



Herausgegeben von der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft  
<http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief> — [mathe-brief@oemg.ac.at](mailto:mathe-brief@oemg.ac.at)

## EINIGE EIGENSCHAFTEN DER BERNOULLISCHEN LEMNISKATE

Immer wieder steht die sogenannte BERNOULLISCHE Lemniskate im Fokus geometrischer Betrachtungen und Aufgaben — vgl. [3] und [4]. Hier sollen einige ihrer (bekanntesten) Eigenschaften in Erinnerung gerufen werden.

**1. Definition der Lemniskate.** Wir folgen der üblichen Definition einer *Lemniskate* wie sie z.B. auch im Mathe-Brief Nr. 43/2014 von F. SCHWEIGER [5] verwendet wird: Gegeben seien zwei verschiedene Punkte  $K$  und  $L$  der euklidischen Ebene, deren Abstand durch eine Ähnlichkeit zu 2 normiert werden kann. Die Menge aller Punkte  $P$ , deren Produkt der Abstände von  $K$  und  $L$  den konstanten Wert 1 annimmt, erfüllen die Punkte einer sogenannten BERNOULLISCHEN *Lemniskate*  $k$  mit *Brennpunkten*  $K$  und  $L$  — vgl. Abbildung 1. Formal schreiben wir

$$(1) \quad k := \{P \mid \overline{KP} \cdot \overline{LP} = 1\}$$

beziehungsweise

$$(2) \quad k := \left\{P \mid \overline{KP} \cdot \overline{LP} = \frac{\overline{KL}^2}{4}\right\},$$

falls der Abstand  $\overline{KL}$  zwischen den beiden Brennpunkten nicht zu 2 normiert ist.

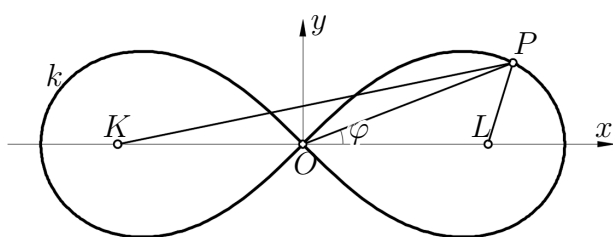


FIG. 1. BERNOULLISCHE Lemniskate  $k$  mit Brennpunkten  $K$  und  $L$  und Abstand  $\overline{KL} = 2$ : Dann gilt  $k := \{P \mid \overline{KP} \cdot \overline{LP} = 1\}$ .

**2. Algebraische Gleichung und Darstellung in Polarkoordinaten.** Wir verwenden kartesische Koordinaten  $\{O, x, y\}$  und setzen für eine Normalform  $K = (-1, 0)$  sowie  $L = (1, 0)$  an. Dann werden  $\overline{KP}^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2x$  und  $\overline{LP}^2 = x^2 + y^2 + 1 - 2x$ , woraus wir aus (1) als algebraische Gleichung der *Normalform* von  $k$

$$(3) \quad (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$$

gewinnen. Dies erlaubt es, rasch auf eine Parameterdarstellung von  $k$  in Polarkoordinaten mit  $(x, y) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$  mit  $\rho \in \mathbb{R}$  und  $\varphi \in [0, 2\pi)$  umzurechnen. Einsetzen in (3) ergibt als Gleichung der Lemniskate in Polarkoordinaten

$$(4) \quad \rho^2 = 2 \cos 2\varphi.$$

Die Lemniskate ist eine *rationale Kurve vierter Ordnung* mit  $O$  als Doppelpunkt. Die Doppelpunktstangenten in  $O$  werden von den beiden Medianen  $y = \pm x$  gebildet.

