Laudatio für Christoph Aistleitner aus Anlass der Verleihung des Förderungspreises 2015

Christoph Aistleitner wurde am 25. Februar 1982 in Linz geboren. In den Jahren 2001–2006 studierte er Technische Mathematik an der TU Wien. Seine Diplomarbeit zum Thema *Normale Zahlen* wurde von Michael Drmota betreut. Danach wechselte Christoph Aistleitner an die TU Graz, um in den Jahren 2006–2008 sein Doktoratsstudium durchzuführen. Die unter der Betreuung von István Berkes verfasste Dissertation mit dem Titel *Investigations in Metric Discrepancy Theory* wurde mit dem Studienpreis der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft und dem *Award of Excellence* des Bundesministeriums für Wissenschaft und Forschung ausgezeichnet. Einen Teil der Zeit seit Abschluss seines Doktorats war Christoph Aistleitner in meiner Arbeitsgruppe an der TU Graz tätig, wo er sich auch im Jahr 2014 habilitierte. Davon abgesehen verbrachte er mehrmonatige Forschungsaufenthalte am Rényi Institut in Budapest, am Mathematischen Forschungszentrum Oberwolfach und am Hausdorff Institut in Bonn. Im Jahr 2012 erhielt er ein Schrödinger-Stipendium und führt seitdem sein Forschungsprojekt unter dem Titel *Probabilistic Methods in Number Theory, Analysis and Applications* durch. Das erste Jahr dieses Stipendiums verbrachte er an der University of New South Wales in Sydney, Australien, in der Gruppe von Ian Sloan, das zweite Jahr bei Katusi Fukuyama in Kobe, Japan. Das dritte Jahr (die sogenannte „Rückkehrphase“) verbringt Christoph Aistleitner derzeit mit der Gruppe von Gerhard Larcher am Institut für Finanzmathematik der Universität Linz. Christoph Aistleitner wurde bereits durch viele wissenschaftliche Preise ausgezeichnet: Im Jahr 2014 erhielt er den Hlawka-Preis der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 2015 den renommierten START-Preis des Österreichischen Wissenschaftsfonds und kürzlich die Talentförderungsprämie des Landes Oberösterreich in der Kategorie Wissenschaft sowie den Kardinal Innitzer-Förderungspreis.

Das Forschungsgebiet von Christoph Aistleitner befindet sich im Schnittbereich von Stochastik, Analysis und Zahlentheorie. Wiederkehrende Themen sind die Theorie der Gleichverteilung modulo Eins und die Diskrepanztheorie, die Frage nach der (fast sicheren) Konvergenz von Fourier-Reihen und anderen Funktionenreihen, die Quantifizierung des "pseudo-zufälligen" Verhaltens von deterministischen Zahlenfolgen sowie die sogenannte Quasi-Monte Carlo-Methode zur numerischen Integration und deren Eigenschaften im hochdimensionalen Fall. Christoph Aistleitner hat mehr als 50 wissenschaftliche Arbeiten verfasst, davon knapp weniger als die Hälfte als Alleinautor, und die restlichen Arbeiten gemeinsam mit zahlreichen Kollaborationspartnern aus verschiedenen Ländern. Zahlreiche von Christoph Aistleitners Arbeiten wurden in sehr renommierten mathematischen Zeitschriften veröffentlicht, darunter *Probability Theory and Related Fields*, *Transactions of the American Mathematical Society*, *Acta Arithmetica*, *Mathematische Zeitschrift*, *Mathematics of Computation*, *Israel Journal of Mathematics* und *Journal of the European Mathematical Society*.

Ich werde im Folgenden einige spezifische Resultate von Christoph Aistleitner darstellen, möchte aber gleichzeitig darauf hinweisen, dass diese Auswahl nur einen kleinen Ausschnitt aus seiner Forschungsarbeit darstellt; viele interessante Resultate müssen unerwähnt bleiben. Im Rahmen seines Doktoratsstudiums beschäftigte sich Christoph Aistleitner insbesondere mit der Theorie sogenannter lakunärer Reihen. Einfach gesagt handelt es sich um das Studium von Objekten der Form

$$\sum_{k=1}^{N} f(n_k x), \qquad x \in [0,1], \tag{1}$$

wobei $f(x)$ eine 1-periodische Funktion mit gewissen Regularitätseigenschaften und $(n_k)_{k\geq 1}$ eine sehr schnell wachsende (d.h. lakunäre) Folge ganzer Zahlen ist. Eng damit verwandt ist die Untersuchung der Diskrepanz von parametrischen Folgen der Form $(\{n_k x\})_{k\geq 1}$, wobei $x \in [0,1]$ und $\{\cdot\}$ den Bruchteil einer reellen Zahl bezeichnet. Es ist seit Langem bekannt, dass solche Systeme ungefähr dieselben Eigenschaften wie Folgen unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen aufweisen; das exakte Verhalten hängt aber von einem komplizierten und faszinierenden Zusammenspiel stochastischer und zahlentheoretischer Phänomene ab. Aus Christoph Aistleitners Forschungsarbeit lässt sich ersehen, dass hierbei insbesondere die Anzahl von Lösungen (k,ℓ) der diophantischen Gleichung

$$an_k \pm bn_\ell = c, \qquad a,b,c \in \mathbb{Z},$$

eine wichtige Rolle spielt. Damit konnte Christoph Aistleitner beispielsweise ein optimales Kriterium dafür angeben, wann das entsprechend normierte System (1) den zentralen Grenzwertsatz erfüllt. Entsprechende Resultate konnten auch für das Gesetz vom iterierten Logarithmus bewiesen werden. Insgesamt liegt somit endlich eine befriedigende Erklärung für das “reguläre” bzw. “irreguläre” Verhalten solcher lakunären Systeme vor; ein Problem, das bereits Paul Erdős beschäftigte, und das nun weitgehend verstanden ist. Die Beweise basieren übrigens auf der Approximation mittels sogenannter Martingal-Differenzen und einem dazugehörigen *almost sure invariance principle*, also auf anspruchsvollen Methoden aus der Stochastik. Dadurch können klassische Fragen der metrischen diophantischen Approximation und Diskrepanztheorie zu einem Abschluss gebracht werden.

