Österreichische Mathematische Gesellschaft

MATHE-BRIEF

Jänner 2023 — Nr. 119

Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft
http://www.oemg.ac.at/Mathe–Brief ——— mathe–brief@oemg.ac.at

Eine Kugel rollt auf einem Kegelschnitt

Im dreidimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{E}_3$ geben wir einen Kegelschnitt k_0 vor, auf dem eine Kugel fester Größe derart rollt, dass die Kugel den Kegelschnitt stets in zwei Punkten berührt (vgl. Abbildung 1). Dies kann man sich zum Beispiel so vorstellen, dass die Kugel auf einem längs des Kegelschnitts k_0 ausgeschnittenen Tisch rollt. Das alles stets unter der Annahme, dass die Kugel groß genug ist und nicht gleich durch das ausgeschnittene Loch mit dem Kegelschnittrand fällt. Dabei interessiert uns vor allem die Bahn des Kugelmittelpunktes M bei dieser Bewegung.

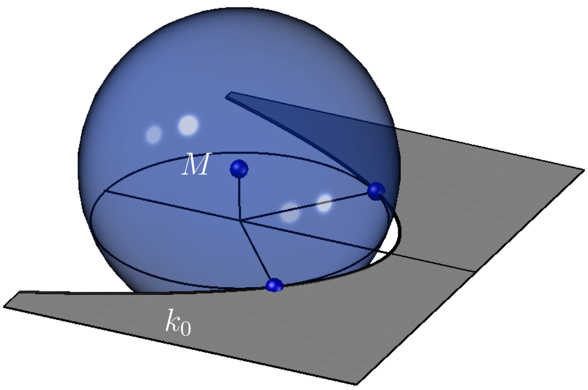

ABB. 1. Parabel k_0 und eine doppelt berührende Kugel.

Das geometrische Problem besteht somit darin, alle Kugeln fester Größe zu ermitteln, die den gegebenen Kegelschnitt k_0 doppelt berühren. Wir bestimmen den Ort der entsprechenden Kugelmitten und beweisen folgenden Sachverhalt:

Die Mittelpunkte M jener Kugeln mit festem Radius $R \neq 0$, die einen Ausgangskegelschnitt k_0 (der kein Kreis sein darf) doppelt berühren, liegen im Allgemeinen auf Kurven zweiter Ordnung in den Symmetrieebenen des Ausgangskegelschnitts. Im Fall einer Ausgangsellipse oder einer Ausgangshyperbel k_0 können zwei solche Kegelschnitte $k_{1,2}$ in den Symmetrieebenen von k_0 auftreten, während im Fall einer Ausgangsparabel k_0 im Allgemeinen nur eine Trägerparabel k_1 der entsprechenden Kugelmitten in der Symmetrieebene von k_0 auftritt. Dieses Ergebnis beweisen wir im Folgenden für Mittelpunktskegelschnitte (Ellipse und Hyperbel) und Parabeln als Ausgangskegelschnitte getrennt.

Die Bahn des Mittelpunkts der auf k_0 in obigem Sinne rollenden Kugel ist dann Teil eines der Kegelschnitte $k_{1,2}$ aus dem angegebenen Ergebnis.

Ellipsen und Hyperbeln. In einem kartesischen Normalkoordinatensystem $\{O; x, y, z\}$ sei eine Ellipse oder Hyperbel k_0 in der $[x, y]$-Ebene in Normalform durch

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1 \quad (z = 0) \tag{1}$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\alpha \neq \beta$ (es soll ja kein Kreis vorliegen) gegeben. Jene Kugeln vom festen Radius $R > 0$, die k_0 doppelt berühren, schneiden die Trägerebene $z = 0$ von k_0 in Kreisen, die ihrerseits k_0 doppelt berühren (vgl. Abbildung 1 für eine Startparabel k_0). Da die Mittelpunkte doppelt berührender Kreise von k_0 auf den Symmetrieachsen $x = z = 0$ bzw. $y = z = 0$ von k_0 liegen, befinden sich die entsprechenden Mitten doppelt berührender Kugeln in den Symmetrieebenen $x = 0$ bzw. $y = 0$ von k_0.

Wir berechnen nun die algebraische Gleichung des Orts der in diesen Symmetrieebenen gelegenen Kugelmitten. Dazu setzen wir für mögliche Berührkugeln die Gleichungen

$$x^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2 \text{ bzw. } (x - x_M)^2 + y^2 + (z - z_M)^2 = R^2 \tag{2}$$

an, wobei $(0, y_M, z_M)$ bzw. $(x_M, 0, z_M)$ die Koordinaten der gesuchten Mittelpunkte bezeichnen. Die Kugeln (2) schneiden die Trägerebene $z = 0$ von k_0 in Kreisen mit den Gleichungen

$$x^2 + (y - y_M)^2 + z_M^2 = R^2 \text{ bzw. } (x - x_M)^2 + y^2 + z_M^2 = R^2. \tag{3}$$

