungen zu vermeiden: wir beschränken uns für dieselbe Menge A auf die Translate $A+k$ mit $k \equiv 0,1 \mod 8$. Dann ist

$$\bigcup_{k\equiv 0,1 \mod 8} (A+k)$$

eine Packung in $\mathbb{Z}$, da keine ganze Zahl in zwei dieser Translate liegt (vgl. Abb. 2). Allerdings reichen diese Translate nicht für eine Überdeckung aus, da ganze Zahlen aus den Restklassen 5 und 6 in keinem dieser Translate liegen. Wie wir gleich sehen werden, existiert zu $A = \{1,3,7\}$ keine passende Wahl von Translaten, die $\mathbb{Z}$ pflastert.

Wählt man jedoch $A := \{1,3,8\}$, so sieht man leicht, dass

$$\bigcup_{k\equiv 0 \mod 3} (A+k)$$

dies bewerkstelligt, wie in Abb. 3 ersichtlich.

Dies liegt daran, dass $\{1,3,8\}$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen mod 3 ist. So liegen die ganzen Zahlen in den Restklassen 0 bzw. 1 bzw. 2 genau in den Translaten $A+3(j-1)$ bzw. $A+3j$ bzw. $A+3(j-2)$ für $j \in \mathbb{Z}$.

Erstaunlicherweise ist die Frage, welche endlichen Mengen A durch geeignete Translationen eine Pflasterung von $\mathbb{Z}$ erlauben, bis heute nicht vollständig geklärt. Genau genommen existiert nur für den Fall $|A| = p^{\alpha}$, p prim, $\alpha \geq 1$, ein Kriterium, das zu entscheiden ermöglicht, ob eine Pflasterung von $\mathbb{Z}$ durch Translate von A möglich ist. Es lautet:

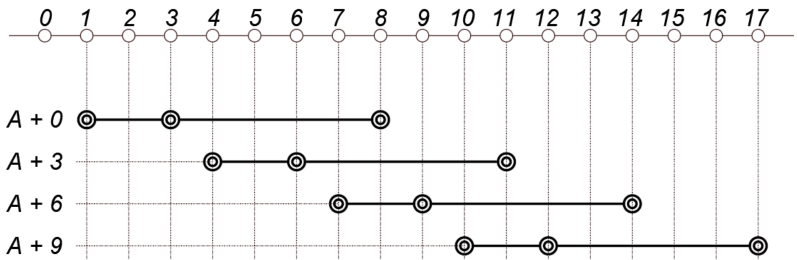

ABB. 3

Satz: (D. J. Newman, [3]). *Seien $a_1,\ldots,a_k$ verschiedene ganze Zahlen und $k = p^\alpha$, p prim, α positiv ganz. Für jedes Paar (a_i,a_j) mit $i \neq j$ bezeichne $p^{e_{ij}}$ die höchste Potenz von p, die $a_i - a_j$ teilt. Eine Pflasterung von $\mathbb{Z}$ durch Translate von $A = \{a_1,\ldots,a_k\}$ existiert genau dann, wenn höchstens α verschiedene e_{ij} auftreten.*

Im Fall $\alpha = 1$ vereinfacht sich die Aussage zu der einfacheren Bedingung, dass die $a_i \in A$ ein vollständiges Restsystem $\bmod p$ multipliziert mit einer festen Potenz von p bilden. Dies ist im Fall $A = \{1,3,8\}$ der Fall, aber auch etwa für $A = \{3,6,9\}$, wo

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k \equiv 0,1,2 \mod 9} (A+k).$$

Der Grund, warum diese Aussage nur für Mengen A mit Primzahlpotenzordnung gilt, liegt darin, dass die p-adische Entwicklung der Differenzen der Zahlen aus A eine wesentliche Rolle spielt, und sich für verschiedene Primzahlen die jeweiligen Entwicklungen sehr unterschiedlich verhalten.

Zur Veranschaulichung überlegen wir uns, wie $\mathbb{Z}$ durch Translate der Menge $\{1,4,8,13\}$ gepflastert werden kann (siehe Abb. 4). Dazu bestimmen wir zunächst die Menge $\Delta(A)$ aller mittels zweier verschiedener Elemente aus A gebildeten Differenzen. Für die gegebene Menge A liefert dies $\Delta(A) = \{3,4,5,7,9,12\}$. Davon bilden wir nun das Komplement in $\mathbb{N}$, also $\Delta^c(A) = \{1,2,6,8,10,11,13,14,\ldots\}$.