Als zweites wichtiges Ergebnis möchte ich Christoph Aistleitners Forschungsarbeit über die fast sichere Konvergenz von Funktionenreihen besprechen. Ein fundamentales Ergebnis von Lennart Carleson besagt, dass die Fourier-Reihe einer L^2-Funktion fast sicher konvergiert; das heißt insbesondere, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos 2\pi x < \infty \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin 2\pi x < \infty$$

sofern

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \infty. \tag{2}$$

Entsprechende Resultate für allgemeine Funktionenreihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f(kx) \tag{3}$$

für 1-periodisches $f(x)$ folgen ganz anderen Gesetzmäßigkeiten, und die Bedingung (2) ist im Allgemeinen nicht mehr ausreichend, um fast sichere Konvergenz zu garantieren. Es ist schon lange bekannt, dass diese Art von Problem mit der maximalen Größe von Summen der Form

$$\sum_{1 \le k,\ell \le N} \frac{(\gcd(n_k, n_\ell))^{2\alpha}}{(n_k n_\ell)^\alpha}, \qquad \alpha \in [1/2, 1], \tag{4}$$

für verschiedene positive ganze Zahlen $n_1, \ldots, n_N$ zusammenhängt. Die maximale Größe dieser Summen war aber bisher nur für den Fall $\alpha = 1$ exakt bekannt (Gál, 1949, der damit ein Preisproblem von Erdős löste). Gemeinsam mit István Berkes und Kristian Seip gelang es Christoph Aistleitner nun, die exakte maximale Größe dieser Summen zu berechnen und damit ein im Wesentlichen optimales Kriterium für die fast sichere Konvergenz von Funktionenreihen der Form (3) anzugeben. Die Methode ist ebenso überraschend wie beeindruckend, nämlich wird die Summe (4) als komplexes Integral, oder genauer als ein sogenanntes Poisson-Integral auf der unendlichdimensionalen *polydisc* identifiziert. Diese Arbeit hat einen erstaunlichen Zusammenhang zwischen der Theorie der fast sicheren Konvergenz von Funktionenreihen und der analytischen Zahlentheorie hergestellt; es hat sich nämlich inzwischen auch herausgestellt, dass die Summen (4) auf natürliche Weise als Integrale in einem bestimmten stochastischen Modell der Riemannschen Zetafunktion auftreten (Lewko und Radziwiłł, 2014), und dass sich diese Summen mittels der sogenannten Resonanzmethode von Soundararajan zur Bestimmung von unteren Schranken für den maximalen Absolutbetrag der Riemannschen Zetafunktion $\max_{0 \le t \le T} |\zeta(\alpha + it)|$ für fixes α verwenden lassen (Aistleitner, 2014). Diese Methode mittels Resonanz vermeidet einige Probleme der (ganz anderen) klassischen Methode von Montgomery, die für den Fall allgemeinerer L-Funktionen zu komplizierten Problemen der inhomogenen diophantischen Approximation führt, und es ist daher plausibel, dass sich in weiterer Folge neue, verbesserte untere Schranken für den Betrag allgemeiner L-Funktionen erhalten lassen.

Nur ganz kurz möchte ich noch einige weitere Resultate von Christoph Aistleitner erwähnen:

- Einen einfachen Beweis des berühmten Resultats von Heinrich, Novak, Wasilkowski und Woźniakowski (2001), wonach die sogenannte Inverse der Diskrepanz nur linear von der Dimension abhängt. Im Gegensatz zu dem früheren Resultat enthält Aistleitners Ergebnis keine unspezifizierten Konstanten.

- Die Konstruktion von Punktmengen mit niedriger Diskrepanz auf der Sphäre S^2 durch Transformation aus dem Einheitswürfel mittels einer flächentreuen Abbildung (gemeinsam mit Brauchart und Dick).
- Die Beantwortung mehrerer offener Fragen von Alon, Kohayakawa, Mauduit, Moreira und Rödl über die *pseudorandomness*-Eigenschaften binärer Ziffernfolgen.
- Mehrere grundlegende Resultate zur Existenz von Punktmengen mit niedriger Diskrepanz sowie die Durchführbarkeit der Quasi-Monte Carlo-Integration bezüglich allgemeiner Maße (nicht nur, wie üblich, bezüglich der Gleichverteilung).
- Eine exakte quantitative Version des bekannten Resultats von Koksma, dass die Folge $(\{x^k\})_{k\geq 1}$ für fast alle $x > 1$ gleichverteilt modulo Eins ist.

Ich wiederhole, dass die erwähnten Resultate nur einen kleinen Ausschnitt aus dem wissenschaftlichen Schaffen Christoph Aistleitners darstellen. Christoph Aistleitner ist ein hervorragender und vielseitiger junger Mathematiker, von dem in der Zukunft noch vieles zu erwarten ist. Er ist auch ein besonders angenehmer junger Kollege, die Kooperation mit ihm in den vergangenen Jahren war immer ein besonderes Vergnügen. Daher freue ich mich sehr, dass er im nächsten Sommersemester mit seinem START-Projekt in unserer Arbeitsgruppe beginnen wird. Für seine wissenschaftliche und private Zukunft wünsche ich ihm viel Erfolg und auch das nötige Glück.

(Robert Tichy)