Elimination von x^2 bzw. y^2 aus den beiden Gleichungen (1) und (3) liefert Bedingungen für die y- bzw. x- Koordinaten der Schnittpunkte von k_0 mit den jeweiligen Schnittkreisen (3):

$$\begin{aligned} &y^2\,(1 - \frac{\alpha}{\beta}) - 2\,y\,y_M + y_M^2 + z_M^2 + \alpha - R^2 = 0 \text{ bzw.} \\ &x^2\,(1 - \frac{\beta}{\alpha}) - 2\,x\,x_M + x_M^2 + z_M^2 + \beta - R^2 = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Schnittkreise berühren den Kegelschnitt k_0 genau dann doppelt, wenn die quadratischen Gleichungen (4) eine Doppellösung für y bzw. x besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\begin{aligned} &k_1 \;\ldots\; \alpha\,y_M^2 + (\alpha - \beta)\,z_M^2 = (\alpha - \beta)(R^2 - \alpha) \quad (x_M = 0) \text{ bzw.} \\ &k_2 \;\ldots\; \beta\,x_M^2 + (\beta - \alpha)\,z_M^2 = (\beta - \alpha)(R^2 - \beta) \quad (y_M = 0) \end{aligned} \tag{5}$$

gilt. Die Mittelpunkte der möglichen k_0 doppelt berührenden Kugeln gehören somit im Allgemeinen zwei Kurven zweiter Ordnung $k_{1,2}$ in den Symmetrieebenen von k_0 an. Sie besitzen den Mittelpunkt O von k_0 als Mittelpunkt; eine ihrer Achsen stimmt mit einer von k_0 überein. Diese Kurven zweiter Ordnung zerfallen unter unseren Voraussetzungen ($\alpha, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta$) nur für $R^2 = \alpha$ bzw. $R^2 = \beta$. Je nach Größenverhältnissen von α, β und R können sie auch nullteilig sein. Damit haben wir für Ellipsen bzw. Hyperbeln k_0 das angegebene Ergebnis bewiesen.

Bemerkungen:

- Die obige Herleitung ist rein algebraischer Natur. Nicht alle Punkte auf einem der beiden Kegelschnitte k_1 oder k_2 kommen als Mitten möglicher doppelt berührender Kugeln in Frage, wenn wir auf reellen Berührpunkten bestehen.
- Der Kugelradius R darf auch nicht beliebig klein gewählt werden. Die jeweiligen Grenzen hängen vom Typ des Ausgangskegelschnitts und dessen Achsenlängen ab.

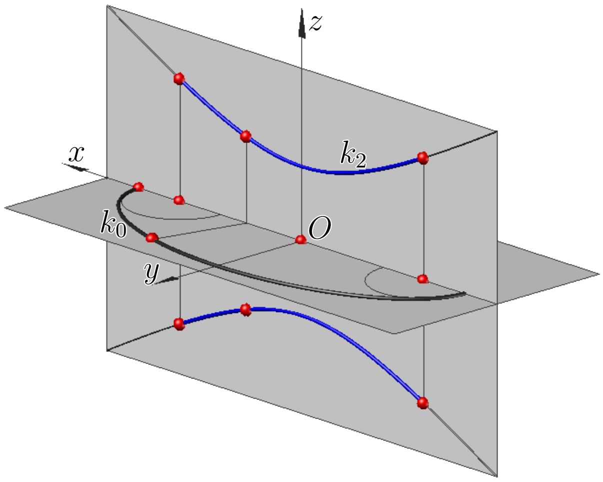

ABB. 2. Startellipse k_0 und Ort der Kugelmitten in der Symmetrieebene durch die Hauptachse der Ellipse (als Teil einer Hyperbel k_2 blau eingefärbt) für $\alpha = 100, \beta = 25$ und $R = 6$.

Abbildung 2 visualisiert diesen Sachverhalt für eine Ellipse k_0 als Startkegelschnitt: Reelle Lösungen treten nur für jenen blau eingefärbten Teil der Hyperbel k_2 auf, der über der Strecke zwischen den Hauptscheitelkrümmungsmitten der Ellipse k_0 liegt. Für Kugelmitten außerhalb dieses Hyperbelteils würde die Kugel vom Radius R die Ellipse k_0 in einem konjugiert imaginären Punktepaar berühren.

Für die für Abb. 2 gewählten Werte ist der Kegelschnitt k_1 nullteilig und liefert somit keine reellen Kugeln vom Radius R, die die Ellipse k_0 doppelt berühren.