Wir ermitteln eine rationale Parametrisierung, indem wir  $k$  vorerst mit Geraden durch  $O$  schneiden, die wir durch  $y := x \cos \alpha$  mit  $\alpha \in [0, \pi]$  vorgeben. Dann gilt mit (3) für die  $x$ -Koordinaten dieser Schnittpunkte  $x^4(1 + \cos^2 \alpha)^2 = 2x^2 \sin^2 \alpha$ , woraus wir neben der Doppellösung  $x = 0$  (führt zum Doppelpunkt  $O$ ) die Beziehung  $x^2 = \frac{2 \sin^2 \alpha}{(1 + \cos^2 \alpha)^2}$ , also  $x = \pm \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$  gewinnen. Wenn wir  $\alpha$ , statt auf  $[0, \pi]$  einzuschränken, durch ganz  $[0, 2\pi]$  laufen lassen, erfassen wir die beiden Teile gemeinsam, die durch die beiden Lösungen  $x = \pm \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}$  beschrieben werden. Mit der bekannten Substitution

$$t := \tan \frac{\alpha}{2} \implies \sin \alpha = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

erhalten wir so die folgende elegante *rationale Parametrisierung* der Punkte  $(x(t), y(t))$  von  $k$  zu

$$(5) \quad x(t) = \sqrt{2} \frac{t(1+t^2)}{1+t^4}, \quad y(t) = \sqrt{2} \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}$$

mit  $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ .

**3. Die Lemniskate als spezielle Koppelkurve.** Wir betrachten ein sogenanntes *Koppelgetriebe* — siehe Abb. 2: Es handelt sich dabei um eine bewegliche Anordnung bestehend aus einem *Gestell* mit Lagerpunkten  $K$  und  $L$ , zwei *Armen*  $KA$  und  $LB$  fester Länge sowie einer *Koppel*  $AB$  ebenfalls fester Länge, die in den Punkten  $K, L, A$  und  $B$  jeweils durch Drehgelenke verbunden sind (Animationen zur Bewegung von Koppelgetrieben finden sich zum Beispiel auf der Webpage [1]). Koppelgetriebe werden auch als *Viergelenksketten* angesprochen und finden in der Technik vielfache Anwendung. Eine Drehung des Armes  $KA$  um den Lagerpunkt  $K$  erzwingt über die Koppel eine Drehung des Armes  $LB$  um den entsprechenden Lagerpunkt  $L$ . Je nach den Abständen der

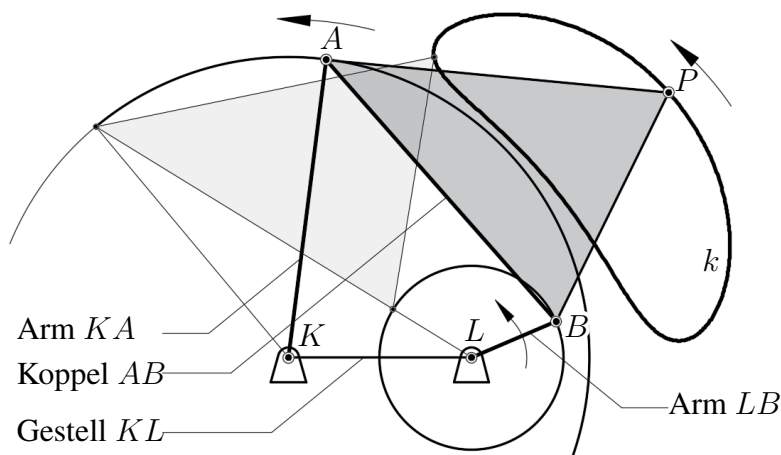


FIG. 2. Zur Definition eines Koppelgetriebes und seiner Bahnkurven.

Lagerpunkte im Gestell und den Längen der Arme bzw. der Koppel kann ein Arm (oder können beide Arme) nicht die volle Umdrehung um den Lagerpunkt zulassen. So kann beim Koppelgetriebe in der Abb. 2 der Arm  $LB$  eine volle Umdrehung vollführen, während der Arm  $KA$  nur hin- und herschwingt. In dieser Abbildung ist eine weitere Position dieses Koppelgetriebes angedeutet. Wird ein Punkt  $P$  mit der Koppel starr verbunden (das Dreieck in der Abb. soll das visualisieren), so beschreibt er bei der Bewegung des Getriebes im Gestell eine Bahnkurve  $k$ , die als *Koppelkurve* bezeichnet wird. Diese Koppelkurven sind im Allgemeinen algebraische Kurven sechster Ordnung (vgl. W. WUNDERLICH [6, S. 66ff]) und können je nach Abmessungen der Getriebeteile und des

Aufsatzdreiecks vielfältige Formen annehmen, die für die verschiedensten Anwendungen benutzt werden.