Die wesentliche Bemerkung ist nun die folgende: damit die Mengen $A+s_1, A+s_1+s_2, A+s_1+s_2+s_3,\ldots$ paarweise disjunkt sind, also Teil einer Packung sein können, muss jedenfalls $s_1,s_2,s_3,\ldots \subseteq \Delta^c(A)$ gelten. Doch dies impliziert lediglich, dass je zwei in der Auflistung direkt aufeinanderfolgende Mengen disjunkt sind. Analog muss aber auch $s_1+s_2, s_2+s_3,\ldots \subseteq \Delta^c(A)$ gelten und weiter *jede* Summe direkt aufeinanderfolgender s_i. Klarerweise ist diese Bedingung trivial erfüllt, sobald diese Summe größer als der Durchmesser der Menge A ist (grösser als 12 im Beispiel), da jeder solche Wert in $\Delta^c(A)$ liegt. Die Folge $s_1,s_2,\ldots,s_k$ kann somit ab dem kleinsten k für das $s_1+\ldots+s_k$ den Durchmesser von A übersteigt, periodisch (in beide Richtungen!) fortgesetzt werden, sofern die Bedingungen für Disjunktheit gewahrt bleiben, also $\ldots+s_k+s_1+\ldots \in \Delta^c(A)$.

Was bedeutet dies nun für Pflasterungen? Da diese insbesondere Packungen sind, muss die obige Einschränkung gelten und wir müssen lediglich diejenigen Translate von A überprüfen, die sie erfüllen. Im Beispiel kämen etwa $s_1 = 1$ und $s_2 = 1$ in Frage, da $1+1 = 2 \in \Delta^c(A)$, aber dann bliebe für s_3 erst wieder 13 zur Wahl, wodurch etwa 3 nicht überdeckt wäre. Mit $s_1 = 2$ hingegen stehen für s_2 die Möglichkeiten $s_2 = 6,8,11$ zur Wahl. Wählt man $s_2 = 6$, so ist $s_3 = 2$ wieder zulässig, da

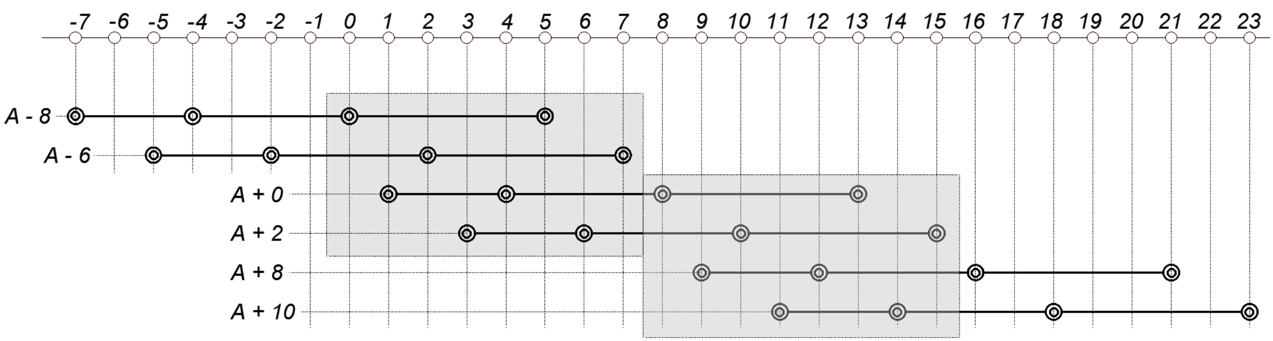

ABB. 4

$2+6+2=10 \in \Delta^c(A)$ und mit $s_4=6$ ist $s_1+s_2+s_3+s_4=16>12$ und alle zulässigen Summen liegen in $\Delta^c(A)$. Man prüft leicht nach, dass die daraus resultierende Vereinigung von Translaten von A eine Pflasterung von $\mathbb{Z}$ liefert via

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k \equiv 0,2,8,10 \mod 16} (A+k).$$

Wer sich damit noch nicht zufrieden geben möchte, kann sich auch ganz allgemein überlegen, dass sich die Dichte der durch $s_1,\ldots,s_k$ mit $s_1+\ldots+s_k >$Durchmesser(A) definierten Packung zu

$$|A|\frac{k}{s_1+\ldots+s_k} \qquad (\text{hier } 4\cdot\frac{4}{16}=1)$$

ergibt.

LITERATUR

[1] N.G. de Bruin, *On bases of integers*. Publ. Math. Debrecen **1** (1950), 232–242.
[2] D.J. Newman, *Complements of finite sets of integers*. Michigan Math. J. **14** (1967), 481–486.
[3] D.J. Newman, *Tesselation of integers*. J. Number Theory **9** (1977), 107–111.
[4] G. Weinstein, *Some Covering and Packing results in Number Theory*. J. Number Theory **8** (1976), 193–205.

Leonhard Summerer