Wenn wir nun den Kegelschnitt k_1 oder k_2 doppelt berührende Kugeln vom Radius R suchen, so haben wir in den obigen Überlegungen nur Koordinaten zyklisch durchzutauschen. So erhalten wir als Partnerkegelschnitte des Kegelschnitts k_1 einerseits den Ausgangskegelschnitt k_0 und andererseits die Kurve zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$k_3 \;\ldots\; \alpha\,\beta\,x_2 + \alpha(\beta-\alpha)\,z^2 = \beta[\alpha(\alpha-\beta)+\beta R^2] \;\text{ in der Ebene }\; y = 0.$$

Zu k_2 erhalten wir den Ausgangskegelschnitt k_0 und die weitere Kurve zweiter Ordnung mit der Gleichung

$$k_4 \;\ldots\; \alpha\,\beta\,y_2 + \beta(\alpha-\beta)\,z^2 = \alpha[\beta(\beta-\alpha)+\alpha R^2] \;\text{ in der Ebene }\; x = 0.$$

Die beiden Kurven zweiter Ordnung k_3 und k_4 sind zu k_2 bzw. k_1 zwar ähnlich, stimmen aber für reelle α, β nicht mit diesen Kurven überein.

Parabeln. Nun starten wir mit der Parabel k_0 in Normalform

$$x^2 = 2\,p\,y \quad (z = 0) \tag{6}$$

mit $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Wieder liegen die Mittelpunkte doppelt berührender Kugeln vom Radius R in der (nun einzigen) Symmetrieebene $x = 0$ von k_0. Wie oben setzen wir die Gleichung möglicher Kugeln (2) (linker Teil) mit Mittelpunkten $(0, y_M, z_M)$ mit noch unbekannter Beziehung zwischen y_M und z_M an. Der Schnittkreis mit der Trägerebene $z = 0$ von k_0 hat die Gleichung $x^2 + (y - y_M)^2 + z_M^2 = R^2$ und berührt k_0 (6) genau dann doppelt, wenn die durch Elimination der x-Koordinate aus (6) und der Schnittkreisgleichung gewonnene quadratische Gleichung

$$y^2 + 2\,y\,(p - y_M) + y_M^2 + z_M^2 - R^2 = 0$$

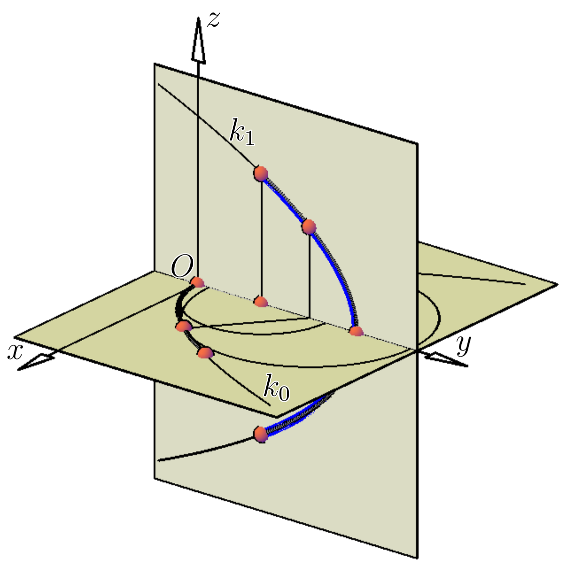

ABB. 3. Startparabel k_0 und Ort der Kugelmitten in der Symmetrieebene als blau eingefärbter Teil der Parabel k_1 für $p = 5$ und $R = 10$.

eine Doppelösung für y liefert. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$k_1 \quad \cdots \quad z_M^2 + 2\,p\,y_M = p^2 + R^2 \tag{7}$$

bei $x_M = 0$ gilt. Die Mittelpunkte der die Parabel k_0 doppelt berührenden Kugeln gehören daher einer zu k_0 kongruenten Parabel k_1 mit der Gleichung (7) in der Symmetrieebene $x = 0$ von k_0 an, deren Achse mit der von k_0 übereinstimmt. Damit haben wir insgesamt unser eingangs erwähntes Resultat bestätigt.

Bemerkungen:

– Auch hier gilt wieder, dass nur für gewisse $R > 0$ in reellen Punktepaaren doppelt berührende Kugeln existieren. So muss $R > \rho$ mit dem Scheitelkrümmungskreisradius $\rho := |p|$ von k_0 (vgl. [1], S. 94) sein, damit überhaupt Kugeln die Parabel k_0 doppelt berühren können.
– Und auch dann treten nur Teile von k_1 als Mittelpunkte von die Parabel k_0 reell berührenden Kugeln vom Radus R auf. Der Scheitel von k_1 ist der Mittelpunkt des die Ausgangsparabel k_0 doppelt berührenden Kreises vom Radius R. Abbildung 3 zeigt diesen Sachverhalt. Nur der blau eingefärbte Teil von k_1 liefert Lösungskugeln mit reellen Berührpunkten auf k_0.

Wenn wir umgekehrt die Parabel k_1 (7) doppelt berührende Kugeln vom Radius R suchen, so erhalten wir die Parabel k_0 als möglichen Ort der Kugelmittelpunkte, der aber wie eben beschrieben wieder nicht zur Gänze für reelle Lösungen in Betracht kommt.

LITERATUR

[1] G. Glaeser, H. Stachel und B. Odehnal: The Universe of Conics. Springer, Berlin Heidelberg 2016.

O. Röschel