Nun betrachten wir ein *sehr spezielles Koppelgetriebe* mit besonderen Abmessungen: Die beiden Arme  $KA$  und  $LB$  sollen die Länge  $\sqrt{2}$  besitzen, die Länge der Koppel sei so wie der Abstand der Lagerpunkte gleich 2:  $\overline{KL} = \overline{AB} = 2$ . Dieses sehr spezielle Koppelgetriebe gestattet zwei Bewegungsvorgänge, die in zwei Verzweigungslagen ineinander übergeführt werden können (vgl. [6, S. 89ff und 136]): Einmal die Bewegung einer sogenannten *Parallelkurbel*, einmal die einer überschlagenen Form eines *gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebes* — siehe Abb. 3.

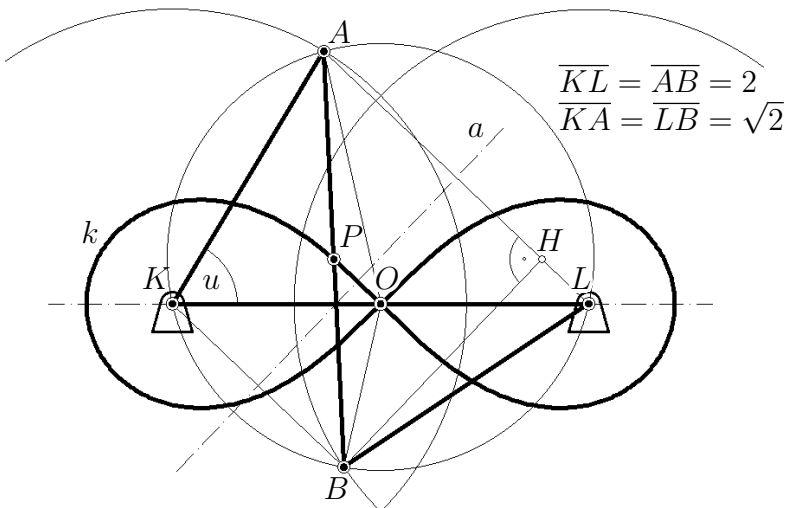


FIG. 3. Die Lemniskate  $k$  als Bahnkurve beim Zwanglauf eines speziellen überschlagenen Zwillingskurbelgetriebes.

Die bei diesem Koppelgetriebe auftretenden Bahnkurven der Punkte (im Allgemeinen von sechster Ordnung) bestehen in diesem speziellen Fall aus zwei Teilen: Einmal einem Kreis (als Bahn bei der Parallelkurbel) und einmal einer Kurve 4. Ordnung (beim überschlagenen Zwillingskurbelgetriebe). Dann gilt:

*Bei der Bewegung des obigen gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebes beschreibt der Mittelpunkt  $P$  der Punkte  $A, B$  die Lemniskate  $k$ .*

Diesen Sachverhalt weisen wir im Folgenden nach: Die überschlagene Form des gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebes  $KABL$  (siehe Abb. 3) hat in jeder Position eine Symmetrieachse  $a$ : Die Spiegelung an  $a$  führt die Lagerpunkte  $K$  und  $L$  in die Koppelendpunkte  $B$  und  $A$  über. Damit ist das (bei diesem Zwanglauf ausserhalb der Verzweigungslagen stets konvexe) Viereck  $ALBK$  ein symmetrisches Trapez. Das Lot aus  $B$  auf die Verbindung  $[HA]$  besitze den Fußpunkt  $H$  — siehe Abbildung 3. Dann gelten in den rechtwinkligen Dreiecken  $AHB$  und  $BHL$  die Beziehungen

$$(6) \quad \begin{aligned} 4 &= \overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HA}^2 = \overline{BH}^2 + \left(\overline{AL} - \frac{\overline{AL} - \overline{KB}}{2}\right)^2 = \overline{BH}^2 + \frac{(\overline{AL} + \overline{KB})^2}{4} \quad \text{und} \\ 2 &= \overline{BL}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{HL}^2 = \overline{BH}^2 + \frac{(\overline{AL} - \overline{KB})^2}{4}, \end{aligned}$$

woraus wir durch Subtraktion aus diesen beiden Gleichungen die Beziehung

$$(7) \quad 2 = \overline{KB} \cdot \overline{AL}$$

gewinnen.

Das Dreieck  $AKO$  ist durch den Winkel  $\angle OKA := u$  und die Kantenlängen  $\overline{AK} = \sqrt{2}$ ,  $\overline{OK} = 1$  festgelegt, während wir für das Dreieck  $LKA$  ebenfalls den Winkel  $\angle LKA = u$  und die neuen Kantenlängen  $\overline{LK} = 2$ ,  $\overline{AK} = \sqrt{2}$  haben. Die beiden Dreiecke sind daher ähnlich mit Faktor  $\sqrt{2}$ , und es gilt  $\overline{AL} = \sqrt{2} \overline{OA}$ . Analog stellen wir fest, dass  $\overline{BK} = \sqrt{2} \overline{OB}$  gilt. Wegen der Symmetrie

an der Achse  $a$  haben wir zusätzlich  $\overline{OA} = \overline{PL}$  und  $\overline{OB} = \overline{PK}$ , womit aus (7) insgesamt  $2 = \frac{\overline{KB}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{LA}}{\overline{PA}} = 2 \frac{\overline{PK}}{\overline{PL}}$  und damit  $\overline{PK} \cdot \overline{PL} = 1$  folgt. Die Bahnkurve  $k$  des Punktes  $P$  ist bei diesem gegenläufigen Zwillingskurbelgetriebe also die Lemniskate (1).

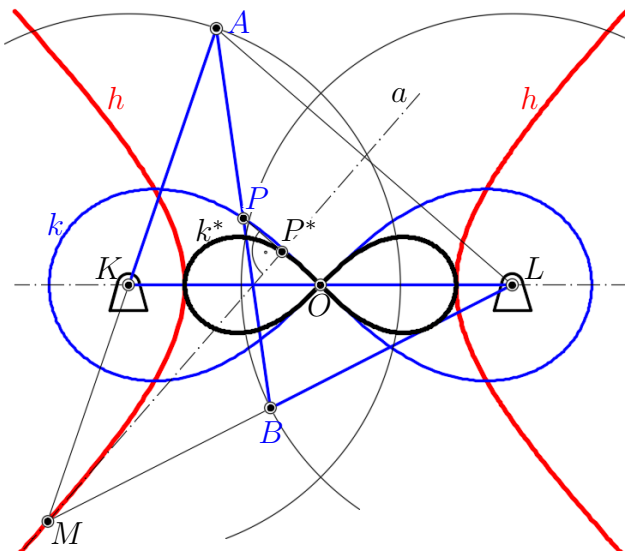


FIG. 4. Die Lemniskate  $k^*$  als Fußpunktkurve der Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel  $h$  bezüglich des Hyperbelmittelpunktes  $O$ .

**4. Die Lemniskate als Fußpunktkurve.** Aus der eben vorgestellten kinematischen Erzeugung der Lemniskate  $k$  kann rasch auch eine weitere Erzeugung hergeleitet werden. Dazu betrachten wir das Koppelgetriebe etwas genauer – vgl. W. WUNDERLICH [6, S. 89ff] und Abb. 4: In jeder allgemeinen Lage dieses überschlagenen Parallelkurbelgetriebes ist der *Momentanpol*  $M$  im Schnitt der Verlängerungen der Positionen der Arme  $KA$  und  $LB$  zu gewinnen.  $M$  gehört der oben angesprochenen Symmetrieachse  $a$  an. Ersichtlich gilt nun  $|\overline{ML} - \overline{MK}| = |\overline{ML} - \overline{MB}| = \sqrt{2}$ , weshalb die *Momentanpole*  $M$  im System des Gestells eine Hyperbel  $h$  mit Brennpunkten  $K$  und  $L$  durchlaufen. Die Gleichung dieser Hyperbel  $h$  ist durch

$$(8) \quad 2(x^2 - y^2) = 1$$

gegeben —  $h$  ist daher *gleichseitige Hyperbel* mit den Brennpunkten  $K$  und  $L$ <sup>1</sup>.

Da die Hyperbeltangente im Pol  $M$  den Innenwinkel zwischen den Brennstrahlen  $[MK]$  und  $[ML]$  halbiert, ist unsere Symmetrieachse  $a$  aus Abschnitt 3 Tangente an  $h$  im Pol  $M$  (siehe Abb. 4). Die Verbindungen des Hyperbelmittelpunktes  $O$  mit den Punkten  $P$  der Lemniskate  $k$  stehen normal auf die Symmetrieachsen  $a$  — die zugehörigen Lotfußpunkte  $P^*$  sind die Mittelpunkte der Strecken  $OP$ . Während des Zwanglaufs des Zwillingskurbelgetriebes durchläuft  $a$  die Tangenten der gleichseitigen Hyperbel  $h$ ; der Koppelmittelpunkt  $P$  beschreibt die Lemniskate  $k$ . Der Lotfußpunkt  $P^*$  der Lote aus dem Hyperbelmittelpunkt  $O$  auf die Hyperbeltangenten beschreibt daher eine Kurve  $k^*$ , die aus der Lemniskate  $k$  durch Stauchung aus dem Zentrum  $O$  mit Faktor  $1/2$  hervorgeht:

*Die Fußpunktkurve  $k^*$  des Hyperbelmittelpunktes bezüglich der Tangenten der gleichseitigen Hyperbel  $h$  ist daher ebenfalls eine BERNOULLISCHE Lemniskate, diesmal gegenüber der Normform (1) allerdings mit Faktor  $1/2$  verkleinert.*

Natürlich kann dieses Ergebnis auch direkt ohne den Umweg über die kinematische Erzeugung nachgewiesen werden, vgl. z.B. [2, S. 411].

<sup>1</sup> $h$  ist die *Rastpolkurve* des Zwanglaufs; die *Gangpolkurve* ist eine zu  $h$  kongruente gleichseitige Hyperbel mit Brennpunkten in den Koppelendpunkten  $A$  und  $B$  — vgl. W. WUNDERLICH in [6] S. 91.

## LITERATUR

- [1] J. Dankert und H. Dankert: Internet-Service zum Lehrbuch 'Technische Mechanik': Koppelgetriebe: Viergelenk-  
ketten (tm-aktuell.de) <http://www.tm-aktuell.de/TM5/Viergelenkketten/Viergelenkkette.html> [26.2.2024].
- [2] G. Glaeser, H. Stachel und B. Odehnal: The Universe of Conics. Springer, Berlin Heidelberg 2016.
- [3] G. Schröpfer und A. Wiltsche: Geometrische Aufgabenecke 1/2023. Informationsblätter der Geometrie (IBDG)  
42/1 (2023), 12–16. <https://eplus.uni-salzburg.at/download/pdf/9081867.pdf>.
- [4] G. Schröpfer und A. Wiltsche: Geometrische Aufgabenecke 2/2023. Informationsblätter der Geometrie (IBDG)  
42/2 (2023), 29–36.
- [5] F. Schweiger: Mathematik als Spiel – Auf der Suche nach Kurven. Mathe-Brief Nr. 43 / Jänner 2014.  
<https://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief43.pdf>.
- [6] W. Wunderlich: Ebene Kinematik. BI-Hochschultaschenbuch Nr. 447/447a, Bibliographisches Institut, Mannheim  
1970.

O. Röschel